Publicacions Matemàtiques, Vol 33 (1989), 485-500.

DEFORMATIONS DES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOLOMORPHES A TYPE DIFFERENTIABLE FIXE

A. El Kacimi Alaoui and M. Nicolau

Abstract

Let $\mathcal{F}$ be a transversely holomorphic foliation on a compact manifold. We show the existence of a versal space for those deformations of $\mathcal{F}$ which keep fixed its differentiable type if $\mathcal{F}$ is hermitian or if $\mathcal{F}$ has complex codimension one and admits a transverse projectable connection. We also prove the existence of a versal space of deformations for the complex structures on a Lie group invariant by a cocompact subgroup.

Introduction

Une variété complexe compacte M est obtenue en recollant un nombre fini de domaines de $\mathbf{C}^n$ à l'aide de difféomorphismes holomorphes. Si on suppose que ces recollements dépendent d'un paramètre $t \in]-T, T[$ (qui pourrait être par exemple le temps), alors pour des petites valeurs de t la structure différentiable sous-jacente reste la même; par contre la structure complexe peut être différente pour t aussi proche de 0 que l'on veut. On obtient ainsi une famille (M_t) de variétés complexes compactes qu'on appelle *déformation* de $M = M_0$. Intuitivement c'est la variété M (qui est toujours la même du point de vue différentiable) qui varie dans le temps (en tant que variété complexe) entre l'instant $-T$ et l'instant $+T$. L'objet de la théorie des déformations est de *mesurer* cette variation pour des t proches de 0. Une première étape consiste à étudier les déformations infinitésimales de la structure complexe de M. Celles là sont décrites, à isomorphisme près, par l'espace vectoriel de cohomologie $H^1(M, \theta)$ où θ est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur M. Ce faisceau admet une résolution elliptique; ce qui montre d'une part que l'espace vectoriel $H^1(M, \theta)$ est de dimension finie et sert d'autre part à la réalisation effective des déformations de M. Cette théorie a été initiée et developpée par K. Kodaira et D.C. Spencer [11] et finalement menée à terme

Pendant l'élaboration de ce travail le premier auteur a profité de l'hospitalité du Centre de Recerca Matematica de Barcelone. Il remércie les organisateurs du Semestre de Géométrie Différentielle auquel il a participé pour leur chaleureuse hospitalité.

par K. Kuranishi [12] qui a démontré l'existence d'un espace versel pour ces déformations.

Il est apparu alors naturel d'étudier les déformations de structures beaucoup plus générales que celle de variété complexe; par exemple un feuilletage holomorphe. Encore une fois K. Kodaira et D.C. Spencer ont franchi le pas. Plus tard T. Duchamp et M. Kalka [5] ont abordé le cas d'un feuilletage transversalement holomorphe sur une variété non nécessairement complexe. Leur démarche utilise l'existence d'un feuilletage transverse, hypothèse un peu artificielle. Ce sont J. Girbau, A. Haefliger et D. Sundararaman [8] qui ont complètement élucidé le cas général.

Que peut-on alors dire des déformations d'un feuilletage transversalement holomorphe $\mathcal{F}$ quand on fixe son type différentiable?. Dans cette situation les classes d'équivalence de déformations infinitésimales sont paramétrées par l'espace de cohomologie basique de Dolbeault $H^1(A_b^*, \bar\partial)$ à valeurs dans le fibré holomorphe normal à $\mathcal{F}$. Cet espace est de dimension finie mais le complexe basique de Dolbeault

$$0 \to A_b^0 \xrightarrow{\bar\partial} A_b^1 \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} A_b^n \to 0$$

n'est pas elliptique; il est seulement transversalement elliptique. Si $\mathcal{F}$ est hermitien (i.e. le fibré normal à $\mathcal{F}$ est muni d'une métrique hermitienne invariante le long des feuilles) il existe une bonne théorie de Hodge pour ce type de complexe (Cf. [6]). On établit alors dans ce cas une version faible de versalité pour les déformations de $\mathcal{F}$ à type différentiable fixé. Une étude particulière est faite pour les feuilletages de Lie qui possèdent une structure transverse holomorphe; de manière plus générale cela revient à étudier les déformations des structures complexes sur un groupe de Lie (réel) équivariantes par sous–groupe cocompact. En fait dans ce cas précis on a un espace versel au sens fort.

Dans toute la suite M sera une variété compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, N, \gamma_{ij}\}$ où (U_i) est un recouvrement ouvert de $M, f_i : U_i \to N$ sont des submersions et γ_{ij} des difféomorphismes locaux de N vérifiant la condition $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$.

1. Préliminaires et rappels

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les notions de feuilletage transversalement holomorphe, de déformation et d'esquisser la construction de l'espace versel.

1.1. Feuilletages transversalement holomorphes.

1.1.1. Définition. Une structure complexe τ tranverse au feuilletage $\mathcal{F}$ est la donnée d'une structure complexe sur la variété modèle N pour laquelle les γ_{ij} sont des transformations holomorphes. La paire $(\mathcal{F}, \tau)$ sera appellée *feuilletage transversalement holomorphe* de codimension complexe n (où n est la dimension complexe de N).

Dans le cas d'un feuilletage par points τ n'est rien d'autre qu'une structure complexe sur la variété M.

1.1.2. **Exemples.**

(i) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des nombres complexes avec $Re\lambda_i < 0$. Le flot holomorphe engendré par le champ vectoriel de $\mathbb{C}^{n+1}$

$$Z = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

coupe transversalement la sphère $S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1};\ \sum_{k=1}^{n+1} | z_k |^2 = 1\}$ et y induit un flot réel qui est transversalement holomorphe de codimension n.

(ii) Soit $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\widetilde{M}$ défini par le système différentiel $dz = 0$ où (z,t) sont les coordonnées de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, est invariant par la transformation

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &\longrightarrow \widetilde{M} \\ (z,t) &\longrightarrow (\alpha z, at), \end{aligned}$$

où α est un nombre complexe avec $0 < | \alpha | < 1$ et a est un nombre réel avec $0 < a < 1$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit un feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}, \tau)$ de codimension 1 sur la variété quotient $M = \widetilde{M}/(z,t) \sim (\alpha z, at)$ qui est difféomorphe à $S^2 \times S^1$.

Désormais nous supposerons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est muni d'une structure complexe fixée τ.

1.2. Déformations des feuilletages transversalement holomorphes.

Dans toute la suite $(T, 0)$ notera le germe au point distingué 0 d'un espace analytique T qui pourra être non reduit (cf. [**13**]).

1.2.1. **Définition**. Une déformation $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par $(T, 0)$ est définie par une famille différentiable de submersions $f_i^t : U_i \to N$, paramétrée par $(T, 0)$ et qui dépendent holomorphiquement de t pour $x \in U_i$ fixé, et une famille holomorphe (γ_{ij}^t) de transformations holomorphes de N telles que $f_i^t = \gamma_{ij}^t \circ f_j^t$ avec $f_i^0 = f_i$ et $\gamma_{ij}^0 = \gamma_{ij}$

1.2.2. **Définition**. Deux déformations $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$ et $(\mathcal{F}'^t, \tau'^t)$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ parametrées par le même espace $(T, 0)$ sont isomorphes s'il existe une famille différentiable (h^t) de difféomorphismes de M paramétrée par $(T, 0)$ avec $\mathcal{F}'^t = (h^t)^* \mathcal{F}^t$ et $\tau'^t = (h^t)^* \tau^t$. Plus précisement, si $\{U_i, f_i^t, N, \gamma_{ij}^t\}$ et $\{U'_k, f'^t_k, N, \gamma'^t_{kl}\}$ sont les cocycles feuilletés définissant $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$ et $(\mathcal{F}'^t, \tau'^t)$ alors, pour chaque $x \in U_i \cap U'_k$ il est possible de trouver une famille holomorphe (g_{ik}^t) de transformations holomorphes locales de N avec $f_i^t \circ h^t = g_{ik}^t \circ f'^t_k$.

1.2.3. **Remarque.** Dans le cas d'un feuilletage par points les deux définitions antérieures correspondent aux notions habituelles de déformation d'une structure complexe et d'isomorphisme entre deux telles déformations.

1.2.4. **Exemples.**

(i) Si dans les exemples 1.1.2 (i) et (ii) on perturbe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et α dans $\mathbf{C}$ on obtient des déformations de ces deux feuilletages paramétrées respectivement par des petits voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et de 0 dans $\mathbf{C}$.

(ii) Soient B une variété compacte et F une variété complexe compacte. Toute représentation

$$h : \pi_1(B) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(F),$$

où $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(F)$ est le groupe des automorphismes holomorphes de F, donne lieu par le procédé standard de suspension à un feuilletage transversalement holomorphe. Les déformations de ce feuilletage s'identifient aux déformations h–équivariantes de la structure complexe de F. (cf. [8] et [3]).

1.3 Existence de l'espace versel.

Si $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$ est une déformation de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par $(T, 0)$ et $\varphi : (T', 0) \to (T, 0)$ est un morphisme analytique alors $(\mathcal{F}^{\varphi(t')}, \tau^{\varphi(t')})$ est une déformation de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par $(T', 0)$ qu'on appellera la déformation induite par φ.

1.3.1. **Théorème [8].** *Il existe un germe d'espace analytique $(S, 0)$ qui paramètre une déformation $(\mathcal{F}^s, \tau^s)$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ ayant la proprieté suivante: Si $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$ est une déformation de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par $(T, 0)$ alors il existe un morphisme $\varphi : (T, 0) \to (S, 0)$ tel que la déformation $(\mathcal{F}^{\varphi(t)}, \tau^{\varphi(t)})$ est isomorphe à $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$. En plus l'application tangente $d_0\varphi$ de φ en 0 est unique.*

L'espace $(S, 0)$ est appelé l'*espace versel* des déformations de $(\mathcal{F}, \tau)$ et il est unique à isomorphisme près.

1.3.2. **Idée de la démonstration.** On notera E le sous–fibré complexe de ${}^{\mathbf{C}}TM = TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ de codimension complexe n localement engendré par les champs de vecteurs $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\}$ où $(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n)$ sont des coordonnées locales de M dans lesquelles $(\mathcal{F}, \tau)$ est défini par z_α = constante pour $\alpha = 1, \ldots, n$. Ce fibré vérifie les propriétés

(i) ${}^{\mathbf{C}}TM = E + \bar{E}$,

(ii) $[\Gamma(E), \Gamma(E)] \subset \Gamma(E)$ où $\Gamma(E)$ est l'espace des sections C^∞ de E.

Le feuilletage $(\mathcal{F}, \tau)$ est complètement déterminé par un tel fibré E vérifiant les conditions (i) et (ii).

Soit $Q^{1,0}$ le fibré normal holomorphe de $(\mathcal{F}, \tau)$, i.e. $Q^{1,0} = {}^{\mathbf{C}}TM/E$. On note $\mathcal{A}^p$ le faisceau des germes de sections C^∞ du fibré $\wedge^p E^* \otimes Q^{1,0}$ et A^p l'espace des sections globales. A l'aide d'une réalisation de $Q^{1,0}$ comme sous–fibré de ${}^{\mathbf{C}}TM$ on peut réprésenter les sous–fibrés complexes E' de ${}^{\mathbf{C}}TM$ de codimension complexe n qui sont proches de E par des morphismes de fibrés $\omega : E \to Q^{1,0}$ proches de zéro, c'est à dire par des éléments de A^1 proches de zéro, le fibré E' n'étant rien d'autre que le graphe de ω.

La donnée d'une métrique de Riemann sur M (qui peut être choisie analytique) permet de construire un produit scalaire sur A^*. Pour tout entier r suffisanment grand on note ${}^rA^*$ le r–complété de Sobolev de A^* pour ce produit et par ${}^r\phi$ un voisinage de zéro dans l'ensemble des éléments de ${}^rA^1$ qui représentent des fibrés E' verifiant la condition (ii) antérieure (et donc un feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}', \tau')$ proche de $(\mathcal{F}, \tau)$ puisque la condition (i) est toujours satisfaite si E' est suffisamment proche de E). L'espace ${}^r\phi$ est muni d'une structure d'espace $\mathbb{C}$–analytique banachique.

Le groupe banachique ${}^{r+1}\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M de classe de Sobolev $r+1$ (où, brièvement, de classe $\mathcal{H}^{r+1}$) agit de façon naturelle sur l'ensemble des feuilletages transversalement holomorphes de classe $\mathcal{H}^r$ sur la variété M. Cette action induit une application holomorphe

$$\rho : {}^{r+1}D \times {}^rV \to {}^r\phi$$

où ${}^{r+1}D \times {}^rV$ est un voisinage de (id,0) dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M) \times {}^r\phi$.

La démonstration du théorème repose essentiellement sur l'existence d'un *slice* pour cette action; avec plus de précision: on peut choisir une variété $\mathbb{C}$–analytique banachique ${}^{r+1}\mathcal{E}$ (qui est une transversale dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M)$ du groupe d'isotropie de $0 \in {}^r\phi$) et un sousespace $\mathbb{C}$–analytique S de ${}^r\phi$ (qui est de dimension finie et transverse à l'orbite de $0 \in {}^r\phi$), et donner une structure complexe au produit ${}^{r+1}\mathcal{E} \times S$ de telle sorte que la restriction

$$\rho : {}^{r+1}\mathcal{E} \times S \to {}^r\phi \tag{1}$$

est un isomorphisme d'espaces $\mathbb{C}$–analytiques banachiques.

Les éléments s de S sont des solutions d'une certaine équation elliptique à coéffitients analytiques réels ils sont donc analytiques réels et, en tant qu'éléments de ${}^r\phi$, ils définissent une déformation $(\mathcal{F}^s, \tau^s)$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ qui est la déformation verselle cherchée. ■

1.3.3. **Remarques et commentaires.**

(i) Le fibré E étant involutif, la différentielle extérieure d induit un opérateur

$$d_0 : \Gamma(\wedge^p E^*) \to \Gamma(\wedge^{p+1} E^*).$$

Comme $Q^{1,0}$ est un fibré feuilleté holomorphe, d_0 s'étend en un opérateur

$$d_E = d_0 \otimes 1 : A^p \to A^{p+1}.$$

On note $\theta_{\mathcal{F}}$ le faisceau des germes de sections basiques holomorphes de $Q^{1,0}$. La suite

$$0 \to \theta_{\mathcal{F}} \to A^0 \xrightarrow{d_E} A^1 \xrightarrow{d_E} \cdots \to A^{m+n} \to 0$$

est une résolution fine de $\theta_{\mathcal{F}}$ et le complexe des sections globales

$$0 \to A^0 \overset{d_E}{\to} A^1 \overset{d_E}{\to} \cdots \to A^{m+n} \to 0 \tag{2}$$

est elliptique (cf. [5]). Il en résulte que la cohomologie de M à valeurs dans $\theta_{\mathcal{F}}$, $H^*(M,\theta_{\mathcal{F}})$, qui s'identifie à celle du complexe (2), est de dimension finie.

(ii) L'espace tangent T_0S à l'espace versel $(S,0)$ s'identifie à $H^1(M,\theta_{\mathcal{F}})$.

(iii) Soit ${}^{r+1}\mathrm{Diff}_f(M,\mathcal{F})$ le sous-groupe de ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M)$ des difféomorphismes h de M tels que $h(L) = L$ pour chaque feuille L de $\mathcal{F}$. Les classes latérales par rapport à ce sous-groupe définissent un feuilletage transversalement holomorphe sur ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M)$ (de dimension et codimension infinies) transversalement modélé, au voisinage de id, sur l'espace de Banach complexe ${}^{r+1}A^0$. En fait on peut identifier (un voisinage de zéro dans) ${}^{r+1}A^0$ à une transversale de ${}^{r+1}\ \mathrm{Diff}_f(M,\mathcal{F})$ dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M)$. L'espace ${}^{r+1}\mathcal{E}$ est alors choisi comme étant un supplémentaire de $H^0(M,\theta_{\mathcal{F}})$ dans ${}^{r+1}A^0$ avec la structure complexe induite par celle de ${}^{r+1}A^0$.

(iv) Il est possible de choisir l'espace ${}^{r+1}\mathcal{E}$ dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M)$ de telle sorte que si $r' > r$ on ait ${}^{r'+1}\mathcal{E} \subset {}^{r+1}\mathcal{E}$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}^{r'+1}\mathcal{E} \times S & \xrightarrow{\rho} & {}^{r'}\phi \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{r+1}\mathcal{E} \times S & \xrightarrow{\rho} & {}^{r}\phi \end{array}$$

soit commutatif. Cela induit une identification

$$\rho : {}^{\infty}\mathcal{E} \times S \to \phi \tag{3}$$

où $\phi = {}^r\phi \cap A^1$ et ${}^\infty\mathcal{E} = {}^r\mathcal{E} \cap\ \mathrm{Diff}\,(M)$.

(v) Dans l'esquisse de la démonstration nous avons suivi, pour des raisons de simplicité, la démarche de Duchamp et Kalka dans [5]. Cette approche présente des difficultés techniques en raison desquelles ces auteurs sont amenés à supposer l'existence d'un feuilletage $\mathcal{F}^\perp$ transverse à $\mathcal{F}$ comme hypothèse supplémentaire. En plus, dans [5] l'application $\rho : {}^{r+1}\mathcal{E} \times S \to {}^r\phi$ est seulement une identification ensembliste et on n'arrive à montrer qu'une version faible de la versalité de la famille $(\mathcal{F}^s,\tau^s)_{s\in S}$: pour tout feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}',\tau')$ suffisamment proche de $(\mathcal{F},\tau)$ il existe $h \in\ \mathrm{Diff}\,(M)$ proche de id et $s \in S$ tels que $h^*\mathcal{F}^s = \mathcal{F}'$ et $h^*\tau^s = \tau'$.

Ces difficultées sont relevées par Girbau, Haefliger et Sundararaman dans [8]. A cet objet ils utilisent une résolution plus *sophistiquée* du faisceau $\theta_{\mathcal{F}}$ en termes de dérivations de l'algèbre des formes différentielles sur M. Cela permet d'enlever l'hypothèse de l'existence de $\mathcal{F}^\perp$. D'autre part la considération explicite de la structure complexe de la variété de Banach ${}^{r+1}\mathcal{E}$ et de la structure d'espace analytique non réduit de S leur permet de donner une structure complexe au produit ${}^{r+1}\mathcal{E} \times S$ pour laquelle l'application ρ dans (1) est un isomorphisme d'espaces $\mathbb{C}$–analytiques banachiques d'où découle la versalité (au sens fort) de $(S, 0)$. Le fait que l'application (1) est un isomorphisme est prouvé à l'aide d'une certaine version du théorème de la fonction inverse pour des espaces $\mathbb{C}$–analytiques banachiques dûe à Douady [4].

2. Déformations des feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixé

A partir de maintenant nous ne nous intéresserons qu'aux déformations du feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}, \tau)$ qui le laissent invariant en tant que feuilletage différentiable, i.e. les déformations qui ne changent que la structure complexe transverse τ. Le but est d'obtenir un espace versel pour ce type de déformations. Nous commencerons d'abord par donner la

2.1 Position du problème.

2.1.1. **Définition**. Une déformation $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par $(T, 0)$ est dite à *type différentiable fixé* s'il existe une famille différentiable (h^t) de difféomorphismes de M paramétrée par $(T, 0)$ telle que $(h^t)^*\mathcal{F}^t = \mathcal{F}$.

2.1.2. **Le complexe basique**. On dira que $\omega \in A^*$ est *basique* si $i_X\omega = i_X d_E\omega = 0$ pour tout vecteur X tangent à $\mathcal{F}$, où i_X est le produit intérieur par X. On notera A^*_b le sous–espace de A^* formé des éléments basiques. Il est clair que si ω est basique il en est de même pour $d_E\omega$. La restriction de d_E à A^*_b n'est rien d'autre que l'opérateur de Dolbeault $\bar\partial$ transverse. Le complexe

$$0 \to A^0_b \xrightarrow{\bar\partial} A^1_b \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \to A^n_b \to 0 \tag{4}$$

n'est pas elliptique mais *transversalement elliptique* (cf. [6]) et sa cohomologie, en général, n'a à priori aucune raison d'être de dimension finie. Toutefois $H^1(A^*_b, \bar\partial)$ s'injecte de façon naturelle dans $H^1(M, \theta_{\mathcal{F}})$ et il est donc de dimension finie. En fait il paramètre les déformations infinitésimales de $(\mathcal{F}, \tau)$ à type différentiable fixé qui se définissent de la façon habituelle (cf. [10]).

Le sous–groupe ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M, \mathcal{F})$ de ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M)$ formé des difféomorphismes de M qui preservent le feuilletage différentiable $\mathcal{F}$ agit sur l'ensemble des feuilletages transversalement holomorphes $(\mathcal{F}', \tau')$ tels que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Cela induit une application

$$\rho : {}^{r+1} D_b \times {}^r V_b \to {}^r \phi_b \tag{5}$$

où ${}^r\phi_b = {}^r \phi \cap A^1_b$, ${}^rV_b$ est un voisinage de zéro dans ${}^r\phi_b$ et ${}^{r+1}D_b$ est un voisinage de id dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M, \mathcal{F})$.

Toute déformation à type différentiable fixé $(\mathcal{F}^t, \tau^t)$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par $(T, 0)$ est univoquement déterminée par une famille $(\omega^t)_{t\in T}$ d'éléments de $\phi \subset A^1$ qui en fait appartiennent à $\phi_b = \phi \cap A_b^1$. Montrer l'existence d'un espace versel $(S_b, 0)$ pour les déformations de $(\mathcal{F}, \tau)$ à type différentiable fixé revient à montrer un théorème de *slice* pour l'application (5) de façon similaire au cas esquissé en 1.3.2. Mais deux difficultés apparaissent. D'abord l'opérateur $\bar\partial : A_b^1 \to A_b^2$ n'est pas a priori à image fermée: on ne peut pas utiliser le théorème des fonctions implicites pour exhiber l'espace S_b. D'autre part on a besoin de munir le groupe ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M, \mathcal{F})$ d'une structure de variété banachique modelée, au voisinage de id, sur l'algèbre ${}^{r+1}\mathcal{X}(M, \mathcal{F})$ des champs de vecteurs sur M, de classe $\mathcal{H}^{r+1}$, qui preservent le feuilletage différentiable $\mathcal{F}$. Cette seconde difficulté peut être surmontée si le feuilletage $\mathcal{F}$ possède une connexion transverse projetable, i.e. si le fibré tangent à la variété transverse mòdele N supporte une connexion invariante par les γ_{ij}. En effet, dans ce cas l'exponentielle associée envoie un champ feuilleté $X \in^{r+1} \mathcal{X}(M, \mathcal{F})$ proche de zéro sur un élément de ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M, \mathcal{F})$ proche de l'identité.

Ceci nous amène à nous restreindre à des classes particulières de feuilletages transversalement holomorphes.

2.2 Un théorème de versalité faible pour les feuilletages hermitiens.

On dira que le feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}, \tau)$ est *hermitien* si la variété (complexe) N est munie d'une métrique hermitienne pour laquelle les transformations γ_{ij} sont des isométries. En particulier un tel feuilletage admet une connexion transverse projetable.

2.2.1. **Exemples**

(i) Dans l'exemple 1.1.2 (i) le feuilletage $(\mathcal{F}, \tau)$ est hermitien si et seulement si $(\lambda_i/\lambda_1) \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ tandis que dans 1.1.2 (i) le feuilletage n'est jamais hermitien.

(ii) Soit $(\mathcal{F}, \tau)$ le feuilletage transversalement holomorphe obtenu par suspension d'une représentation

$$h : \pi_1(B) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(F)$$

où B est une variété compacte et F est une variété complexe compacte. Pour une large classe de variétés F le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(F)$ est fini; par exemple si F est à première classe de Chern, $c_1(F)$, négative, ou si F est hyperbolique, ou si F est une variété algébrique de type général. Dans tous ces cas le feuilletage $(\mathcal{F}, \tau)$ est hermitien.

2.2.2. **Théorème** *Si le feuilletage $(\mathcal{F}, \tau)$ est hermitien il existe une déformation à type différentiable fixé $(\mathcal{F}^{s_b}, \tau^{s_b})$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par un germe d'espace analytique $(S_b, 0)$ avec la propriété de versalité faible suivante: si $(\mathcal{F}', \tau')$ est proche de $(\mathcal{F}, \tau)$ et $\mathcal{F}'$ est différentiablement conjugué à $\mathcal{F}$ alors il existe $h \in$ Diff (M) proche de id et $s_b \in S_b$ tels que $\mathcal{F}' = h^*\mathcal{F}^{s_b}$ et $\tau' = h^*\tau^{s_b}$.*

En plus il existe un voisinage U de zéro dans $H^1(A_b^*, \bar\partial)$ et une application analytique $\beta : U \to H^2(A_b^*, \bar\partial)$, avec un jet d'ordre 1 nul en zéro, tels que $(S_b, 0)$ est le germe en zéro de $\beta^{-1}(0)$.

Il découle de cette description de $(S_b, 0)$ qu'il a pour espace tangent $H^1(A_b^*, \bar\partial)$ et que si $H^2(A_b^*, \bar\partial)$ est nul alors S_b est un espace lisse.

Démonstration: Comme $(\mathcal{F}, \tau)$ est hermitien et le complexe (4) est transversalement elliptique on a, d'aprés [6], une décomposition de Hodge: $\mathsf{H}_b^* := \ker \bar\partial \cap \ker \bar\partial^*$ est de dimension finie et on a une somme orthogonale

$$A_b^* = \mathsf{H}_b^* \oplus Im\bar\partial \oplus Im\bar\partial^*$$

où $\bar\partial^*$ est l'adjoint de $\bar\partial$ pour un produit scalaire convenable sur A_b^*. Ce produit scalaire, qui peut être étendu a A^*, sera supposé fixé et il sera utilisé pour construire les r–complétés de Sobolev ${}^rA^*$, ${}^rA_b^*, \ldots$. La décomposition ci-dessus entraîne que $\mathsf{H}_b^* \cong H^*(A_b^*, \bar\partial)$.

Comme antérieurment on note $\phi_b = \phi \cap A_b^1$ et ${}^r\phi_b = {}^r\phi \cap A_b^1$. Il est facile de voir que

$${}^r\phi_b = \{\omega \in {}^rA_b^1 \mid \bar\partial\omega - \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0\}$$

Le théorème des fonctions implicites montre que, dans un voisinage de zéro, $\Sigma = \{\omega \in {}^rA_b^1 \mid \bar\partial^*(\bar\partial\omega - \frac{1}{2}[\omega,\omega]) = 0\}$ est une sous–variété $\mathbb{C}$–analytique de Banach de ${}^rA_b^1$, dont l'espace tangent en zéro est ker $\bar\partial$, qui contient ${}^r\phi_b$. De la même manière, sur un voisinage de zéro, $\widetilde{H}_b := \Sigma \cap \ker \bar\partial^*$ est une variété $\mathbb{C}$–analytique qui peut être décrite comme

$$\widetilde{H}_b = \{\omega \in {}^rA_b' \mid \bar\partial^*(\bar\partial\omega - \frac{1}{2}[\omega,\omega]) + \bar\partial\bar\partial^*\omega = 0\}.$$

Cela entraîne que l'espace tangent à $\widetilde{H}_b$ en zéro est H_b^1 (qui est de dimension finie) et que les éléments de $\widetilde{H}_b$ sont de classe C^∞ car ils sont des solutions d'une équation elliptique à coéffitients C^∞.

L'espace analytique $S_b = \widetilde{H}_b \cap {}^r\phi_b = \widetilde{H}_b \cap \phi_b$ peut être décrit, par un argument analogue a celui dans [12], comme

$$S_b = \{\omega \in \widetilde{H}_b \mid H[\omega,\omega] = \text{ partie harmonique de } [\omega,\omega] = 0\}.$$

Il en découle que $T_0S_b = \mathsf{H}_b^1 \cong H^1(A_b^*, \bar\partial)$.

La composition de l'inclusion $S_b \subset \phi$ avec la projection $\pi : \phi \to S$ induite par l'identification $\rho :{}^\infty \mathcal{E} \times S \to \phi$ (cf. 1.3.3 (iv)) est un morphisme d'espaces analytiques

$$\varphi_b : S_b \to S$$

dont l'application tangente en zéro est l'inclusion naturelle $H^1(A_b^*, \bar\partial) \hookrightarrow H^1(M, \theta_{\mathcal{F}})$. Soit $(\mathcal{F}^s, \tau^s)$ la déformation verselle de $(\mathcal{F}, \tau)$ paramétrée par $(S, 0)$ dont l'existence est établie par le théorème 1.3.1. Par construction la famille $(\mathcal{F}^{s_b}, \tau^{s_b})_{s_b \in S_b}$ induite de $(\mathcal{F}^s, \tau^s)$ par φ_b est une déformation à type différentiable fixé.

Il est possible de trouver une variété banachique $\mathbb{R}$-analytique ${}^{r+1}\mathcal{E}_b$ qui est transversale dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M,\mathcal{F})$ au groupe d'isotropie de $0 \in^r \phi_b$. Un argument analogue a celui dans ([14], p.172) montre que la restriction de (5) à ${}^{r+1}\mathcal{E}_b \times S_b$,

$$\rho : {}^{r+1}\mathcal{E}_b \times S_b \longrightarrow {}^r \phi_b, \tag{6}$$

est surjective, ce qui implique la versalité faible de la famille $(\mathcal{F}^{s_b}, \tau^{s_b})$ paramétrée par $(S_b, 0)$. ■

2.2.3. **Remarque.** Les classes latérales dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M,\mathcal{F})$ par rapport à son sous-groupe ${}^{r+1}\mathrm{Diff}_{\,f}(M,\mathcal{F})$ (cf. 1.3.3 (iii)) définissent un feuilletage sur ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(M,\mathcal{F})$, mais on ne sait pas s'il est transversalement holomorphe (il devrait être modélé transversalement sur ${}^{r+1}A^0_b$) ce qui empêche de munir ${}^{r+1}\mathcal{E}_b \times S_b$ d'une structure complexe naturelle (i.e. d'une structure pour laquelle l'application (6) soit holomorphe). Pour cette raison on n'obtient que la propriété de versalité faible pour la famille $(\mathcal{F}^{s_b}, \tau^{s_b})$.

2.2.4. **Corollaire** *Supposons* $H^1(A^*_b, \bar\partial) = H^1(M, \theta_{\mathcal{F}})$ *et* $H^2(A^*_b, \bar\partial) = 0$. *Si* $(\mathcal{F}', \tau')$ *est un feuilletage transversalement holomorphe proche de* $(\mathcal{F}, \tau)$ *alors* $\mathcal{F}'$ *est différentiablement conjugué à* $\mathcal{F}$.

Démonstration: Les hypothèses entraînent que l'application tangente $d_0\varphi_b$ de φ_b en zéro est un isomorphisme et que S_b est lisse. Dans ce cas S doit être aussi lisse et φ_b un isomorphisme. ■

2.3 Etude particulière pour les feuilletages de Lie.

On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est de Lie de groupe G (groupe de Lie simplement connexe) si $N = G$ et les transformations γ_{ij} sont des traslations à gauche. La structure d'un tel feuilletage est donnée par le

2.3.1. **Théorème** ([7]) *Le feuilletage* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *relevé de* $\mathcal{F}$ *au revêtement universel* $\widetilde{M}$ *de* M *est défini par une fibration* $D : \widetilde{M} \to G$ *et une représentation* $h : \pi_1(M) \to G$ *telles que pour tout* $\gamma \in \pi_1(M)$ *le diagrame*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\gamma} & \widetilde{M} \\ {\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D} \\ G & \xrightarrow{h(\gamma)} & G \end{array}$$

soit commutatif.

Le sous groupe $\Gamma = h(\pi_1(M))$ est appelé le *groupe d'holonomie* de $\mathcal{F}$. Son adhérence K dans G est un groupe cocompact (i.e. fermé avec $K\backslash G$ compact). Se donner une structure complexe transverse à $\mathcal{F}$ équivaut à se donner une structure complexe sur G invariante par Γ, et donc par K.

On est donc amené, d'une façon naturelle, à considérer le problème suivant: étant donnée une structure complexe τ sur G qui est invariante par un sous-groupe cocompact K, décrire les déformations K-invariantes de τ. Dans toute la suite le triplet (G, K, τ) sera supposé fixé.

Pour $g \in G$, la translation à gauche L_g s'étend en un difféomorphisme de $G \times (T,0)$ qui sera encore noté L_g et défini par $L_g(g',t) = (gg',t)$.

2.3.2. **Définition.** Une déformation (τ^t) de τ paramétrée par $(T,0)$ sera dite K-invariante si pour tout $k \in K$ les transformations L_k de $G \times (T,0)$ sont holomorphes par rapport à la structure complexe sur $G \times (T,0)$ induite par la famille (τ^t).

2.3.3. **Définition.** Deux déformations K-invariantes (τ^t) et (τ'^t) de τ paramétrées par le même espace $(T,0)$ seront dites K-isomorphes s'il existe un isomorphisme (h^t) entre ces deux déformations (cf. 1.2.2) tel que $L_k \circ h^t = h^t \circ L_k$ pour tout $k \in K$.

2.3.4. **Théorème** *Il existe un germe d'espace analytique $(S_K,0)$ qui paramètre une déformation (τ^s) K-invariante de τ ayant la propiété de versalité suivante: Si (τ^t) est une déformation K-invariante de τ paramétrée par $(T,0)$ alors il existe un morphisme $\varphi : (T,0) \to (S_K,0)$ tel que la déformation $(\tau^{\varphi(t)})$ induite par φ est K-isomorphe a (τ^t). En plus l'application tangente $d_0\varphi$ de φ en 0 est unique.*

Démonstration: Soit T le fibré tangent holomorphe de G, Ω^p l'espace des sections du fibré $B^p = \wedge^p \bar{T}^* \otimes T$ et Ω^*_K le sous-espace de Ω^* formé des éléments invariants par K. La K-invariance de la structure complexe τ entraîne $\bar\partial(\Omega^p_K) \subset \Omega^{p+1}_K$; d'où on obtient le complexe différentiel

$$0 \to \Omega^0_K \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^1_K \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \to \Omega^n_K \to 0. \tag{7}$$

Les éléments de Ω^1_K proches de zéro paramètrent les structures presque complexes sur G qui sont K-invariantes et proches de τ. On notera par ϕ_K un voisinage de zéro du sousensemble de celles qui sont intégrables.

Les fibrés B^p étant triviaux le long des orbites de K se projettent en des fibrés B^p_W sur la variété $W = K \backslash G$. L'opérateur de Dolbeaut $\bar\partial$ se projette aussi en un opérateur $\bar\partial_W$ agissant sur les espaces des section Ω^*_W de B^*_W. A l'aide d'une métrique de Riemann analytique réelle sur W et de produits hermitiens analytiques réels sur les fibrés B^p_W on construit un produit scalaire sur l'espace Ω^*_W et un adjoint $\bar\partial^*_W$ de $\bar\partial_W$. Comme le complexe $(\Omega^*, \bar\partial)$ est elliptique il en est de même pour le complexe

$$0 \to \Omega^0_W \xrightarrow{\bar\partial_W} \Omega^1_W \xrightarrow{\bar\partial_W} \cdots \to \Omega^n_W \to 0. \tag{8}$$

La variété W étant compacte, on a une décomposition de Hodge pour ce complexe (8). Mais le complexe $(\Omega^*_W, \bar\partial_W)$ s'identifie naturelement au complexe $(\Omega^*_K, \bar\partial)$; on a donc une décomposition en somme orthogonale

$$\Omega^*_K = \mathbf{H}^*_K \oplus Im\bar\partial \oplus Im\bar\partial^*_K$$

avec $\mathbf{H}^*_K :=$ Ker $\bar\partial \cap$ Ker $\bar\partial^*_K \cong H^*(\Omega^*_K, \bar\partial)$ de dimension finie et où $\bar\partial^*_K$ est l'opérateur induit de $\bar\partial^*_W$ par l'identification $\Omega^*_K \equiv \Omega^*_W$.

Soit ${}^r\Omega^*_K$ le r–complété de Sobolev de Ω^*_K et ${}^r\phi_K$ un voisinage de zéro dans l'ensemble des éléments intégrables de Ω^1_K. L'espace

$$\widetilde{H}_K = \{\omega \in^r \Omega^1_K \mid \bar{\partial}^*_K(\bar{\partial}\omega - \frac{1}{2}[\omega,\omega]) + \bar{\partial}\bar{\partial}^*_K\omega = 0\}$$

est, au voisinage de zéro, une variété C–analytique dont l'espace tangent en zéro est H^1_K. Ses éléments sont analytiques réels en tant que solutions d'une équation elliptique à coéfficients analytiques réels. Le théorème de Frobenius classique dans le cas analytique réel avec des paramètres complexes montre que l'espace analytique $S_K := \widetilde{H}_K \cap^r \phi_K = \widetilde{H}_K \cap \phi_K$ paramètre une déformation (τ^s) K–invariante de τ.

On notera par (T^s) la famille des fibrés tangents holomorphes correspondant à la déformation (τ^s) et par (γ^s) la section nulle de cette famille de fibrés. L'action de K sur G induit une action de K sur la famille (T^s). Pour montrer la versalité de la déformation (τ^s) on aura besoin du

2.3.5. **Lemme.** *Il existe un voisinage U de la section nulle dans (T^s) et une application différentiable K-équivariante $\psi : U \to G$ telle que*

(i) *Pour tout $x \in G$ on a $\psi(\gamma^0(x)) = x$.*
(ii) *Soit ψ^s_x la restriction de ψ à la fibre $T^s_x \cap U$; la différentielle de ψ^0_x en $\gamma^0(x)$ est l'identité de T^0_x.*
(iii) *ψ^s_x est un isomorphisme holomorphe sur son image munie de la structure complexe induite par τ^s.*

Démonstration du Lemme: Soit $\pi : G \to W = K\backslash G$ la projection canonique et notons par S le faisceau sur W dont la fibre en $w \in W$ est formée des germes en $\pi^{-1}(w)$ des applications différentiables K–équivariantes $\psi : V \to G$, où V est un voisinage de $\gamma^0(\pi^{-1}(w))$ dans (T^s), qui vérifient les conditions du lemme. Le faisceau S étant localement mou est mou et il admet une section globale. le résultat découle maintenant de la compacité de W et du théorème 3.3.1, p. 150 dans Godement [9]. ■

Fin de la démonstration du théorème. Soit ${}^{r+1}\mathrm{Diff}_K(G)$ le sous–groupe de ${}^{r+1}\mathrm{Diff}\,(G)$ formé des difféomorphismes de G qui commutent avec l'action de K. On peut utiliser la restriction de ψ à $T^0 \cap U = T \cap U$ pour paramétrer un voisinage ${}^{r+1}D_K$ de id dans ${}^{r+1}\mathrm{Diff}_K(G)$ par un voisinage de zéro dans ${}^{r+1}\Omega^0_K$, ce qui induit une structure complexe sur ${}^{r+1}D_K$.

Soit ${}^{r+1}\mathcal{C}_K$ un supplémentaire topologique de $\mathsf{H}^0_K \cong H^0(\Omega^*_K, \bar{\partial})$ dans ${}^{r+1}\Omega^0_K$ et ${}^{r+1}\mathcal{E}_K$ le sous–espace de ${}^{r+1}D_K$ qui lui correspond par l'identification antérieure. L'application ψ permet aussi d'identifier ${}^{r+1}\mathcal{E}_K \times S_K$ avec ${}^{r+1}\mathcal{C}_K \times S_K$ ce qui munit ${}^{r+1}\mathcal{E}_K \times S_K$ d'une structure complexe (qui n'est pas la structure complexe produit). Un raisonement analogue à celui dans [4] montre que l'application

$$\rho :^{r+1} \mathcal{E}_K \times S_K \to^r \phi_K$$

est holomorphe et, en fait, un isomorphisme d'espaces C–analytiques banachiques, ce qui entraîne la versalité de la déformation (τ^s). ■

2.3.6. **Remarques**.

(i) Une description de l'espace S_K analogue à celle de S_b dans 2.2.2 montre que l'espace tangent T_0S_K s'identifie à $H^1(\Omega_K^*, \bar\partial)$ et que si $H^2(\Omega_K^*, \bar\partial) = 0$ alors $S_K$est un espace lisse.

(ii) Il résulte comme corollaire du théorème 2.3.4 que, si le feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}, \tau)$ est de Lie alors la déformation à type différentiable fixé $(\mathcal{F}^{s_b}, \tau^{s_b})$ construite dans 2.2.2 a une propiété de versalité au sens fort de 2.3.4.

2.3.7. **Exemple**. Soit $G = GA$ le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}$ qui préservent l'orientation. Le groupe GA peut s'identifier à $\mathbb{R}^2$ avec l'opperation

$$(x, y) \cdot (x', y') = (x + x', \lambda^x y' + y)$$

où $\{x, y\}$ sont les coordonneés de $\mathbb{R}^2$ et λ est un nombre réel positif. Les champs de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = \lambda^x \frac{\partial}{\partial y}$ sont invariants à gauche et engendrent l'algèbre de Lie ga.

Malgré que GA n'est pas un groupe de Lie complexe il admet une structure complexe invariante à gauche τ, qui en particulier sera invariante par le sous groupe

$$K = \{(n, y) \in GA \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

de GA. Cette structure complexe est induite par la structure presque complexe J definie par $J(X) = Y$ et $J(Y) = -X$. Le fibré tangent holomorphe de GA est alors engendré par le champ vectoriel $Z = X - iY$.

Le groupe GA est le modèle transverse d'un feuilletage de Lie sur le tore hyperbolique T_A^3 (cf. [2]) qui peut être construit de la façon suivante: Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $trA > 2$. Les valeurs propres de A sont des réels positifs λ et $1/\lambda$. Soient $u, v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ des vecteurs propres de A de valeurs propres λ et $1/\lambda$ respectivement. Le quotient $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\sim$, où $\sim$ est la relation d'equivalence engendrée par les rélations $((x, y), t) \sim (A(x, y), t+1)$ et $((x, y), t) \sim ((x+n, y+n'), t)$ pour tout $n, n' \in \mathbb{Z}$, est une variété compacte notée T_A^3. Les champs de vecteurs $\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial t}$, $\widetilde{Y} = \lambda^t v$ et $\widetilde{\xi} = \lambda^{-t} u$ se projettent en champs de vecteurs X, Y et ξ sur T_A^3. Le feuilletage $\mathcal{F}$ associé au flot defini par ξ est un feuilletage de Lie de groupe GA dont le groupe d'holonomie Γ a pour adhérence le groupe cocompact K.

La construction antérieure définit une structure complexe $\widetilde{\tau}$ transverse à $\mathcal{F}$. L'espace versel $(S_b, 0)$ des déformations à type différentiable fixé du feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}, \widetilde{\tau})$ coincide avec l'espace versel $(S_K, 0)$ des déformations K-invariantes de la structure complexe τ sur GA.

Dans le cas présent le complexe (7) est réduit à

$$0 \to \Omega_K^0 \xrightarrow{\bar\partial} \Omega_K^1 \to 0$$

et, si on note par B l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^2$ qui ne dépendent que de la coordonée x et qui sont 1-periodiques, on a $\Omega_K^0 = \{f \cdot Z \mid f \in B\}$ et

$\Omega^1_K = \{g\bar{\omega} \otimes Z \mid g \in B\}$ où $\bar{\omega} = dx - i\lambda^{-x}\, dy$. Il est facile de voir que

$$\bar{\partial}(f \cdot Z) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial x}\bar{\omega} \otimes Z,$$

pour $fZ \in \Omega^0_K$, ce qui entraîne $H^1(\Omega^*_K, \bar{\partial}) \cong \mathbb{C}$. La remarque 2.3.6 (i) nous dit alors que $(S_b, 0) \equiv (S_K, 0) \cong (\mathbb{C}, 0)$.

2.4 Feuilletages de codimension un.

Dans ce paragraphe nous revenons à la situation de 2.1. Pour le cas particulier des feuilletages transversalement holomorphes $(\mathcal{F}, \tau)$ de codimension un la condition d'être hermitien peut être legèrement affaiblie de sorte qu'on obtient encore un espace versel pour les deformations à type differentiable fixé. Plus précisement on a le

2.4.1 **Théorème**: *si le feuilletage $(\mathcal{F}, \tau)$ est de codimension 1 et admet une connexion transverse projetable alors il y a un voisinage S_b de 0 dans $H^1(A^*_b, \bar{\partial})$ qui paramètre une déformation à type différentiable fixé $(\mathcal{F}, \tau^{S_b})$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ qui a la propriété de versalité suivante: si $(\mathcal{F}, \tau^t)$ est une autre déformation de $(\mathcal{F}, \tau)$ à type différentiable fixé paramétrée par $(T, 0)$ alors il existe un morphisme $\mathbb{R}$-analytique $\varphi : (T, 0) \to (S_b, 0)$ et une famille $h^t \in Diff(M, \mathcal{F})$ qui dépend $\mathbb{R}$-analytiquement de $t \in (T, 0)$ tels que $\tau^t = (h^t)^* \tau^{\varphi(t)}$. En plus l'application tangente $d_0\varphi$ de φ en 0 est unique.*

Démonstration: Dans cette situation le complexe (4) se reduit à

$$0 \to A^0_b \xrightarrow{\bar{\partial}} A^1_b \to 0$$

et tous les éléments de A^1_b sont intégrables. Comme conséquence l'espace ϕ_b n'est pas singulier mais un voisinage de zéro dans A^1_b.

La finitude de $H^0(A^*_b, \partial) \cong H^0(M, \theta_{\mathcal{F}})$ implique, d'aprés le théorème de Hahn–Banach, l'existence d'un supplémentaire topologique de Ker $\bar{\partial}$ dans A^0_b. On notera C_b un petit voisinage de zéro de ce supplémentaire. D'autre part, la finitude de $H^1(A^*_b, \bar{\partial})$ nous permet d'assurer, d'aprés le théorème de l'application ouverte, que l'espace $Im\bar{\partial}$ est fermé dans A^1_b et qu'il admet un supplémentaire topologique (de dimension finie). Soit S_b un petit voisinage de zéro de ce supplémentaire.

Un résultat de Ahlfors et Bers **[1]** montre que l'espace S_b paramètre une famille (τ^{s_b}) de structures complexes transverses à $\mathcal{F}$ qui dépend holomorphiquement du paramètre $s_b \in S_b$. De cette façon on obtient une déformation $(\mathcal{F}, \tau^{s_b})$ de $(\mathcal{F}, \tau)$ à type differentiable fixé.

On notera ${}^rA^1_b, {}^{r+1}C_b, \ldots$ les completés de Sobolev de A^1_b, $C_b, \ldots$ par rapport à une métrique fixée. L'espace S_b étant de dimension finie, on a ${}^rS_b = S_b$. L'image ${}^{r+1}\mathcal{E}_b \subset {}^{r+1}$ Diff $(M, \mathcal{F})$ de ${}^{r+1}C_b$ par l'application exponentielle associée à la connexion transverse projetable est une variété banachique $\mathbb{R}$-analytique. Un calcul similaire à celui dans (**[14]**, p. 171) montre que la différentielle de l'application

$$\rho : {}^{r+1}\mathcal{E}_b \times S_b \to {}^r\phi_b$$

en $(id, 0)$ est un isomorphisme. Quitte à retrécir son domaine, l'application ρ est donc un isomorphisme de variétés banachiques. La commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} {}^{r'+1}\mathcal{E}_b \times S_b & \xrightarrow{\rho} & {}^{r'}\phi_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{r+1}\mathcal{E}_b \times S_b & \xrightarrow{\rho} & {}^{r}\phi_b \end{array}$$

avec $r' > r$, induit un isomorphisme de variétés banachiques

$$\rho :^{\infty} \mathcal{E}_b \times S_b \to \phi_b,$$

où ${}^{\infty}\mathcal{E}_b =^{r+1} \mathcal{E}_b \cap \mathrm{Diff}\,(M, \mathcal{F})$, ce qui entraîne la versalité de la déformation $(\mathcal{F}, \tau^{S_b})$. ■

2.4.2. **Exemple**. Considèrons le feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}, \tau)$ sur $S^2 \times S^1$ décrit en l'exemple 1.1.2 (ii). La transformation de $\mathbb{C}$

$$\mu(z) = \alpha z$$

laisse invariante la connexion plate standard sur $\mathbb{C}$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas hermitien mais il admet une connexion transverse projetable.

Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont difféomorphes à $\mathbb{R}$ à l'exception des deux cercles L^+ et L^- induits par les sous-ensembles $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ et $\{0\} \times \mathbb{R}^-$ de $\widetilde{M}$. L'holonomie de chacune de ces feuilles compactes est engendrée par la transformation μ. Remarquons en plus que si f et g sont des fonctions sur $\mathbb{C}$ alors $\mu^*(f(z)\frac{\partial}{\partial z}) = \alpha^{-1} f(\alpha z)\frac{\partial}{\partial z}$ et $\mu^*(g(z)d\bar{z} \otimes \frac{\partial}{\partial z}) = g(\alpha z)d\bar{z} \otimes \frac{\partial}{\partial z}$. Il découle de ces considérations que

$$\begin{aligned} A_b^0 &\cong \{f\frac{\partial}{\partial z} \mid f \in C^\infty(\mathbb{C}) \text{ avec } f(\alpha z) = \alpha f(z)\} \\ A_b^1 &\cong \{g d\bar{z} \otimes \frac{\partial}{\partial z} \mid g \in C^\infty(\mathbb{C}) \text{ avec } g(\alpha z) = g(z)\} \\ &= \{\lambda d\bar{z} \otimes \frac{\partial}{\partial z} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

D'autre part $\omega_\lambda = \lambda \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}$ est un élément de A_b^0 tel que $\bar{\partial}\omega_\lambda = \lambda d\bar{z} \otimes \frac{\partial}{\partial z}$. D'où $H^1(A_b^*, \bar{\partial}) = 0$. Cela nous dit que le feuilletage transversalement holomorphe $(\mathcal{F}, \tau)$ est rigide par déformations à type differentiable fixé.

References

1. L. AHLFORS AND L. BERS, Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math.* **72** (1960), 385–404.

2. Y. CARRIERE, Flots Riemanniens, *Structure transverse des feuilletages, Asterisque* **116** (1984), 31-52.
3. J.L. CATHELINEAU, Deformations équivariantes d'espaces analytiques complexes compacts, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 11 (1978), 391–406.
4. A. DOUADY, Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, *Sém. Bourbaki 17e. année* **277** (1964/65).
5. T. DUCHAMP AND M. KALKA, Deformation theory for holomorphic foliations, *J. Diff. Geometry* 14 (1979), 317–337.
6. A. EL KACIMI ALAOUI, Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications, *Preprint. Soumis à Compositio Math.*.
7. E. FEDIDA, Sur les feuilletages de Lie, *C.R.A.S. de Paris* **272** (1971), 999–1002.
8. J. GIRBAU, A. HAEFLIGER AND D. SUNDARARAMAN, On deformations of transversely holomorphic foliations, *J. Angew. Math.* **345** (1983), 122–147.
9. R. GODEMENT, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, *Hermann* (1964), Paris.
10. X. GOMEZ-MONT, Transversal holomorphic structures, *J. Diff. Geometry* **15** (1980), 161–185.
11. K. KODAIRA AND D.C. SPENCER, On deformations of complex analytic structures, *I,II, Ann. Math.* 67 (1958), 328–466. *III* 71 (1960), 43–76.
12. M. KURANISHI, Deformations of Compact Complex Manifolds, (1971) Montréal.
13. B. MALGRANGE, Analytic Spaces, *L'Enseignement Math.t.* **XIV** (1968), 1–28.
14. J. MORROW AND K. KODAIRA, Complex manifolds, (1971) New York.

A. El Kacimi Alaoui: U.R.A. au C.N.R.S. 751
Univ. de Valenciennes
Le Mont Houy
59326 Valenciennes Cedex FRANCE

M. Nicolau: Departament de Matemàtiques
Univ. Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra SPAIN

Rebut el 20 de Gener de 1989