DEMONSTRE EM AULA

DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE RESTAURAÇÃO ENTRE UMA BOLA E O PISO DO LABORATÓRIO

Wilson Lopes
Universidade de Guarulhos
Universidade de Mogi das Cruzes
São Paulo – SP

I. Introdução

Uma bola, de ótima elasticidade, cai, verticalmente, de uma altura *h* sobre um piso horizontal e fica pulando até parar. Medindo-se o intervalo de tempo em que ela permanece pulando, pode-se determinar o coeficiente de restauração (ou restituição) entre a bola e o piso.

II. Interação entre a bola e o piso

A bola leva um tempo *t* para cair de uma altura *h*, dado por:

$$t = (2h/g)^{1/2}, \tag{1}$$

no qual *g* representa a aceleração da gravidade no local de experiência (assumimos $g = 9{,}8$ m/s^2). Para as demais alturas, h_1, h_2, ..., como se pode ver pelo gráfico da Fig.1, as equações para os intervalos de tempo t_1, t_2, ... são semelhantes à equação (1), a saber:

$$t_1 = (2h_1/g)^{1/2},$$

$$t_2 = (2h_2/g)^{1/2}, \text{ etc..} \tag{2}$$

O intervalo de tempo em que a bola permanece pulando é dado por:

$$T = t + 2(t_1 + t_2 + ...). \tag{3}$$

Quando a bola cai de uma altura *h*, sua velocidade, ao atingir o piso, é dada por: $v = -(2gh)^{1/2}$; rebota com velocidade $v_1 = (2gh_1)^{1/2}$, na qual h_1 é a nova altura atingida; cai da altura h_1 e atinge o solo com velocidade $v_1' = -(2gh_1)^{1/2}$; rebota com velocidade $v_2 = (2gh_2)^{1/2}$; e assim por diante. Pela definição de coeficiente de restauração, tem-se:

$$e = -(v_1 / v) = -(v_2 / v_1^{'}) = ...$$
$$= (h_1 / h)^{1/2} = (h_2 / h_1)^{1/2} = ... \qquad (4)$$

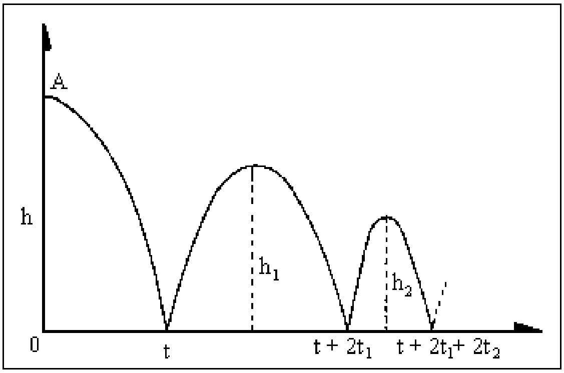

Fig.1- O gráfico mostra a bola sendo abandonada do ponto A, no instante t = 0, de uma altura h.

Admite-se, escrevendo-se a equação (4), que o coeficiente de restauração, entre a bola e o piso, permaneça constante, em todos os pulos realizados pela bola.

Da equação (4), pode-se escrever:

$$h_1 = e^2 h,$$
$$h_2 = e^2 h_1 = e^4 h, \; etc. \qquad (5)$$

Substituindo-se as alturas h_1, h_2, ..., obtidas em (5), nas respectivas equações dos intervalos de tempo, dados por (2), e substituindo-se esses resultados em (3), tem-se:

$$T = (2h/g)^{1/2} + 2[e(2h/g)^{1/2} + e^2(2h/g)^{1/2} + ...]$$
$$= (2h/g)^{1/2}[1 + 2(e + e^2 + ...]. \qquad (6)$$

Como a bola, do ponto de vista matemático, efetua infinitos pulos até parar, a série, que representa uma progressão geométrica, decrescente e de razão *e*, tem infinitos termos. (O coeficiente de restauração pertence ao seguinte intervalo: 0 < e < 1. Para um choque perfeitamente elástico, e = 1; para um choque perfeitamente inelástico, e = 0.) Assim, $e + e^2 + ... = e/(1 - e)$. Substituindo-se em (6), obtém-se:

$$T = (2h/g)^{1/2}\{1 + 2[e/(1-e)]\}$$

$$= (2h/g)^{1/2}[(1+e)/(1-e)]. \qquad (7)$$

Finalmente, resolvendo-se a (7) em *e*, vem:

$$e = [T - (2h/g)^{1/2}]/[T + (2h/g)]^{1/2}, \qquad (8)$$

que fornece o coeficiente de restauração entre a bola e o piso do laboratório.

III. Parte experimental e conclusões

Foram usados na experiência um cronômetro de décimos de segundo, uma trena de dois metros de comprimento e uma bola maciça, de origem japonesa, em torno de 4,0 cm de diâmetro e de muita boa elasticidade (para se fazer idéia, quando abandonada de 1,0 m de altura, rebotava a 0,85 m, aproximadamente, ou, então, permanecia pulando cerca de 9,0 s).

Nossos alunos, na Universidade de Guarulhos, ao realizarem esta experiência, encontravam alguma dificuldade em determinar o exato momento em que a bola deixava de pular. Daí, então, a escolha de uma bola de coeficiente de restauração com o piso, de, aproximadamente, 0,91. Com esse coeficiente de restauração, o intervalo de tempo em que a bola permanecia pulando era relativamente longo e a indecisão, citada acima, deixava de ser importante. Por outro lado, poder-se-ia dilatar o intervalo de tempo *T*, aumentando-se *h*. Porém, isto causava, na maioria das vezes, alguns transtornos: por irregularidades do piso do laboratório, e mesmo da bola, ela deixava de pular na direção vertical, chocando-se com bancadas, bancos, paredes, etc. Desta maneira, foram sugeridas as alturas indicadas na tabela 1, das quais os alunos mediam os correspondentes intervalos de tempo em que a bola permanecia pulando, e, com o auxílio da equação (8), calculavam o coeficiente de restauração entre a bola e o piso do laboratório.

Tabela 1

h_i (m)	T_i (s)	e_i
0,50		
0,60		
0,70		

0,80
0,90
1,00

Completando a tabela, nossos alunos deveriam responder às seguintes perguntas:

a) Qual é o valor médio do coeficiente de restauração entre a bola e o piso do laboratório?

$$\bar{e} = \sum_i e_i / 6$$

$$= \boxed{}$$

b) Qual é o valor do desvio padrão, em relação ao valor médio, do coeficiente de restauração?

$$\sigma = \left\{\sum_i \left(e_i - \bar{e}\right)^2 / \left[n\left(n-1\right)\right]\right\}^{1/2}$$

$$= \left[\sum_i \left(e_i - \bar{e}\right)^2 / 30\right]^{1/2}$$

$$= \boxed{}$$

c) Qual é o valor do coeficiente de restauração, afetado de seu respectivo desvio padrão?

$$e = e \pm \sigma$$

$$= \boxed{\quad \pm \quad}$$

IV. Referências bibliográficas

1. MESHCHERSKY, I. V. **Collection of problems in theoretical mechanics**. p. 210. prob. 690.

2. BOAS, M. L. **Mathematical methods in the physical sciences**. John Wiley & Sons, 1966. p. 3.

3. WHITTLE, R. M.; YARWOOD, J. **Experimental physics for students**. London: Chapman e Hall, 1973. p. 4.