

CONFLUENTES MATHEMATICI

Konstantin SCHLAGBAUER, Peter SCHUSTER, und Daniel WESSEL

Der Satz von Hahn-Banach per Disjunktionselemination

Tome 11, n° 1 (2019), p. 79-93.

http://cml.cedram.org/item?id=CML_2019__11_1_79_0

© Institut Camille Jordan, 2019, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Confluentes Mathematici » (<http://cml.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://cml.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

DER SATZ VON HAHN-BANACH PER DISJUNKTIONSELIMINATION

KONSTANTIN SCHLAGBAUER, PETER SCHUSTER, UND DANIEL WESSEL

Zusammenfassung. Der Erweiterungssatz von Hahn-Banach ist zugleich ein Stützpfiler der Funktionalanalysis und — infolge seiner bekannten Natur als Konsequenz des Auswahlaxioms — Musterbeispiel für eine reine Existenzaussage. Vermöge eines allgemeinen syntaktischen Konservativitätsresultats bezüglich mehr- über einwertigen Schlussrelationen können wir den Satz von Hahn-Banach auf eine Disjunktionselemination zurückführen. Semantische Interpretation erlaubt sodann Rückschluss auf das klassische Resultat.

Abstract. (*The Hahn-Banach theorem by disjunction elimination*) The Hahn-Banach extension theorem is at once main pillar of functional analysis and — due to its notorious nature as consequence of the axiom of choice — prime example of a pure existential statement. By way of a general syntactic conservation result for multi-conclusion entailment relations on top of their single-conclusion counterparts, we are able to trace back the Hahn-Banach theorem to a disjunction elimination. The classical result can then be regained by semantic interpretation.

1. EINLEITUNG

Der Erweiterungssatz von Hahn-Banach ist ein Stützpfiler der Funktionalanalysis [29, 37] und sein Beweis ein Paradebeispiel für Anwendungen des Zornschen Lemmas. Bekanntlich stellt die Aussage des Satzes von Hahn-Banach selbst eine (wengleich schwache) Form des Auswahlaxioms dar [21]. Eine geeignete Formulierung als syntaktisches Konservativitätsresultat lässt jedoch einen konstruktiven Beweis zu [8, 11, 13, 28]. In der Tat handelt es sich um eine Instanz eines allgemeinen Phänomens mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen in abstrakter Algebra und Ordnungstheorie [16, 18, 19, 30, 25, 31, 33, 34, 35, 36, 45, 48, 47].

Sei T^* Erweiterung einer Theorie T derselben Sprache \mathcal{L} , das heißt für alle Sätze φ von \mathcal{L} sei $T \vdash \varphi$ hinreichend für $T^* \vdash \varphi$, wobei \vdash die syntaktische Folgerungsbeziehung bezeichne. Ist $T \vdash \varphi$ sogar notwendig für $T^* \vdash \varphi$, so spricht man von einer konservativen Erweiterung. Ein semantischer Konservativitätsbeweis erfolgt typischerweise durch (a) Einbettung eines jeden Modells \mathcal{M} von T in ein Modell \mathcal{M}^* von T^* derart, dass (b) aus $\mathcal{M}^* \models \varphi$ bereits $\mathcal{M} \models \varphi$ folgt, wobei \models die semantische Folgerungsbeziehung bezeichne. Schematisch stellt sich dieser Sachverhalt wie folgt dar:

$$\begin{array}{ccc}
 \forall \mathcal{M}^* & (\mathcal{M}^* \models T^* \Rightarrow \mathcal{M}^* \models \varphi) & \begin{array}{c} \Leftarrow \\ \text{Korrektheit} \end{array} & T^* \vdash \varphi \\
 & \uparrow & & \\
 \forall \mathcal{M} & (\mathcal{M} \models T \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi) & \begin{array}{c} \Downarrow \\ \Rightarrow \\ \text{Vollständigkeit} \end{array} & T \vdash \varphi
 \end{array}$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 03F65, 06F20.

Keywords: Hahn-Banach theorem; Scott entailment relations; conservative extension; constructive mathematics.

Disclaimer: This paper contains material from the first author's master's thesis [39] at the Ludwig-Maximilians-Universität München, jointly supervised by Helmut Schwichtenberg and the second author under collaboration with the third author.

Die senkrechten Pfeile korrespondieren hier mit den Schritten (a) bzw. (b) oben, und erklären, wie der Antezedens der unteren Implikation aus dem Sukzedens der oberen folgt. Mithin sind Korrektheit und Vollständigkeit von entscheidender Bedeutung. Ferner erfordert die Einbettung oft transfiniten Methoden (etwa eine geeignete Form des Auswahlaxioms).

Es kann daher vorteilhaft sein, stattdessen einen syntaktischen Konservativitätsbeweis zu führen, das heißt direkt die Notwendigkeit von $T \vdash \varphi$ für $T^* \vdash \varphi$ wenigstens für eine bestimmte Klasse von Sätzen φ zu zeigen [42, 10]. Für solch einen syntaktischen Beweis der Konservativität ist es angebracht, Theorien nicht als Satz-mengen sondern als Mengenrelationen zu betrachten. Diese sogenannten Schlussrelationen gehen zurück auf Arbeiten von Lorenzen [26, 14, 15] und Scott [41].¹

Der Fundamentalsatz [8] überträgt Konzepte der Theorie distributiver Verbände auf Schlussrelationen und eignet sich zur punktfreien Beschreibung topologischer Sachverhalte. Insbesondere umfasst dies den Satz von Hahn-Banach [11, 13], der eine Interpretation als Konservativitätsaussage zulässt, wie bereits sowohl im Rahmen der Topostheorie [28] als auch innerhalb der Typen- und prädikativen Lokaltheorie bzw. der sogenannten formalen Topologie [9] aufgezeigt wurde. Es sei ferner angemerkt, dass Varianten des Satzes von Hahn-Banach (etwa approximativ [4, 5, 6, 7] oder unter der Voraussetzung, die Norm des zugrundeliegenden Raums sei Gâteaux-differenzierbar [22, 24]) konstruktiv beweisbar sind.

Die wesentliche Neuigkeit der vorliegenden Note ist, dass der Satz von Hahn-Banach derart als Konservativitätsaussage aufgefasst werden kann, dass die grundlegende Theorie T nur Formeln ohne Disjunktionen in positiver Position enthält. Die gewünschte Erweiterung T^* wird dann von Zusatzaxiomen der Form

$$\begin{aligned} P(x * y) &\rightarrow P(x) \vee P(y) \\ P(e) &\rightarrow \perp \end{aligned}$$

mit einer zweistelligen Verknüpfung $*$ erzeugt. In dieser Formulierung wird der Satz von Hahn-Banach zum Spezialfall des universellen Satzes von Krull-Lindenbaum [32]. Die Konservativität kann also auch hier als eine Form von Disjunktionselimination aufgefasst werden [33, 34]. Dies kann nützlich sein, da sich aus klassischen Beweisen ohne Disjunktionen in positiver Position verhältnismäßig leicht rechnerischer Gehalt extrahieren lässt [40].

Im Folgenden fassen wir kurz die wichtigsten Begriffe zu ein- und mehrwertigen Schlussrelationen zusammen. Schrittweise werden dann mehrere Schlussrelationen definiert und konstruktive Konservativitätsbeweise geführt. Anschließend wird der Zusammenhang von Modellen dieser Schlussrelationen mit linearen Funktionalen gezeigt, woraus sich der Satz von Hahn-Banach als semantische Interpretation der Konservativität ergibt.

Wir arbeiten in konstruktiver Zermelo-Fraenkel Mengenlehre **CZF** [3, 2]. Eine Menge S wird als *endlich* bezeichnet, wenn es eine Surjektion $\{1, \dots, n\} \rightarrow S$ gibt, wobei $n \in \mathbb{N}$.² Dies umfasst den Fall $S = \emptyset$ mit $n = 0$. Die Klasse $\mathcal{P}_\omega(S)$ aller endlichen Teilmengen einer Menge S stellt in **CZF** eine Menge dar, nicht jedoch die Klasse $\mathcal{P}(S)$ aller Teilmengen von S , da das Potenzmengenaxiom in **CZF** nicht

¹Wir verweisen ferner auf [43] für einen historischen Überblick.

²Dies sind die *endlich aufzählbaren* Mengen im Sinne von [2, 3].

postuliert wird. Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden als Dedekindsche Schnitte verstanden, woran später erinnert wird.

2. SCHLUSSRELATIONEN

Dieser Abschnitt folgt [33, 34]. Sei S eine Menge. Eine Mengenrelation

$$\triangleright \subseteq \mathcal{P}_\omega(S) \times S$$

zwischen endlichen Teilmengen und Elementen von S heißt *einwertige Schlussrelation* auf S , falls sie die folgenden Regeln von Reflexivität, Monotonie und Transitivität erfüllt:

$$\frac{U \ni a}{U \triangleright a} \text{ (R)} \quad \frac{U \triangleright b}{U, U' \triangleright b} \text{ (M)} \quad \frac{U \triangleright c \quad U', c \triangleright b}{U, U' \triangleright b} \text{ (T)}$$

Hingegen heißt eine Mengenrelation

$$\vdash \subseteq \mathcal{P}_\omega(S) \times \mathcal{P}_\omega(S)$$

zwischen endlichen Teilmengen von S *mehrwertige Schlussrelation* auf S , falls sie die folgenden allgemeineren Regeln von Reflexivität, Monotonie und Transitivität erfüllt:

$$\frac{U \not\propto V}{U \vdash V} \text{ (R)} \quad \frac{U \vdash V}{U, U' \vdash V, V'} \text{ (M)} \quad \frac{U \vdash V, c \quad U', c \vdash V'}{U, U' \vdash V, V'} \text{ (T)}$$

Hierbei bedeutet $U \not\propto V$, dass U und V ein gemeinsames Element besitzen, d.h. der Schnitt $U \cap V$ ist bewohnt.³ Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier und im Folgenden U, V als Abkürzung für $U \cup V$ und a für die Einermenge $\{a\}$ geschrieben. Man schreibt auch $\triangleright b$ für $\emptyset \triangleright b$ und ebenso $\vdash V$ und $U \vdash$ für $\emptyset \vdash V$ beziehungsweise $U \vdash \emptyset$.

Es seien nun \triangleright eine einwertige und \vdash eine mehrwertige Schlussrelation auf S . Man sagt, dass \triangleright von \vdash *erweitert* wird, falls aus $U \triangleright a$ folgt $U \vdash a$. Gilt auch die Umkehrung, d.h. $U \triangleright a$ und $U \vdash a$ sind äquivalent, so spricht man von einer *konservativen Erweiterung*. Dieser Begriff ist zentral für die vorliegende Arbeit.

Eine Teilmenge $\alpha \subseteq S$ heißt *Modell* von \triangleright , falls stets gilt

$$\frac{\alpha \supseteq U \quad U \triangleright a}{\alpha \ni a}$$

Die Klasse aller Modelle von \triangleright wird mit $\text{Mod}(\triangleright)$ bezeichnet. Analog heißt α *Modell* von \vdash , falls stets gilt

$$\frac{\alpha \supseteq U \quad U \vdash V}{\alpha \not\propto V}$$

Wir nennen ein Modell α *echt* wenn $\alpha \neq S$. Die Klasse aller Modelle von \vdash wird mit $\text{Mod}(\vdash)$ bezeichnet. Während für die Existenz von Modellen einer mehrwertigen Schlussrelationen im Allgemeinen eine Form des Auswahlaxioms benötigt wird, stellt für jede Teilmenge $T \subseteq S$ der *deduktive Abschluss*

$$T^\triangleright = \{ a \in S \mid \exists U \in \mathcal{P}_\omega(T) U \triangleright a \}$$

schon ein Modell der einwertigen Schlussrelation \triangleright dar. In der Tat korrespondieren einwertige Schlussrelationen mit algebraischen Abschlussoperatoren.

³Wir entwenden diese Notation der formalen Topologie [38].

Von besonderem Interesse sind induktiv erzeugte Schlussrelationen. Die Schlussrelation \vdash heißt von Axiomen $U_i \vdash V_i$ ($i \in I$) *erzeugt* oder *definiert*, falls $U \vdash V$ genau dann der Fall ist, wenn $U \vdash V$ in endlich vielen Schritten mittels (R), (M) und (T) von Prämissen der Form $X \wp Y$ und $U_i \vdash V_i$ hergeleitet werden kann. Für den praktischen Gebrauch werden wir nur die Eigenschaft benötigen, dass dies die kleinste mehrwertige Schlussrelation auf S ist mit $U_i \vdash V_i$ für alle i . Das bedeutet: Ist \vdash' eine mehrwertige Schlussrelation auf S , welche die Axiome erfüllt, d.h. mit $U_i \vdash' V_i$ für alle i , so gilt $\vdash \subseteq \vdash'$. Bei der Definition einer Schlussrelation werden Axiome meist als Axiomenschemata verstanden. Wenn wir beispielsweise von dem Axiom $a * b \vdash a, b$ sprechen, meinen wir eigentlich alle Axiome der Form $a * b \vdash a, b$ mit $a, b \in S$. Analog definiert man von Axiomen erzeugte einwertige Schlussrelationen.

SATZ 2.1 ([33, 34]). — *Es sei \triangleright eine einwertige Schlussrelation. Die mehrwertige Schlussrelation \vdash erweitere \triangleright durch Hinzunahme mehrwertiger Axiome*

$$a_1^i, \dots, a_{k_i}^i \vdash b_1^i, \dots, b_{\ell_i}^i \quad (i \in I)$$

Die Erweiterung \vdash ist genau dann konservativ über \triangleright , wenn für jedes Zusatzaxiom gilt:

$$\frac{a_1^i, \dots, a_{k_i}^i \vdash b_1^i, \dots, b_{\ell_i}^i \quad W, b_1^i \triangleright c \quad \dots \quad W, b_{\ell_i}^i \triangleright c}{W, a_1^i, \dots, a_{k_i}^i \triangleright c} \quad (\text{K}_i)$$

Unter Verwendung des Auswahlaxioms (AC) ergibt sich folgende semantische Charakterisierung von konservativen Erweiterungen, der *universelle Satz von Krull-Lindenbaum* in einer noch allgemeineren Form als der in [32] angegebenen:

SATZ 2.2 ([33, 34], AC). — \vdash ist konservativ über \triangleright genau dann, wenn für jedes Modell $\alpha \in \text{Mod}(\triangleright)$

$$\bigcap \{ \beta \in \text{Mod}(\vdash) \mid \beta \supseteq \alpha \} = \alpha.$$

Ist \vdash konservativ über \triangleright , so ist mit AC jedes echte Modell $\alpha \in \text{Mod}(\triangleright)$ in einem Modell von \vdash enthalten. In dieser Form wird Satz 2.2 zum Erweiterungssatz von Hahn-Banach führen, sobald uns geeignete Schlussrelationen zur Beschreibung linearer Funktionaler zur Verfügung stehen. Wie angedeutet setzt Satz 2.2 das Auswahlaxiom voraus. Über klassischer Mengenlehre (**ZF**) ist Satz 2.2 ein Äquivalent des Booleschen Primidealsatzes [34].

3. SYNTAKTISCHE BETRACHTUNG

Wie eingangs erwähnt sollen lineare Funktionaler durch eine Schlussrelation beschrieben werden, um schließlich mit deren Hilfe den Satz von Hahn-Banach zu erhalten. Dafür geeignet ist die in [8, Kapitel 8] und [11] (vergleiche auch [13]) betrachtete mehrwertige Schlussrelation. Für einen Vektorraum X mit Halbnorm λ wird sie auf dem Vektorraum $X \times \mathbb{Q}$ definiert durch die Axiome

$$\begin{aligned} (x, p), -(x, p) \vdash \\ (x, p) + (y, q) \vdash (x, p), (y, q) \\ \vdash (x, -1) \end{aligned} \quad \text{für } \lambda(x) < 1$$

Liest man (x, p) als $\varphi(x) > p$, so lassen sich Modelle dieser Schlussrelation mit linearen Funktionalen φ auf X identifizieren, welche durch die Halbnorm λ dominiert

sind. In [8, 11] wird deshalb die Schreibweise $p < x$ für das Paar (x, p) sowie $x < p$ für $(-x, -p)$ verwendet. Auf diese semantische Interpretation wird in Abschnitt 4 genauer eingegangen werden.

Tatsächlich genügt die Betrachtung dieser einen Relation bereits für den Satz von Hahn-Banach. Wir führen zusätzlich eine einwertige Schlussrelation \triangleright ein, deren Modelle mit den durch λ dominierten linearen Funktionalen auf einem Unterraum von X korrespondieren. Der Satz von Hahn-Banach lässt sich dann als Spezialfall des verallgemeinerten Satzes von Krull-Lindenbaum auffassen. Es hat sich gezeigt, dass es zur genaueren Untersuchung dieser Schlussrelationen zweckmäßig ist, zunächst eine allgemeinere Fassung zu betrachten. Die Schlussrelation der linearen Funktionalen kann in der Tat als Spezialfall der Schlussrelation der geordneten Gruppen aufgefasst werden.

3.1. Schlussrelationen geordneter Gruppen. Betrachtet man die oben genannten Axiome, so sticht das dritte Axiom aus mehreren Gründen ins Auge. Es ist das einzige Axiom, das die Halbnorm verwendet; ferner ist es das einzige Axiom, in welchem die Paardarstellung Signifikanz annimmt; darüber hinaus ist es im Gegensatz zu den anderen Axiomen einwertig. Es liegt also nahe, zunächst die Schlussrelation \vdash_{\circ} zu betrachten, die nur von den ersten beiden Axiomen erzeugt wird. Einstweilen können wir unsere Untersuchung hierbei auf allgemeine abelsche Gruppen ausweiten, dem Ansatz von [11] folgend.

In der vorliegenden Arbeit werden mehrwertige Schlussrelationen immer als Erweiterung von einwertigen Relationen betrachtet. Wir definieren also zunächst eine einwertige Schlussrelation \triangleright_{\circ} und zeigen später, dass es sich bei \vdash_{\circ} um eine Erweiterung von \triangleright_{\circ} handelt.

Sei ab hier A eine beliebige abelsche Gruppe. Soweit nicht anders spezifiziert, bezeichnen a, b, c Elemente von A sowie m, n natürliche Zahlen — in beiden Fällen ggf. mit Indizes.

DEFINITION 3.1. — Es sei $\triangleright_{\circ} \subseteq \mathcal{P}_{\omega}(A) \times A$ die durch die folgenden Axiome erzeugte einwertige Schlussrelation:

$$a, b \triangleright_{\circ} a + b \tag{E1}$$

$$na \triangleright_{\circ} a \tag{E2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Modelle dieser Schlussrelation sind Kegel in der Gruppe A . Ist $\alpha \in \text{Mod}(\triangleright_{\circ})$ ein Kegel, der 0 nicht enthält, so kann man durch

$$a <_{\alpha} b \equiv b - a \in \alpha \tag{*}$$

eine strikte partielle Ordnung auf A definieren, die mit der Addition verträglich ist, das heißt $a <_{\alpha} b$ impliziert $a + c <_{\alpha} b + c$ für alle $c \in A$.

Bemerkung 3.2. — Man beachte, dass für ein Modell α von \triangleright_{\circ} genau dann $\alpha = A$ gilt, wenn α ein Torsionselement enthält. Denn sei $a \in \alpha$, sodass $na = 0$ für ein $n > 0$. Aufgrund Axiom (E1) ist auch $na \in \alpha$. Axiom (E2) liefert allerdings $na = 0 \triangleright_{\circ} c$ für alle $c \in A$, weshalb $\alpha = A$. Wir werden später darauf zurückgreifen, dass $\alpha \neq A$ genau dann, wenn $0 \notin \alpha$.

Später konzentrieren wir uns auf den bereits erwähnten Spezialfall $A = X \times \mathbb{Q}$ für einen rationalen (oder reellen) Vektorraum X . Die Betrachtung von Modellen in Abschnitt 4 beschränkt sich ferner auf Modelle der einwertigen Schlussrelation

\triangleright , die von den Axiomen von \triangleright_{\circ} und dem oben genannten dritten Axiom erzeugt wird. Modelle von \triangleright können dann mit linearen Funktionalen auf einem Unterraum von X identifiziert werden. Wir werden deshalb noch genauer auf diese Schlussrelation \triangleright eingehen. Allerdings können bereits für \triangleright_{\circ} einige nützliche Eigenschaften gezeigt werden. Der allgemeinere Kontext einer abelschen Gruppe A erlaubt es dabei, schlankere Beweise zu führen, als wenn direkt auf $X \times \mathbb{Q}$ gearbeitet werden würde.

SATZ 3.3. — Es seien $a_1, \dots, a_k, b \in A$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $a_1, \dots, a_k \triangleright_{\circ} b$
- (2) Es gibt $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^k n_i > 0$, sodass $\sum_{i=1}^k n_i a_i = mb$.

Beweis. — (1. \Rightarrow 2.) Wir argumentieren induktiv über \triangleright_{\circ} . Demzufolge müssen die erzeugenden Axiome und im Anschluss die Regeln überprüft werden. Erste sind klar; zu letzteren konzentrieren wir uns auf Anwendungen von (T). Man betrachte zu diesem Zweck eine Regelanwendung

$$\frac{U \triangleright_{\circ} b \quad U', b \triangleright_{\circ} a}{U, U' \triangleright_{\circ} a}$$

wobei etwa $U = \{a_i\}_i$ und $U' = \{a'_j\}_j$ und nehme an, dass

$$\sum_i n_i a_i = mb \quad \text{und} \quad \sum_j n'_j a'_j + n' b = m' a$$

mit $\sum_i n_i > 0$ und $\sum_j n'_j + n' > 0$. Wir dürfen ferner annehmen, dass auch $n' > 0$. Folglich ist

$$\sum_j m n'_j a'_j + \sum_i n' n_i a_i = m m' a$$

wie gefordert.

(2. \Rightarrow 1.) Es sei $\sum_i n_i a_i = mb$, wobei $n_i > 0$ für jedes i angenommen werden kann. Man hat zunächst $\{n_i a_i\}_i \triangleright_{\circ} mb$ aufgrund Axiom (E1). Ebenso $a_i \triangleright_{\circ} n_i a_i$, sodass mit wiederholter Anwendung von (T) folgt $\{a_i\}_i \triangleright_{\circ} mb$. Eine weitere Anwendung von (T) mit Axiom (E2) liefert $\{a_i\}_i \triangleright_{\circ} b$. \square

Es gilt also $a_1, \dots, a_k \triangleright_{\circ} b$ genau dann, wenn die a_i und b Nullstellen einer linearen Gleichung sind. Eine solche geschlossene, nicht-induktive Beschreibung einer Schlussrelation wird gelegentlich als „formaler Nullstellensatz“ [16] bezeichnet.

Wie angekündigt wenden wir uns nun der mehrwertigen Schlussrelation zu, die von den ersten beiden eingangs erwähnten Axiomen erzeugt wird. Für eine abelsche Gruppe A ergibt sich dann die folgende Definition:

DEFINITION 3.4. — Es sei $\vdash_{\circ} \subseteq \mathcal{P}_{\omega}(A) \times \mathcal{P}_{\omega}(A)$ die von den folgenden Axiomen erzeugte mehrwertige Schlussrelation:

$$a, -a \vdash_{\circ} \tag{A1}$$

$$a + b \vdash_{\circ} a, b \tag{A2}$$

Bemerkung 3.5. — Die Modelle von \vdash_{\circ} sind genau die echten *Primideale* [32] I von \triangleright_{\circ} . Das heißt, ein Modell von \vdash_{\circ} ist ein echtes Modell von \triangleright_{\circ} derart, dass aus $a + b \in I$ folgt $a \in I$ oder $b \in I$. Die induzierte Ordnung $<_I$ (*) ist deshalb kotransitiv:

$$\forall a, b, c \in A (a <_I c \rightarrow a <_I b \vee b <_I c).$$

Ferner ist anzumerken, dass die leere Menge Modell von \vdash_\circ ist. Insbesondere ist \vdash_\circ konsistent, d.h. $\emptyset \not\vdash \emptyset$. Klassisch betrachtet gilt: ist A torsionsfrei, so gibt es ein nichtleeres Modell von \vdash_\circ , wobei es sich um eine Form des Satzes von Levi über die Ordenbarkeit abelscher Gruppen handelt [20]. Mithilfe einer alternativen mehrwertigen Schlussrelation, mit welcher die Linearität der korrespondierenden Ordnung durch Hinzunahme von Axiomen $\vdash a, -a$ für $a \neq 0$ erzwungen wird, lässt sich eine konstruktive Version des Satzes von Levi erzielen, welche die Inkonsistenz besagter Schlussrelation genau durch die Existenz eines nichttrivialen Torsionselements charakterisiert [46].

Ähnlich wie für \triangleright_\circ hat die Betrachtung von \vdash_\circ hier nur einen vorbereitenden Charakter. Während die Schlussrelation \vdash_\circ in [11] jedoch für sich betrachtet wird, verwenden wir sie hier als Erweiterung von \triangleright_\circ im Sinne von Abschnitt 2.

LEMMA 3.6. — *Die Schlussrelation \vdash_\circ erweitert \triangleright_\circ mit folgenden Zusatzaxiomen:*

$$0 \vdash_\circ \tag{A0}$$

$$a + b \vdash_\circ a, b \tag{A2}$$

Beweis. — Wir zeigen zunächst, dass \vdash_\circ alle Instanzen der Axiome (E1) und (E2) enthält. Für (E1) wende man (T) auf $a + b - b \vdash_\circ a + b, -b$ und $b, -b \vdash_\circ a$ an, um $a, b \vdash_\circ a + b$ zu erhalten. Wir zeigen (E2) induktiv. Aus $0 \vdash_\circ$ folgt $0 \vdash_\circ a$ durch (M); gilt $na \vdash_\circ a$, so erhält man $(n + 1)a \vdash_\circ a$ durch Anwendung von (T) mit $na + a \vdash_\circ na, a$. Mit (E1) ist (A0) äquivalent zu (A1). \square

SATZ 3.7. — *\vdash_\circ ist konservativ über \triangleright_\circ .*

Beweis. — Nach Satz 2.1 [33, 34] genügt es zu zeigen, dass die den zusätzlichen Axiomen entsprechenden Konservativitätsregeln

$$\frac{}{W, 0 \triangleright_\circ c} \text{ (K}_0\text{)} \quad \text{und} \quad \frac{W, a \triangleright_\circ c \quad W, b \triangleright_\circ c}{W, a + b \triangleright_\circ c} \text{ (K}_2\text{)}$$

gelten. Zur Gültigkeit von (K₀) ist lediglich festzustellen, dass bereits $0 \triangleright_\circ c$ für jedes $c \in A$ aufgrund des erzeugenden Axioms (E2) von \triangleright_\circ . Für den Nachweis von (K₂) bemühen wir Satz 3.3. Es sei etwa $W = \{a_i\}_i$ und

$$\sum_i n_i a_i + na = mc \quad \text{und} \quad \sum_i n'_i a_i + n'b = m'c$$

wobei $\sum_i n_i + n > 0$ und $\sum_i n'_i + n' > 0$. Ferner dürfen wir $n, n' > 0$ annehmen, denn andernfalls folgt sofort $W \triangleright_\circ c$. Dies führt zu folgender Gleichung

$$\sum_i (n'n_i + nn'_i)a_i + nn'(a + b) = (n'm + nm')c$$

womit wiederum gemäß Satz 3.3 der Schluss $W, a + b \triangleright_\circ c$ bezeugt wird. \square

Unter der Voraussetzung, dass es sich bei A nicht nur um eine abelsche Gruppe, sondern sogar um einen \mathbb{Q} -Vektorraum handelt, erhalten wir zusätzliche Eigenschaften für \triangleright_\circ und \vdash_\circ :

LEMMA 3.8. — *Ist A ein \mathbb{Q} -Vektorraum, so gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$*

- (1) *im Fall $r \geq 0$ die Relation $ra \triangleright_\circ a$,*

(2) im Fall $r > 0$ die Relation $a \triangleright_{\circ} ra$.

Beweis. —

(1) Schreibe $r = \frac{k}{\ell}$ mit $k \geq 0$ und $\ell > 0$. Anwendung von (T) auf $k(\frac{1}{\ell}a) \triangleright_{\circ} \frac{1}{\ell}a$ und $\frac{1}{\ell}a \triangleright_{\circ} \ell(\frac{1}{\ell}a)$ liefert $ra \triangleright_{\circ} a$.

(2) Ist $r > 0$, so auch $\frac{1}{r} > 0$ und man erhält $a = \frac{1}{r}(ra) \triangleright_{\circ} ra$ gemäß (1). \square

3.2. Schlussrelationen linearer Funktionale. Wir erinnern zunächst an einige Grundbegriffe der Funktionalanalysis. Es sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Abbildung $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *subadditiv*, falls für alle $x, y \in X$

$$\lambda(x + y) \leq \lambda(x) + \lambda(y).$$

- *absolut homogen*, falls für alle $x \in X$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda(tx) = |t|\lambda(x).$$

Ist $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ subadditiv und absolut homogen, so nennt man λ *Halbnorm*. Für jede Halbnorm $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $0 \leq \lambda(x)$ für alle $x \in X$.

Wir wollen uns nun dem Spezialfall $A = X \times \mathbb{Q}$ im Sinne des vorhergehenden Abschnittes zuwenden. Sei dazu X ein \mathbb{Q} -Vektorraum und $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Solange nicht anders gesagt wird, seien immer $x, y, z \in X$ und $p, q, r, s, t \in \mathbb{Q}$. Natürlich ist $X \times \mathbb{Q}$ ein rationaler Vektorraum; insbesondere ist $X \times \mathbb{Q}$ eine abelsche Gruppe, und wir können die im vorherigen Abschnitt behandelten Schlussrelationen \triangleright_{\circ} und \vdash_{\circ} auf $X \times \mathbb{Q}$ betrachten. Wie für Vektorräume üblich wird das Symbol 0 für den Nullvektor verwendet. Aus dem Kontext wird stets ersichtlich sein, ob mit 0 die rationale Zahl $0 \in \mathbb{Q}$, der Nullvektor $0 \in X$ oder der Nullvektor $0 = (0, 0) \in X \times \mathbb{Q}$ gemeint ist. Bei der Betrachtung von linearen Funktionalen in Abschnitt 4 werden wir immer reelle Vektorräume X haben, auch wenn zur Definition der Schlussrelation ein \mathbb{Q} -Vektorraum X genügt. Zunächst konzentrieren wir uns wieder auf eine einwertige Schlussrelation \triangleright auf $X \times \mathbb{Q}$:

DEFINITION 3.9. — Es sei \triangleright die durch die folgenden Axiome erzeugte einwertige Schlussrelation auf $X \times \mathbb{Q}$:

$$(x, p), (y, q) \triangleright (x, p) + (y, q) \tag{E1}$$

$$n(x, p) \triangleright (x, p) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \tag{E2}$$

$$\triangleright -(x, 1) \quad \text{für } \lambda(x) < 1 \tag{E3}$$

Das hier verwendete Axiom (E3) unterscheidet sich leicht vom eingangs erwähnten dritten Axiom aus [8, 11]. Die beiden Axiome sind jedoch äquivalent: Offensichtlich lässt sich (E3) auch schreiben als

$$\triangleright (x, -1) \quad \text{für } \lambda(-x) < 1.$$

Semantisch entspricht mit dieser Schlussrelation ein Paar (x, p) der Information, dass

$$\varphi(x) > p$$

für ein lineares Funktional $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, das von der Halbnorm λ dominiert wird. Mit dieser Interpretation lesen sich die Axiome als:

$$\begin{aligned}\varphi(x) > p \wedge \varphi(y) > q &\rightarrow \varphi(x + y) > p + q \\ \varphi(nx) > np &\rightarrow \varphi(x) > p \\ \lambda(x) < 1 &\rightarrow \varphi(x) < 1\end{aligned}$$

Eine ausführlichere semantische Betrachtung folgt in Abschnitt 4.

Die Schlussrelation \triangleright_{\circ} aus dem vorherigen Abschnitt ist die kleinste einwertige Schlussrelation, welche die Axiome (E1) und (E2) erfüllt. Da \triangleright eine einwertige Schlussrelation ist, welche (E1) und (E2) erfüllt, muss also $\triangleright_{\circ} \subseteq \triangleright$ gelten. Alle Aussagen, die in Abschnitt 3.1 über die Schlussrelation \triangleright_{\circ} gezeigt wurden, gelten also auch in ihrer entsprechenden Form für \triangleright . Dies gilt insbesondere für Lemma 3.8, da es sich bei $X \times \mathbb{Q}$ um einen \mathbb{Q} -Vektorraum handelt.

Die Schlussrelation \triangleright lässt eine direkte, nicht-induktive Beschreibung zu.

SATZ 3.10. — *Es seien $(x_1, p_1), \dots, (x_k, p_k), (y, q) \in X \times \mathbb{Q}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (1) $(x_1, p_1), \dots, (x_k, p_k) \triangleright (y, q)$
- (2) *Es gibt $z_1, \dots, z_{\ell} \in X$ mit $\lambda(z_j) < 1$ für $1 \leq j \leq \ell$ sowie $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$ und $s_1, \dots, s_{\ell}, t \in \mathbb{N}$ sodass*

$$\sum_{i=1}^k r_i + \sum_{j=1}^{\ell} s_j > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k r_i(x_i, p_i) - \sum_{j=1}^{\ell} s_j(z_j, 1) = t(y, q).$$

Beweis. — Gemäß [34, Lemma 2.1] gilt $\{(x_i, p_i)\}_i \triangleright (y, q)$ genau dann, wenn es endlich viele z_j gibt mit $\lambda(z_j) < 1$ und derart, dass

$$\{(x_i, p_i)\}_i, \{-z_j, 1\}_j \triangleright_{\circ} (y, q).$$

Aufgrund Satz 3.3 ist dies wiederum gleichbedeutend mit dem in 2. behaupteten Umstand. \square

Bei der Beschreibung von Modellen von \triangleright in Abschnitt 4 werden die folgenden zusätzlichen Aussagen von Nutzen sein.

KOROLLAR 3.11. — *Es seien $x \in X$ und $p \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$\triangleright - (x, p) \quad \text{für } \lambda(x) < p.$$

Speziell $\triangleright(0, r)$ für $r < 0$.

Beweis. — Diese Aussage folgt direkt aus Satz 3.10, denn $\lambda(\frac{x}{p}) < 1$; man setze $z = \frac{x}{p}$ sowie $s = p$ und $t = 1$. \square

Als direkte Konsequenz ergibt sich das nächste Korollar. Es wird die Lokalisiertheit der in Abschnitt 4 betrachteten Dedekindschen Schnitte garantieren.

KOROLLAR 3.12. — *Seien $x \in X$ und $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$. Dann gilt*

$$(x, q) \triangleright (x, p)$$

Beweis. — Nach Korollar 3.11 gilt $\triangleright(0, p - q)$. Transitivität mit dem Axiom $(x, q), (0, p - q) \triangleright (x, p)$ liefert $(x, q) \triangleright (x, p)$. \square

Nach langer Vorbereitung kommen wir nun zur Definition der eingangs erwähnten Schlussrelation \vdash auf $X \times \mathbb{Q}$.

DEFINITION 3.13. — Sei \vdash die von folgenden Axiomen erzeugte Schlussrelation auf $X \times \mathbb{Q}$:

$$(x, p), -(x, p) \vdash \quad (\text{A1})$$

$$(x, p) + (y, q) \vdash (x, p), (y, q) \quad (\text{A2})$$

$$\vdash -(x, 1) \quad \text{für } \lambda(x) < 1 \quad (\text{A3})$$

Wie bei \triangleright zuvor interpretiert man mit dieser Schlussrelation ein Paar (x, p) als $\varphi(x) > p$ für ein lineares Funktional $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, das von der Halbnorm λ dominiert wird. Mit dieser Interpretation lesen sich die Axiome als:

$$\begin{aligned} \varphi(x) > p \wedge \varphi(x) < p &\rightarrow \perp \\ \varphi(x + y) > p + q &\rightarrow \varphi(x) > p \vee \varphi(y) > q \\ \lambda(x) < 1 &\rightarrow \varphi(x) < 1 \end{aligned}$$

Analog zu $\triangleright_{\circ} \subseteq \triangleright$ sieht man $\vdash_{\circ} \subseteq \vdash$. Alle für \vdash_{\circ} gezeigten Aussagen gelten also in entsprechender Form auch für \vdash . Insbesondere ist \vdash auch eine Erweiterung von \triangleright mit Zusatzaxiomen:

LEMMA 3.14. — Die Schlussrelation \vdash erweitert \triangleright mit folgenden Zusatzaxiomen:

$$0 \vdash \quad (\text{A0})$$

$$(x, p) + (y, q) \vdash (x, p), (y, q) \quad (\text{A2})$$

Dieses Lemma folgt direkt aus dem entsprechenden für \vdash_{\circ} und \triangleright_{\circ} (Lemma 3.6). Wie die Erweiterung \vdash_{\circ} über \triangleright_{\circ} (Satz 3.7) ist auch \vdash über \triangleright konservativ.

SATZ 3.15. — \vdash ist konservativ über \triangleright

Beweis. — Die Schlussrelation \triangleright geht aus \triangleright_{\circ} durch Hinzunahme von Axiomen $\triangleright - (x, 1)$ für $x \in X$ mit $\lambda(x) < 1$ hervor. Wie in [34, Lemma 2] gezeigt, vererbt sich die Konservativität von \vdash_{\circ} über \triangleright_{\circ} (Satz 3.7) auf \vdash_{\circ} über \triangleright . Konservativität der einwertigen Axiome $\vdash - (x, 1)$ über \triangleright ist trivial. Folglich ist \vdash konservativ über \triangleright . \square

Im Folgenden wird eine Eigenschaft bewiesen, die für die Betrachtung der Modelle von \vdash von Bedeutung ist. Sie garantiert die Lokalisiertheit der in Abschnitt 4 betrachteten Dedekindschen Schnitte.

LEMMA 3.16. — Seien $x \in X$ und $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$. Dann gilt

$$\vdash (x, p), -(x, q).$$

Beweis. — Nach Korollar 3.11 gilt $\triangleright(0, p - q)$. Da \vdash Erweiterung von \triangleright ist, folgt $\vdash(0, p - q)$. Transitivität mit $(0, p - q) \vdash (x, p), -(x, q)$ liefert $\vdash(x, p), -(x, q)$. \square

4. VON KRULL-LINDENBAUM ZU HAHN-BANACH

Coquand zeigt in [11], dass die Schlussrelation \vdash äquivalent zur Theorie $\mathbb{F}n X$ aus [28] ist. Modelle von $\mathbb{F}n X$ korrespondieren mit linearen Funktionalen $X \rightarrow \mathbb{R}$, wie in [28, S. 27 ff.] dargestellt. Diesen Weg möchten wir hier nicht beschreiten und zeigen stattdessen direkt, dass Modelle von \vdash (totalen) linearen Funktionalen entsprechen. Dabei wird auch deutlich werden, warum wir uns für die Definition

der reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte entschieden haben, an deren Definition wir rasch erinnern. Wir folgen [2, 3, 27]; siehe auch [44].

DEFINITION 4.1. — Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{Q}$ heißt *Dedekindscher Schnitt* falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1) $\exists r (r \in S) \wedge \exists r' (r' \notin S)$ (*beschränkt*)
- (2) $\forall r \in S \exists r' \in S (r < r')$ (*offen*)
- (3) $\forall r, s \in \mathbb{Q} (r < s \rightarrow r \in S \vee s \notin S)$ (*lokalisiert*)

Als Folge der Lokaliertheit ist jeder Dedekindsche Schnitt S *monoton*, d.h.

$$\forall r, s \in \mathbb{Q} (r < s \wedge s \in S \rightarrow r \in S)$$

Die Klasse \mathbb{R} der Dedekindschen Schnitte ist eine Menge in **CZF** [3, 2, 17, 1, 27].

Funktionale auf einem Unterraum lassen sich wie folgt als Modelle der einwertigen Schlussrelation \triangleright auffassen.

LEMMA 4.2. — *Es seien X ein reeller Vektorraum und $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Es sei ferner $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung auf einem linearen Unterraum $Y \subseteq X$, sodass $\varphi(y) \leq \lambda(y)$ für alle $y \in Y$. Die Teilmenge α_φ von $X \times \mathbb{Q}$ sei definiert durch $(x, p) \in \alpha_\varphi$ genau dann, wenn es $(y_1, q_1), \dots, (y_k, q_k) \in Y \times \mathbb{Q}$ derart gibt, dass $q_i < \varphi(y_i)$ und $\{(y_i, q_i)\}_i \triangleright (x, p)$. Dann ist α_φ ein echtes Modell von \triangleright .*

Beweis. — Es handelt sich bei α_φ um den Abschluss [33, 34] von

$$\{(y, q) \in Y \times \mathbb{Q} \mid q < \varphi(y)\},$$

mithin um ein Modell von \triangleright . Um zu zeigen, dass α_φ echt ist, bemühen wir Satz 3.10 und nehmen an, dass $0 \in \alpha_\varphi$. Dann gibt es $(y_1, q_1), \dots, (y_k, q_k) \in Y \times \mathbb{Q}$ mit $q_i < \varphi(y_i)$ sowie $z_1, \dots, z_\ell \in X$ mit $\lambda(z_j) < 1$ und $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_\ell \in \mathbb{N}$ sodass

$$\sum_{i=1}^k r_i + \sum_{j=1}^{\ell} s_j > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k r_i (y_i, q_i) = \sum_{j=1}^{\ell} s_j (z_j, 1).$$

Da

$$0 < \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{j=1}^{\ell} s_j = \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=1}^k r_i q_i = \sum_{i=1}^k r_i (1 + q_i),$$

gilt $r_i > 0$ für jeden falls ein i . Allerdings folgt dann

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j = \sum_{i=1}^k r_i q_i < \sum_{i=1}^k r_i \varphi(y_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^k r_i y_i\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{\ell} s_j z_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\ell} s_j \lambda(z_j) \leq \sum_{j=1}^{\ell} s_j,$$

ein klarer Widerspruch. □

Umgekehrt können aus Modellen der oben betrachteten Schlussrelationen auf $X \times \mathbb{Q}$ (partielle) lineare Funktionale konstruiert werden. Diese Konstruktion [39] ist mit gewissem Aufwand verbunden.

LEMMA 4.3. — *Es sei α ein echtes Modell von \triangleright . Für jedes $x \in X$ definiere*

$$L_\alpha(x) = \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists q > p (x, q) \in \alpha\}.$$

- (1) $L_\alpha(x)$ ist beschränkt und offen.
- (2) $L_\alpha(x)$ ist lokalisiert, wenn $\alpha \in \text{Mod}(\vdash)$.
- (3) Für alle $p \in L_\alpha(x)$ gilt $p < \lambda(x)$.

Beweis. — Wir bemerken zunächst, dass wenn $p \in L_\alpha(x)$, dann $(x, p) \in \alpha$ (Korollar 3.12). Ferner verwenden wir, dass ein Modell α von \triangleright genau dann echt ist, wenn $0 \notin \alpha$.

- (1) Man betrachte ein beliebiges $q > \lambda(-x)$. Gemäß Korollar 3.11 gilt dann $\triangleright(x, -q)$, also $(x, -q) \in \alpha$ da α ein Modell ist. Es folgt $p \in L_\alpha(x)$ für jedes $p < -q$, insbesondere ist $L_\alpha(x)$ bewohnt. Nun sei $p \in L_\alpha(-x)$, d.h. $(-x, q) \in \alpha$ für ein $q > p$. Wäre nun $-q \in L_\alpha(x)$, so wäre $(x, -q) \in \alpha$, also $0 \in \alpha$, jedoch ist α ein echtes Modell. Somit ist auch $\mathbb{Q} - L_\alpha(x)$ bewohnt. Für jedes $p \in L_\alpha(x)$, d.h. wann immer $(x, q) \in \alpha$ für ein $q > p$, ist auch $r = \frac{p+q}{2} \in L_\alpha(x)$; damit ist $L_\alpha(x)$ offen.
- (2) Seien $p, q \in \mathbb{Q}$ und $p < q$. Es ist zu zeigen dass $p \in L_\alpha(x)$ oder $q \notin L_\alpha(x)$. Gemäß Lemma 3.16 gilt nun $\vdash (x, \frac{p+q}{2}), -(x, q)$. Da α Modell von \vdash ist, wissen wir also, dass $(x, \frac{p+q}{2}) \in \alpha$ oder $-(x, q) \in \alpha$. Im ersten Fall folgt sofort $p \in L_\alpha(x)$. Der zweite Fall schließt $q \in L_\alpha(x)$ aus, denn es würde $(x, q) \in \alpha$ und daher $0 \in \alpha$ folgen.
- (3) Es sei $p \in L_\alpha(x)$, also $(x, q) \in \alpha$ für ein $q > p$. Kotransitivität der Ordnung von \mathbb{R} liefert $p < \lambda(x)$ oder $\lambda(x) < q$. Es reicht also den zweiten Fall auszuschließen. In der Tat, nach Korollar 3.11 hätte dieser Fall $\triangleright - (x, q)$ und damit $-(x, q) \in \alpha$ zur Folge, weshalb dann $0 \in \alpha$ gälte. \square

SATZ 4.4 (Hahn-Banach, ZFC). — *Es seien X ein reeller Vektorraum, $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm, $Y \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\varphi \leq \lambda|_Y$. Dann gibt es ein lineares Funktional $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi \leq \lambda$ und $\psi|_Y = \varphi$.*

Beweis. — Wir verwenden das in Lemma 4.2 beschriebene echte Modell α_φ . Nach Satz 2.2 und Satz 3.15 existiert eine Fortsetzung $\alpha_\varphi \subseteq \beta \in \text{Mod}(\vdash)$. Mit Lemma 4.3 definieren wir

$$\psi: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto L_\beta(x).$$

Als Funktion ist ψ wohldefiniert und dominiert von λ . Unter Zuhilfenahme klassischer Argumente vergewissert man sich ferner der \mathbb{R} -Linearität dieser Abbildung [39].⁴ Es verbleibt zu zeigen, dass es sich um eine Fortsetzung von φ handelt, d.h. $\psi|_Y = \varphi$. Sei daher $y \in Y$. Zu zeigen:

$$\forall p \in \mathbb{Q} (p \in L_\beta(y) \leftrightarrow p < \varphi(y))$$

Dazu sei einerseits $p \in L_\beta(y)$, d.h. es gibt $q > p$ mit $(y, q) \in \beta$. Kotransitivität liefert $p < \varphi(y)$ oder $\varphi(y) < q$ und es reicht, den zweiten Fall auszuschließen: nach Lemma 4.2 gälte $-(y, q) \in \alpha_\varphi \subseteq \beta$, folglich $0 \in \beta$. Andererseits sei nun $p < \varphi(y)$ und wir zeigen $p \in L_\beta(y)$. Es gibt q mit $p < q < \varphi(y)$, also $(y, q) \in \alpha_\varphi \subseteq \beta$ und daher $p \in L_\beta(y)$, was zu zeigen war. \square

Bemerkung 4.5. — Ein alternativer Beweis des Satzes von Hahn-Banach verwendet den Begriff einer konservativen Interpretation mehrwertiger Schlussrelationen [12, 8, 11]. Man betrachtet hierfür die Relation \vdash_Y auf $Y \times \mathbb{Q}$ und die Relation \vdash_X auf $X \times \mathbb{Q}$. Die Einbettung $Y \subseteq X$ liefert dann eine *Interpretation*

$$\iota: (Y \times \mathbb{Q}, \vdash_Y) \rightarrow (X \times \mathbb{Q}, \vdash_X),$$

⁴Man beachte hierbei, dass jede Anwendung des universellen Satzes von Krull-Lindenbaum über **CZF** klassische Logik erzwingt, siehe hierzu [34, Proposition 4].

d.h. $U \vdash_Y V$ impliziert $\iota(U) \vdash_X \iota(V)$. Aufgrund einer zur Verfügung stehenden nicht-induktiven und algebraischen Beschreibung dieser Schlussrelationen [8] handelt es sich sogar um eine Äquivalenz. Man sagt in einem solchem Fall, die Interpretation sei *konservativ*. Jede konservative Interpretation induziert eine surjektive Abbildung zwischen Modellklassen [12]:

$$\iota^*: \text{Mod}(\vdash_X) \rightarrow \text{Mod}(\vdash_Y), \quad \beta \mapsto \iota^{-1}(\beta).$$

Das zu erweiternde Funktional φ wird nun mit einem Modell α_φ von \vdash_Y identifiziert. Es existiert dann ein Urbild $\beta \in \text{Mod}(\vdash_X)$ unter ι^* . Jedes solche β kann mit einem Funktional $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ identifiziert werden, welches die gesetzten Anforderungen erfüllt (dominierte Fortsetzung). Dieser Ansatz ist auch zielführend für eine konstruktive Version des Erweiterungssatzes von Sikorski [36].

ACKNOWLEDGEMENTS

While partial support has come from the programme “Dipartimenti di Eccellenza 2018-2022” of the Italian Ministry of Education, Universities and Research (MIUR), this research was carried out within the project “Categorical localisation: methods and foundations” (CATLOC) funded by the Università degli Studi di Verona within the programme “Ricerca di Base 2015”; and within the project “A New Dawn of Intuitionism: Mathematical and Philosophical Advances” (ID 60842) funded by the John Templeton Foundation.⁵ The final version of this manuscript was prepared when the second and third author were visiting the Hausdorff Research Institute for Mathematics at Universität Bonn during the Trimester Program “Types, Sets and Constructions”. The authors sincerely appreciate the anonymous referee’s effort to give very precise, constructive and valuable remarks. Last but not least, the authors are grateful to Helmut Schwichtenberg for continuous support and advice.

LITERATUR

- [1] Peter Aczel, Laura Crosilla, Hajime Ishihara, Erik Palmgren, and Peter Schuster. Binary refinement implies discrete exponentiation. *Studia Logica*, 84(3):361–368, 2006.
- [2] Peter Aczel and Michael Rathjen. Notes on constructive set theory. Technical report, Institut Mittag-Leffler, 2000/01. Report No. 40.
- [3] Peter Aczel and Michael Rathjen. Constructive set theory. Book draft, 2010.
- [4] Errett Bishop. *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [5] Errett Bishop and Douglas Bridges. *Constructive Analysis*. Springer, Berlin, 1985.
- [6] Douglas Bridges and Fred Richman. *Varieties of Constructive Mathematics*, volume 97 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [7] Douglas S. Bridges and Luminita Simona Vita. *Techniques of Constructive Analysis*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [8] Jan Cederquist and Thierry Coquand. Entailment relations and distributive lattices. In Samuel R. Buss, Petr Hájek, and Pavel Pudlák, editors, *Logic Colloquium ’98: Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Prague, Czech Republic, August 9–15, 1998*, volume 13 of *Lect. Notes Logic*, pp. 127–139. AK Peters/Springer, 2000.
- [9] Jan Cederquist, Thierry Coquand, and Sara Negri. The Hahn-Banach Theorem in Type Theory. In Giovanni Sambin and Jan M. Smith, editors, *Twenty-Five Years of Constructive Type Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1998.

⁵The opinions expressed in this publication are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the John Templeton Foundation.

- [10] Thierry Coquand. Two applications of Boolean models. *Arch. Math. Logic*, 37(3):143–147, 1998.
- [11] Thierry Coquand. A direct proof of the localic Hahn-Banach theorem, 2000. <http://www.cse.chalmers.se/~coquand/hahn.ps>
- [12] Thierry Coquand. Topology and sequent calculus. Conference presentation, June 2000. Topology in Computer Science: Constructivity; Asymmetry and Partiality; Digitization. Dagstuhl. <http://www.cse.chalmers.se/~coquand/sequents.ps>
- [13] Thierry Coquand. Geometric Hahn-Banach theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 140(2):313–315, 2006.
- [14] Thierry Coquand, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. Lattice-ordered groups generated by an ordered group and regular systems of ideals. *Rocky Mountain J. Math.* Forthcoming, 2019.
- [15] Thierry Coquand and Stefan Neuwirth. An introduction to Lorenzen’s “Algebraic and logistic investigations on free lattices” (1951). Preprint, 2017. <https://arxiv.org/pdf/1711.06139.pdf>
- [16] Michel Coste, Henri Lombardi, and Marie-Françoise Roy. Dynamical method in algebra: effective Nullstellensätze. *Ann. Pure Appl. Logic*, 111(3):203–256, 2001.
- [17] Laura Crosilla, Hajime Ishihara, and Peter Schuster. On constructing completions. *J. Symbolic Logic*, 70(3):969–978, 2005.
- [18] Giulio Fellin. The Jacobson Radical: from Algebra to Logic. Master’s thesis. Università di Verona, Dipartimento di Informatica, 2018.
- [19] Giulio Fellin, Peter Schuster, and Daniel Wessel. The Jacobson radical of a propositional theory. Submitted, 2019.
- [20] László Fuchs. *Partially Ordered Algebraic Systems*. Dover Publications, Mineola, New York, 2011.
- [21] Paul Howard and Jean E. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*, volume 59 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [22] Hajime Ishihara. On the constructive Hahn-Banach theorem. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 21(1):79–81, 1989.
- [23] Hajime Ishihara. An omniscience principle, the König lemma and the Hahn-Banach theorem. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 36(3):237–240, 1990.
- [24] Hajime Ishihara. Constructive functional analysis: an introduction. In Klaus Mainzer, Peter Schuster, and Helmut Schwichtenberg, editors, *Proof and Computation. Autumn School, Fischbachau, October 2016*. World Scientific, Singapore, 2018.
- [25] Henri Lombardi and Claude Quitté. *Commutative Algebra: Constructive Methods: Finite Projective Modules*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2015.
- [26] Paul Lorenzen. Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. *J. Symbolic Logic*, 16(2):81–106, 1951.
- [27] Robert S. Lubarsky and Michael Rathjen. On the constructive Dedekind reals. *Log. Anal.*, 1(2):131–152, 2008.
- [28] Christopher J. Mulvey and Joan Wick-Pelletier. A globalization of the Hahn-Banach theorem. *Adv. Math.*, 89:1–59, 1991.
- [29] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. The Hahn-Banach theorem: the life and times. *Topology Appl.*, 77(2):193–211, 1997.
- [30] Sara Negri, Jan von Plato, and Thierry Coquand. Proof-theoretical analysis of order relations. *Arch. Math. Logic*, 43:297–309, 2004.
- [31] Thomas Powell, Peter Schuster, and Franziskus Wiesnet. An algorithmic approach to the existence of ideal objects in commutative algebra. In Rosalie Iemhoff, Michael Moortgat, and Ruy de Queiroz, editors, *26th Workshop on Logic, Language, Information and Computation (WoLLIC 2019), Utrecht, Netherlands, 2–5 July 2019, Proceedings*, volume 11541 of *Lect. Notes Comput. Sci.*, pp. 533–549. Springer-Verlag, Berlin, 2019.
- [32] Davide Rinaldi and Peter Schuster. A universal Krull-Lindenbaum theorem. *J. Pure Appl. Algebra*, 220(9):3207–3232, 2016.
- [33] Davide Rinaldi, Peter Schuster, and Daniel Wessel. Eliminating disjunctions by disjunction elimination. *Bull. Symbolic Logic*, 23(2):181–200, 2017.

- [34] Davide Rinaldi, Peter Schuster, and Daniel Wessel. Eliminating disjunctions by disjunction elimination. *Indag. Math. (N.S.)*, 29(1):226–259, 2018.
- [35] Davide Rinaldi and Daniel Wessel. Cut elimination for entailment relations. *Arch. Math. Logic*, 58(5–6):605–625, 2019.
- [36] Davide Rinaldi and Daniel Wessel. Extension by conservation. Sikorski’s theorem. *Log. Methods Comput. Sci.*, 14(4:8):1–17, 2018.
- [37] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [38] Giovanni Sambin. Some points in formal topology. *Theoret. Comput. Sci.*, 305(1-3):347–408, 2003.
- [39] Konstantin Schlagbauer. Ein syntaktischer Zugang zu Erweiterungssätzen. Master’s thesis. Ludwig-Maximilians-Universität München, Mathematisches Institut, 2017.
- [40] Helmut Schwichtenberg. Minimal from classical proofs. In E. Börger et al., editors, *Computer Science Logic. 5th Workshop, CSL ’91, Berne, Switzerland, October 7-11, 1991, Proceedings*, volume 626 of *Lect. Notes Comput. Sci.*, pp. 326–328. Springer, Berlin, 1992.
- [41] Dana Scott. Completeness and axiomatizability in many-valued logic. In Leon Henkin, John Addison, C.C. Chang, William Craig, Dana Scott, and Robert Vaught, editors, *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*, pp. 411–435. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
- [42] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.
- [43] D. J. Shoesmith and T. J. Smiley. *Multiple-Conclusion Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [44] Anne S. Troelstra and Dirk van Dalen. *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, volume 121 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier Science, 1988.
- [45] Daniel Wessel. A note on connected reduced rings. *J. Comm. Algebra*. Forthcoming, 2019.
- [46] Daniel Wessel. Ordering groups constructively. *Comm. Algebra*. Forthcoming, 2019.
- [47] Ihsen Yengui. Making the use of maximal ideals constructive. *Theoret. Comput. Sci.*, 392:174–178, 2008.
- [48] Ihsen Yengui. *Constructive commutative algebra. Projective modules over polynomial rings and dynamical Gröbner bases*, volume 2138 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2015.

Manuscript received July 17, 2018,
revised November 28, 2018,
accepted December 7, 2018.

Konstantin SCHLAGBAUER

Temporary address: Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstraße 39,
80333 München, Germany

k.schlagbauer@outlook.de

Peter SCHUSTER & Daniel WESSEL

Università degli Studi di Verona, Dipartimento di Informatica, Strada le Grazie 15, 37134
Verona, Italy

peter.schuster@univr.it (Corresponding author)

daniel.wessel@univr.it