

# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 5

Ende Februar 1925

Heft 1

## Inhalt:

	Seite		Seite
Hauptaufsätze. A. Lauck: Der Ueberfall über ein Wehr . . . . .	1	graphie der allgemeinen Gleichungen dritten Grades . . . . .	78
H. Wagner: Ueber die Entstehung des dynamischen Antriebes von Tragflügeln . . . . .	17	Buchbesprechungen. Lacmann: Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. — Werkmeister: Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie). — Konorski: Die Grundlagen der Nomographie. — Przi Bram: Aufbau mathematischer Biologie. — Study: Mathematik und Physik. — Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik. — Jung: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. — Lietzmann: Methodik des mathematischen Unterrichts. — Gerlach: Materie, Elektrizität, Energie. — Lorenz: Lehrbuch der Technischen Physik . . . . .	83
H. Blenk: Der Eindecker als tragende Wirbelfläche . . . . .	36	Nachrichten . . . . .	87
F. Sperschneider: Ueber ebene, statisch bestimmte Fachwerke im Drehkraftfeld (astatisches Gleichgewicht) . . . . .	48	Zuschrift an den Herausgeber . . . . .	88
E. Trefftz: Ueber die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Ueberschreitung der Fließgrenze . . . . .	64		
A. P. Book: Die kleinsten Kosten . . . . .	73		
Kleine Mitteilungen. Dresden: Ueber das Vordellen beim Walzen. — Sotoff: Zur Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Stab. — Ikeda: Ueber die Nullstellen der Besselschen Funktionen. — Schenkel: Zur Nomo-			

## HAUPTAUFSÄTZE

### Der Überfall über ein Wehr.

Von AUGUST LAUCK in Pforzheim.<sup>1)</sup>

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.)

In der Lehre von der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten gehören die Ausflußstrahlen und Wehrüberfälle zu denjenigen Erscheinungen, bei denen die Voraussetzungen der Eulerschen Bewegungsgleichungen in bester Uebereinstimmung mit der Erfahrung stehen. Allerdings ist die Auflösung dieser Gleichungen im Einzelfall nur möglich, wenn das Problem weitgehende Vereinfachungen für die mathematische Behandlung zuläßt. Bei den genannten Erscheinungen ist es wesentlich, daß längs des freien Strahls die Begrenzung der Flüssigkeit nicht mehr gegeben ist, sondern erst auf Grund der für sie geltenden Druckbedingungen errechnet werden muß. Für den Fall, daß die Bewegung zweidimensional ist, hat Helmholtz das Verfahren der konformen Abbildung aus der Funktionentheorie der Behandlung hydrodynamischer Probleme dienstbar gemacht und damit einen Weg gezeigt, auf dem man zu exakten Lösungen von Strahlproblemen kommen kann. Klassisch geworden ist der von Kirchhoff<sup>2)</sup> auf Grund dieser Methode behandelte Ausfluß aus einem unendlich langen schmalen Spalt im Boden eines unendlich großen Gefäßes. Die Berechnung der Strahlform führt zu einem Ausdruck, der nur elementare Funktionen enthält; das getundene Strahlbild selbst zeigt die Eigentümlichkeit des sich nach Verlassen der Öffnung zusammenziehenden Strahls, genau wie man es bei wirklichen Ausflüssen beobachtet. In den empirischen Formeln für die Ausflußmenge hat man von jeher dieser Erscheinung durch Einführung einer »Kontraktions- oder Ausflußzahl«  $\varphi < 1$  Rechnung getragen, für deren Größe man fast ausschließlich auf Versuchsergebnisse angewiesen war. Beim Kirchhoffschen Strahl ergab sich nun für diese Zahl der Wert  $\varphi = 0,611$  in sehr guter Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Neuerdings hat

<sup>1)</sup> Von der philos. Fakultät der Universität Berlin angenommene Doktor-Dissertation des Verfassers. Referenten: Prof. Dr. v. Mises und Prof. Dr. Bieberbach.

<sup>2)</sup> Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, ges. Abhandlungen, S. 416.

v. Mises<sup>1)</sup> das Helmholtz-Kirchhoffsche Verfahren für die Berechnung von Ausflußzahlen bei ebenwandigen Gefäßen verschiedener Gestalt mit beliebigen endlichen Abmessungen ausgebaut. Auch hier deckten sich die errechneten Werte sehr gut mit den bekannten Erfahrungswerten.

Indessen ist die mathematische Durchführung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie nur möglich, wenn man eine wesentlich vereinfachende Annahme machen darf, nämlich die, daß die unmittelbare Wirkung der Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Tatsächlich ist diese Voraussetzung durchaus berechtigt, wenn der Strahl aus dem Boden eines Gefäßes senkrecht nach unten austritt. Die Schwerkraft wirkt hier nämlich in der Strahlrichtung und verändert die Ausflußgeschwindigkeit in nächster Nähe der Öffnung verhältnismäßig so wenig, daß sich dort das Strömungsbild des schweren Strahls bei nicht zu geringer Höhe des Wasserspiegels über der Öffnung stark dem Bild des schwerelosen Strahls nähert. Die Zusammenziehung des Strahls, auf die sich bei derartigen Aufgaben das Augenmerk richtet, spielt sich nun, wie man weiß, gerade in nächster Nähe der Öffnung ab.

Ganz anders liegen aber die Verhältnisse bei seitlichem Austritt und bei Ueberfällen. Hier beeinflußt die Schwere von Anfang an die Gestalt des Strahles so bedeutend, daß von einer Vernachlässigung zunächst nicht die Rede sein kann. Merkwürdigerweise sprechen nun die Versuchsergebnisse dafür, daß die Ausflußzahl auch in diesen Fällen von der Schwere unabhängig sei. Mit Benutzung dieser Annahme hat v. Mises sein Verfahren auch auf seitlichen Austritt und ganz besonders auch auf Ueberfälle ausgedehnt und weitgehende Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Rechnung und den bekanntesten und genauesten Versuchsergebnissen gefunden.

Es ist nun gewiß von Interesse, durch tatsächliche Berechnung eines schweren Strahls auf mathematischem Weg nachzuweisen, daß die genannte Annahme zutrifft. Als praktisch wichtiges Beispiel hierfür bietet sich die Strömung über das unendliche hohe, senkrechte und scharfkantige Wehr dar, und die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die Strahlform und die Ueberfallzahl eines solchen Wehrüberfalls auf den Grundlagen der klassischen Theorie idealer Flüssigkeiten, aber unter ausdrücklicher Berücksichtigung der Schwerkraft zu bestimmen. Entsprechend dieser Theorie wird man auf ein Problem der konformen Abbildung geführt. Um ihm beizukommen, wird im folgenden zunächst aus der partiellen Differentialgleichung  $\Delta P = 0$  mit ihren Randbedingungen eine einzige nicht lineare Integrodifferentialgleichung gebildet, die nur Randwerte enthält, und diese unter Benutzung zeichnerischer Methoden durch Näherungsergebnisse numerisch aufgelöst. Die so ermittelte Kontraktionszahl stimmt innerhalb der Genauigkeitsergrenzen des Verfahrens mit der Kirchhoffschen und mit der aus Versuchen bekannten überein.

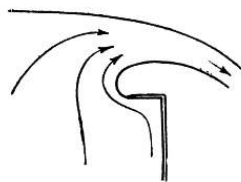


Abb. 1.

**1. Bisherige Lösungsversuche.** Ueber die bisher bekannt gewordenen Ansätze, die den Wehrüberfall als schweren Strahl behandeln, ist nicht viel zu sagen. Alle diese Untersuchungen müssen zur Umgehung der großen mathematischen Schwierigkeit, welche durch die Berücksichtigung der Schwerkraft bedingt wird, besondere Annahmen zu Hilfe nehmen, die zum Teil weit über die Voraussetzungen hinausgehen, welche den klassischen Gleichungen der Hydrodynamik zugrunde liegen. So ging Boussinesq<sup>2)</sup> von der Anordnung der Abb. 1 aus, die an das Bordasche Mundstück erinnert. Das Verfahren verwendet den Impulsatz, benötigt aber außerdem noch einige besondere willkürliche Annahmen. Durch eine gewagte Voraussetzung dehnt Boussinesq das Verfahren auf eine ungebrochene lotrechte Wand aus. Immerhin sind die Ergebnisse ziemlich im Einklang mit der Erfahrung.

Unter der Annahme, daß der obere Strahlrand durch eine gewisse einfache Funktion dargestellt wird, führt Blasius<sup>3)</sup> die Lösung mit konformen Abbildungen durch. Allein der gefundene Strahl erfüllt an der unteren Begrenzung nicht die Geschwindigkeitsbedingung. Ueberdies ist auf diese Weise die Berechnung der Ausflußzahl kaum mög-

<sup>1)</sup> E. v. Mises, Berechnung von Ausfluß- und Ueberfallzahlen, Zeitschr. d. VDI 1917, S. 447 ff.

<sup>2)</sup> Ph. Forchheimer, Hydraulik, Nr. 86, S. 306.

<sup>3)</sup> Blasius, Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 58

lich, da die Stelle der Strömung, die mit dem Querschnitt am Wehr identifiziert werden soll, ganz unbestimmt bleibt. Der von Blasius gefundene Wert ist den Beobachtungen gegenüber viel zu hoch.

Für den Fall, daß die obere Strahlgrenze zeichnerisch gegeben ist, kann man nach Forebheimer<sup>1)</sup> und Runge<sup>2)</sup> die Strömung zeichnerisch darstellen. Die Geschwindigkeit jedes Randpunktes ist nämlich, wie wir später noch sehen werden, eine einfache Funktion der Höhe unter dem Oberwasserspiegel und ist somit bekannt. Durch Integration findet man wie in Abschnitt 5 die Werte des Geschwindigkeitspotentials auf diesem Rand. Nach bekannten Verfahren<sup>3)</sup> kann man die nächst benachbarte Stromlinie zeichnerisch finden, so daß der Differentialgleichung des Problems genügt wird. In dieser Weise fährt man fort, bis man eine Stromlinie findet, die sich einer passenden Wehrform nähert; diese wird dann die untere Begrenzung. Auch hier wird also das eigentliche Problem des oben und unten freien Strahles nicht gelöst.

**2. Das Problem als Randwertaufgabe von  $\Delta P = 0$ .** Die physikalischen Voraussetzungen des zu behandelnden Ueberfalls seien die folgenden:

1. Eine unendliche Flüssigkeitsmenge (z. B. ein großer tiefer See) sei auf der einen Seite durch eine senkrechte Ebene, das Wehr, begrenzt. Die scharfe obere Kante, die Wehrkrone, liege in der Entfernung  $H$  (Ueberfallhöhe) unter dem Seespiegel (Abb. 2).
2. Die Flüssigkeit sei nicht zusammendrückbar.
3. Alle Teilchen sollen sich parallel einer festen Ebene, die senkrecht zur Wehrkrone verläuft, bewegen (ebenes Problem).
4. Die Bewegung sei zeitlich unveränderlich.
5. Die Bewegung sei wirbelfrei.
6. Die Reibung werde vernachlässigt.
7. Äußere Kräfte sind nur Schwerkraft und Luftdruck.

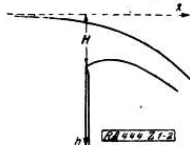


Abb. 2.

Wegen der Voraussetzungen 2 und 5 folgt aus den Eulerschen Gleichungen die Bernoullische Stromgleichung, die besagt, daß längs einer Stromlinie

$$\frac{v^2}{2g} - h + \frac{p}{\gamma} = \text{konst} = \frac{v_0^2}{2g} - h_0 + \frac{p_0}{\gamma} \dots \dots \dots (1).$$

Darin bedeutet  $v$  die Geschwindigkeit eines Teilchens,  $h$  (positiv nach unten gemessen!) seine Tiefe unter dem Oberwasserspiegel,  $p$  den Druck und  $\gamma$  das spezifische Gewicht. Aus 5. folgt dann, daß die Konstante für alle Stromlinien denselben Wert hat.

Zur »Energiegleichung« (1) muß noch die sogenannte »Kontinuitätsgleichung« treten. Da Punkt 5 auch das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials  $P$  bedingt, so hat diese die einfache Gestalt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial h^2} = \Delta P = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Die Konstante der Gl. (1) bestimmt sich folgendermaßen: Weit oberhalb des Wehres (nach Bazin schon in einer Entfernung  $3H$ ) ist die Flüssigkeit praktisch in Ruhe; demnach ist dort an der Wasseroberfläche  $v_0 = 0$ ,  $h_0 = 0$  und  $p_0 = p_1$ , wo  $p_1$  den Luftdruck bedeutet. Für die gesamte freie Begrenzung, für welche  $p = p_1$  ist, ergibt sich daher  $\frac{v^2}{2g} - h = 0$ , also

$$v = \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (3),$$

d. h. auf dem freien Rand ist die Geschwindigkeit eine Funktion des Abstands von der Spiegelebene des Oberwassers. Gl. (3) ist somit eine Randbedingung. Hierzu tritt noch eine weitere:

$$v_n = \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \dots \dots \dots (4),$$

die besagt, daß für die gesamte Begrenzung einschließlich der festen Grenze der Geschwindigkeitsanteil senkrecht zur Grenze verschwinden muß.

<sup>1)</sup> Siehe Anm. 2 auf S. 2.

<sup>2)</sup> C. Runge-Willers, Enzykl. d. math. Wiss. II, 3, Heft 2, S. 165.

<sup>3)</sup> C. Runge, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1911, S. 431. — R. v. Mises, Theorie der Wasserräder, Leipzig 1908, S. 49 ff.

Bevor wir aber diese Ergebnisse zusammenstellen, ist es zweckmäßig, eine Dimensionsbetrachtung über die vorkommenden Größen einzuschalten. Da die Differentialgleichung (2) homogen ist, so folgt, daß jedes endliche Vielfache von  $P$  ebenfalls Lösung sein kann. Ist nun der Maßstab in der  $x, h$  Ebene durch Angabe der Ueberfallhöhe  $H$  festgelegt, so liefert (3) die Beziehung zwischen diesem und dem von  $P$ , wenn man schreibt:

$$v = \frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{2gh},$$

also

$$P = \sqrt{2g} \int_{s_0}^s \sqrt{Vh} ds \dots \dots \dots (5),$$

wo  $ds$  das Bogenelement auf dem Strahlrand ist.

Nehmen wir einmal an,  $P$  wäre diejenige partikuläre Lösung von  $\Delta P = 0$ , welche zu der Strahlform mit der Ueberfallhöhe 1 gehört. Verändern wir nun alle Abmessungen des Strahls durch Multiplikation mit einer Konstanten  $H$ , so ergibt sich für einen ähnlichen Strahl mit der Ueberfallhöhe  $H$ :

$$P_H = H^{3/2} \sqrt{2g} \int_{s_0}^s \sqrt{Vh} ds = H^{3/2} P \dots \dots \dots (6).$$

$P_H$  ist also ein konstantes Vielfaches von  $P$  und genügt deshalb der Gleichung  $\Delta P = 0$ . Der ähnliche Strahl mit der Ueberfallhöhe  $H$  stellt also ebenfalls eine mögliche Strömung dar, d. h. alle Strahlformen sind einander ähnlich. Nach Bazins Strahlungsmessungen stimmt das gut mit der Erfahrung überein<sup>1)</sup>.

Da  $P$  doch nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt zu werden braucht, so kann man noch weiter gehen und statt  $P$  den Wert  $P^* = \frac{P}{\sqrt{2g}}$  in die Differentialgleichung einführen. Aus (5) wird dann

$$P^* = \frac{P}{\sqrt{2g}} = \int_{s_0}^s \sqrt{Vh} ds.$$

Durch diese Festsetzung wird an der Strahlform nichts geändert und  $P^*$  muß wieder als konstantes Vielfaches von  $P$  der Gleichung  $\Delta P = 0$  genügen, gleichgültig wie groß  $g$  ist. Daraus folgt: Die Form des Strahls ist unabhängig von der Größe der Schwerebeschleunigung. Beobachtungen hierzu fehlen natürlich aus praktischen Gründen. Statt  $P^*$  kann man, was auf dasselbe herauskommt,  $P$  schreiben und vereinbaren, daß  $\sqrt{2g} = 1$  zu setzen ist. Die wahren  $P$ -Werte ergeben sich dann am Schluß durch Multiplikation mit  $\sqrt{2g}$ .

Durch die Festsetzung  $\sqrt{2g} = 1$  nimmt die Randbedingung (3) die einfache Form  $v = \frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{h}$  an, und es ist somit folgende Aufgabe zu lösen:

Gesucht wird eine Funktion  $P(x, h)$ , welche der Gleichung  $\Delta P = 0$  genügt und für welche längs der gesamten Begrenzung  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$  ist. Die feste Grenze ist gegeben:  $x = 0$ ;  $h \geq H$ . Die unbekanntere freie Grenze ist so zu bestimmen, daß längs ihr  $\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{h}$  wird.

**3. Die konforme Abbildung beim Kirchhoffschen Ausflußstrahl.** Der in der Einleitung erwähnte schwerelose Kirchhoffsche Ausflußstrahl führt auf genau dieselbe Differentialgleichung (2) und auf ähnliche Randbedingungen. Die Ähnlichkeit der beiden Probleme wird noch auffälliger, wenn man etwa den linken halben Ausflußstrahl der Abbildung 3a im positiven Sinn um 90 Grad dreht und mit Abb. 5a vergleicht. Man könnte dann im Falle von 3a geradezu von einem schwerelosen Ueberfall sprechen. Der Unterschied liegt vor allem in der Verschiedenheit der Randbedingungen für die freie Grenze. Für den Ausflußstrahl folgt nämlich aus (1) für  $g = 0$  ohne weiteres die Randbedingung  $v = \text{konst.} = 1$ . Mit Rücksicht auf die teilweise Übereinstimmung der beiden Probleme

<sup>1)</sup> Keller, Zeitschr. d. VDI Bd. 84 (1890), S. 888.

dürfte es sich daher empfehlen, den gedanklichen Inhalt des Helmholtz-Kirchhoffschen Verfahrens kurz darzulegen.

Die Gleichung (2) besagt, daß man das Geschwindigkeitspotential  $P$  als reellen Teil einer analytischen Funktion  $W(z) = P + iQ$  deuten kann. Die zugeordnete Funktion  $Q$ , die »Stromfunktion«, ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre Ableitung nach einer Richtung die hierzu senkrechte Geschwindigkeitskomponente liefert. Hiernach läßt sich  $Q$  so deuten: Die Linien  $Q = \text{konst.}$  sind Stromlinien, und der Unterschied der  $Q$ -Werte auf zwei solchen Linien mißt die in der Zeiteinheit zwischen ihnen durchfließende Wassermenge. Wegen (4) ist für die gesamte Begrenzung  $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$ , d. h.  $Q = \text{konst.}$ , d. h. die Randlinien müssen Stromlinien sein.

Wenn wir vorübergehend  $-h = y$  setzen, so können wir die  $x, y$ -Ebene der Abb. 3a als Ebene der komplexen Zahl  $z = x + iy$  deuten, und das Strahlbild der  $z$ -Ebene wird eine konforme Abbildung eines zwischen zwei Parallelen  $Q = \text{konst.}$  liegenden Streifens der  $W$ -Ebene. Vermittelt wird die Abbildung durch eine Funktion  $W(z)$ , deren reeller Teil die gesuchte Funktion  $P(x, y)$  ist. Damit ist die Lösung der Gleichung  $\Delta P = 0$  auf eine konforme Abbildung zurückgeführt. Die Schwierigkeit liegt nun darin, daß der gestrichelte Teil der Begrenzung in Fig. 3a nicht bekannt ist.

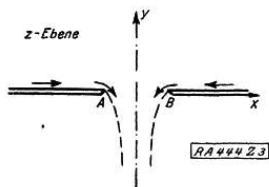


Abb. 3a.

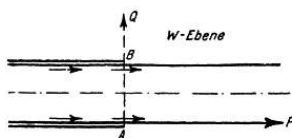


Abb. 3b.

Die Lösung gelingt nun beim Ausflußstrahl auf folgende Weise: Differenziert man  $W$  nach  $z$ , so ist die Ableitung  $\zeta = \frac{dW}{dz}$  wieder eine Funktion von  $z$  bzw. von  $W$ ; infolgedessen ist auch die Ebene der Zahl  $\zeta$  auf diejenigen von  $z$  bzw.  $W$  konform abbildbar. Das Bild in der  $\zeta$ -Ebene ist aber nichts anderes als der sogenannte Geschwindigkeitsplan, den man erhält, wenn man vom Anfangspunkt der  $\zeta$ -Ebene aus für jeden in Frage kommenden Punkt der  $z$ -Ebene die Geschwindigkeit nach Richtung und Größe (gespiegelt an der  $x$ -Achse) aufzeichnet. Nun ist längs der geradlinigen festen Grenzen die Geschwindigkeit wohl der Richtung, aber nicht der Größe nach bekannt; für die freie Grenze ist infolge der Randbedingung  $v = 1$  gerade die Größe, dafür aber nicht die Richtung gegeben. Man sieht leicht, daß man demnach die Begrenzung des Bildes in der  $\zeta$ -Ebene vollständig angeben kann: Es ist der Halbkreis der Abb. 4. Die Abbildung dieses Halbkreises auf den Streifen der  $W$ -Ebene ist nun exakt durchführbar, d. h. man kann die abbildende Funktion  $\zeta(W)$  angeben. Da  $\zeta = \frac{dW}{dz}$  ist, so liefert die Integration schließlich die Funktion  $W(z)$ . Ihr reeller Teil  $P(x, y)$  wäre dann die geforderte Lösung der Differentialgleichung  $\Delta P = 0$ . Meist bestimmt man aber statt  $W(z)$  die Umkehrfunktion  $z(W)$ . Sie lautet<sup>1)</sup>.

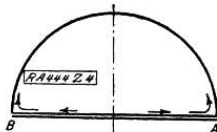


Abb. 4.

$$z(W) = 1 - e^{-W} - \sqrt{e^{-2W} - 1} + \text{arc tg } \sqrt{e^{-2W} - 1} \dots (7).$$

Trennung von reell und imaginär liefert zwei Gleichungen für  $x$  und  $y$ . Damit ist das Kirchhoffsche Ausflußproblem vollständig gelöst.

<sup>1)</sup> Vergl. z. B. G. Holzmüller: Ingenieur-Mathematik, II. Teil (Leipzig 1898), S. 287.

**4. Die Integrodifferentialgleichung des Ueberfallproblems.** Es fragt sich jetzt, wie weit das geschilderte Verfahren für den Wehrüberfall brauchbar ist. Zunächst sehen die Bilder der  $z$ - und  $W$ -Ebene etwa folgendermaßen aus (Abb. 5a und b):

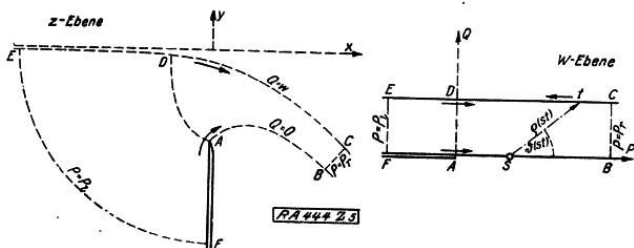


Abb. 5a und 5b.

Ueber die Konstanten ist so verfügt, daß auf der unteren Strahlengrenze  $Q = 0$  und an der Wehrkrone  $A$  das Potential  $P = 0$  ist. Unsere Aufgabe kann jetzt so ausgesprochen werden: Es ist diejenige analytische Funktion  $z(W)$  gesucht, durch welche der Streifen der  $W$ -Ebene in das Strömungsbild der  $z$ -Ebene abgebildet wird. (Abb. 5.)

Den Geschwindigkeitsplan wie im vorigen Abschnitt zu zeichnen, ist aber hier bezüglich der freien Grenze nicht mehr möglich. Zwar sagt die Randbedingung, daß  $v = \sqrt{-y}$ , indessen ist ja  $-y$  nicht bekannt, da der Strahlrand nicht gegeben ist. Es liegt deshalb der Gedanke nahe, zu versuchen, die abbildende Funktion  $z(W)$  auf unmittelbarem Wege zu bestimmen. Zu diesem Zweck begrenzen wir die Bereiche in den beiden Ebenen rechts und links durch genügend weit gelegte Linien  $P = P_1$  und  $P = P_2$ . Dann gilt für einen innerhalb des Rechtecks (Abb. 5b) gelegenen Punkt  $s$  der Integralsatz von Cauchy:

$$z(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t-s}^{z(t)} dt \quad (8),$$

wo mit  $t$  die Randpunkte des Rechtecks bezeichnet sind, um dessen ganze Begrenzung das Integral zu erstrecken ist. Läßt man den Punkt  $s$  selbst auf den Rand rücken, wobei man ihn durch einen kleinen Halbkreis (bezw. Viertelkreis in den Ecken) abschließen muß, so findet man

$$z(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{t-s}^{z(t)} dt \quad (9).$$

In den Ecken  $B, C, E, F$  ist stets statt  $\pi$  der Wert  $\frac{\pi}{2}$  zu setzen. Setzt man  $|t-s| = \rho(st)$  und nennt die zugehörige Amplitude  $\vartheta(st)$  (Abb. 5b), so ist

$$\frac{dt}{t-s} = d \operatorname{Ln}(t-s) = d \ln \rho(st) + i d\vartheta(st).$$

In (9) eingesetzt und  $z = x + iy$  geschrieben, ergibt:

$$x(s) + iy(s) = \frac{1}{\pi i} \int [x(t) + iy(t)] [d \ln \rho(st) + i d\vartheta(st)].$$

Durch Trennung von reell und imaginär findet man, wenn man für  $y$  wieder  $-h$  einführt:

$$\pi x(s) = \int x(t) d\vartheta(st) - \int h(t) d \ln \rho(st) \quad (10a)$$

$$\pi h(s) = \int x(t) d \ln \rho(st) + \int h(t) d\vartheta(st) \quad (10b).$$

Beide Gleichungen sind eine Folgerung aus  $\Delta P = 0$ . Der Fortschritt besteht darin, daß in (10) nur Randpunkte vorkommen, über die wir durch die Randbedingungen etwas Näheres aussagen können. Tatsächlich wird es mit Hilfe derselben gelingen,  $x$  als Funktion von  $h$  auszudrücken, so daß eine einzige Gleichung, und zwar am besten (10b), für  $h(s)$  genügt.

Für die feste Grenze  $FA$  ergibt sich nämlich ohne weiteres

$$x(t) = 0, \quad \text{längs } FA \quad (t \dots P \leq 0, Q = 0) \dots (11a).$$

Auf dem freien Strahl, also auf  $AB$  und  $CE$ , ist  $Q$  konstant, also  $dt = dP$ ; deswegen läßt sich schreiben:

$$v = \frac{dt}{ds} = \sqrt{h};$$

hieraus folgt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{h}; \quad \text{also}$$

$$x(t) = \int \sqrt{\frac{1}{h(t)} - \left(\frac{dh(t)}{dt}\right)^2} dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{längs } AB \dots \dots \dots (t \dots 0 \leq P \leq P_r, Q = 0) \\ \text{und } CE \dots \dots \dots (t \dots P_r \leq P \leq P_r, Q = w) \end{array} \right\} (11b).$$

Was den rechten Abschluß  $BC$  angeht, so nähert sich der Druck im Innern des Strahls asymptotisch dem Druck am Rande, je weiter man sich vom Wehr entfernt. Für die Näherungslösung legen wir daher den Abschluß  $BC$  so weit weg, daß wir den Ueberdruck im Strahl vernachlässigen können. Wie weit man hierzu gehen muß, um im Rahmen der erreichbaren Genauigkeit zu bleiben, wird auf Grund der Verhältnisse beim Ausflußstrahl sich abschätzen lassen. Dann gelten für  $BC$  dieselben Verhältnisse wie auf dem freien Rand, und man erhält somit wie vorhin:

$$x(t) = \int_B^t \sqrt{\frac{1}{h(t)} - \left(\frac{dh(t)}{dt}\right)^2} dt, \quad \text{längs } BC \quad (t \dots P = P_r; 0 \leq Q \leq w) \quad (11c).$$

Der linke Abschluß  $EF$ . Infolge des radialen Zustroms müssen die Geraden durch den Nullpunkt der  $z$ -Ebene die Asymptoten der Stromlinien sein. Die Linien gleichen Potentials, die ja die Stromlinien stets rechtwinklig schneiden müssen, werden also stromaufwärts immer mehr in Viertelkreise übergehen. Auch werden wir aus der Formel des Ausflußstrahls einen endlichen  $P$ -Wert angeben können, so daß die zugehörige Potentiallinie für unsere Zwecke mit genügender Genauigkeit durch einen Viertelkreis genähert werden kann. In Abb. 6 sei  $P = P_r$  ein derartiger Abschlußkreis mit dem Halbmesser  $R$ . Dann ergibt sich, weil Winkel  $FOT$  proportional  $Q$  ist, für  $Q = 0$  verschwinden und für  $Q = w$  den Wert  $\frac{\pi}{2}$  annehmen muß,  $\angle FOT = \frac{\pi Q}{2w}$ ; also

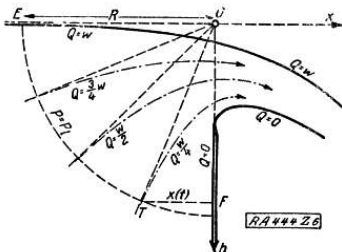


Abb. 6.

$$x(t) = -R \sin \frac{\pi Q}{2w}, \quad \text{längs } EF \quad (t \dots P = P_r; 0 \leq Q \leq w) \quad (11d).$$

Setzt man (11a—d) entsprechend in (10b) ein, so erhält man eine einzige nicht lineare Integrodifferentialgleichung für  $h$ . Somit ist unsere Aufgabe zurückgeführt auf die Lösung der Gleichung

$$\pi h(s) = \int \alpha x(t) d \ln \varrho(st) + \int h(t) d \vartheta(st),$$

wo die Integrale im positiven Sinn über die Grenzen des Rechtecks in der  $W$ -Ebene zu erstrecken sind, und wo für  $x(t)$  jeweils die in der Abb. 7 angeschriebenen Werte zu setzen sind.

Zu erinnern bleibt noch, daß man in (10b)  $\frac{\pi}{2}$  statt  $\pi$  setzen muß, wenn  $s$  eine der Ecken  $B, C, E$  oder  $F$  ist.

Der Gedankengang zur Lösung von (10b) ist nun folgender: Man nimmt  $h$  näherungsweise als Funktion von  $t$  an. Diese Werte setzt man auf der rechten

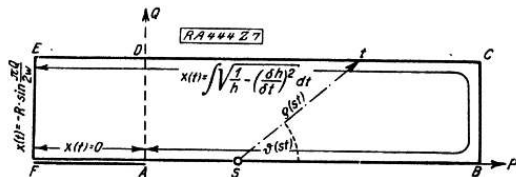


Abb. 7.

Seite der Integralgleichung ein und rechnet für eine genügende Zahl von s-Punkten  $h(s)$  aus. Wenn diese  $h(s)$  mit den angenommenen Werten von  $h(t)$  bereits übereinstimmen sollten, so wäre die angenommene Funktion  $h(t)$  bis auf einen konstanten Faktor die gesuchte Lösung.

Im allgemeinen werden diese beiden Funktionen nicht übereinstimmen; dann wählt man als zweite Näherung eine Funktion, die zwischen den angenommenen und den errechneten Werten liegt und beginnt die Rechnung von neuem usw. bis die Differenzen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Verfahrens liegen. Ein Konvergenzbeweis kann allerdings nicht gegeben werden.

**5. Die erste Näherung.** Zur Beschaffung einer ersten Annahme für  $h(t)$  auf der freien Grenze wurde eine von Bazin<sup>1)</sup> sorgfältig gemessene Strahlform herangezogen, die allerdings einer endlichen statt der von uns angenommenen unendlichen Wehrhöhe entsprach. Auf Grund der Randbedingung  $v = \frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{h}$  läßt sich das Potential  $P = \int \sqrt{h} ds$  zeichnerisch für jeden Randpunkt ermitteln<sup>2)</sup>. Um eine passende Einheit für  $P$  zu erhalten, berücksichtigen wir, daß  $P$  und  $Q$  im selben Maßstab zu messen sind. Die natürliche Einheit für  $Q$  ist nun die in der Sekunde überfließende Wassermenge  $w$ . Diese ermittelt man am einfachsten möglichst weit stromabwärts durch Multiplikation der mittleren Geschwindigkeit mit der Breite des Strahls (Abb. 5a)

$$w = BC \sqrt{\frac{h_2 + h_1}{2}}$$

(Gemeint ist immer die Wassermenge zwischen der Zeichenebene und einer zu ihr parallelen Ebene im Abstand 1). Es empfiehlt sich, den Wert  $w$ , der im Falle  $H = 1$  und  $\frac{1}{2}g = 1$  sich zu 0,452 ergibt, bei allen Rechnungen festzubalten und die zu ihm gehörige Stromkurve zu suchen.

Von  $A$  beginnend (Abb. 5a), wo man unter Verfügung über die Konstante für  $P$  den Wert 0 annimmt, integriert man das Potential  $P = \int_0^s \sqrt{h} ds$  zuerst für den unteren

Strahlrand aus und trägt die Punkte, wo  $P = w, 2w$  usw. bis  $6w$  ist, in die Stromkurve ein. (Zur besseren Zwischenschaltung wurden bei der Rechnung die Punkte von  $\frac{w}{4}$  zu  $\frac{w}{4}$  ermittelt.) Dann geht man von  $B(6w)$  im Mittel senkrecht zum oberen Rand über und erhält  $C(6w)$ . Von hieraus bestimmt man rückwärtsschreitend die  $P$ -Teilung für den oberen Rand. Da diese Einteilung mittelst der Randbedingung gefunden wurde, so liefert unsere Strahlkurve jetzt nicht nur zu jedem  $t$ -Wert eine erste Annahme von  $h(t)$ , sondern gleichzeitig auch die zugehörigen Werte von  $x(t)$ , die sonst nach (11b und c) zu berechnen wären.

Für die oberen Randpunkte mit kleiner Geschwindigkeitshöhe (etwa für  $P < -w$ ) versagt allerdings dieses Verfahren. Wir gehen hier anders vor. Würde alle Flüssigkeit im Punkte  $x = 0, h = 0$  abströmen, wie wenn dieser Punkt eine Senke wäre, so wären die Stromlinien gerade Linien durch den Anfangspunkt  $(0,0)$  und die Linien gleichen Potentials Viertelkreise um diesen. Die Geschwindigkeit wäre dann eine Funktion des Abstandes  $r$  von der Senke. Die in der Zeiteinheit über einen Viertelkreis strömende Flüssigkeit ist  $\frac{1}{4} \pi r \cdot v(r) = w$ ;

woraus  $v(r) = -\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{2w}{\pi r}$  . . . . (12), also  $-P = \frac{2w}{\pi} \ln r + C$  . . . . (13).

<sup>1)</sup> Keller: Zeitschr. d. Ver. d. Ing. Bd. 34 (1890) S. 883.

<sup>2)</sup> Zeichnerische Verfahren der Integration und Differentiation sind beschrieben in Enc. d. math. Wiss. Bd. II, H. 2, Nr. 12 u. 14 und in Runge, Graphische Methoden.



Man kann  $C$  in der Form  $-\frac{2w}{\pi} \ln r_0$  ansetzen, wenn man unter  $r_0$  den Halbmesser des Viertelkreises versteht, für den  $P=0$  ist; dann ergibt sich

$$r = r_0 e^{\frac{-\pi P}{2w}} \dots \dots \dots (14).$$

Hinreichend weit oberhalb des Wehres muß diese Formel auch für den Ueberfall gelten, nur muß man zuerst  $C$  oder  $r_0$  irgendwie bestimmen: denn über die Integrationskonstante für  $P$  ist bereits verfügt. Wir schließen nun so: Oberhalb des Wehres muß das Potential zwischen den Weiten liegen, die es hätte, wenn einmal alle Flüssigkeit im Anfangspunkt, das andere Mal in  $A$  abfließen würde. Diese Werte, die man aus (13) vorerst für  $C=0$  rechnet, trägt man als Funktion von  $x$  auf (Abb. 8). Hierzu die  $P$ -Werte, soweit man sie auf dem oberen Rand des Strahls noch einigermaßen bestimmen konnte. Die Differenz zwischen der zuletzt gewonnenen Kurve und einem Mittelwert der beiden ersten ergibt einen Näherungswert für  $C$ . Aus diesem wurde dann  $r_0 = 0,718$  gerechnet.

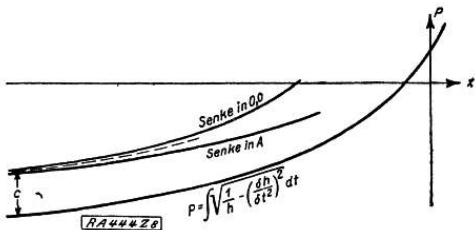


Abb. 8.

Den Abschluß links wählen wir bei  $P_1 = -2w$ ; an dieser Stelle ergibt die Berechnung für den Kirchhoffschen Ausflußstrahl nur eine Abweichung von der Kreisform um 1,7 vH der halben Oeffnung, d. h. zeichnerisch ist die Linie  $P = -2w$  kaum von einem Kreis zu unterscheiden. Für  $P = -2w$  liefert Gleichung (14) den Halbmesser  $R$  des Abschlußkreises:

$$R = r_0 e^{\pi} \dots \dots \dots (15).$$

Die  $x(t)$ -Werte wurden schon unter Gleichung (11d) aufgestellt. Wir fügen hier noch die  $h$ -Werte hinzu:

$$x(t) = -R \sin \frac{\pi Q}{2w}, \quad h(t) = R \cos \frac{\pi Q}{2w}, \quad (t \dots P = -2w; 0 \leq Q \leq w). \quad (16).$$

Als Abschluß rechts wähle ich die Linie  $P_r = 6w$ . Beim Ausflußstrahl unterscheidet sich an der entsprechenden Stelle ( $P = 3\pi$ ) die Randkurve des Strahls von seiner Asymptote um etwa 0,00008. Die Stromlinien laufen also hier praktisch parallel, und der Ueberdruck im Innern kann als verschwunden gelten.

So bliebe nur noch die feste Begrenzung übrig. Hier ist  $x = 0$ , und für  $h$  ist eine Annahme nicht nötig, weil  $h(s)$  ohne Benützung einer solchen aus der Integralgleichung (10b) gerechnet werden kann; denn das zweite Integral von (10b) verschwindet für alle  $t$ -Punkte, die mit  $s$  auf derselben Rechteckseite liegen.

Somit liefert für jeden Randpunkt  $t$  des Rechtecks (Abb. 9) von  $A$  über  $B, C, D$  bis  $-w$  die Bazinsche Strahlkurve eine erste Näherung für  $h(t)$  und  $x(t)$ ; von  $-w$  bis  $E$  auf dem oberen Rand kommt  $h$  wegen seiner Kleinheit nicht mehr in Betracht, während  $x(t)$  aus (14)

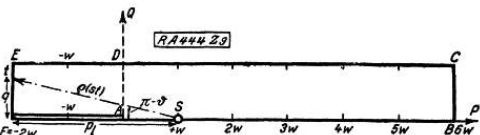


Abb. 9.

für  $r = -x$  gerechnet werden kann. Von  $E$  bis  $F$  gelten die Werte (16), und für die feste Begrenzung  $FA$  ist  $x = 0$ , und die  $h(t)$ -Werte können aus der Gleichung (10b) gerechnet werden.

**6. Die Ausmittlung der Näherungsfolgen.** Aus der Integralgleichung (10b) habe ich  $h(s)$  für eine Reihe von  $s$ -Punkten gerechnet, und zwar wurden die Integrale durch Planimetrierung ausgewertet mit Ausnahme der Beiträge längs des linken Abschlusses  $EF$ , welche rechnerisch ermittelt wurden.

a) Das Integral  $\int x(t) d \ln \varrho(st)$ .

$x(t)$  wurde als Funktion von  $\ln \varrho(st)$  aufgetragen. Nach Abb. 9 läßt sich nämlich  $\varrho(st)$  leicht für alle vorkommenden Fälle rechnerisch beliebig genau bestimmen, und die hieraus gewonnene ungleichmäßige Skala von  $\ln \varrho(st)$  kann aus Symmetriegründen für alle  $s$ -Punkte benützt werden (Abb. 10), wenn man den Anfangspunkt der Abb. 9 stets in den jeweiligen

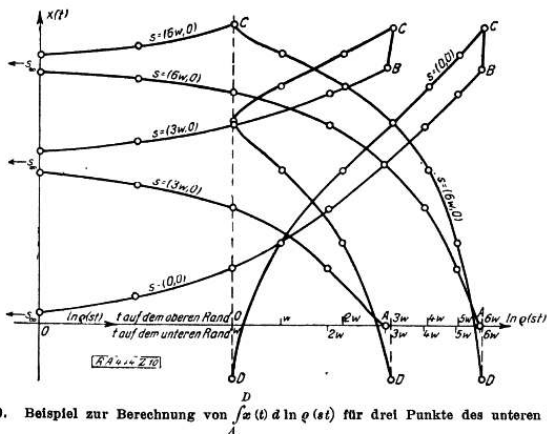


Abb. 10. Beispiel zur Berechnung von  $\int x(t) d \ln \varrho(st)$  für drei Punkte des unteren Randes.

$s$  Punkt verlegt. Eine Schwierigkeit entsteht nur in der Nähe des Punktes  $s$  selbst, weil dort  $\ln \varrho(st)$  negativ unendlich wird. Man bleibt beiderseits um denselben Betrag  $\sigma$  von  $s$  entfernt (vgl. Abb. 11), wählt aber  $\sigma$  so klein, daß man  $x(t)$  von  $-\sigma$  bis  $+\sigma$  als lineare Funktion  $x = a\varrho + b$  von  $\varrho$  ansetzen kann. Dann wird

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} x d \ln \varrho = \int_{-\sigma}^{+\sigma} \frac{x}{\varrho} d\varrho = a \int_{-\sigma}^{+\sigma} d\varrho + b \int_{-\sigma}^{+\sigma} d \ln \varrho.$$

Die Integration muß entsprechend der Bemerkung im Abschnitt 4 auf einem kleinen Halbkreis vom Radius  $s$  um  $s$  geführt werden. Die Beiträge des zweiten Integrals rechts sind von  $-\sigma$  bis  $-s$  und von  $+s$  bis  $+\sigma$  entgegengesetzt gleich, der Beitrag über dem Halbkreis verschwindet, so daß wird für  $s \rightarrow 0$ :

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} x d \ln \varrho = 2 a \sigma = x - x.$$

b) Das Integral  $\int h(t) d \vartheta(st)$ .

Hier empfiehlt sich die Darstellung in Polarkoordinaten, wobei  $\vartheta(st)$  der Figur entnommen werden kann (Abb. 12). Trägt man auf dem Fahrstrahl  $st$  jeweils  $\sqrt{2} h(t)$  auf, so liefert die Planimetrierung der entstehenden Kurve sofort den gewünschten Wert. (Aus zeichnerischen Gründen wurden die verschiedenen  $s$ -Punkte alle in denselben Punkt verlegt, und das Rechteck wurde dafür entsprechend verschoben.) Diejenigen Teile, wo  $x$  und  $h$  sehr große Werte annehmen, wurden (auch schon beim vorigen Integral) gesondert behandelt: Die aufzutragenden Werte mußten verkleinert werden; statt dessen wurde ein Ausgleich durch Vergrößerung der Abszisse angestrebt,



Abb. 11.

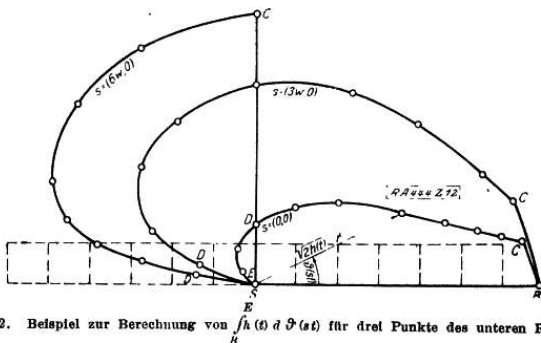


Abb. 12. Beispiel zur Berechnung von  $\int h(t) d\vartheta(s)$  für drei Punkte des unteren Randes.

c) Die Beiträge am linken Abschluß EF:

Macht man  $s$  zum Anfangspunkt durch die Transformation

$$p_i = P(t) - P(s); \quad q = Q(t) - Q(s)$$

so ist (Abb. 9)  $q^2 = p^2 + q^2$  und, weil  $p_i$  nur von  $s$  abhängig ist, längs EF:

$$d \ln q = \frac{dq}{q} = \frac{q dq}{p_i^2 + q^2}; \quad \text{ferner } d\vartheta = d \arctan \frac{q}{p_i} = \frac{p_i dq}{p_i^2 + q^2}$$

Hieraus und unter Benützung von (16), wobei  $q$  statt  $Q$  geschrieben werden kann, solange  $s$  auf dem unteren Rand liegt:

$$\int_E^F x d \ln q + \int_E^F h d \vartheta = R \int_0^w q \sin \frac{\pi q}{2w} - p_i \cos \frac{\pi q}{2w} \frac{dq}{p_i^2 + q^2}$$

Wenn  $s$  auf dem oberen Rand liegt, ergibt sich eine ähnliche Formel. Der Wert des Integrals rechts, das wir zur Abkürzung mit  $A$  bezeichnen wollen, hängt natürlich von der Lage des Punktes  $s$  ab. Für die vorkommenden  $s$ -Punkte wurde  $A(s)$  nach der Simpsonschen Regel rechnerisch ausgewertet. Somit liefert der Abschluß links unter Berücksichtigung von (15) den Beitrag

$$\int_E^F x d \ln q + \int_E^F h d \vartheta = R A(s) = r_0 e^{\pi} A(s); \quad (t \dots P = P_i = -2w; \quad 0 \leq Q \leq w) \quad (17),$$

wobei  $A(s)$  der nebenstehenden Zahlentafel zu entnehmen ist.

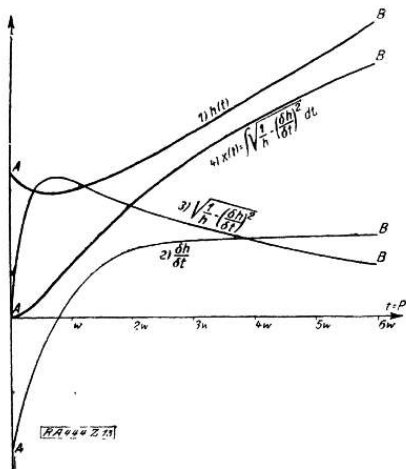
Zahlentafel für

$$A(s) = \int_0^w \frac{q \sin \frac{\pi q}{2w} - p_i \cos \frac{\pi q}{2w}}{p_i^2 + q^2} dq$$

In dieser Weise wurde die erste Näherungsrechnung durchgeführt. Das arithmetische Mittel aus den gerechneten  $h$ -Werten und der ersten Annahme ergab die zweite Näherung. Hierzu mußten dann mittels der Gleichung (11b) die  $x(t)$ -Werte zeichnerisch gefunden werden (Abb. 13). Zu dem Zweck wurde zunächst  $h$  als Funktion von  $t$  bzw.  $P$  aufgezeichnet und zeichnerisch differenziert. Die Integration des Ausdrucks

$\sqrt{\frac{1}{h} - \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2}$  als Funktion von  $t$  aufgetragen, ergab die gesuchten Werte für  $x(t)$ . Beim Punkt  $B(6w)$  angelangt, verfährt man so: Die gefundenen  $h$ -Werte für  $B$  und  $C$  ermöglichen die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit am Abschluß  $BC$ . Aus ihr und aus  $w$  ergibt sich die Strahlbreite  $BC$  und mit deren Hilfe kann leicht  $x(C)$  bestimmt werden. Mit  $C$  beginnend verfährt man entsprechend für die obere Grenze.

$s$	$s$ auf unterer Grenze ( $Q=0$ )	$s$ auf oberer Grenze ( $Q=w$ )
$-2w$	1,3708	—
$-w$	0,8152	0,2723
$-1/2 w$	0,5891	—
$0$	0,3986	0,2328
$+1/4 w$	0,3454	—
$1/2 w$	0,3069	0,2023
$w$	0,2503	0,1772
$2 w$	0,1818	0,1406
$3 w$	0,1422	0,1159
$4 w$	0,1166	0,0984
$5 w$	0,0988	0,0854
$6 w$	0,0856	0,0758

Abb. 13. Berechnung von  $\alpha(t)$  für den unteren Rand.

er nimmt dann allerdings gegen  $B$  hin sehr rasch ab und hat für die obere Grenze überhaupt geringere Bedeutung. Immerhin mag dieser Fall zeigen, daß das Verfahren empfindlich genug ist, um eine Unstimmigkeit erkennen zu lassen.

Der Verbesserung liegt folgender Gedanke zugrunde: Wenn bei festgehaltener Wassermenge  $w$  sich die Ueberfallhöhe vergrößert, so wird die Linie  $P=0$  etwas hinausgeschoben; dies bewirkt für die stromaufwärts gelegenen Linien konstanten Potential eine mit der Entfernung rasch anwachsende Verschiebung im selben Sinne (vergl. die Wirkung der Vergrößerung von  $r_0$  in Gleichung (14) im Falle einer Senke!). Es muß daher versucht werden, neben der Verbesserung des Strahlrandes auch  $r_0$  entsprechend zu verbessern, bis die Differenzen für  $h(A)$  möglichst verschwinden. Ich bin daher wieder auf die zweite Näherung zurückgegangen und habe die folgenden Rechnungen mit den Werten  $r_0 = 0,742$ ;  $r_0 = 0,752$  und  $0,756$  durchgeführt. Bei der 5. Näherung wurden die Unterschiede auf dem Strahlrand so klein, daß sie zu einer Verbesserung zeichnerisch nicht mehr benutzt werden konnten.

**7. Die Ergebnisse der Näherungsrechnungen.** Als Beispiel für die Ausführung der Rechnungen gebe ich den Gang der Rechnung für den Punkt  $s(0,0)$  (Wehrkrone) und zwar für den 5. Näherungswert an. Man hat hierzu in die Gleichung (10b) die Werte der vorhergehenden Näherung auf der rechten Seite einzusetzen; also

$$\pi h(0,0) = \int_{\rightarrow}^{\leftarrow} \alpha(t) d \ln \varrho(st) + \int_{\rightarrow}^{\leftarrow} h_4(t) d \vartheta(st)$$

$$I. \int \alpha(t) d \ln \varrho(st)$$

- |  |         |
|--|---------|
| a) $A-B-C-D$ (ohne die Umgebung von $0,0$ ) zeichnerisch nach Abb. 10                  | + 0,031 |
| b) $D-E$ zeichnerisch  | - 4,621 |
| c) $E-F$ einschl. des Anteils vom 2. Integral nach Gl. (17): $r_0 e^{\alpha} A(0,0) =$ | + 6,886 |
| d) $F-A$   | -       |
| e) Abschätzung für die Umgebung des Punktes $(0,0)$ nach Abschn. 6a:                   |         |

$$\alpha\left(\frac{w}{4}, 0\right) - \alpha\left(-\frac{w}{4}, 0\right) = \dots + 0,067$$

Nun zeigte sich, daß zwischen  $D$  und  $E$  (Abb. 5 a) die Bestimmung der  $\alpha$  nach diesem Verfahren unsicher wurde und zwar um so mehr, als schon  $h(s)$  in diesem Bereich nicht genau genug gerechnet werden konnte. Deshalb habe ich für diese Punkte auf Gleichung (10a) zurückgegriffen und unmittelbar  $\alpha$  gerechnet. Die zugehörigen  $h$ -Werte ergeben sich, wenn nötig, indem man mit Hilfe der  $P$ -Teilung auf dem Strahlrand den Wert  $\frac{\partial P}{\partial s} = v = \sqrt{h}$  entnimmt, woraus  $h = v^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)^2$  genügend genau folgt.

Bei den folgenden Näherungsrechnungen wurden die Unterschiede zwar recht gleichmäßig, aber statt kleiner zu werden, nahmen sie dem Betrage nach ständig zu. Die Untersuchungen ließen erkennen, daß der Grund in der mangelhaften Kenntnis der Verhältnisse oberhalb des Wehres, d. h. in der Ungenauigkeit der Größen  $r_0$  bzw.  $R$  lag. Besonders stark ist der Einfluß auf die Ueberfallhöhe  $h(A)$ ;

II.	$\int h(s) d\theta(st)$	Uebertrag . . . + 2,363
	a) $F-A-B$ . . . . .	—
	b) $B-C-D-E$ zeichnerisch nach Abb. 12 . . . . .	+ 0,993
	c) $E-F$ s. o. unter Ic . . . . .	—
		$\pi h(0,0)$ . . . + 3,356

also  $h(0,0) = 1,068$ . Das arithmetische Mittel zwischen diesem Wert und dem 4. Näherungswert  $h_4(0,0) = 1,072$  ergibt die 5. Näherung

$$h_5(0,0) = 1,070.$$

Genau so werden die  $h(s)$ -Werte der übrigen Punkte bestimmt. Die zugehörigen  $x$ -Werte ergeben sich nach dem Verfahren von Abb. 13.

### I. Untere Begrenzung.

Die Werte von  $h(s)$  nach Gleichung (10b).

$s$	1. Näherung	Differenz	2. Näherung	Differenz	3. Näherung	Differenz	4. Näherung	Differenz	5. Näherung
$-2w$	—	—	16,850	—	17,200	—	17,900	—	17,506
$-w$	—	—	3,650	—	3,645	—	3,670	—	3,705
$-1/2w$	—	—	1,700	—	1,780	—	1,790	—	1,795
0	1,000	+ 0,047	1,047	+ 0,021	1,068	+ 0,004	1,072	- 0,002	1,070
$+1/4w$	0,920	+ 0,040	0,960	+ 0,017	0,977	- 0,001	0,976	+ 0,001	0,977
$+1/2w$	0,888	+ 0,031	0,919	+ 0,004	0,923	+ 0,007	0,930	- 0,002	0,928
$w$	0,915	+ 0,002	0,917	+ 0,017	0,934	- 0,002	0,932	- 0,002	0,930
$2w$	1,097	- 0,001	1,096	+ 0,002	1,098	- 0,005	1,093	- 0,004	1,089
$3w$	1,849	- 0,004	1,845	- 0,001	1,844	+ 0,002	1,846	- 0,003	1,843
$4w$	1,620	- 0,009	1,611	- 0,013	1,598	+ 0,004	1,602	- 0,004	1,598
$5w$	1,891	- 0,011	1,880	- 0,022	1,858	+ 0,001	1,859	- 0,004	1,855
$6w$	2,155	- 0,025	2,130	- 0,010	2,120	+ 0,009	2,129	+ 0,004	(2,133)

### II. Obere Begrenzung.

a) Werte für  $h(s)$  nach Gleichung (10b).

$s$	1. Näherung	Differenz	2. Näherung	Differenz	3. Näherung	Differenz	4. Näherung	Differenz	5. Näherung
0	Für die Punkte $s=0$ bis $s=-w$ wurden statt $h(s)$ die Werte für $x(s)$ gerechnet (s. u. II b)								
$+1/2w$	0,210	- 0,027	0,183	+ 0,013	0,196	- 0,009	0,187	- 0,001	0,186
$w$	0,375	- 0,018	0,362	- 0,012	0,350	- 0,008	0,342	- 0,000	0,342
$2w$	0,727	- 0,012	0,715	- 0,015	0,700	- 0,008	0,692	- 0,004	0,688
$3w$	1,075	- 0,010	1,065	- 0,019	1,046	- 0,007	1,039	- 0,004	1,035
$4w$	1,400	- 0,012	1,388	- 0,027	1,361	- 0,008	1,353	- 0,002	1,351
$5w$	1,692	- 0,007	1,685	- 0,033	1,652	- 0,009	1,643	- 0,002	1,641
$6w$	1,978	- 0,016	1,962	- 0,040	1,922	+ 0,004	1,926	+ 0,002	(1,928)

b) Werte für  $x(s)$  nach Gleichung (10a).

$-1w$	- 3,420	—	- 3,390	—	- 3,480	—	- 3,530	—	- 3,560
$-1/2w$	- 1,400	—	- 1,385	—	- 1,462	—	- 1,490	—	- 1,500
0	- 0,388	+ 0,015	- 0,373	- 0,062	- 0,435	- 0,010	- 0,445	- 0,004	- 0,449
$+1w$	—	—	—	—	+ 0,577	- 0,009	+ 0,568	+ 0,002	+ 0,570
$+3w$	—	—	—	—	+ 1,442	—	+ 1,442	- 0,002	+ 1,440

Um die Genauigkeit dieser Ergebnisse würdigen zu können, ist es nötig, einen Blick auf die Fehlerquellen zu werfen<sup>1)</sup>. Die Planimetrierungen wurden sorgfältig mit

<sup>1)</sup> Vergl. hierzu: Treffitz, Ueber die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen. (Straßburger Diss. 1914).

einem guten Präzisionsplanimeter ausgeführt, das mir die technische Hochschule in Karlsruhe in entgegenkommender Weise zur Verfügung stellte. Der Planimetrierungsfehler dürfte nach den beobachteten Abweichungen kaum eine Einheit der letzten Stelle in den  $h$ -Werten ausmachen. Viel schwerer zu erfassen sind die Fehler, die in der Zeichnung liegen. Für eine Reihe von Integralen habe ich die zu integrierenden Kurven zweimal aufgezeichnet und fand Abweichungen von 1,5 qcm im Mittel. Für  $h(s)$  macht das etwa 3 Einheiten der letzten Stelle aus.

Eine unangenehme Fehlerquelle liegt in der zeichnerischen Differentiation zur Ermittlung von  $\frac{\partial h}{\partial t}$  für Gleichung (11b). Zum Glück ist der schädliche Einfluß in der Nähe des Wehres bei  $A$  sehr gering; er nimmt aber gegen  $B$  langsam zu, und in den Endpunkten  $B$  und  $C$  ist die Ermittlung des Differentialquotienten überhaupt unsicher. Die darauf folgende Integration wird also mit einem Fehler behaftet sein, der sich beim Uebergang zum oberen Rand auf alle Punkte desselben überträgt. Wenn auch dieser Fehler nicht groß sein dürfte, so liegt seine Gefährlichkeit darin, daß er alle Punkte des oberen Randes in derselben Richtung beeinflusst. Zur Abhilfe wurde aus Gleichung (10a) der  $x$ -Wert auch noch für den Punkt  $s = 2w$  des oberen Randes (und zur Sicherheit auch für  $s = w$ ) unmittelbar gerechnet. Von diesen Werten aus wurde dann weiter integriert.

Schließlich wäre noch die Frage berechtigt, wie weit die Abweichung des linken Abschlusses  $EF$  ( $P = -2w$ ) von der Kreisform das Ergebnis beeinflussen kann. Wir sahen bereits im Abschn. 5, daß diese Abweichung beim Kirchhoffschen Ausflußstrahl nur 1,7 vH beträgt. Genaue Berechnung ergibt für den Ueberfall den etwas größeren Wert von 2,5 vH. Für  $h(A)$  (Ueberfallhöhe) macht es nicht ganz 2 Tausendstel aus, für die anderen Strahlpunkte noch weniger. Die Annahme eines kreisförmigen Abschlusses war also berechtigt.

Von den Ergebnissen der 5. Näherung werden wir also die  $h$ -Werte der Punkte  $B$  und  $C$  als unsicher ausschalten müssen. Da für die übrigen die Unterschiede zwischen der letzten und vorletzten Näherung alle kleiner als 0,005 sind, so dürfte der Fehler für diese Punkte ebenfalls kleiner als 0,005 sein, so daß sich z. B. für die Ueberfallhöhe die Eingrenzung  $1,065 < H < 1,075$  ergibt.

**8. Die vollständige Lösung.** Durch die bisherigen Ergebnisse ist unsere Differentialgleichung  $\Delta P = 0$  vorerst nur für den Rand gelöst. Für Punkte im Innern könnte man jetzt, wo man den Rand kennt, zu jedem Netzpunkt ( $P, Q$ ) der  $W$ -Ebene nach der Integralformel von Cauchy (8) den zugehörigen Punkt ( $x, h$ ) der  $z$ -Ebene berechnen und so das vollständige Strömungsbild bestimmen. Das wäre natürlich sehr mühsam. Nach einem Verfahren von Runge<sup>1)</sup> läßt sich die Lösung zeichnerisch viel einfacher erreichen, indem man unter strenger Erfüllung der Randbedingungen ein Netz der Linien  $P = \text{konst.}$  und  $Q = \text{konst.}$  so gut wie möglich entwirft, was ziemlich leicht gelingt. Die Unterschiede  $\delta P$  und  $\delta Q$  der Werte auf zwei benachbarten Linien müssen gleich sein. In den entstehenden quadratischen Vierecken sind dann bis auf Glieder dritter und höherer Ordnung die Diagonalen gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.

Die Verbesserung des Netzes geschieht folgendermaßen: Da  $\frac{\partial Q}{\partial n} = v$  ist, so folgt

$$Q = \int_0^n v \, dn.$$

Der Wert für  $v$  kann nun näherungsweise längs der Linie  $P = \text{konst.}$  dem Entwurf in der Form  $v = \frac{\delta P}{\delta s}$  entnommen

werden (Abb. 14), wobei man den Differentialquotienten  $\frac{\delta P}{\delta s}$  durch den entsprechenden Differenzenquotienten ersetzt. Diese Werte trägt man als Funktion von  $n$ , das ebenfalls dem Entwurf zu entnehmen ist, auf und integriert. Dadurch gelangt man zu einer Verbesserung der Netzpunkte für diese Linie. Nach Bedarf verbessert man entsprechend längs der

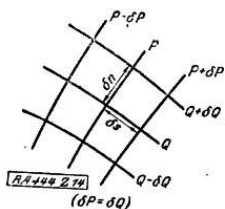


Abb. 14.

<sup>1)</sup> Runge-Willers, Enzykl. der math. Wiss. Bd. II 8 Heft 2 Nr. 20 d.

Linien  $Q = \text{konst.}$  Das Verfahren konvergiert wenigstens auf dem Strahl sehr rasch. Die Abb. 15 stellt somit die vollständige zeichnerische Lösung der Gleichung  $\Delta P = 0$  mit den geforderten Randbedingungen dar. (Die gestrichelte Linie gibt die erste Annahme nach Bazin an. Für die Form der oberen Begrenzung ergab sich nur eine geringe Aenderung.)

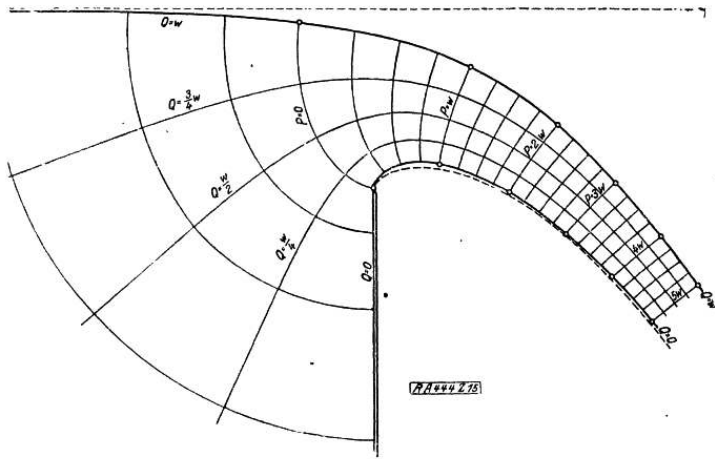


Abb. 15.

**9. Ergiebigkeit und Ueberfallzahl.**

Die Hydraulik richtet bei derartigen Strahlproblemen ihr Augenmerk weniger auf das Strömungsbild als auf die Ergiebigkeit, d. h. die in der Zeiteinheit überströmende Wassermenge. Diese möge für den Fall  $H = 1$ ,  $\sqrt{2g} = 1$   $Q_0^* = \mu$  heißen. Da für  $Q$  dieselben Maßbeziehungen bestehen wie für  $P$  (vergl. Abschn. 2), so findet man die wahre Wassermenge  $Q_0$  bei der Ueberfallhöhe  $H$  (statt eins. und dem tatsächlichen Betrag der Schwerkraft durch Multiplikation mit  $H^{3/2}$  und mit  $\sqrt{2g}$ . Also:

$$Q_0 = \mu \sqrt{2g} H^{3/2} \dots \dots \dots (18).$$

Der Faktor  $\mu$  heißt »Ueberfallzahl.« Der Wert von  $\mu$  muß, wie aus seiner obigen Einführung hervorgeht, von der Schwere und der Ueberfallhöhe  $H$  unabhängig sein. Das letztere widerspricht allerdings bei kleinem  $H$  der Erfahrung, wonach für kleine  $H$  der Wert von  $\mu$  größer wird. Wie v. Mises vermutet, wird in diesen Fällen die nicht zu vermeidende Abrundung der Wehrkrone fühlbar. Auch fand Rehbock<sup>1)</sup> für Wehre mit halbzylindrischer Krone das Aehnlichkeitsgesetz erfüllt: daher wird man wohl annehmen dürfen, daß bei abnehmender Ueberfallhöhe  $H$  die Dimension der Abrundung gegen  $H$  nicht mehr vernachlässigt werden kann, sondern daß diese eine, wenn auch nur kurze Führung des Strahls veranlaßt, wodurch die Wassermenge vergrößert wird.

Zu der Formel (18) kann man auch durch eine Ueberlegung kommen, die bereits 1717 von dem Italiener Poleni angegeben wurde. Dieser dachte sich den Strahl senkrecht über dem Wehr in dünne Streifen gleichlaufend mit der Wehrkrone zerlegt und berechnete für jeden Streifen die Ausfließgeschwindigkeit nach Toricelli  $v = \sqrt{2gh}$ , wie wenn jeder dieser Streifen für sich ins Freie treten würde. Beträgt die Streifenhöhe  $dh$  (Abb. 16),

<sup>1)</sup> Forchheimer, Hydraulik S. 301.

so fließt (pro Längeneinheit senkrecht zur Zeichenebene gemessen) in der Sekunde die Menge  $dQ = \sqrt{2g} h dh$  durch, woraus die Ergiebigkeit des ganzen Ueberfalles durch Integration folgt:

$$Q_0 = \int_0^H \sqrt{2g} h dh = \frac{2}{3} \sqrt{2g} H^{3/2},$$

und nach Einführung einer Kontraktionszahl  $\varphi$ :

$$Q_0 = \frac{2}{3} \varphi \sqrt{2g} H^{3/2} \dots \dots \dots (19).$$

Die Gleichungen (19) und (18) stimmen tatsächlich überein, wenn man  $\mu = \frac{2}{3} \varphi$  setzt, trotzdem in der Herleitung von (19) zwei unzutreffende Annahmen stecken: Erstens können die Strahlen an jener Stelle nicht unabhängig voneinander austreten, und zweitens weist der obere Strahlrand über der Wehrkrone bereits eine Senkung auf, die man bei der Integration nicht vernachlässigen dürfte.

Unsere Berechnungen im Abschn. 7 gelten für die Wassermenge  $Q_0 = w = 0,452$  und  $\sqrt{2g} = 1$ . Die Ueberfallhöhe ergab sich in den Grenzen  $1,065 < H < 1,075$ . Nun folgt aus (18) für  $\sqrt{2g} = 1$ :

$$\mu = w : H^{3/2};$$

also:  $0,405 < \mu < 0,411$  oder  $0,608 < \varphi < 0,617$ .

Die Kirchhoffsche Kontraktionszahl  $\varphi = 0,611$  für den schwerelosen Fall liegt demnach zwischen den hier erreichten Genauigkeitsgrenzen. Berücksichtigt man, daß  $\mu$ , wie wir sahen, vom Betrag der Schwerkraft unabhängig ist, so wird man mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen können, daß  $\mu = \frac{2}{3} \varphi = 0,407$  ist. Für endliche Wehrhöhen findet man dann entsprechende Ueberfallzahlen in der am Anfang erwähnten Abhandlung von Mises.

Da Wehre in der Anordnung des behandelten Falles (aber natürlich mit endlicher Wehrhöhe) zu genauen Wassermessungen benützt werden, so besitzen wir eine Anzahl Formeln für die Ergiebigkeit, die sich auf sorgfältig durchgeführte Versuchsreihen stützen. (Weisbach, Bazin, Rehbock u. a.). Wenn man voraussetzen darf, daß derartige Formeln auch noch außerhalb des Versuchsbereiches Gültigkeit besitzen, so würden sich für das unendlich hohe Wehr folgende Ueberfallzahlen ergeben<sup>1)</sup>:

Francis (1854) . . . . .	$\mu = 0,415$ bzw. $\varphi = 0,622$ ,
Frese . . . . .	$\mu = 0,410$ » $\varphi = 0,615$ ,
Bazin . . . . .	$\mu = 0,405$ » $\varphi = 0,608$ ,
Rehbock . . . . .	$\mu = 0,403$ » $\varphi = 0,605$ .

Zu berücksichtigen ist bei einem Vergleich mit dem gerechneten Wert, daß in diesen Zahlen noch der Einfluß der Reibung steckt, die bei der Rechnung vernachlässigt wurde. Abgesehen davon ist auch die Genauigkeit dieser Versuchswerte beschränkt. Am selben Wehr fand Bazin bei Wiederholung der Messung Fehler bis 1 vH; der Vergleich der Formeln von Bazin und Frese innerhalb ihres Geltungsbereiches ergab Abweichungen bis 2,6 vH und die Ausdehnung der Freseschen Formel über ihren Versuchsbereich hinaus zeigte im Vergleich mit wirklich durchgeführten Messungen sogar Unterschiede bis 5 vH. Der gerechnete  $\mu$ -Wert liegt also durchaus innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der bekannten Erfahrungswerte.