angegeben. Durch Integration erhält man daraus für $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$, $c_a = 0{,}088\,\frac{\alpha^0}{1^0}$ und für $\frac{t}{b} = {}^1/_6$, $c_a = 0{,}0794\,\frac{\alpha^0}{1^0}$. Beim unendlich breiten Flügel ist der Wert $c_a = \frac{2\pi}{57{,}3^0}\,\alpha^0 = 0{,}11\,\frac{\alpha^0}{1^0}$, wovon der c_a Wert bei $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ 80 vH, bei $\frac{t}{b} = {}^1/_6$ aber 72 vH ausmacht. Abb. 5 gibt für dieselben Seitenverhältnisse die Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband und Abb. 6 endlich den Beiwert des induzierten Widerstandes. Setzt man den induzierten Widerstand gleich $c_{wi}\,{}^1/_2\,\varrho\, v^2\, b\, t$, so findet man:

$$\frac{1}{(\alpha^0)^2}\,\frac{d c_{wi}}{d\xi} = \frac{2b}{t}\left(\frac{\pi}{180^0}\right)^2 \frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t}+c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}\left(1-\frac{2}{\pi}\,\frac{b}{t}\,\frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t}+c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}\right).$$

In der folgenden Zahlentafel sind für das Längenverhältnis ${}^1/_{10}$ und ${}^1/_6$ die verschiedenen, nach den vorstehenden Formeln berechneten Werte zusammengestellt.

Zahlentafel zum zweiten Beispiel.

	ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	1
$\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_m}$	1	0,995	0,976	0,933	0,835	0,710	0,586	0,421	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\frac{d c_a}{d\xi}\,10^2$	4,88	4,85	4,77	4,55	4,07	3,46	3,46	2,05	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\frac{v_1}{v}$	0,103	0,113	0,130	0,169	0,253	0,373	0,478	0,624	1
	$\frac{1}{(\alpha^0)^2}\frac{d c_{wi}}{d\xi}\,10^4$	0,930	0,960	1,081	1,34	1,814	2,22	2,38	2,24	0
$\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_m}$	1	0,990	0,962	0,910	0,788	0,660	0,524	0,370	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\frac{d c_a}{d\xi}\,10^2$	4,51	4,47	3,46	4,11	3,56	2,98	2,36	0,835	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\frac{v_1}{v}$	0,177	0,186	3,46	3,46	0,352	0,457	0,569	0,696	1
	$\frac{1}{(\alpha^0)^2}\frac{d c_{wi}}{d\xi}\,10^4$	1,40	1,451	1,584	1,803	2,18	2,38	2,36	2,03	0

Durch Integration findet man bei $\frac{b}{t} = {}^1/_{10}$ eine Abweichung von etwa 10 vH, bei $\frac{t}{b} = {}^1/_6$ von etwa 5 vH vom Minimum des induzierten Widerstandes. Im Bereiche der praktisch vorkommenden Seitenverhältnisse kann die für elliptische Verteilung geltende Prandtlsche Formel $c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi}\,\frac{t}{b}$, beim rechteckigen Flügel näherungsweise durch

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi}\left(0{,}96\,\frac{t}{b} + 0{,}014\right) \qquad (29)$$

ersetzt werden.

Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung.

Von **E. POHLHAUSEN** in Warnemünde.

In einer strömenden Flüssigkeit sind Wärmeleitung und Wärmekonvektion Vorgänge, die mit der inneren Reibung (oder Impulsleitung) und mit der Impulskonvektion große Aehnlichkeit besitzen. Mathematisch findet dies seinen Ausdruck in dem gleichartigen Bau der Differentialgleichungen, die einerseits für die Temperatur und anderseits für den Geschwindigkeitsvektor in der Flüssigkeit bestehen. Man kann daraus auf eine Beziehung zwischen dem Wärmeaustausch und dem Reibungswiderstand schließen, die eine strömende Flüssigkeit an einem festen Körper hervorrufen. Dies ist zuerst von Prandtl ausgesprochen und durchgeführt worden[1]), und zwar für turbulente Vorgänge, unter der vereinfachenden Annahme von Wärmequellen und -senken im Innern der Flüssigkeit.

In einer Strömung mit kleiner innerer Reibung lassen sich nun die hydrodynamischen Differentialgleichungen im Bereich einer an einem festen Körper anliegenden Grenzschicht vereinfachen, indem man, ebenfalls von Prandtl[2]) zuerst angegebene Abschätzungen über die relative Größenordnung der einzelnen Glieder der Differentialgleichungen durchführt. Hier soll zunächst gezeigt werden, daß durch die gleichen Abschätzungen bei kleiner Wärmeleitung auch eine Vereinfachung der Differentialgleichung für die Temperatur der Flüssigkeit in der Nähe eines festen Körpers erreicht wird. Dadurch gelingt es, die Wärmeabfuhr von einer dünnen Platte durch eine Parallelströmung zu berechnen sowie die Temperatur einer solchen Strömung aus der Angabe eines Plattenthermometers zu ermitteln. Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Hrn. Prof. Prandtl.

1. Bezeichnungen. Größenordnung. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf ebene und stationäre Strömungen von volumbeständigen und schwerelosen Flüssigkeiten und nennen:

λ die Wärmeleitfähigkeit,
ν den kinematischen Reibungskoeffizienten,
c die spezifische Wärme (bei der Anwendung auf Gase $= c_p$ zu setzen),
ϱ die Dichte,
u, v die Geschwindigkeitskomponenten,
T die Temperatur,
p den Druck der Flüssigkeit.

Umströmt eine Flüssigkeit mit sehr kleiner innerer Reibung einen festen Körper, so wird — dies die allgemeine Annahme der heutigen Hydromechanik — die Strömung in größerer Entfernung vor dem Körper annähernd übereinstimmen mit der Potentialströmung, welche die Hydrodynamik reibungsloser Flüssigkeiten für den Körper ergibt. An der Wand des festen Körpers dagegen bildet sich eine Grenzschicht aus, da die reibende Flüssigkeit bei noch so kleiner Reibung an dem festen Körper haften muß. In dieser Grenzschicht steigt die Geschwindigkeit der Strömung vom Werte Null bis zu dem der Potentialströmung entsprechenden an. Je kleiner die Reibung der Flüssigkeit ist, um so dünner wird auch die Grenzschicht, um so stärker muß also auch der Geschwindigkeitsanstieg werden. Nimmt man bei einer ebenen Strömung die Bogenlänge der Körperumgrenzung als x-Koordinate, ihre Normale als y-Richtung und hat die Grenzschicht in der y-Richtung die Dicke ε, so muß, damit u in dem Bereich $0 \leqq y \leqq \varepsilon$ von Null zu endlichen Werten ansteigt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ sein;}$$

während $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in ihrer Größenordnung von der mehr oder weniger geringen Dicke der Grenzschicht unberührt bleiben und für den Zweck unserer Abschätzung von der Größenordnung 1 angenommen werden können. Aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

folgt, daß dann auch $\frac{\partial v}{\partial y}$ von der Größenordnung 1 ist; v hat daher innerhalb der Grenzschicht die Größenordnung ε.

Ist die Flüssigkeit ein sehr schlechter Wärmeleiter, so kann ihre Temperatur $\overline{T}$, wenn man von Wärmestrahlung absieht, in großer Entfernung vor einem festen Körper durch dessen Anwesenheit nicht viel geändert werden, auch wenn der feste Körper die Temperatur $T_1 \gtrless \overline{T}$ hat. Betrachten wir insbesondere die Strömung eines vollkommenen Gases, deren Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ klein ist gegen die Schallgeschwindigkeit in dem Gase,

[1]) L. Prandtl, Phys. Ztschr. 11, 1910, S.
[2]) L. Prandtl, Verhandlungen d. III. intern Math.-Kongresses zu Heidelberg, Leipzig 1904 S. 484.

so wird an einer Stelle in einiger Entfernung vor dem Körper, wo die Geschwindigkeit $\bar{\mathfrak{w}}$ sein mag, die Temperatur $\bar{T}$ des strömenden und schlecht wärmeleitenden Gases durch den Ausdruck:

$$\bar{T} = T_0 - \frac{A}{2\,c_p}\left(\mathfrak{w}_0^{\,2} - \bar{\mathfrak{w}}^2\right)$$

wiedergegeben, worin $\mathfrak{w}_0$, T_0 die Geschwindigkeit bezw. die Temperatur des Gases in unendlicher Entfernung bezeichnen und A das thermische Arbeitsäquivalent $= 0{,}24 \cdot 10^{-7}$ erg/cal ist. Der Anstieg von dieser Strömungstemperatur $\bar{T}$ zur Temperatur T_1 des festen Körpers vollzieht sich erst in unmittelbarer Nähe des Körpers. Hat die Grenzschicht, in der dieser Anstieg vor sich geht, die Dicke ε_1, so muß, damit T in dem Bereich $0 \leq y \leq \varepsilon_1$ eine endliche Aenderung erfährt:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon_1},$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon_1^2} \text{ sein,}$$

während $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ wieder von der vergleichsweisen Größenordnung 1 bleiben.

2. Differentialgleichungen und Randbedingungen. Wir schreiben nun die Differentialgleichungen an, nach denen Geschwindigkeit, Druck und Temperatur in der Flüssigkeit verlaufen. Wir wissen, daß der Ausdruck:

$$q = A\nu\varrho\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

die Wärmemenge angibt, die in der Flüssigkeit pro Volumen- und Zeiteinheit durch die innere Reibung erzeugt wird [1]). Unter die einzelnen Glieder der Differentialgleichungen schreiben wir ihre Größenordnung im Bereiche der Grenzschichten:

$$\underset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{1}{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$$

$$\nu\left(\underset{1}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \underset{\frac{1}{\varepsilon^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right) - \underset{1}{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}} = \underset{1}{u}\,\underset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{\varepsilon}{v}\,\underset{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$\nu\left(\underset{\varepsilon}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \underset{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = \underset{1}{u}\,\underset{\varepsilon}{\frac{\partial v}{\partial x}} + \underset{\varepsilon}{v}\,\underset{1}{\frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$\lambda\left(\underset{1}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \underset{\frac{1}{\varepsilon_1^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}\right) + A\nu\varrho\left[2\underset{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 2\underset{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} + \underset{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}\right] = \varrho c\left(\underset{1}{u}\,\underset{1}{\frac{\partial T}{\partial x}} + \underset{\varepsilon}{v}\,\underset{\frac{1}{\varepsilon_1}}{\frac{\partial T}{\partial y}}\right).$$

Innere Reibung und Wärmeleitung gewinnen Einfluß, wenn

ν von der Größenordnung ε^2,
λ von der Größenordnung ε_1^2 ist.

Dies zeigt, daß die Dicken der Grenzschichten, in denen Reibung und Wärmeleitung sich bemerkbar machen, von den Größenordnungen:

$$\varepsilon = \sqrt{\nu},\ \varepsilon_1 = \sqrt{\lambda} \text{ sind.}$$

Aus der dritten Gleichung erkennt man, daß $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ von der Größenordnung ε ist; d. h. innerhalb der Grenzschicht kann der Druck und sein Gefälle längs der festen Wand als unabhängig von y betrachtet werden. Sind daher ν und λ von der gleichen Größenordnung klein, so bleiben zur Berechnung des Geschwindigkeits- und Temperaturverlaufes in der Grenzschicht die Gleichungen:

---

[1]) Zur Begründung dieses Ausdruckes sowie auch der folgenden Differentialgleichungen siehe G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, S. 593.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+A\nu\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\varrho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Als Randbedingungen haben wir zunächst:

für $y=0$: $u=0$, $v=0$.

Mit wachsendem y muß die Geschwindigkeit allmählich in die Potentialgeschwindigkeit übergehen. Da im Falle sehr kleiner Reibung kleine endliche Enfernungen von der Wand gegenüber den Abmessungen von der Ordnung ε die Rolle des Unendlichen spielen, können wir sagen, daß

für $y=\infty$: $u=u(x)=$ der Potentialgeschwindigkeit am festen Körper

sein muß.

Als Randbedingung für die Temperatur ist vorzuschreiben:

Entweder für $y=0$: $T=T_1=$ der Temperatur des festen Körpers.

Dies entspricht der Aufgabe, die durch die Strömung von dem festen Körper mit konstant gehaltener Temperatur T_1 in der Zeiteinheit abgeführte Wärmemenge Q zu finden. Diese ist:

$$Q=-\lambda\int\limits_F\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}dF,$$

wenn F die Oberfläche des Körpers bezeichnet.

Oder für $y=0$: $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0.$

Bei dieser Randbedingung ist die abgeführte Wärmemenge gleich Null. Der für $y=0$ sich ergebende Wert T_1 $(y=0)$ gibt dann die Temperatur an, auf die sich der feste Körper in der Strömung von der Temperatur T_0 einstellt (Thermometerproblem).

In beiden Aufgaben lautet die zweite Randbedingung:

für $y=\infty$: $T=\bar{T}=T_0-\frac{A}{2c_p}(\mathfrak{w}_0^2-\bar{u}^2(x))$.

3. Die von einer Platte abgegebene Wärmemenge. Wir teilen nun die Lösungen unserer Differentialgleichungen im einfachsten Falle mit: nämlich für eine ebene Platte, die parallel zu den Stromlinien einer Parallelströmung eingetaucht ist.

Da längs der Platte kein Druckgefälle eintritt, lauten die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\\&\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+A\nu\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\varrho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots,\quad(\mathrm{I})$$

Die Randbedingungen für u und v sind:

für $y=0$: $u=0$, $v=0$,

für $y=\infty$: $u=\bar{u}=$ konst. Geschwindigkeit der Potentialströmung.

Behandeln wir zunächst die Aufgabe, die durch die Strömung von der Platte abgeführte Wärmemenge Q zu berechnen, so haben wir für T die Randbedingungen:

für $y=0$: $T=T_1=$ konst. Plattentemperatur,

für $y=\infty$: $T=T_0=$ konst. Strömungstemperatur.

Sehen wir bei dieser Aufgabe ab von der Wärme, die im Innern der Flüssigkeit durch Reibung erzeugt wird, so lautet die Differentialgleichung für T:

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\varrho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)\quad.\quad\ldots\quad(\mathrm{I}').$$

Um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen, setzen wir an:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Führen wir ferner die neuen Variabeln ein:

$$\xi = {}^1/_2 \sqrt{\frac{u}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}}$$
$$\psi = \sqrt{\nu u} \sqrt{x}\, \zeta(\xi)$$
$$T = T_1 - (T_1 - T_0)\, \Theta(\xi),$$

so ist:

$$u = {}^1/_2\, \overline{u} \frac{d\zeta}{d\xi}$$
$$v = {}^1/_2 \sqrt{\nu \overline{u}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\xi \frac{d\zeta}{d\xi} - \zeta\right)$$

Die Randbedingungen für ζ und Θ lauten daher:

für $\xi = 0$: $\zeta = 0$; $\zeta' = 0$; $\Theta = 0$;
für $\xi = \infty$: $\zeta' = 2$; $\Theta = 1$,

und die partiellen Differentialgleichungen (I') gehen über in die totalen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^3\zeta}{d\xi^3} + \zeta \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = 0$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \sigma\zeta \frac{d\Theta}{d\xi} = 0,$$

worin σ die dimensionslose Zahl bedeutet:

$$\sigma = \frac{\nu\varrho c}{\lambda}.$$

Die Zahlenwerte für σ sind wegen der Unsicherheit in den Messungen der Wärmeleitfähigkeit λ wenig genau bestimmt. Es ist etwa für:

1-atomige Gase	$\sigma = 0{,}666$
2- » »	$\sigma = 0{,}80$
3- » »	$\sigma = 0{,}91$
4- » »	$\sigma = 1{,}08$
Wasser von 0°	$\sigma = 15$
» » 10°	$\sigma = 10$
» » 20°	$\sigma = 7.$

Die Funktion $\zeta(\xi)$ ist von H. Blasius[1]) zuerst berechnet worden. Abb. 1 gibt ihren Verlauf wieder. Mit dieser Funktion ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung für die Temperatur:

$$\Theta = \alpha(\sigma) \int_0^\xi e^{-\sigma \int_0^\xi \zeta(\xi)\, d\xi}\, d\xi,$$

worin für $\alpha(\sigma)$ wegen der Randbedingung für $y = \xi = \infty$: $\Theta = 1$ zu setzen ist:

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\sigma \int_0^\xi \zeta(\xi)\, d\xi}\, d\xi}.$$

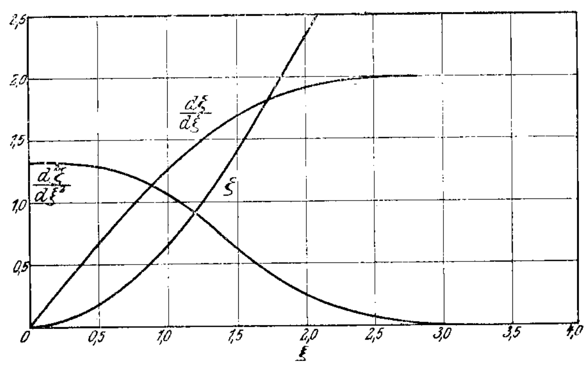

Abb. 1

In Abb. 2 ist der Verlauf der Funktion $\Theta(\xi)$ für die angegebenen Werte von σ aufgezeichnet. Da

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = \alpha(\sigma)\; e^{-\sigma \int_0^\xi \zeta(\xi)\, d\zeta}$$

ist, so folgt weiter:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)_{\xi = y = 0} = \alpha(\sigma).$$

[1]) H. Blasius, Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 56, 1908, S. 1.

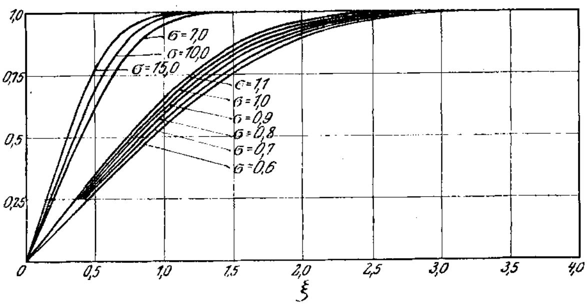

Abb. 2

Wir berechneten:

für $\sigma = 0{,}6$	$\alpha = 0{,}552$
0,7	0,585
0,8	0,614
0,9	0,640
1,0	0,664
1,1	0,687
7,0	1,29
10,0	1,46
15,0	1,67

Die in der Zeiteinheit von der einen Seite der Platte abgeführte Wärmemenge Q ist, wenn l die Länge der Platte bezeichnet, b ihre Breite:

$$Q = -\lambda \int_0^b \left(\int_0^l \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} d\,l \right) d\,b = \alpha(\sigma)\,\lambda \sqrt{\frac{\bar{u}\,l}{\nu}}\, b\,(T_1 - T_0)\,,$$

wobei bemerkt sei, daß mit ziemlicher Annäherung $\alpha(\sigma) = 0{,}664 \sqrt[3]{\sigma}$ ist. Der Wert $\sigma = 0{,}664$ für $\sigma = 1$ entspricht dabei, wie es sein muß, der Prandtlschen Analogie zwischen Wärmeabgabe und Reibungswiderstand.

4. Die Anzeige eines Plattenthermometers. Das Thermometerproblem läßt sich für die ebene Platte ebenfalls durch Quadraturen lösen. Wir verstehen hierunter die Aufgabe, jene Temperatur zu bestimmen, die die Platte haben muß, wenn sie ohne Wärmeabgabe oder -aufnahme in der Strömung bestehen soll. Hier darf die im Innern der Flüssigkeit durch Reibung erzeugte Wärme nicht mehr vernachlässigt werden, so daß die Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + A \nu \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \varrho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Die Randbedingungen sind hier:

für $y = 0$: $u = 0$; $v = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$;

für $y = \infty$: $u = \bar{u}$; $T = T_0$.

Wir führen wieder ein:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\,;$$

$$\xi = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu}}\, \frac{y}{\sqrt{x}}\,; \quad \psi = \sqrt{\nu \bar{u}}\, \sqrt{x}\; \zeta(\xi);$$

aber:

$$T = T + {}^1/_8 \frac{A \bar{u}^2}{c}\, \vartheta(\xi)$$

und erhalten die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^3 \zeta}{d \xi^3} + \zeta \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} = 0$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{d \xi^2} + \sigma \zeta \frac{d \vartheta}{d \xi} + 2 \sigma \left(\frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} \right)^2 = 0$$

mit den Randbedingungen:

für $y = 0$: $\zeta = 0$; $\zeta' = 0$; $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{\xi = 0} = 0$

für $y = \infty$: $\zeta' = 2$; $\vartheta = 0$.

Die Funktion $\zeta(\xi)$ ist dieselbe wie bei der vorhergehenden Aufgabe. Für $\vartheta(\xi)$ dagegen ergibt sich:

$$\vartheta(\xi) = \beta(\sigma) - 2\sigma \int_0^\xi e^{-\sigma\int_0^\xi \zeta\, d\xi} \left(\int_0^\xi \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)^2 e^{+\sigma\int_0^\xi \zeta\, d\xi}\, d\xi \right) d\xi .$$

Wegen der Randbedingung $y = \infty$: $\vartheta = 0$ ist:

$$\beta(\sigma) = +\, 2\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma\int_0^\xi \zeta\, d\xi} \left(\int_0^\xi \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)^2 e^{+\int_0^\xi \zeta\, d\xi}\, d\xi \right) d\xi .$$

Abb. 3 enthält den Verlauf von $\vartheta(\xi)$.

Wir berechneten:

für $\sigma = 0{,}6$	$\beta = 3{,}08$
0,7	3,34
0,8	3,58
0,9	3,80
1,0	4,00
1,1	4,20
7,0	10,06
10,0	11,86
15,0	14,14.

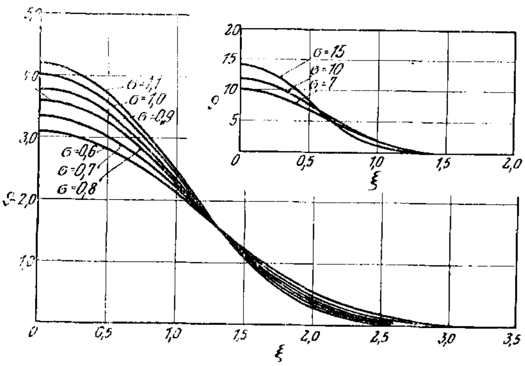

Abb 3

Die Korrektionen $\Delta(\sigma)$, um welche die Anzeigen T_1 eines Plattenthermometers zu vermindern sind, um die Temperatur $\overline{T}$ der Strömung zu erhalten, sind:

$$\overline{T} = T_1 - \Delta(\sigma)$$
$$\Delta(\sigma) = +\, {}^1\!/_8\, \frac{A\overline{u}^2}{c}\, \beta(\sigma) .$$

Bei Gasen kann man diese Temperaturkorrektion in Beziehung setzen zu der Temperaturerhöhung, die der adiabatischen Verdichtung an einem Standpunkt $T_0 - \overline{T} = {}^1\!/_2 \frac{A\overline{u}^2}{c}$ entspricht. Es ist also: $\Delta(\sigma) = (T_0 - \overline{T})\, {}^1\!/_4\, \beta(\sigma)$.

In dem ausgezeichneten Fall $\sigma = 1$ wird ${}^1\!/_4\, \beta = 1$, also $T_1 = \overline{T} + \Delta\sigma = T_0$; es wird hier bei einer nach der Bernoullischen Gleichung erfolgenden Strömung überhaupt keine Temperaturänderung gemessen. 19

Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

In einer sehr wertvollen kleinen Schrift »Das Gesetz der kleinen Zahlen« hat L. v. Bortkiewicz im Jahre 1898 darauf hingewiesen, welch große Bedeutung innerhalb der praktischen Statistik einer von Poisson herrührenden Formel für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse zukommt. Es handelt sich dabei um folgende Aufgabe: Wird ein Versuch, der auf eine einfache Alternative (Kopf oder Adler, rot oder schwarz, leben oder sterben) führt, n mal wiederholt, so ist die Wahrscheinlichkeit w_x dafür, daß jener Versuchsausgang, der die Einzelwahrscheinlichkeit p besitzt, x mal eintritt, durch die bekannte Newtonsche Formel

$$w_x = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad 0 < p < 1,\ 0 \leq x \leq n \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben. Hält man in diesem Ausdruck x fest, läßt n unbeschränkt wachsen und p so abnehmen, daß $np = a$ fest bleibt, so geht er, wie Poisson bemerkt hat, über in

$$w_x = \frac{a^x e^{-a}}{x!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$