ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations — Mai 1998, Vol. 3, 213–233
URL: http://www.emath.fr/cocv/

DESCRIPTION DU DÉFAUT DE COMPACITÉ DE L'INJECTION DE SOBOLEV

PATRICK GÉRARD

Résumé. On montre que toute suite bornée d'un espace de Sobolev hilbertien homogène s'écrit, à une sous-suite près, comme la somme presque orthogonale d'une suite tendant vers zéro dans l'espace de Lebesgue correspondant par l'injection de Sobolev, et d'une superposition de suites de translatées–dilatées de profils fixes. On retrouve ainsi les différentes versions du principe de concentration–compacité.

1. Introduction

Soient d un entier positif, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont les fonctions ont une transformée de Fourier nulle près de l'origine.

Pour tout réel $s \in \left]0, \frac{d}{2}\right[$, on désigne par $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ la complétion de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ pour la norme

$$||\Lambda^s u||_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^d} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\Lambda^s = (-\Delta)^{\frac{s}{2}}$. Compte tenu de l'inégalité de Sobolev sur $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$,

$$||u||_{L^p} \leq C\,||\Lambda^s u||_{L^2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}, \tag{1.1}$$

l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'identifie au sous-espace de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dont les fonctions ont une transformée de Fourier du type

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{v}(\xi)}{|\xi|^s}, \tag{1.2}$$

où $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On étend alors l'opérateur Λ^s à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ en posant $v = \Lambda^s u$, et l'inégalité de Sobolev (1.1) reste vraie pour tout $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

On notera que les normes L^p et $\dot{H}^s$ sont invariantes par les translations τ_y et les dilatations δ_h définies par

$$\tau_y u(x) = u(x-y), \;\; y \in \mathbb{R}^d\,; \quad \delta_h u(x) = \frac{1}{h^{d/p}} u\Big(\frac{x}{h}\Big), \quad h > 0. \tag{1.3}$$

Ces invariances induisent des défauts de compacité pour l'injection de $\dot{H}^s$ dans L^p : si u est un élément non nul de $\dot{H}^s$, pour toute suite (y_n) de points

Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail : Patrick.Gerard@math.u-psud.fr

Soumis le 24 juin 1997. Révisé le 26 janvier 1998. Accepté le 3 avril 1998.

de $\mathbb{R}^d$ tendant vers l'infini, pour toute suite (h_n) de réels positifs tendant vers 0 ou vers $+\infty$, les suites $(\tau_{y_n} u)$ et $(\delta_{h_n} u)$ convergent faiblement vers 0 dans $\dot{H}^s$ et ont une norme non nulle indépendante de n, donc ne sont pas relativement compactes dans L^p.

L'objet de ce travail est d'étudier dans quelle mesure ces invariances sont les seules responsables du défaut de compacité de l'injection de Sobolev $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$. Afin d'énoncer le résultat principal, nous introduisons un peu de vocabulaire. On appellera *échelle* toute suite $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et *cœur* (de concentration) toute suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^d$. Etant donnés deux échelles $\mathbf{h}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ et deux cœurs $\mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{x}}$, on dira que les couples $(\mathbf{h}, \mathbf{x})$ et $(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{x}})$ sont orthogonaux si

$$\left|\log\left(\frac{\tilde{h}_n}{h_n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \text{ou} \quad \left(\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}} \text{ et } \frac{|x_n - \tilde{x}_n|}{h_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\right). \tag{1.4}$$

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Pour toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, il existe une sous-suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite $(\mathbf{h}^{(j)})_{j\geq 1}$ d'échelles, une suite $(\mathbf{x}^{(j)})_{j\geq 1}$ de cœurs et une suite $(\psi_j)_{j\geq 1}$ de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tels que les couples $(\mathbf{h}^{(j)}, \mathbf{x}^{(j)})$ soient deux à deux orthogonaux et, pour tout entier $\ell \geq 1$,*

$$u'_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{h_n^{(j)}}\right)^{\frac{d}{p}} \psi_j\left(\frac{x - x_n^{(j)}}{h_n^{(j)}}\right) + r_n^{(\ell)}(x), \quad \limsup_{n\to\infty} \, ||r_n^{(\ell)}||_{L^p} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0, \tag{1.5}$$

$$||\Lambda^s u'_n||_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{\ell} ||\Lambda^s \psi_j||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s r_n^{(\ell)}||_{L^2}^2 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{1.6}$$

Remarques 1.2.

a) Une conséquence des propriétés (1.5) et (1.6) est – quitte à extraire de nouveau une sous-suite – l'existence d'une suite (ℓ_n) d'entiers tendant vers l'infini telle que

$$u'_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell_n} \left(\frac{1}{h_n^{(j)}}\right)^{\frac{d}{p}} \psi_j\left(\frac{x - x_n^{(j)}}{h_n^{(j)}}\right) + r_n(x), \quad ||r_n||_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1.7}$$

$$||\Lambda^s u'_n||_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} ||\Lambda^s \psi_j||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s r_n||_{L^2}^2 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{1.8}$$

Cette formulation présente l'avantage de faire apparaître clairement un "modèle" du défaut de compacité de la suite (u'_n) dans L^p. Néanmoins, les propriétés (1.5) et (1.6) sont plus précises, et en pratique plus commodes à utiliser.

b) Soient $\mathbf{h}, \tilde{\mathbf{h}}$ deux échelles et $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}$ deux cœurs tels que les couples $(\mathbf{h}, \mathbf{x})$ et $(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{x}})$ soient orthogonaux. Alors, si $f \in L^a(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^b(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, $1 < a, b < \infty$, on vérifie aisément que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_n^{d/a}} f\left(\frac{x - x_n}{h_n}\right) \frac{1}{\tilde{h}_n^{d/b}} g\left(\frac{x - \tilde{x}_n}{\tilde{h}_n}\right) dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1.9}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire

$$\left| \left| \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \right|^p - \sum_{j=1}^{\ell} |\alpha_j|^p \right| \leq C_\ell \sum_{j \neq k} |\alpha_j| \, |\alpha_k|^{p-1} \tag{1.10}$$

on en déduit que, dans les conditions du théorème 1.1,

$$||u'_n||_{L^p}^p \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} ||\psi_j||_{L^p}^p . \tag{1.11}$$

Par ailleurs, l'inégalité (1.6) entraîne

$$\limsup_{n\to\infty} ||\Lambda^s u'_n||_{L^2}^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} ||\Lambda^s \psi_j||_{L^2}^2 . \tag{1.12}$$

On retrouve ainsi que la meilleure constante de Sobolev $I = \inf \big\{ ||\Lambda^s \psi||_{L^2},$ $||\psi||_{L^p} = 1 \big\}$ est atteinte, ainsi que la structure des suites minimisantes (voir P.-L. Lions [12]).

c) En utilisant (1.9) et (1.10), on montre de même la généralisation suivante de (1.11),

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, |u'_n(x)|^p \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} (h_n^{(j)})^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left| \psi_j \Big(\frac{x - x_n^{(j)}}{h_n^{(j)}} \Big) \right|^p dx + o(1) ,$$

$$n \to \infty , \tag{1.13}$$

pour toute fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Supposons alors que (u_n) vérifie, en plus des hypothèses du théorème,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|>R} |u_n(x)|^p \, dx \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 . \tag{1.14}$$

Alors, en utilisant (1.13) avec $\varphi(x) = \mathbf{1}_{|x|>R}$, on constate que les suites $\mathbf{h}^{(j)}$ et $\mathbf{x}^{(j)}$ sont nécessairement bornées (si $\psi_j \neq 0$!), donc, quitte à extraire une sous-suite et à modifier ψ_1, la propriété (1.5) devient

$$u'_n(x) = \psi_1(x) + \sum_{j=2}^{\ell} \Big(\frac{1}{h_n^{(j)}} \Big)^{\frac{d}{p}} \psi_j \Big(\frac{x - x_n^{(j)}}{h_n^{(j)}} \Big) + r_n^{(\ell)}(x) , \tag{1.15}$$

avec $\limsup_{n\to\infty} ||r_n^{(\ell)}||_{L^p} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$ et, pour tout $j \geq 2$, $h_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $x_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{}$ $x^{(j)} \in \mathbb{R}^d$. Dès lors, en appliquant (1.13) avec des fonctions continues à support compact, on obtient

$$|u'_n(x)|^p \rightharpoonup \sum_{j=1}^{\infty} ||\psi_j||_{L^p}^p \, \delta(x - x_j) , \tag{1.16}$$

au sens de la convergence faible des mesures. Par ailleurs, les informations sur $(r_n^{(\ell)})$ fournies par la démonstration du théorème 1.1 (remarques 3.5 et 4.4) permettent de raffiner (1.6) sous la forme

$$|\Lambda^s u_n'(x)|^2 - |\Lambda^s r_n^{(\ell)}(x)|^2 \rightharpoonup \sum_{j=1}^{\ell} ||\Lambda^s \psi_j||_{L^2}^2 \, \delta(x - x_j) \, . \tag{1.17}$$

À partir de (1.16) et (1.17), on retrouve donc le "deuxième lemme de concentration-compacité" de P.-L. Lions [12]. De plus, on peut également montrer que toute mesure semi-classique associée à la suite $(\Lambda^s u_n')$ et à l'échelle $\mathbf{h}^{(j)}$ est du type

$$m_j(x, \xi) = \delta(x - x_j) \otimes |\xi|^{2s} |\hat{\psi}_j(\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^d} + \mu_j(x, \xi) \, , \tag{1.18}$$

où μ_j est une mesure semi-classique associées à $(\Lambda^s r_n^{(\ell)})$, $\ell > j$, et à $\mathbf{h}^{(j)}$. On retrouve donc aussi le critère de "concentration-compacité microlocale" mis en évidence dans [5,6].

d) Signalons que la démonstration du théorème 1.1 que nous allons donner utilise fortement le théorème de Plancherel, donc ne s'adapte pas de façon évidente à une injection de Sobolev du type $\dot{W}^{s,q} \hookrightarrow L^p$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{s}{d}$, $1 < q < \infty$, $0 < s < \frac{d}{q}$ avec $q \neq 2$.†

e) Enfin, mentionnons que le théorème 1.1 était déjà connu dans le cas d'une suite critique pour la fonctionnelle

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

sur le domaine $\{u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L^p} = 1\}$, Ω étant un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ (voir M. Struwe [17]). De plus, pour un problème elliptique différent, H. Brezis et J.-M. Coron [3] ont mené une étude similaire où apparaissaient déjà clairement des propriétés de presque orthogonalité du type (1.4), (1.6) en précisant les "méthodes d'éclatement" de Wente [18] et Sacks-Uhlenbeck [16]. Néanmoins, dans ces références, la décomposition est plus facile à obtenir, car l'énergie des différents profils est minorée, donc seul un nombre fini de profils intervient, et le reste tend vers 0 en norme énergie. Ce n'est bien sûr pas le cas en général dans le théorème 1.1.

Indiquons maintenant le plan de cet article. Les deux prochains paragraphes sont consacrés à la détermination $\mathbf{h}^{(j)}$: au paragraphe 2, on montre en fait un résultat général sur la structure des suites bornées de L^2 et sur les échelles qui leur sont associées. Les deux ingrédients de démonstration sont, d'une part, un lemme de type "concentration-compacité" proche de celui de P.-L. Lions [11], et une méthode d'exhaustion récemment introduite par G. Métivier et S. Schochet [14,15] dans un contexte différent. Au paragraphe 3, on applique ce résultat à la suite $(\Lambda^s u_n)$ et on montre, à l'aide d'une

† Nous avons récemment appris qu'un tel travail avait été réalisé par S. Jaffard, à l'aide de la décomposition en ondelettes.

inégalité de Sobolev raffinée, qu'une suite bornée (r_n) de $\dot{H}^s$ qui "ne possède aucune échelle" (en un sens précisé à la section 2) converge nécessairement vers 0 dans L^p. Signalons que ce fait avait déjà été observé dans [5,6]. La démonstration du théorème est achevée au paragraphe 4, où l'on utilise à nouveau la méthode de Métivier-Schochet pour déterminer les cœurs de concentration $\mathbf{x}^{(j)}$ et les profils associés ψ_j.

Pour terminer cette introduction, signalons qu'une variante du théorème 1.1 est utilisée dans un travail en collaboration avec H. Bahouri [1,2] pour décrire les solutions de l'équation des ondes non linéaires avec exposant critique dans l'approximation haute fréquence, et démontrer certaines bornes *a priori.*

Notations utilisées

La normalisation adoptée ici pour la transformation de Fourier est

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, d\xi\,.$$

Si a est une fonction sur $\mathbb{R}^d$, on note $a(D)$ le multiplicateur de Fourier de symbole a, défini par

$$\widehat{a(D)f}\,(\xi) = a(\xi)\,\hat{f}(\xi)\,.$$

Enfin, on utilisera les décompositions dyadiques de l'identité,

$$I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k\,, \quad \Delta_k = \varphi(2^{-k}D)$$

où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ est choisie telle que

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi)\,, \quad \forall \xi \neq 0\,.$$

La norme L^2 est alors équivalente à

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} ||\Delta_k f||_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

tandis que l'on pose, pour toute fonction $f \in L^2$,

$$||f||_B = \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||\Delta_k f||_{L^2}\,.$$

On notera qu'un changement de fonction φ change la norme $||\ ||_B$ ci-dessus en une norme équivalente.

2. Échelles associées à une suite bornée de L^2

Dans toute la suite, on appelle *échelle* toute suite $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs.

Définition 2.1. Soit $\mathbf{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\mathbb{R}^d)$, et soit $\mathbf{h}$ une échelle.

1) On dit que $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-*oscillante* si

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{h_n|\xi|\leq\frac{1}{R}}|\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi+\int_{h_n|\xi|\geq R}|\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi\right)\xrightarrow[R\to+\infty]{}0\,. \quad (2.1)$$

2) On dit que $\mathbf{f}$ est *étrangère* à $\mathbf{h}$ si, pour tout réel $a>0$, pour tout réel $b>a$,

$$\int_{a\leq h_n|\xi|\leq b}|\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi\xrightarrow[n\to\infty]{}0\,. \quad (2.2)$$

Lorsque $\mathbf{h}$ est une suite tendant vers 0, la propriété de $\mathbf{h}-$oscillation offre un cadre naturel pour l'approximation semi-classique (voir [5], P. Gérard et E. Leichtnam [7], P.-L. Lions et T. Paul [13], P. Gérard, P. Markowich, N. Mauser et F. Poupaud [8]). On prendra garde au fait que la définition donnée ici diffère légèrement de celle qui est donnée dans [8]. De plus, ici, on autorise à $\mathbf{h}$ d'autres comportements, afin de prendre en compte, par exemple, le comportement de $f_n(x)$ à l'infini en $x\in\mathbb{R}^d$.

Remarques 2.2.

a) Étant donnée une échelle $\mathbf{h}$, les suites $\mathbf{f}$ qui sont à la fois $\mathbf{h}$-oscillantes et étrangères à $\mathbf{h}$ sont exactement celles qui tendent vers 0 pour la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$.

b) Soit $\mathbf{h}$ une échelle, soient $\mathbf{f}$ une suite $\mathbf{h}$-oscillante et $\mathbf{g}$ une suite étrangère à $\mathbf{h}$. Alors la formule de Plancherel et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent aisément

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\overline{g_n(x)}\,dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0\,.$$

On en déduit l'identité de presque orthogonalité

$$||f_n+g_n||_{L^2}^2=||f_n||_{L^2}^2+||g_n||_{L^2}^2+o(1)\,,\quad n\to\infty\,.$$

c) Supposons donnée, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une fonction $\sigma_n\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, de sorte que la suite $(||\sigma_n||_{L^\infty})$ soit bornée. Alors, si $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante (resp. étrangère à $\mathbf{h}$) la suite $(\sigma_n(D)\,f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

d) Soit $\mathbf{h}$ une échelle tendant vers 0 et m une fonction bornée sur $\mathbb{R}^d$, uniformément continue. Alors si $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante (resp. étrangère à $\mathbf{h}$) la suite $(m\,f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. En effet, d'une part, dans la définition 2.1, on peut remplacer les conditions (2.1) et (2.2) par

$$\limsup_{n\to\infty}||\psi(Rh_nD)\,f_n||_{L^2}+\left|\left|f_n-\psi\Big(\frac{h_nD}{R}\Big)\,f_n\right|\right|_{L^2}\xrightarrow[R\to\infty]{}0 \quad (2.1)'$$

$$\left|\left|\psi\Big(\frac{h_nD}{b}\Big)\left(1-\psi\Big(\frac{h_nD}{a}\Big)\right)f_n\right|\right|_{L^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad (2.2)'$$

où $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est égale à 1 au voisinage de 0. D'autre part, si $\hat{\psi} \in L^1$, le lemme de Schur entraîne

$$||[m, \psi(hD)]||_{L^2 \to L^2} \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\psi}(z)| \omega_m(h|z|)\, dz$$

où ω_m est le module de continuité de m. Dès lors,

$$||[m, \psi(h_n D)]||_{L^2 \to L^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(2.1)'$ ou $(2.2)'$ est vérifiée par $(m f_n)$ dès qu'elle l'est par (f_n). En particulier, dans les conditions de la remarque 2.2 b) ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} m(x)|f_n(x) + g_n(x)|^2\, dx = &\int_{\mathbb{R}^d} m(x)|f_n(x)|^2\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} m(x)|g_n(x)|^2\, dx + o(1), \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Exemple 2.3. Il existe des suites $\mathbf{f}$ étrangères à toute échelle, qui néanmoins ne tendent pas vers 0 en norme L^2. Par exemple, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx \neq 0$. On pose, pour tout $n \geq 2$,

$$f_n(x) = \frac{n^d}{(\operatorname{Log} n)^{1/2}} (1 - \Delta_x)^{-\frac{d}{4}} (\psi(nx)), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

de sorte que

$$\hat{f}_n(\xi) = \frac{1}{(\operatorname{Log} n)^{1/2}} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{d}{4}} \hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{n}\Big).$$

Par la formule de Plancherel, on obtient donc

$$\begin{aligned}&||f_n||_{L^2}^2 \\ &= \frac{(2\pi)^{-d}}{\operatorname{Log} n} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{d/2}} \left|\hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{n}\Big)\right|^2 d\xi \longrightarrow (2\pi)^{-d} |S^{d-1}| \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx\right|^2.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a, pour tout échelle $\mathbf{h}$, pour tous $b > a > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{a \leq h_n |\xi| \leq b} |\hat{f}_n(\xi)|^2\, d\xi &\leq \frac{C}{\operatorname{Log} n} \int_{a \leq h_n |\xi| \leq b} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{d/2}} \\ &\leq \frac{C'}{\operatorname{Log} n} \operatorname{Log}\Big(\frac{b}{a}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Exemple 2.4. Notons enfin que la particularité d'être étrangère à toute échelle se mesure à l'aide de la norme dans l'espace de Besov $B = \dot{B}^0_{2,\infty}$ introduit à la fin du paragraphe 1. En effet,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} ||f_n||_B &= \limsup_{n \to \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} ||\Delta_k f_n||_{L^2} \\ &= \sup_{(k_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \limsup_{n\to\infty} ||\Delta_{k_n} f_n||_{L^2}\end{aligned}$$

et par ailleurs

$$\left(\int_{\alpha\leq 2^{-k}|\xi|\leq\beta}|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\leq ||\Delta_k f||_{L^2}\leq\left(\int_{a\leq 2^{-k}|\xi|\leq b}|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

pour $0 < a < \alpha < \beta < b$ convenables.

On en déduit aisément que $||f_n||_B$ tend vers 0 si et seulement si $\mathbf{f}$ est étrangère à toute échelle.

La proposition suivante exprime un résultat de décomposition d'une suite arbitraire $\mathbf{f}$ par rapport à une échelle donnée $\mathbf{h}$.

PROPOSITION 2.5. *Soient* $\mathbf{h}$ *une échelle,* $\mathbf{f}$ *une suite bornée de* $L^2(\mathbb{R}^d)$*. Il existe une application* $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *strictement croissante et une suite* (g_n) *bornée dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *telles que :*
(i) (g_n) *soit* $(h_{\varphi(n)})$*-oscillante,*
(ii) $(f_{\varphi(n)} - g_n)$ *soit étrangère à* $(h_{\varphi(n)})$*.*

Démonstration. Pour tout entier n, pour tout réel $R\geq 1$, on pose

$$L_n(R)=\int_{\frac{1}{R}\leq h_n|\xi|\leq R}|\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi\,. \tag{2.4}$$

Notons que, pour tout n, L_n est une fonction croissante de R, et que $\sup\limits_{n,R} L_n(R) < +\infty$. D'après le lemme de Helly, il existe une application $\varphi_1 : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $L_{\varphi_1(n)}(R)\to L(R)$ pour tout $R\geq 1$.

La fonction L étant croissante et bornée, posons

$$\ell=\lim_{R\to+\infty}L(R)\,. \tag{2.5}$$

On construit alors par récurrence une application $\varphi_2 : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n\geq 1$,

$$L(n)+\frac{1}{n}\geq L_{\varphi_1(\varphi_2(n))}(n)\geq L(n)-\frac{1}{n}\,.$$

Posons alors $\varphi=\varphi_1\circ\varphi_2$. On a

$$L_{\varphi(n)}(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell\,. \tag{2.6}$$

On définit alors $g_n\in L^2$ par la formule

$$\hat{g}_n(\xi)=\mathbf{1}_{\frac{1}{n}\leq h_{\varphi(n)}|\xi|\leq n}\,\hat{f}_{\varphi(n)}(\xi)\,. \tag{2.7}$$

Alors (g_n) est une suite bornée de L^2, et pour tous $b > a > 0$ et n assez grand,

$$\hat{g}_n(\xi)=\hat{f}_{\varphi(n)}(\xi)\,,\quad a\leq h_{\varphi(n)}|\xi|\leq b\,, \tag{2.8}$$

ce qui assure la propriété (ii). Par ailleurs, pour $n \geq R \geq 1$,

$$\int_{h_{\varphi(n)}|\xi|\leq\frac{1}{R}} |\hat{g}_n(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{h_{\varphi(n)}|\xi|\geq R} |\hat{g}_n(\xi)|^2 \, d\xi \tag{2.9}$$
$$= L_{\varphi(n)}(n) - L_{\varphi(n)}(R) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell - L(R),$$

quantité qui tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, ce qui assure que (g_n) est $(h_{\varphi(n)})$-oscillante. □

REMARQUES 2.6.

a) Étant données $\mathbf{f}' = (f_{\varphi(n)})$ et $\mathbf{h}' = (h_{\varphi(n)})$, une suite $\mathbf{g} = (g_n)$ telle que (i), (ii), si elle existe, est caractérisée modulo une suite L^2 tendant vers 0 en norme. C'est une conséquence de la remarque 2.2. a). On appellera alors $\mathbf{g}$ *une composante* $\mathbf{h}'$*-oscillante de la suite* $\mathbf{f}'$. La proposition se paraphrase donc en disant que, à extraction près de sous-suites, toute suite bornée de L^2 admet une composante oscillante selon une échelle donnée.

b) La démonstration ci-dessus montre que la composante $\mathbf{h}'$-oscillante $\mathbf{g}$ de $\mathbf{f}'$ peut être prise de la forme $g_n = \sigma_n(D)\, f'_n$, avec $\sigma_n^2 = \sigma_n$.

c) Si $\mathbf{f}$ est étrangère à une échelle $\mathbf{h}$ et admet une composante oscillante $\mathbf{g}$ selon une échelle $\widetilde{\mathbf{h}}$, alors $\mathbf{g}$ est étrangère à $\mathbf{h}$. En effet, pour tous $b > a > 0$, posons $\sigma_n(\xi) = \mathbf{1}_{a\leq h_n|\xi|\leq b}$. Alors la remarque 2.2. c) entraîne que la suite $(\sigma_n(D)\, g_n)$ est $\widetilde{\mathbf{h}}$-oscillante tandis que $(\sigma_n(D)(f_n - g_n))$ est étrangère à $\widetilde{\mathbf{h}}$. Il en résulte que $(\sigma_n(D)\, g_n)$ est une composante $\widetilde{\mathbf{h}}$-oscillante de $(\sigma_n(D)\, f_n)$. Or $||\sigma_n(D)\, f_n||_{L^2}$ tend vers 0. La remarque 2.6 a) entraîne donc que $||\sigma_n(D)\, g_n||_{L^2}$ tend vers 0, et ceci pour tous $b > a > 0$. La suite $\mathbf{g}$ est donc étrangère à $\mathbf{h}$.

La notion suivante permet de comparer en général deux telles échelles $\mathbf{h}$ et $\widetilde{\mathbf{h}}$.

DÉFINITION 2.7. Deux échelles $\mathbf{h}$ et $\widetilde{\mathbf{h}}$ sont dites *orthogonales* (on note $\mathbf{h} \perp \widetilde{\mathbf{h}}$) si

$$\left| \log\left(\frac{\tilde{h}_n}{h_n}\right) \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty .$$

Par exemple, il est facile de vérifier que si $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante, alors $\mathbf{f}$ est étrangère à toute échelle orthogonale à $\mathbf{h}$. Le lemme suivant fournit une réciproque partielle de ce fait :

LEMME 2.8. *Soit* $\mathbf{g}$ *une suite* $\mathbf{h}$*-oscillante telle que* $||g_n||_{L^2}$ *ait une limite inférieure* > 0. *On suppose que* $\mathbf{g}$ *est étrangère à une échelle* $\widetilde{\mathbf{h}}$. *Alors* $\mathbf{h}$ *et* $\widetilde{\mathbf{h}}$ *sont orthogonales.*

Démonstration. Si $\mathbf{h}$ et $\widetilde{\mathbf{h}}$ n'étaient pas orthogonales, il existerait des sous-suites $(h_{\varphi(n)})$, $(\tilde{h}_{\varphi(n)})$ telles que

$$\frac{\tilde{h}_{\varphi(n)}}{h_{\varphi(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \in]0, +\infty[.$$

Pour tous $b > a > 0$, on aurait alors, pour n assez grand,

$$\int_{a\leq h_{\varphi(n)}|\xi|\leq b} \left|\hat{g}_{\varphi(n)}(\xi)\right|^2 d\xi \leq \int_{\frac{\lambda a}{2}\leq \tilde{h}_{\varphi(n)}|\xi|\leq 2\lambda b} \left|\hat{g}_{\varphi(n)}(\xi)\right|^2 d\xi$$

qui tend vers 0 puisque $\mathbf{g}$ est étrangère à $\widetilde{\mathbf{h}}$. Il en résulte que $(g_{\varphi(n)})$ est étrangère à $(h_{\varphi(n)})$; comme elle est aussi $(h_{\varphi(n)})$-oscillante, on en déduit, par la remarque 2.2. a), que

$$||g_{\varphi(n)}||_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.9. *Soit* $\mathbf{f}$ *une suite bornée de* L^2*. Il existe alors une sous-suite* $\mathbf{f}'$ *de* $\mathbf{f}$*, une suite* $(\mathbf{h}^{(j)})_{j\geq 1}$ *d'échelles et une suite* $(\mathbf{g}^{(j)})_{j\geq 1}$ *de suites bornées de* L^2*, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) si $j\neq k$*,* $\mathbf{h}^{(j)}\perp \mathbf{h}^{(k)}$ *;*

(ii) pour tout j*,* $\mathbf{g}^{(j)}$ *est* $\mathbf{h}^{(j)}$*-oscillante ;*

(iii) pour tout entier $\ell\geq 1$*, pour tout* $x\in\mathbb{R}^d$*, on a*

$$f'_n(x)=\sum_{j=1}^{\ell} g_n^{(j)}(x)+r_n^{(\ell)}(x),$$

où $\mathbf{r}^{(\ell)}$ *est étrangère à* $\mathbf{h}^{(j)}$ *pour tout* $j\in\{1,\dots,\ell\}$ *et*

$$\limsup_{n\to\infty}\ ||r_n^{(\ell)}||_B \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Elle est inspirée de la méthode d'exhaustion introduite par Métivier et Schochet dans [14].

Pour toute suite bornée $\mathbf{f}$ de L^2, on pose

$$\delta(\mathbf{f})=\limsup_{n\to\infty}\ ||f_n||_B. \tag{2.10}$$

Par ailleurs, si $\mathbf{u}=(u_n)$ est une suite et $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application strictement croissante, on note $\mathbf{u}_\varphi$ la suite $(u_{\varphi(n)})$.

Première étape. On montre que, pour tout suite bornée $\mathbf{f}$ de L^2, il existe une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante et une échelle $\mathbf{h}$ telles que $\mathbf{f}_\varphi$ admette une composante $\mathbf{h}$-oscillante $\mathbf{g}$ vérifiant

$$||g_n||_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C\geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2}. \tag{2.11}$$

En effet, si $\delta(\mathbf{f})=0$, il suffit de prendre pour φ l'identité, $\mathbf{h}$ quelconque et $\mathbf{g}=0$. Sinon, il existe une suite extraite $\mathbf{f}'$ de $\mathbf{f}$ et une suite (k_n) d'éléments de $\mathbb{Z}$ telles que

$$||\Delta_{k_n} f'_n||_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C_1\geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2}. \tag{2.12}$$

Posons alors $h_n=2^{-k_n}$. Par la proposition 2.5, quitte à extraire une sous-suite de $\mathbf{f}'$ et de $\mathbf{h}$, on peut supposer que $\mathbf{f}'$ a une composante $\mathbf{h}$-oscillante, que nous noterons $\mathbf{g}$. On peut de plus supposer que $||g_n||_{L^2}$ a une limite. Comme $(f'_n - g_n)$ est étrangère à $\mathbf{h}$, on a, compte tenu de l'inégalité (2.3),

$$\lim_{n\to\infty} ||g_n||_{L^2} \geq \lim_{n\to\infty} ||\Delta_{k_n} f'_n||_{L^2} \geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2}, \tag{2.13}$$

ce qui est l'inégalité (2.11) annoncée.

Deuxième étape. On montre par récurrence la propriété suivante : il existe des applications strictement croissantes $\varphi_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $j \geq 1$, des échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ et des suites $\mathbf{g}^{(j)}$ vérifiant :

(i) pour tout j, $\mathbf{g}^{(j)}$ est $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillante ;

(ii) pour tout $\ell \geq 2$, les échelles $\mathbf{h}^{(\ell)}$, $\mathbf{h}^{(\ell-1)}_{\varphi_\ell}$, $\mathbf{h}^{(\ell-2)}_{\varphi_{\ell-1}\circ\varphi_\ell}, \ldots, \mathbf{h}^{(1)}_{\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_\ell}$ sont deux à deux orthogonales ;

(iii) pour tout n, on a

$$f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_\ell(n)} = \sum_{j=1}^{\ell-1} g^{(j)}_{\varphi_{j+1}\circ\ldots\circ\varphi_\ell(n)} + g^{(\ell)}_n + r^{(\ell)}_n \tag{2.14}$$

où $\mathbf{r}^{(\ell)}$ est étrangère à $\mathbf{h}^{(\ell)}$, $\mathbf{h}^{(\ell-1)}_{\varphi_\ell}, \ldots, \mathbf{h}^{(1)}_{\varphi_2\circ\ldots\varphi_\ell}$ et, pour tout $j \in \{1, \ldots, \ell\}$,

$$||g^{(j)}_n||_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} C_j \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r}^{(j-1)}) \tag{2.15}$$

avec la notation $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{f}$.

Observons tout d'abord que la construction de φ_1, $\mathbf{h}^{(1)}$, $\mathbf{g}^{(1)}$ est fournie par la première étape.

Supposons maintenant construits les φ_j, $\mathbf{h}^{(j)}$, $\mathbf{g}^{(j)}$ jusqu'au rang ℓ, et appliquons le résultat de la première étape à la suite $\mathbf{r}^{(\ell)}$. Soient alors $\varphi_{\ell+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\mathbf{h}^{(\ell+1)}$ une échelle telles que $\mathbf{r}^{(\ell)}_{\varphi_{\ell+1}}$ ait une composante $\mathbf{h}^{(\ell+1)}$-oscillante $\mathbf{g}^{(\ell+1)}$ vérifiant

$$||g^{(\ell+1)}_n||_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} C_{\ell+1} \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r}^{(\ell)}). \tag{2.16}$$

Posons $r^{(\ell)}_{\varphi_{\ell+1}(n)} = g^{(\ell+1)}_n + r^{(\ell+1)}_n$. Compte tenu de la remarque 2.6 c), $\mathbf{g}^{(\ell+1)}$ et $\mathbf{r}^{(\ell+1)}$ sont étrangères à $\mathbf{h}^{(\ell)}_{\varphi_{\ell+1}}$, $\mathbf{h}^{(\ell-1)}_{\varphi_\ell\circ\varphi_{\ell+1}}, \ldots, \mathbf{h}^{(1)}_{\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_{\ell+1}}$. Par ailleurs, $\mathbf{r}^{(\ell+1)}$ est étrangère à $\mathbf{h}^{(\ell+1)}$ par construction. On a donc la propriété (iii) au rang $\ell+1$. Il reste à vérifier la propriété (ii) au rang $\ell+1$. Le seul point non trivial est que $\mathbf{h}^{(\ell+1)}$ est orthogonale à $\mathbf{h}^{(\ell)}_{\varphi_{\ell+1}}, \ldots, \mathbf{h}^{(1)}_{\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_{\ell+1}}$. Or ceci est une conséquence du lemme 2.8 et de (2.16) si $\delta(\mathbf{r}^{(\ell)}) > 0$. Dans le cas où $\delta(\mathbf{r}^{(\ell)}) = 0$, il suffit de prendre $\mathbf{h}^{(\ell+1)}$ arbitraire orthogonale à $\mathbf{h}^{(\ell)}_{\varphi_{\ell+1}}, \ldots, \mathbf{h}^{(1)}_{\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_{\ell+1}}$.

Troisième étape. On pratique une extraction diagonale en posant

$$\begin{cases} F_n = f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n(n)} \\ G^{(j)}_n = g^{(j)}_{\varphi_{j+1}\circ\ldots\circ\varphi_n(n)} \quad \text{si } n > j; \quad G^{(j)}_n = 0 \text{ si } n \leq j \\ H^{(j)}_n = h^{(j)}_{\varphi_{j+1}\circ\ldots\circ\varphi_n(n)} \quad \text{si } n > j; \quad H^{(j)}_n = 1 \text{ si } n \leq j. \end{cases}$$

Alors $\mathbf{G}^{(j)}$ est $\mathbf{H}^{(j)}$-oscillante, les échelles $\mathbf{H}^{(j)}$ sont deux à deux orthogonales et, pour tout ℓ, on a, pour tout $n > \ell$,

$$F_n = \sum_{j=1}^{\ell} G_n^{(j)} + r^{(\ell)}_{\varphi_{\ell+1}\circ\ldots\circ\varphi_n(n)} = \sum_{j=1}^{\ell} G_n^{(j)} + R_n^{(\ell)} \tag{2.17}$$

avec $\mathbf{R}^{(\ell)}$ étrangère à $\mathbf{H}^{(\ell)}$, $\mathbf{H}^{(\ell-1)}, \ldots, \mathbf{H}^{(1)}$, et, pour tout $j \in \{1, \ldots, \ell\}$

$$||G_n^{(j)}||_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C_j \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r}^{(j-1)}) \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{R}^{(j-1)}). \tag{2.18}$$

Appliquons alors à (2.17) l'identité de presque orthogonalité fournie par la remarque 2.2 b). Il vient, compte tenu de (2.18),

$$||F_n||^2_{L^2} \geq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\ell} \delta(\mathbf{R}^{(j-1)})^2 + ||R_n^{(\ell)}||^2_{L^2} + o(1) \tag{2.19}$$

ce qui entraîne que la série de terme général $\delta(\mathbf{R}^{(j)})^2$ converge ; en particulier $\delta(\mathbf{R}^{(\ell)})$ tend vers 0. Ceci achève la démonstration du théorème 2.9. □

Remarque 2.10. On notera que les $\mathbf{g}^{(j)}$ fournis par le théorème 2.9 sont des composantes $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillantes de $\mathbf{f}'$. Compte tenu de la remarque 2.6 b), on peut donc prendre $\mathbf{g}^{(j)}$ de la forme

$$g_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(D)\, f_n', \tag{2.20}$$

avec $(\sigma_n^{(j)})^2 = \sigma_n^{(j)}$.

3. Un raffinement de l'inégalité de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous utilisons l'inégalité suivante.

Proposition 3.1. *Soit $s \in \left]0, \frac{d}{2}\right[$, et soit p donné par*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}. \tag{3.1}$$

Il existe une constante C telle que, pour tout $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$,

$$||u||_{L^p} \leq C\,||\Lambda^s u||^{\frac{2}{p}}_{L^2}\,||\Lambda^s u||_B^{1-\frac{2}{p}}. \tag{3.2}$$

Puisque $||f||_B \leq K\,||f||_{L^2}$, l'inégalité (3.2) est une amélioration de l'inégalité de Sobolev.

Il existe plusieurs méthodes pour établir l'inégalité (3.2). La première consiste à utiliser le cas particulier suivant d'une inégalité due à Y. Meyer, F. Oru et l'auteur [9] :

$$||u||_{L^p} \leq C\,||\Lambda^s u||^{2/p}_{L^2}\,||u||^{1-2/p}_{\dot{B}^{-d/p}_{\infty,\infty}} \tag{3.3}$$

où l'espace de Besov $\dot{B}^{-d/p}_{\infty,\infty}$ est caractérisé par la condition

$$||u||_{\dot{B}^{-d/p}_{\infty,\infty}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\frac{kd}{p}} ||\Delta_k u||_{L^\infty} < +\infty . \tag{3.4}$$

Il est ensuite aisé de remarquer, à l'aide de l'inégalité de Young, que

$$||u||_{\dot{B}^{-d/p}_{\infty,\infty}} \leq C||\Lambda^s u||_B . \tag{3.5}$$

Notons qu'une autre démonstration de (3.3), n'utilisant pas la caractérisation de L^p en tant qu'espace de Triebel, peut être obtenue en suivant la démarche de J.-Y. Chemin et C.J. Xu [4] pour l'obtention des inégalités de Sobolev. C'est d'ailleurs cette méthode qui est suivie dans [2] pour obtenir le cas particulier $d = 3$, $s = 1$, $p = 6$ de (3.1).

Une autre démonstration de (3.2), qui m'a été suggérée indépendamment par H. Brezis et L. Tartar, consiste à utiliser la théorie des espaces de Lorentz (voir par exemple Hunt [10]). L'injection de Sobolev est alors précisée sous la forme

$$\dot{H}^s \hookrightarrow L^{p,2} \tag{3.6}$$

et l'inégalité de convexité sur le second exposant fournit

$$||u||_{L^p} \leq C||\Lambda^s u||^{2/p}_{L^2} ||u||^{1-2/p}_{L^{p,\infty}} . \tag{3.7}$$

Il reste alors à remarquer que

$$||u||_{L^{p,\infty}} \leq C||\Lambda^s u||_B \tag{3.8}$$

ce que l'on peut par exemple déduire de la méthode de J.-Y. Chemin et C.J. Xu [4].

Une conséquence de l'inégalité (3.2) est évidemment le résultat suivant :

Corollaire 3.2. *Dans les conditions de la proposition 3.1, soit (u_n) une suite bornée de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ telle que $||\Lambda^s u_n||_B$ tende vers 0. Alors $||u_n||_{L^p}$ tend vers 0.*

Remarque 3.3. Le corollaire 3.2 a été en fait déjà obtenu et utilisé dans [5,6], à partir d'une inégalité différente (cf. le lemme A.7 de [5]), mais la démonstration est moins directe.

En combinant le théorème 2.9 avec le corollaire 3.2, on obtient

Proposition 3.4. *Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in \left]0, \frac{d}{2}\right[$. Il existe alors une sous-suite $\mathbf{u}'$ de $\mathbf{u}$, une suite $(\mathbf{h}^{(j)})_{j\geq 1}$ d'échelles et une suite $(\mathbf{v}^{(j)})_{j\geq 1}$ de suites bornées de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) si $j \neq k$, $\mathbf{h}^{(j)} \perp \mathbf{h}^{(k)}$;

(ii) pour tout j, la suite $(\Lambda^s v_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillante ;

(iii) pour tout entier $\ell \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$u'_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} v_n^{(j)}(x) + \rho_n^{(\ell)}(x), \quad \limsup_{n\to\infty} ||\rho_n^{(\ell)}||_{L^p} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0, \tag{3.9}$$

$$||\Lambda^s u'_n||^2_{L^2} = \sum_{j=1}^{\ell} ||\Lambda^s v_n^{(j)}||^2_{L^2} + ||\Lambda^s \rho_n^{(\ell)}||^2_{L^2} + o(1)\,, \quad n \to \infty\,. \tag{3.10}$$

Démonstration. On applique le théorème 2.9 à la suite $\mathbf{f}$ définie par $f_n = \Lambda^s u_n$. Compte tenu de la remarque 2.10, on a

$$g_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(D)\, f'_n = \Lambda^s v_n^{(j)}\,,$$

où $v_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(D)\, u'_n$. Les propriétés (i) et (ii) sont alors les propriétés (i) et (ii) du théorème 2.9. Par ailleurs, pour tout $\ell \geq 1$, la fonction

$$\rho_n^{(\ell)} = u'_n - \sum_{j=1}^{\ell} v_n^{(j)}$$

vérifie $\Lambda^s \rho_n^{(\ell)} = r_n^{(\ell)}$, où $\mathbf{r}^{(\ell)}$ est donnée par la propriété (iii) du théorème 2.9. L'identité (3.10) est donc l'identité de presque orthogonalité fournie par la remarque 2.2 b). On en déduit en particulier que

$$\limsup_{\ell \to \infty}\ \limsup_{n \to \infty}\ ||\Lambda^s \rho_n^{(\ell)}||_{L^2} < +\infty\,.$$

Puisque $\limsup\limits_{n\to\infty} ||\Lambda^s \rho_n^{(\ell)}||_B$ tend vers 0 quand ℓ tend vers l'infini, le corollaire 3.2 entraîne (3.9). □

Remarque 3.5. Compte tenu du théorème 2.9 et de la démonstration ci-dessus, la suite $(\Lambda^s \rho_n^{(\ell)})_{n\in\mathbb{N}}$ est étrangère à $\mathbf{h}^{(j)}$ pour $1 \leq j \leq \ell$. En particulier, si les $\mathbf{h}^{(j)}$ sont bornées, on peut, quitte à modifier la sous-suite $\mathbf{u}'$, supposer qu'elles tendent vers 0 sauf peut-être $\mathbf{h}^{(1)}$. Alors la remarque 2.2 d) montre que, au sens de la convergence faible des mesures,

$$|\Lambda^s u'_n(x)|^2 = \sum_{j=1}^{\ell} |\Lambda^s v_n^{(j)}(x)|^2 + |\Lambda^s \rho_n^{(\ell)}(x)|^2 + o(1)\,, \quad n \to \infty\,.$$

D'autre part, si $\mathbf{h}^{(j)}$ tend vers 0, on vérifie aisément que les mesures semi-classiques de $(\Lambda^s u'_n)$ et $(\Lambda^s v_n^{(j)})$ relatives à $\mathbf{h}^{(j)}$ coïncident.

4. Détermination des cœurs et des profils de concentration

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathbf{1}$ l'échelle dont tous les termes sont égaux à 1.

Proposition 4.1. *Soit* $\mathbf{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* $\dot{H}^s$ *telle que la suite* $(\Lambda^s w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit* $\mathbf{1}$*-oscillante. Il existe une sous-suite* $\mathbf{w}'$ *de* $\mathbf{w}$*, une suite* $(\mathbf{x}^{(\alpha)})_{\alpha\geq 1}$ *de cœurs et une suite* $(\psi^{(\alpha)})_{\alpha\geq 1}$ *de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ *telles que*

(i) si $\alpha \neq \beta$*,* $|x_n^{(\alpha)} - x_n^{(\beta)}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *;*

(ii) pour tout entier $A \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$w'_n(x) = \sum_{\alpha=1}^{A} \psi^{(\alpha)}(x - x_n^{(\alpha)}) + R_n^{(A)}(x), \quad \limsup_{n\to\infty} ||R_n^{(A)}||_{L^p} \xrightarrow[A\to\infty]{} 0, \tag{4.1}$$

$$||\Lambda^s w'_n||_{L^2}^2 = \sum_{\alpha=1}^{A} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s R_n^{(A)}||_{L^2}^2 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{4.2}$$

Démonstration. Pour toute suite $\mathbf{w}$ vérifiant les hypothèses de la proposition, désignons par $\mathcal{P}(\mathbf{w})$ l'ensemble des $\psi \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ qui sont limites faibles de translatées d'une sous-suite de $\mathbf{w}$, c'est-à-dire tels qu'il existe une sous-suite $(w_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{w}$ et une suite (x_n) de points de $\mathbb{R}^d$ vérifiant, pour toute fonction $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_{\varphi(n)}(x + x_n)\chi(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\chi(x)\,dx. \tag{4.3}$$

On note alors

$$\gamma(\mathbf{w}) = \sup\left\{||\Lambda^s\psi||_{L^2},\, \psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w})\right\}. \tag{4.4}$$

Première étape. On applique la méthode d'exhaustion de G. Métivier et S. Schochet [14,15] avec γ comme fonction d'erreur. En fait, après transformation de Fourier, la démonstration ci-après n'est autre que celle de [14,15] associée à la phase vectorielle $\xi \mapsto \xi$. Si $\gamma(\mathbf{w}) > 0$, soit $\psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w})$ tel que $||\Lambda^s\psi||_{L^2} \geq \gamma(\mathbf{w})/2$, et soient $\mathbf{w}_\varphi$ et $\mathbf{x}$ comme dans la formule (4.3). Alors la suite $\mathbf{R}$ définie par

$$R_n(x) = w_{\varphi(n)}(x) - \psi(x - x_n) \tag{4.5}$$

est bornée dans $\dot{H}^s$, $(\Lambda^s R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbf{1}$-oscillante, et, pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} R_n(x + x_n)\chi(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.6}$$

Il en résulte que

$$||\Lambda^s w_{\varphi(n)}||_{L^2}^2 = ||\Lambda^s\psi||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s R_n||_{L^2}^2 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{4.7}$$

Plus généralement, supposons que, pour un entier $A \geq 1$, il existe une sous-suite $\mathbf{w}'$ de $\mathbf{w}$, des éléments $\psi^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq A$, de $\dot{H}^s$, des suites $\mathbf{x}^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq A$, de points de $\mathbb{R}^d$, tels que

$$\text{si } \alpha \neq \beta, \quad |x_n^{(\alpha)} - x_n^{(\beta)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \tag{4.8}$$

avec, pour tout $B \leq A$,

$$w'_n(x) = \sum_{\alpha=1}^{B} \psi^{(\alpha)}(x - x_n^{(\alpha)}) + R_n^{(B)}(x), \tag{4.9}$$

$$\gamma(\mathbf{R}^{(B-1)}) \leq 2||\Lambda^s \psi^{(B)}||_{L^2}, \tag{4.10}$$

et, pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} R_n^{(B)}(x + x_n^{(\alpha)})\,\chi(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad 1 \leq \alpha \leq B. \tag{4.11}$$

Supposons de plus que $\gamma(\mathbf{R}^{(A)}) > 0$. Alors le raisonnement ci-dessus appliqué à $\mathbf{R}^{(A)}$ permet de définir $\psi^{(A+1)} \in \dot{H}^s$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\mathbf{x}^{(A+1)}$ tels que

$$||\Lambda^s \psi^{(A+1)}||_{L^2} \geq \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{R}^{(A)}) \tag{4.12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} R_{\varphi(n)}^{(A)}(x + x_n^{(A+1)})\,\chi(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \psi^{(A+1)}(x)\,\chi(x)\,dx, \quad \chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d). \tag{4.13}$$

Puisque $\psi^{(A+1)}$ n'est pas nulle, la comparaison de (4.13) avec (4.11) pour $B = A$ entraîne, pour $1 \leq \alpha \leq A$,

$$\left|x_n^{(A+1)} - x_{\varphi(n)}^{(\alpha)}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{4.14}$$

et donc

$$w'_{\varphi(n)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{A} \psi^{(\alpha)}(x - x_{\varphi(n)}^{(\alpha)}) + \psi^{(A+1)}(x - x_n^{(A+1)}) + R_n^{(A+1)}(x), \tag{4.15}$$

où $\mathbf{R}^{(A+1)}$ vérifie, pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} R_n^{(A+1)}(x + y_n^{(\alpha)})\,\chi(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad 1 \leq \alpha \leq A+1, \tag{4.16}$$

avec $y_n^{(\alpha)} = x_{\varphi(n)}^{(\alpha)}$ si $\alpha \leq A$, $y_n^{(A+1)} = x_n^{(A+1)}$.

En combinant une récurrence et un argument d'extraction diagonale comme dans la démonstration du théorème 2.9, on construit ainsi une sous-suite $\mathbf{w}'$ de $\mathbf{w}$ et des suites $\psi^{(\alpha)}$, $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ de profils et de cœurs telles que l'on ait (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) pour tout entier B. Alors les propriétés (4.8), (4.9) et (4.11) entraînent

$$||\Lambda^s w'_n||_{L^2}^2 = \sum_{\alpha=1}^{B} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s R_n^{(B)}||_{L^2}^2 + o(1), \tag{4.17}$$

donc la série de terme général $||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2$ est convergente. Compte tenu de (4.10), on en déduit que

$$\gamma(\mathbf{R}^{(A)}) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.18}$$

Deuxième étape. Compte tenu de (4.17), (4.18), la proposition 4.1 sera démontrée si nous prouvons l'estimation

$$\limsup_{n\to\infty} ||w_n||_{L^p} \leq C \limsup ||\Lambda^s w_n||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w})^{1-\frac{2}{p}} \tag{4.19}$$

pour toute suite $\mathbf{w}$ bornée dans $\dot{H}^s$ telle que $(\Lambda^s w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit $\mathbf{1}$-oscillante.

Supposons dans un premier temps qu'il existe $a > 0$ et $b > a$ tels que $\hat{w}_n$ soit supportée dans la couronne $K_{a,b} = \{\xi \in \mathbb{R}^d,\, a \le |\xi| \le b\}$. Alors $\mathbf{w}$ est bornée dans L^2 et dans L^∞, avec

$$||w_n||_{L^2} \le \frac{1}{a^s}||\Lambda^s w_n||, \tag{4.20}$$

$$||w_n||_{L^\infty} \le ||\hat{w}_n||_{L^1} \le \mathrm{vol}(K_{a,b})^{\frac{1}{2}}||w_n||_{L^2}. \tag{4.21}$$

Nous allons donner une majoration plus précise de $\limsup ||w_n||_{L^\infty}$ en utilisant $\gamma(\mathbf{w})$. Pour cela, soit $\rho \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{\rho}(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in K_{a,b}$. Alors $w_n = \rho * w_n$, donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$w_n(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(-x)\, w_n(x+y)\, dx. \tag{4.22}$$

Par ailleurs,

$$\limsup_{n\to\infty} ||w_n||_{L^\infty} = \sup_{\mathbf{x}} \limsup_{n\to\infty} |w_n(x_n)|, \tag{4.23}$$

où $\mathbf{x}$ décrit toutes les suites de $\mathbb{R}^d$. En appliquant (4.22) avec $y = x_n$, on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} ||w_n||_{L^\infty} &\le \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho(-x)\, \psi(x)\, dx \right|,\, \psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w}) \right\} \\ &\le C\,(a,b)\,\gamma(\mathbf{w}).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Compte tenu de (4.20), l'inégalité de Hölder et (4.24) donnent finalement l'estimation (4.19) souhaitée, avec une constante C qui dépend de a et b.

On notera que, si l'on applique la construction de la première étape sous l'hypothèse $\hat{w}_n = 0$ hors de $K_{a,b}$, les restes $\mathbf{R}^{(A)}$ vérifieront la même propriété de localisation spectrale. On a donc, à ce stade, démontré la proposition 4.1 sous l'hypothèse supplémentaire que $\hat{w}_n$ est supportée dans une couronne. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} ||w_n'||_{L^p}^p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} ||\psi^{(\alpha)}||_{L^p}^p \tag{4.25}$$

compte tenu de la remarque 1.2 b), (i) et (4.1), tandis que (4.2) entraîne

$$\limsup_{n\to\infty} ||\Lambda^s w_n'||_{L^2}^2 \ge \sum_{\alpha=1}^{\infty} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2. \tag{4.26}$$

En appliquant l'inégalité de Sobolev à chaque $\psi^{(\alpha)}$, on en déduit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} ||w_n'||_{L^p} &\le C \limsup_{n\to\infty} ||\Lambda^s w_n'||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \sup_{\alpha} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^{1-\frac{2}{p}} \\ &\le C \limsup_{n\to\infty} ||\Lambda^s w_n'||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w}')^{1-\frac{2}{p}}\end{aligned} \tag{4.27}$$

ce qui entraîne l'estimation (4.19), cette fois avec une constante indépendante de a, b.

Si maintenant la suite $(\Lambda^s w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est seulement $\mathbf{1}$-oscillante, on obtient l'estimation (4.19) par un simple argument d'approximation. La proposition 4.1 est donc complètement démontrée. □

REMARQUE 4.2. La démonstration ci-dessus fournit quelques propriétés supplémentaires de la suite $\mathbf{R}^{(A)}$. Précisément on a, pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\int R_n^{(A)}(x + x_n^{(\alpha)})\,\chi(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \quad 1 \le \alpha \le A$$

et

$$\gamma(\mathbf{R}^{(A)}) \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Démonstration du théorème 1.1.

Soit $\mathbf{u} = (u_n)$ une suite bornée de $\dot{H}^s$. La proposition 3.4 fournit alors une sous-suite $\mathbf{u}'$ de $\mathbf{u}$, des échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ et des suites $\mathbf{v}^{(j)}$ bornées dans $\dot{H}^s$, vérifiant en particulier que, pour tout j, la suite $(\Lambda^s v_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillante. Posons alors, pour tout j,

$$w_n^{(j)}(x) = (h_n^{(j)})^{\frac{d}{p}}\, v_n^{(j)}(h_n^{(j)}\,x)\,. \tag{4.28}$$

Alors la suite $\mathbf{w}^{(j)}$ est bornée dans $\dot{H}^s$, et la suite $(\Lambda^s w_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbf{1}-$oscillante. On peut donc lui appliquer la proposition 4.1, ce qui fournit une sous-suite $\mathbf{w}'^{(j)}$, une suite $(\mathbf{x}^{(j,\alpha)})_{\alpha\ge 1}$ de cœurs de concentration et une suite $(\psi^{(j,\alpha)})_{\alpha\ge 1}$ de profils $\in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Quitte à pratiquer une extraction diagonale et à modifier la sous-suite $\mathbf{u}'$ on peut supposer que $\mathbf{w}'^{(j)} = \mathbf{w}^{(j)}$ pour tout j. On a alors, pour tout ℓ,

$$u'_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} v_n^{(j)}(x) + \rho_n^{(\ell)}(x)\,, \tag{4.29}$$

où $(\Lambda^s \rho_n^{(\ell)})_{n\in\mathbb{N}}$ est étrangère à tous les $\mathbf{h}^{(j)}$, $1 \le j \le \ell$, et, pour tout j, pour tout A,

$$v_n^{(j)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{A} \Big(\frac{1}{h_n^{(j)}}\Big)^{\frac{d}{p}} \psi^{(j,\alpha)}\Big(\frac{x}{h_n^{(j)}} - x_n^{(j,\alpha)}\Big) + \Big(\frac{1}{h_n^{(j)}}\Big)^{\frac{d}{p}} R_n^{(j,A)}\Big(\frac{x}{h_n^{(j)}}\Big), \tag{4.30}$$

où la suite $(\Lambda^s R_n^{(j,A)})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbf{1}$-oscillante et

$$||\Lambda^s v_n^{(j)}||_{L^2}^2 = ||\Lambda^s w_n^{(j)}||_{L^2}^2 = \sum_{\alpha=1}^{A} ||\Lambda^s \psi^{(j,\alpha)}||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s R_n^{(j,A)}||_{L^2}^2 + o(1)\,,$$

$$n \to \infty\,. \tag{4.31}$$

Si on choisit, pour tout j, un entier $A_j \ge 1$, on en déduit

$$u'_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\sum_{\alpha=1}^{A_j} U_n^{(j,\alpha)}(x)\Big) + \mathcal{R}_n^{(\ell,A_1,\ldots,A_\ell)}(x)\,, \tag{4.32}$$

où l'on a posé

$$U_n^{(j,\alpha)}(x) = \Big(\frac{1}{h_n^{(j)}}\Big)^{\frac{d}{p}} \psi^{(j,\alpha)}\Big(\frac{x}{h_n^{(j)}} - x_n^{(j,\alpha)}\Big), \tag{4.33}$$

$$\mathcal{R}_n^{(\ell,A_1,\ldots,A_\ell)}(x) = \rho_n^{(\ell)}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\frac{1}{h_n^{(j)}}\Big)^{\frac{d}{p}} R_n^{(j,A_j)}\Big(\frac{x}{h_n^{(j)}}\Big). \tag{4.34}$$

Il vient alors, quand n tend vers l'infini,

$$\begin{aligned} ||\Lambda^s u_n'||_{L^2}^2 &= \sum_{j=1}^{\ell} ||\Lambda^s v_n^{(j)}||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s \rho_n^{(\ell)}||_{L^2}^2 + o(1) \qquad (4.35)\\ &= \sum_{j=1}^{\ell}\Big(\sum_{\alpha=1}^{A_j} ||\Lambda^s \psi^{(j,\alpha)}||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s R_n^{(j,A_j)}||_{L^2}^2\Big) + ||\Lambda^s \rho_n^{(\ell)}||_{L^2}^2 + o(1)\\ &= \sum_{j=1}^{\ell}\Big(\sum_{\alpha=1}^{A_j} ||\Lambda^s \psi^{(j,\alpha)}||_{L^2}^2\Big) + ||\Lambda^s \mathcal{R}_n^{(\ell,A_1,\ldots,A_\ell)}||_{L^2}^2 + o(1), \end{aligned}$$

où la dernière identité provient de (4.34) et de l'identité de presque orthogonalité de la remarque 2.2. b). Compte tenu des identités (4.32), (4.33) et (4.35), il suffit, pour démontrer le théorème, de vérifier que

$$\limsup_{n\to\infty} \ \big|\big|\mathcal{R}_n^{(\ell,A_1,\ldots,A_\ell)}\big|\big|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{4.36}$$

quand $\inf\{\ell, j + A_j, 1 \leq j \leq \ell\}$ tend vers $+\infty$. En effet, il suffira alors de considérer une énumération r des couples (j,α) vérifiant

$$r(j,\alpha) < r(k,\beta)$$

si $j+\alpha < k+\beta$.

Passons à la démonstration de (4.36). Pour tout $\varepsilon > 0$, soit ℓ_0 tel que, pour $\ell \geq \ell_0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \ ||\rho_n^{(\ell)}||_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.37}$$

Pour tout $\ell \geq \ell_0$, soit B_ℓ tel que, pour tout $A \geq B_\ell$, pour tout $j \in \{1,\ldots,\ell\}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \ ||R_n^{(j,A)}||_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3\ell}. \tag{4.38}$$

On écrit alors (4.34) sous la forme

$$\mathcal{R}_n^{(\ell,A_1,\ldots,A_\ell)} = \rho_n^{(\ell)} + \sum_{1\leq j\leq \ell} \tilde{R}_n^{(j,A_j\vee B_\ell)} + S_n^{(\ell,A_1,\ldots,A_\ell)}, \tag{4.39}$$

$$\tilde{R}_n^{(j,A)}(x) = \Big(\frac{1}{h_n^{(j)}}\Big)^{\frac{d}{p}} \ R_n^{(j,A)}\Big(\frac{x}{h_n^{(j)}}\Big), \tag{4.40}$$

$$S_n^{(\ell,A_1,\dots,A_\ell)} = \sum_{\substack{1\le j\le \ell \\ A_j<B_\ell}} \sum_{A_j<\alpha\le B_\ell} U_n^{(j,\alpha)} . \tag{4.41}$$

Compte tenu de (4.37) et de (4.38),

$$\limsup_{n\to\infty} \, ||\mathcal{R}_n^{(\ell,A_1,\dots,A_\ell)}||_{L^p} \le \frac{2\varepsilon}{3} + \limsup_{n\to\infty} \, ||S_n^{(\ell,A_1,\dots,A_\ell)}||_{L^p} . \tag{4.42}$$

Par ailleurs, la formule (4.33), les propriétés (i) des propositions 3.4 et 4.1 et la remarque 1.2 b) entraînent, quand n tend vers l'infini,

$$||S_n^{(\ell,A_1,\dots,A_\ell)}||_{L^p}^p = \sum_{\substack{1\le j\le \ell \\ A_j<B_\ell}} \sum_{A_j<\alpha\le B_\ell} ||\psi^{(j,\alpha)}||_{L^p}^p + o(1) , \tag{4.43}$$

Or la formule (4.35) permet d'affirmer que

$$\sum_{(j,\alpha)} ||\Lambda^s \psi^{(j,\alpha)}||_{L^2}^2 < \infty , \tag{4.44}$$

donc, par l'inégalité de Sobolev,

$$\sum_{(j,\alpha)} ||\psi^{j,\alpha}||_{L^p}^p < \infty . \tag{4.45}$$

Dès lors, (4.42) devient

$$\limsup_{n\to\infty} \, ||\mathcal{R}_n^{(\ell,A_1,\dots,A_\ell)}||_{L^p} \le \frac{2\varepsilon}{3} + \left(\sum_{\substack{(j,\alpha) \\ \alpha>A_j,\, 1\le j\le \ell}} ||\psi^{(j,\alpha)}||_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \tag{4.46}$$

si $\inf\{j + A_j, 1 \le j \le \ell\} \ge \ell_1$ assez grand.

Le théorème 1.1 est ainsi complètement démontré. □

REMARQUE 4.3. Supposons que (u_n) vérifie de plus

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\ge R} |u_n(x)|^p \, dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 , \tag{4.47}$$

et vérifions les assertions annoncées dans la remarque 1.2 c). Remarquons que le reste $r_n^{(\ell)}$ défini par (1.15) s'exprime par une formule du type (4.34), où les suites $\mathbf{R}^{(j,A_j)}$ sont $\mathbf{1}$-oscillantes et vérifient les propriétés citées à la remarque 4.2. En utilisant cette remarque et la remarque 3.5, on obtient aisément (1.17) et (1.18).

L'auteur remercie M.J. Esteban et H. Brezis de lui avoir indiqué les références [17] et [3].

Bibliographie

[1] H. Bahouri, P. Gérard : Concentration effects in critical nonlinear wave equations and scattering theory, in *Geometrical Optics and Related Topics*, F. Colombini and N. Lerner editors, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, à paraître.

[2] H. Bahouri, P. Gérard : High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *prépublication Orsay*, 97-34, 1997.

[3] H. Brezis, J.-M. Coron : Convergence of solutions of $H-$systems or how to blow bubbles, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **89**, (1985), 21–56.

[4] J.-Y. Chemin, C.J. Xu : Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **30**, (1997), 719–751.

[5] P. Gérard : Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, *J. of Funct. Anal.*, **141**, (1996), 60–98.

[6] P. Gérard : A microlocal version of concentration-compactness, in *Partial Differential Equations and Mathematical Physics*, Lars Hörmander and A. Melin editors, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **21**, Birkhäuser, 1996.

[7] P. Gérard, E. Leichtnam : Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem, *Duke Math. J.*, **71**, (1993), 559–607.

[8] P. Gérard, P. Markowich, N. Mauser, F. Poupaud : Homogenization limits and Wigner transforms, *Comm. Pure and Applied Math. L.*, (1997), 323–379.

[9] P. Gérard, Y. Meyer, F. Oru : *Inégalités de Sobolev précisées,* Séminaire Équations aux Dérivées Partielles 1996-1997, École Polytechnique, et article en préparation.

[10] R. A. Hunt : On $L(p,q)$ spaces, *L'Enseignement Mathématique*, **12**, (1966), 249–275.

[11] P.-L. Lions : The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part I, *Ann. IHP* **1**, (1984), 109–145.

[12] P.-L. Lions : The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part II, *Rev. Mat. Iberoamericana* **1**, (1985), 145–201.

[13] P.-L. Lions, T. Paul : Sur les mesures de Wigner, *Revista Mat. Iberoamericana*, **9**, (1993), 553–618.

[14] G. Métivier, S. Schochet : *Interactions trilinéaires résonantes,* Séminaire Équations aux Dérivées Partielles 1995-1996, exposé n$^{\rm o}$ VI, École Polytechnique, Palaiseau.

[15] G. Métivier, S. Schochet : Trilinear resonant interactions of semilinear hyperbolic waves, *Prépublication 96–31*, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Novembre 1996, et *Duke Math. J.*, à paraître.

[16] J. Sacks, K. Uhlenbeck : The existence of minimal immersions of 2-spheres, *Annals of Math.*, **113**, (1981), 1–24.

[17] M. Struwe : A global compactness result for boundary value problems involving limiting nonlinearities, *Math. Z.*, **187**, (1984), 511–517.

[18] H. Wente : Large solutions to the volume constrained Plateau problem, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **75**, (1980), 59–77.