

# 전역적 안정성을 보장하는 비선형 외란 관측기 설계 및 강인 안정도 조건

## Design of Nonlinear Disturbance Observer Guaranteeing Global Stability and Robust Stability Condition

백주훈\*, 심형보  
 (Juhoon Back<sup>1</sup> and Hyungbo Shim<sup>2</sup>)

<sup>1</sup>Kwangwoon University

<sup>2</sup>Seoul National University

**Abstract:** A nonlinear version of disturbance observer is presented. The system under consideration is an uncertain single input single output nonlinear system and the nominal plant is also a nonlinear system. Compared to the previous implementation given in [8], the proposed scheme does not require an auxiliary variable anymore, thus it has a simpler and more intuitive structure. A robust stability condition for the overall closed-loop system is also provided.

**Keywords:** disturbance observer, robust control, nonlinear system

### I. 서론

외란 관측기(disturbance observer)는 1987년 K. Ohnishi에 의해 소개되었다[1]. 이 제어 기법은 시스템에 가해지는 외란의 영향 및 시스템이 갖는 불확실성에 대하여 매우 강인한 특성을 보여 모터 제어[2], 로봇[3-5], 광학 디스크[6] 등 다양한 산업 현장에서 널리 사용되고 있다.

그림 1에 고전적인 외란 관측기가 포함된 제어기 구조가 나타나있다. 여기서  $P(s)$ 는 불확실성을 포함하는 시스템이며,  $u_p, y$ 는 각각 시스템의 입력과 출력이다.  $C(s)$ 는 시스템의 출력이 기준 입력  $y_r$ 을 추종하도록 설계된 제어기이고,  $P_n(s)$ 는 공칭 시스템을 나타내며  $P_n^{-1}(s)$ 는 공칭 시스템의 입력과 출력을 바꾼 역 시스템이다. 외란 관측기는 그림에서  $Q_p(s), Q_q(s)$ , 그리고  $P_n^{-1}(s)$ 로 구성되는 내부 제어기이다. 통상적으로  $Q_p(s), Q_q(s)$ 는 같은 전달함수를 사용하며 Q-필터라 불린다.

외란 관측기의 기본적인 동작 원리를 다음과 같이 설명할 수 있다. 외란이 더해지지 않은 입력  $u$ 를  $Q_p(s)$ 에 통과시키고, 출력  $y$ 를  $P_n^{-1}(s)Q_q(s)$ 에 통과시켜 시스템에 실제로 인가된 외란이 포함된 입력  $u_p$ 를 추정한다.  $Q_p(s)$ 의 출력  $\bar{u}$ 가  $u$ 와 유사하고,  $\hat{u}_p$ 가 실제 시스템에 인가된  $u_p$ 와 유사하다면 신호  $\hat{u}_p - \bar{u}$ 는 외란  $d$ 와 유사하게 되어 이를

피드백하여 외란을 소거할 수 있다. 이런 원리는 참고문헌 [7]에서 자세히 기술되어 있다.

본 논문에서는 비선형 시스템을 위한 외란 관측기의 구조를 제안하고 페루프 시스템의 안정도 조건을 제시한다. 비선형 시스템을 위한 외란 관측기는 참고문헌[8] (단입력 단출력 시스템) 및 [9] (다입력 다출력 시스템)에서 이미 다루어졌다. 참고문헌 [8]에서는 공칭 시스템이 비선형 시스템인 경우까지를 다루며 기술적인 문제를 해결하기 위하여 보조변수를 포함한 다소 복잡한 형태의 제어기를 제안하였다. 본 논문 역시 비선형 공칭 시스템을 다룬다. 하지만 참고문헌 [8]에 비해 보다 직관적인 형태의 제어 루프를 제안한다. 또한 제안된 제어기를 포함한 전체 페루프 시스템의 강인 안정도를 보장하기 위한 조건을 제시한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. II 장에서는 해결하고자 하는 문제를 정의하며 필요한 가정을 기술한다. III 장에서는 비선형 외란 관측기의 구조를 제안하며 안정도 조건을 제시한다. 마지막으로 IV 장에서 결론 및 추후 연구 주제를 언급한다.

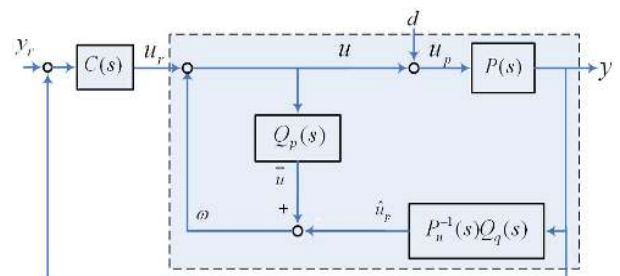


그림 1. 고전적인 외란 관측기의 구조.

Fig. 1. Structure of classical disturbance observer.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 8. 1., 수정: 2011. 9. 20., 채택확정: 2011. 10. 7.

백주훈: 광운대학교 로봇학부(backhoon@kw.ac.kr)

심형보: 서울대학교 전기공학부(hshim@snu.ac.kr)

※ 본 논문은 2011년도 교육과학기술부의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업(No. 2011-0026456)과 지식경제부의 재원으로 한국에너지 기술평가원(KETEP)(No. 20093021020030)의 지원을 받아 수행되었음.

표기법: 본 논문에서  $0_k$ 는  $\mathbb{R}^k$ 에서의 영 벡터를, 그리고  $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 는  $k$ 차의 단위 행렬을 나타낸다. 또한  $\text{diag}\{d_1, \dots, d_k\}$ 는  $k$ 차의 정방 행렬로  $(i, i)$ 성분이  $d_i$ 이고, 나머지 성분은 0인 행렬을 나타낸다. 두 벡터  $x, y$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.  $[x; y] := [x^T y^T]^T$ .

### II. 문제 정의 및 가정

다음과 같은 비선형 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(f(x) + g(x)(u + d)) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 은 상태 변수,  $u \in \mathbb{R}$ 은 입력,  $y \in \mathbb{R}$ 은 출력이고  $A, B, C$ 는 다음과 같다.

$$A := \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C := [1 \ 0_{n-1}^T].$$

또한  $f$ 와  $g$ 는 시스템의 비선형성을 표현하는 매끄러운 (smooth) 전역적 립쉬츠(global Lipschitz) 함수이며 알려지지 않았다고 가정한다. 신호  $d \in \mathbb{R}$ 은 외란이며  $d(t), \dot{d}(t)$ 는 유계라 가정한다.

시스템 (1)에 대한 다음과 같은 공칭 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B(\bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})u_r) \\ \bar{y} &= C\bar{x} \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 이고  $\bar{f}, \bar{g}$ 는 각각  $f, g$ 에 대한 공칭 함수이며 매끄럽다고 가정한다. 공칭 시스템은 외란의 영향을 받지 않고 불확실성이 없다고 가정한다.

위 공칭 시스템 (2)에 대하여 다음과 같은 출력 제한 제어가 설계되었다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \Gamma(c) + \Pi(c)(y_r - \bar{y}) \\ u_r &= \Theta(c) + \Lambda(c)(y_r - \bar{y}) \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서  $c \in \mathbb{R}^l$ 이고  $\Gamma, \Pi, \Theta, \Lambda$ 는 매끄러운 전역적 립쉬츠 함수이며,  $\Pi, \Lambda$ 는 유계, 그리고  $y_r$ 은 매끄러운 지령 신호이며  $y_r(t), \dot{y}_r(t)$ 는 유계라 가정한다.

본 논문에서는 식 (4)와 같은 형태로 표현되는 내부루프(inner-loop) 제어를 설계하여

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \Phi(\chi, y, u_r), \quad \chi \in \mathbb{R}^{2n} \\ u &= \phi(\chi, y, u_r) \end{aligned} \quad (4)$$

다음과 같이 표현되는 실제 페루프 시스템이

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[f(x) + g(x)(\phi(\chi, Cx, u_r) + d)] \\ \dot{c} &= \Gamma(c) + \Pi(c)(y_r - Cx) \\ \dot{\chi} &= \Phi(\chi, Cx, u_r) \\ u_r &= \Theta(c) + \Lambda(c)(y_r - Cx) \end{aligned} \quad (5)$$

식 (2)와 (3)으로 이루어진 공칭 페루프 시스템처럼 거동하도록 하는 것이 목표이다. 이 때, 실제 페루프 시스템 (5)는 시스템 (1), 공칭 시스템에 대한 제어기 (3) (단  $\bar{y}$  대신  $y$ 사

용), 그리고 제어기 (4)로 구성된다에 주의한다.

시스템 및 공칭 페루프 시스템에 대하여 다음과 같이 가정한다.

가정 1:  $\bar{f}, \bar{g}$ 는 매끄러운 전역적 립쉬츠 함수이며 다음을 만족하는 상수  $g_-, g_+, \bar{g}_-, \bar{g}_+$ 가 존재한다.

$$0 < g_- \leq g(x) \leq g_+, \quad 0 < \bar{g}_- \leq \bar{g}(x) \leq \bar{g}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

또한 다음이 성립한다.

$$f(0) = \bar{f}(0) = 0, \quad \Gamma(0) = 0, \quad \Theta(0) = 0. \quad \square$$

가정 2: 식 (2)와 (3)으로 이루어진 공칭 페루프 시스템은  $y_r \equiv 0$ 에 대하여 전역적이며 지수적으로 안정(globally exponentially stable)하며 다음을 만족하는 리아프노프 함수  $\bar{V}(x, c)$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} c_1 \| [x; c] \|^2 &\leq \bar{V}(x, c) \leq c_2 \| [x; c] \|^2 \\ \dot{\bar{V}} &\leq -\alpha_3 \| [x; c] \|^2 \\ \left\| \frac{\partial \bar{V}}{\partial (x, c)} \right\| &\leq \alpha_4 \| [x; c] \end{aligned}$$

여기서  $\dot{\bar{V}}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (Ax + B(\bar{f}(x) + \bar{g}(x)(\Theta(c) + \Lambda(c)(-Cx))) \\ &\quad + \frac{\partial \bar{V}}{\partial c} (\Gamma(c) + \Pi(c)(-Cx)). \end{aligned} \quad \square$$

### III. 주요 결과

이 장에서는 불확실한 비선형 시스템 (1)에 대한 외란 관측기 기반 내부루프 제어를 설계하고 페루프 시스템이 안정하기 위한 조건을 제시한다.

#### 1. 제안된 외란 관측기 구조

그림 1에서 알 수 있듯이 외란 관측기를 설계하기 위해서는 Q-필터를 설계하고 명목 시스템의 역 시스템을 구해야 한다. 본 논문에서 다루는 시스템 및 공칭 시스템이 모두 비선형 시스템으로 각 요소들을 상태 공간에서 구현하도록 한다.

먼저, 두 Q-필터는 다음의 전달함수를 갖도록 한다.

$$Q_p(s) = Q_q(s) = \frac{a_0}{(\tau s)^n + a_{n-1}(\tau s)^{n-1} + \dots + a_0}$$

여기서  $a_i$ 는  $Q_p(s), Q_q(s)$ 가 안정하도록 선정하며  $\tau$ 는 작은 양수로 추후에 선정한다(III. 2 절에서 페루프 시스템의 강인안정도를 위한  $a_i$ 의 조건을 제시할 것이다).

$Q_p(s)$ 와  $Q_q(s)$ 에 대한 상태변수를 각각  $p, q \in \mathbb{R}^n$  이라 하고 상태공간에서 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= A_{ar}p + \frac{a_0}{\tau^n} Bw_p \\ \dot{q} &= A_{ar}q + B_{ar}y \end{aligned}$$

여기서  $A_{ar} = A - B_{ar}C, B_{ar} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ \tau & \tau^2 & & \tau^n \end{bmatrix}^T$ 이며

$w_p$ 는  $Q_p(s)$ 의 입력으로 추후에 결정할 것이다. 또한,  $p, q$  동역학의 형태가 기존의 결과 [8,9]에 소개된 그것들과 다르다는 것에 주의한다.

비선형 명목 시스템 (2)의 역 시스템 (입력과 출력의 역할을 바꾼 시스템)은 다음과 같이 구할 수 있다. 역 시스템의 입력( $u^+$ 로 표시)은 시스템의 출력  $y$ 이고, 출력( $y^+$ 로 표시)은  $u_r$ 이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y^+ = \frac{1}{\bar{g}(x^+)} [(u^+)^{(n)} - \bar{f}(x^+)] \quad (6)$$

여기서  $x^+ = [u^+, \dot{u}^+, \dots, (u^+)^{(n)}] = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}]$ 이다.

식 (6)은  $y$ 의 시간 미분을 포함하고 있으므로 실제로 구현이 불가능하다. 대신,  $q$ -동역학이 다른 아닌 상태  $x$ 에 대한 고이득 관측기(high-gain observer) [10] 형태라는 점에 착안하여 상태 변수  $x$  대신 그 추정치에 해당하는  $q$ 를 이용하면 다음과 같은 형태로 구현할 수 있다.

$$y^+ = \frac{1}{\bar{g}(q)} [\dot{q}_n - \bar{f}(q)] = \frac{1}{\bar{g}(q)} \left[ -\frac{a_0}{\tau^n} (q_1 - y) - \bar{f}(q) \right].$$

다음은 본 논문에서 제안하는 외란관측기이다. 제안된 전체 제어기의 구조가 그림 2에 나타나있다(그림 1과 2에서  $\hat{u}_p$  이 의미하는 신호가 서로 다름에 주의한다).

$$\begin{aligned} \dot{p} &= A_{ar}p + \frac{a_0}{\tau^n} B\bar{g}(q)u \\ \dot{q} &= A_{ar}q + B_{ar}y \\ u &= u_r - (-\hat{u}_p - \bar{u}) = \frac{1}{\bar{g}(q)} \left[ p_1 + \frac{a_0}{\tau^n} (q_1 - y) + \bar{f}(q) \right] + u_r. \end{aligned}$$

한편 그림 1의 기존 외란 관측기 구조에서는  $w_p = u$ 인데 반해 제안된 구조에서는  $w_p = \bar{g}(q)u$  임에 주의한다. 참고문헌 [8,9]에서 제안된 비선형 외란 관측기에서도  $w_p = u$ 이다. 이 경우  $u = p_1 - \frac{1}{\bar{g}(q)} [\dot{q}_n - \bar{f}(q)] + u_r$ 와 같은 형태의 제어 입력이 얻어지며 이때는 안정도 해석이 난해해진다. 이와 같은 문제를 피하기 위해 참고문헌 [8,9]에서는 적절한 보조 변수 ( $1/\bar{g}(q)$ )의 역할을 하는 상수를 도입하고 루프를 새롭게 꾸몄다. 제안된 구조는 보조 변수의 도움 없이 제어기를 설계할 수 있다는 장점이 있다. 또한, 다음 소절에서 알 수 있듯이 보다 직관적인 형태의 강인 안정도

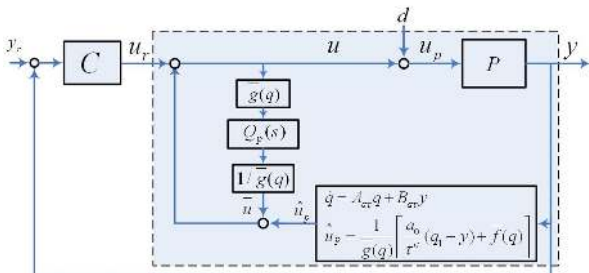


그림 2. 제안된 비선형 외란 관측기.  
Fig. 2. Proposed nonlinear disturbance observer.

조건을 얻을 수 있다.

2. 강인 안정도 조건

본 소절에서는 적절한 상태 변환을 통하여 식 (7)로 표현되는 전체 페루프 시스템을 특이 섭동 이론의 표준형(standard singular perturbation form)으로 변환하고 강인 안정도 조건을 유도한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[f(x) + g(x)(u + d)] \\ \dot{c} &= \Gamma(c) + \Pi(c)(y_r - Cx) \\ \dot{p} &= A_{ar}p + \frac{a_0}{\tau^n} B\bar{g}(q)u \\ \dot{q} &= A_{ar}q + B_{ar}y \\ u &= \frac{1}{\bar{g}(q)} \left[ p_1 + \frac{a_0}{\tau^n} (q_1 - y) + \bar{f}(q) \right] + u_r \\ u_r &= \Theta(c) + \Lambda(c)(y_r - Cx). \end{aligned} \quad (7)$$

보조 정리 1: 페루프 시스템 (7)은 좌표 변환 (8)을 통하여 시스템 (9)로 변환된다.

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{q_i - x_i}{\tau^{n-i}}, \quad i = 1, \dots, n \\ \eta_i &= \tau^{j-1} (p_1^{(i-1)} - q_n^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\theta_\xi \\ \dot{c} &= \Gamma(c) + \Pi(c)(y_r - Cx) \\ \tau \dot{\xi} &= A_\xi \xi - \tau B\theta_\xi \\ \tau \dot{\eta} &= A\eta + B \left[ -\frac{g(x)}{\bar{g}(x + \Delta\xi)} a_0 \eta_1 - a_1 \eta_2 - \dots - a_{n-1} \eta_n + a_0 \theta_\eta \right] \\ u_r &= \Theta(c) + \Lambda(c)(y_r - Cx). \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $A_\xi = A - [a_{n-1}, \dots, a_0]^T C$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\tau^{n-1}, \dots, \tau, 1\}$ 이고,  $\theta_\xi, \theta_\eta$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta_\xi &= f(x) + g(x) [(\eta_1 + \bar{f}(x + \Delta\xi)) / \bar{g}(x + \Delta\xi) + u_r + d] \\ \theta_\eta &= [1 - g(x) / \bar{g}(x + \Delta\xi)] \bar{f}(x + \Delta\xi) \\ &\quad + [\bar{g}(x + \Delta\xi) - g(x)] u_r - f(x) - g(x)d. \quad \square \end{aligned}$$

증명: 먼저, 정의에 의해  $q = x + \Delta\xi$ 를 얻는다. 또한

$\eta_1 = p_1 - \dot{q}_n = p_1 + \frac{a_0}{\tau^n} (q_1 - y)$ 를 사용하면 다음을 얻는다.

$$u = \frac{1}{\bar{g}(x + \Delta\xi)} [\eta_1 + \bar{f}(x + \Delta\xi)] + u_r. \quad (10)$$

이 관계식과 함께  $\theta_\xi$ 의 정의를 사용하면 식 (9)에 나타난  $x$ 의 동역학을 얻을 수 있다.

$\xi$ 의 동역학은 다음의 관계식  $\dot{\xi} = \Delta^{-1}(q - x)$ 와 아래의 계산을 통하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \Delta^{-1}(\dot{q} - \dot{x}) \\ &= \Delta^{-1} [A_{ar}q + B_{ar}x_1 - Ax - B(f + g(u + d))] \\ &= \Delta^{-1} (A - B_{ar}C)\Delta\xi - \Delta^{-1} B(f + g(u + d)) \\ &= \frac{1}{\tau} A_\xi \xi - B\theta_\xi \end{aligned}$$

이제  $\eta$ 의 동역학을 유도하자. 먼저  $\eta_i$ 의 정의에 의해  $\dot{\eta}_i = \eta_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$ 임을 쉽게 보일 수 있다.  $\eta_n$ 에 대

한 동역학은 식  $\dot{\eta}_n = \tau^{n-1}(p_1^{(n)} - q_n^{(n+1)})$ 을 만족하며  $p_1^{(n)}$ ,  $q_n^{(n+1)}$ 을 각각 구하여 얻는다. 먼저  $p$ 와  $q$ 의 동역학으로부터 다음 관계식들을 쉽게 얻을 수 있다.

$$p_1^{(n)} = -\frac{a_{n-1}}{\tau} p_1^{(n-1)} - \frac{a_{n-2}}{\tau^2} p_1^{(n-2)} - \dots - \frac{a_0}{\tau^n} p_1 + \frac{a_0}{\tau^n} \bar{g}(q)u$$

$$q_1^{(n)} = -\frac{a_{n-1}}{\tau} q_1^{(n-1)} - \frac{a_{n-2}}{\tau^2} q_1^{(n-2)} - \dots - \frac{a_0}{\tau^n} q_1$$

$$+ \frac{a_{n-1}}{\tau} x_n + \frac{a_{n-2}}{\tau^2} x_{n-1} + \dots + \frac{a_0}{\tau^n} x_1.$$

여기서  $q_n^{(n+1)} = -\frac{a_0}{\tau^n} q_1^{(n)} + \frac{a_0}{\tau^n} x_1^{(n)} = -\frac{a_0}{\tau^n} q_1^{(n)} + \frac{a_0}{\tau^n} \dot{x}_n$ , 또한

$$\eta_i = \tau^{i-1}(p_1^{(i-1)} - q_n^{(i)}) = \tau^{i-1}\left(p_1^{(i-1)} + \frac{a_0}{\tau^i} q_1^{(i-1)} - \frac{a_0}{\tau^i} x_1^{(i-1)}\right)$$

임에 유의하고 위 결과들을 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\tau \dot{\eta}_n = -a_0 \eta_1 - \dots - a_{n-1} \eta_n + a_0(\bar{g}(q)u - f(x) - g(x)(u+d))$$

마지막으로  $q = x + \Delta\xi$ , 그리고 식 (10)을 사용하여 식 (9)의  $\eta$  동역학을 얻을 수 있다. ■

특이 섭동 이론의 표준형인 식 (9)의 거동을 해석하기 위해서  $x, c, d, y_r$ 을 느린 변수라 표현하고  $\xi, \eta$ 를 빠른 변수라고 하겠다. 특이 섭동이론에 의하면,  $\tau$ 가 충분히 작을 때  $\xi, \eta$ 의 궤적이 느린 변수들로 표현되는 (이때는 느린 변수가 고정되어 있다고 가정한다). 평형점으로 수렴한다면 느린 변수  $x, c$ 의 궤적은 축소 시스템(reduced system)의 그것과 유사하게 된다[10].

먼저, 빠른 변수의 수렴성을 나타내는 동역학인 경계층 시스템(boundary layer system)을 구하고 그 안정성을 살펴본다. 이를 위해 느린 변수들이 고정되어 있다고 가정하고,  $\xi, \eta$  동역학의 평형점  $\xi^*, \eta^*$ 를  $\tau=0$ 인 경우에 대해 구하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\xi^* = 0$$

$$\eta_1^*(x, c, y_r, d) = \frac{\bar{g}(x)}{g(x)} \theta_{\eta} \Big|_{\tau=0, \xi=\xi^*}, \eta_2^* = \dots = \eta_n^* = 0.$$

따라서, 경계층 시스템은 다음과 같다.

$$\xi' = A_\xi \xi$$

$$\tilde{\eta}' = A_{\tilde{\eta}} \tilde{\eta} - B \left[ \frac{g(x)}{g(x)} a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \right] \tilde{\eta} \quad (11)$$

여기서  $\tilde{\eta} = \eta - \eta^*$ 이며, '은  $\sigma = t/\tau$ 로 정의되는 새로운 시간에 대한 미분을 의미한다. 즉  $(\cdot)' = \frac{d}{d\sigma}(\cdot)$ 이다.

보조 정리 2:  $\mu_- := g_-/\bar{g}_+, \mu_+ := g_+/\bar{g}_-$ 이라 하자. 다음과 같이  $a_i$ 를 선정하면 경계층 시스템 (11)은 전역적으로 지수적으로 안정하다.

- 1) 다항식  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$ 가 허위츠이다.
- 2)  $\mu_- \leq \mu \leq \mu_+$ 인 모든 상수  $\mu$ 에 대해서 다항식  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + \mu a_0$ 가 허위츠이다. □

증명: 행렬  $A_\xi$ 의 행렬식이 1)항의 다항식이고,  $x$ 가 상

수일 때  $\tilde{\eta}$ 의 동역학은  $\tilde{\eta}$ 에 대해 선형이며 해당하는 시스템 행렬의 행렬식은 조건 2)하에서 허위츠이다. ■

주목 1: 보조 정리 2를 만족하도록 하는  $a_i$ 는 항상 찾을 수 있다[8,9]. 그 중 한 가지 방법은 다음과 같다. 1) 다항식  $s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1$ 이 허위츠가 되도록  $a_1, \dots, a_{n-1}$ 을 선정한다. 2)  $G_1(s) = 1/[s(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1)]$ 에 대하여  $1 + a_0 G_1(s) = 0$ 의 근계적을 고려하면  $a_0^* > 0$ 이 존재하여  $0 < a_0 < a_0^*$ 를 만족하는 모든  $a_0$ 에 대하여  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$ 가 허위츠이다. 3)  $a_0$ 를 충분히 작게 선정하여  $G_2(s) = a_0/[s(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1)]$ 의 나이퀴스트 선도(Nyquist plot)가 복소 평면 위의 두 점  $-1/\mu_-, -1/\mu_+$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 디스크의 오른쪽에 있도록 한다. 2)와 3)에서 선정한  $a_0$  중 작은 값을 최종적인  $a_0$ 로 선정한다. 2)번 항목에서는 원 기준(circle criterion)이 사용되었으며 자세한 설명은 참고문헌 [10]을 참조한다. ◇

주목 2: 경계층 시스템 (11)의  $\tilde{\eta}$ 에 대한 동역학은 다음과 같이 선형 시스템에 섹터(sector)  $(\mu_-, \mu_+)$ 에 속하는 불확실성이 되먹임되는 불확실한 시스템으로 볼 수 있다.

$$\tilde{\eta}' = (A - B[0, a_1, \dots, a_{n-1}])\tilde{\eta} - Ba_0\psi(t, \tilde{y})$$

$$\tilde{y} = C\tilde{\eta}, \psi(t, \tilde{y}) = \mu(t)\tilde{y}, \mu_- \leq \mu(t) \leq \mu_+.$$

여기서  $G_2(s) = C(sI - (A - B[0, a_1, \dots, a_{n-1}]))^{-1}Ba_0$ 임을 쉽게 알 수 있으며 주목 1에서와 같이  $a_i$ 들을 선정하면 이 시스템이 절대 안정하다[10, Section 7.1]. 또한, 원 기준에 의해 다음 전달함수가 strictly positive real이다.

$$Z_T(s) = 1 + (\mu_+ - \mu_-)G_2(s)(1 + \mu_-G_2(s))^{-1}.$$

이때  $G_2(s)(1 + \mu_-G_2(s))^{-1}$ 는 전달함수  $G_2(s)$ 에 이득  $\mu_-$ 를 갖는 음의 되먹임 루프가 더해진 행태이며 이는 상태 공간에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\tilde{\eta}' = A_{\tilde{\eta}} \tilde{\eta} - Ba_0 \bar{\psi}(t, \tilde{y})$$

$$\tilde{y} = C\tilde{\eta}, \bar{\psi}(t, \tilde{y}) = \tilde{\mu}(t)\tilde{y}, 0 \leq \tilde{\mu}(t) \leq \mu_+ - \mu_-$$

여기서  $A_{\tilde{\eta}} = A - B[\mu_- a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ 이다. 즉,  $Z_T(s)$ 는  $Z_T(s) = 1 + (\mu_+ - \mu_-)C(sI - A_{\tilde{\eta}})^{-1}Ba_0$ 이다. 이때,  $Z_T(s)$ 가 strictly positive real이므로 다음 식을 만족하는 대칭 양한정 행렬  $P_{\tilde{\eta}}$ , 행렬들  $L, W$ , 그리고 양수  $\epsilon$ 이 존재한다 [10, Lemma 6.3].

$$P_{\tilde{\eta}} A_{\tilde{\eta}} + A_{\tilde{\eta}}^T P_{\tilde{\eta}} = -L^T L - \epsilon P_{\tilde{\eta}}$$

$$P_{\tilde{\eta}} B a_0 = (\mu_+ - \mu_-) C^T - L^T W \quad (12)$$

$$W^T W = 2.$$

이 관계는 이후 강인 안정도를 증명하는 데 사용된다. ◇

경계층 시스템이 안정하다는 조건 하에서,  $\xi$ 가 0으로,  $\eta$ 가  $\eta^*$ 로 빠르게 수렴한다는 사실을 사용하면  $\xi=0, \eta=\eta^*$ 를 대입하여 유사 정상 상태 시스템(quasi-steady-state system)

을 얻을 수 있으며 이는 공칭 페루프 시스템 (2)-(3)이라는 것을 어렵지 않게 보일 수 있다.

지금까지 논의된 결과와 함께 다음에 소개되는 기술적인 조건을 사용하여 페루프 시스템에 대한 강인 안정도 조건을 얻을 수 있다.

가정 3: 모든  $x, c$ 에 대하여 다음을 만족하는  $k_1, k_2$ 가 존재한다.

$$\left| \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x_i} \right| \leq k_1, \left| \frac{\partial \eta_1^*}{\partial c_j} \right| \leq k_2, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l.$$

또한  $k_3, k_4$ 가 존재하여 다음 관계식들이 성립한다.

$$|\theta_\xi - \theta_\xi^*| \leq \tau k_3 \| [x; c; \xi; y_r; d] \|, \forall \tau < 1$$

$$|\theta_\eta - \bar{g}(x)/\bar{g}(x + \Delta\xi)\theta_\eta^*| \leq \tau k_4 \| [x; c; \xi; y_r; d] \|, \forall \tau < 1$$

여기서  $\theta_\eta^* = \theta_\eta|_{\tau=0, \eta=\eta^*, \xi=0}$  이며,  $\theta_\xi^*$ 는 다음과 같다.

$$\theta_\xi^* = \theta_\xi|_{\tau=0, \eta=\eta^*, \xi=0} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x)(\theta(c) + \Lambda(c)(y_r - y)). \square$$

위 가정은 시스템 및 공칭 시스템이 모두 선형인 경우 자연스럽게 만족된다.

정리 2: 가정들 1,2,3이 성립한다고 가정하자. 만일 경계 층 시스템 (11)이 전역적으로 지수적으로 안정하면, 양수  $\tau^*$ 가 존재하여  $0 < \tau < \tau^*$ 를 만족하는 모든  $\tau$ 에 대하여 전체 페루프 시스템 (5)는 강인 안정하다(즉,  $y_r \equiv 0, d \equiv 0$ 일 때 페루프 시스템의 원점은 전역적으로 지수적으로 안정하다).  $\square$

증명: 전체 페루프 시스템의 안정도를 판단하기 위해서는 느린 변수들  $x, c, y_r, d$ 의 시간에 따른 변화도 함께 고려해야 한다. 이를 위해 식 (9)를 새로운 상태  $x, c, \xi, \tilde{\eta}$  (여기서  $\tilde{\eta} = \eta - \eta^*$ )로 다시 표현한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\theta_\xi \\ \dot{c} &= \Gamma(c) + \Pi(c)(y_r - Cx) \\ \tau \dot{\xi} &= A_\xi \xi - \tau B \theta_\xi \\ \dot{\tilde{\eta}} &= A\tilde{\eta} - B \left[ a_0 \frac{g(x)}{g(x + \Delta\xi)} \cdots a_{n-1} \right] \tilde{\eta} \\ &\quad + Ba_0 \left( \theta_\eta - \frac{\bar{g}(x)}{g(x + \Delta\xi)} \theta_\eta^* \right) - \tilde{\eta} \\ u_r &= \Theta(c) + \Lambda(c)(y_r - Cx). \end{aligned}$$

여기서  $\dot{\tilde{\eta}}^* = [\dot{\eta}_1^*, 0, \dots, 0]^T$  이며  $\dot{\eta}_1^*$ 는 다음과 같다.

$$\dot{\eta}_1^* = \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x} (Ax + B\theta_\xi) + \frac{\partial \eta_1^*}{\partial c} (\Gamma(c) + \Pi(c)(y_r - Cx)) + \bar{g}(x)(\bar{g}(x)/g(x) - 1)\Lambda(c)\dot{y}_r - \bar{g}(x)\dot{d}.$$

이제 다음과 같은 리아프노프 함수를 생각하자.

$$V(x, c, \xi, \tilde{\eta}) = \bar{V}(x, c) + \xi^T P_\xi \xi + \tilde{\eta}^T P_\eta \tilde{\eta}$$

여기서  $\bar{V}$ 는  $y_r \equiv 0$ 인 경우 공칭 페루프 시스템에 대한 리아프노프 함수(가정 2),  $P_\xi$ 는  $P_\xi A_\xi + A_\xi^T P_\xi = -I$ 를 만족하

는 유일한 대칭 양한정(symmetric positive definite) 행렬, 그리고  $P_\eta$ 는 주목 2의 식 (12)를 만족하는 대칭 양한정 행렬이다.

이제  $\dot{V}$ 을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (Ax + B\theta_\xi) + \frac{\partial \bar{V}}{\partial c} u_r \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \xi^T (P_\xi A_\xi + A_\xi^T P_\xi) \xi + 2\xi^T P_\xi B \theta_\xi \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \tilde{\eta}^T (P_\eta A_\eta + A_\eta^T P_\eta) \tilde{\eta} \\ &\quad - \frac{2}{\tau} \tilde{\eta}^T P_\eta Ba_0 (g(x)/\bar{g}(x + \Delta\xi) - \mu_-) C \tilde{\eta} \\ &\quad + \frac{2}{\tau} \tilde{\eta}^T P_\eta Ba_0 (\theta_\eta - \bar{g}(x)/\bar{g}(x + \Delta\xi)\theta_\eta^*) - 2\tilde{\eta}^T P_\eta \dot{\tilde{\eta}}^* \end{aligned}$$

위 식의 각 항에 대한 관계식을 유도한다. 이후의 계산에서  $k$ 는 적절한 양의 상수이다. 먼저 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (Ax + B\theta_\xi) + \frac{\partial \bar{V}}{\partial c} u_r \\ &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (Ax + B\theta_\xi^*) + \frac{\partial \bar{V}}{\partial c} u_r + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} B(\theta_\xi - \theta_\xi^*) \\ &\leq -\alpha_3 \| [x; c] \|^2 + k \| [x; c] \| \| y_r \| + \tau k \| [x; c] \| \| [x; c; \xi; y_r; d] \| \\ &\frac{1}{\tau} \xi^T (P_\xi A_\xi + A_\xi^T P_\xi) \xi + 2\xi^T P_\xi B \theta_\xi \\ &\leq -\frac{1}{\tau} \| \xi \|^2 + k \| P_\xi B \| \| \xi \| \| [x; c; \xi; \tilde{\eta}; y_r; d] \|. \end{aligned}$$

이제,  $\mu(t) := g(x(t))/\bar{g}(x(t) + \Delta\xi(t))$ 라고 정의하면  $\mu_- \leq \mu(t) \leq \mu_+$ 이므로 다음 관계식이 성립한다.

$$\tilde{\eta}^T C^T (\mu(t) - \mu_-) (\mu(t) - \mu_+) C \tilde{\eta} \leq 0.$$

이와 함께 관계식 (12)으로부터 다음을 얻는다( $W = \sqrt{2}$ 로 선택하였다).

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} \tilde{\eta}^T (P_\eta A_\eta + A_\eta^T P_\eta) \tilde{\eta} - \frac{2}{\tau} \tilde{\eta}^T P_\eta Ba_0 (\mu(t) - \mu_-) C \tilde{\eta} \\ &\leq -\frac{1}{\tau} \tilde{\eta}^T (L^T L + \epsilon P_\eta) \tilde{\eta} - \frac{2}{\tau} \tilde{\eta}^T P_\eta Ba_0 (\mu(t) - \mu_-) C \tilde{\eta} \\ &\quad - \frac{2}{\tau} \tilde{\eta}^T C^T (\mu(t) - \mu_-) (\mu(t) - \mu_+) C \tilde{\eta} \\ &= -\frac{1}{\tau} \epsilon \tilde{\eta}^T P_\eta \tilde{\eta} - \frac{1}{\tau} |L \tilde{\eta} - \sqrt{2}(\mu(t) - \mu_-) C \tilde{\eta}|^2 \\ &\leq -\frac{1}{\tau} \epsilon \tilde{\eta}^T P_\eta \tilde{\eta}. \end{aligned}$$

가정 1과 가정 3을 사용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\tau} \tilde{\eta}^T P_\eta Ba_0 (\theta_\eta - \bar{g}(x)/\bar{g}(x + \Delta\xi)\theta_\eta^*) - 2\tilde{\eta}^T P_\eta \dot{\tilde{\eta}}^* \\ &\leq k \| \tilde{\eta} \| (\| [x; c; \xi; \tilde{\eta}] \| + \| [y_r; \dot{y}_r; d; \dot{d}] \|). \end{aligned}$$

위 결과들을 종합하면 적절한 양수들  $\alpha, k$ 에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\alpha \| [x; c] \|^2 + \tau k \| [x; c] \|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \| \xi \|^2 - \frac{\epsilon}{\tau} \tilde{\eta}^T P_\eta \tilde{\eta} + k \| [x; \xi; \tilde{\eta}] \|^2 + k \| [y_r; \dot{y}_r; d; \dot{d}] \|^2 \end{aligned}$$

결론적으로, 위 식은  $y_r \equiv 0$ ,  $d \equiv 0$ 일 때, 충분히 작은  $\tau > 0$ 에 대하여 음한정(negative definite)이 되며 따라서 증명이 완료되었다. ■

#### IV. 결론

본 논문에서는 비선형 시스템에 대한 외란 관측기를 제안하였다. 이 제어기는 시스템의 불확실성 및 외란에 강인하다는 장점이 있다. 특히, 시스템뿐만 아니라 공칭 시스템 역시 비선형 시스템인 경우를 다루며 기존 연구 결과에 비해 보다 직관적이고 단순한 형태의 제어 구조를 제안하였다. 또한 전체 폐루프 시스템이 전역적으로 안정하기 위한 조건을 제시하였다.

본 논문의 결과는 다입력 다출력 시스템으로 확장이 가능하며 따라서 로봇팔과 같이 공칭 시스템이 본질적으로 비선형성을 갖는 시스템에 용이하게 적용될 수 있을 것으로 기대된다. 또한 슬라이딩 모드 제어[11,12] 등 다른 강인 제어 기법들과의 비교 연구가 필요하다.

#### 참고문헌

- [1] K. Ohnishi, "New development of servo technology in mechatronics," *Trans. of Japanese Society of Electrical Engineers (in Japanese)*, vol. 107-D, no. 1, pp. 83-86, 1987.
- [2] T. Umeno and Y. Hori, "Robust speed control of DC servomotors using modern two degrees-of-freedom controller design," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 38, no. 5, pp. 363-368, 1991.
- [3] T. Umeno and Y. Hori, "Robust servosystem design with two degrees of freedom and its application to novel motion control of robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 5, pp. 473-485, 1993.
- [4] K. S. Eom, I. H. Suh, and W. K. Chung, "Disturbance observer based path tracking control of robot manipulator considering torque saturation," *Mechatronics*, vol. 11, no. 3, pp. 325-343, 2001.
- [5] S. Katsura, K. Irie, and K. Ohishi, "Wideband force control by position-acceleration integrated disturbance observer," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 4, pp. 1699-1706, 2008.
- [6] J. R. Ryoo, T. Y. Doh, and M. J. Chung, "Robust disturbance observer for the track-following control system

of an optical disk drive," *Control Engineering Practice*, vol. 12, no. 5, pp. 577-585, 2004.

- [7] H. Shim and Y. Joo, "State space analysis of disturbance observer and a robust stability condition," *Proc. Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, pp. 2193-2198, 2007.
- [8] J. Back and H. Shim, "Adding robustness to nominal output feedback controllers for uncertain nonlinear systems: A nonlinear version of disturbance observer," *Automatica*, vol. 44, no. 10, pp. 2528-2537, 2008.
- [9] J. Back and H. Shim, "An inner-loop controller guaranteeing robust transient performance for uncertain MIMO nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1601-1607, 2009.
- [10] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd Ed., Prentice-Hall, NY, 1996.
- [11] H. Y. Park, Y. H. Jo, and K. B. Park, "The ultimate bound of discrete sliding mode control system with short sampling period for DC motor system," *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 3, pp. 245-248, 2010.
- [12] H. H. Choi, "An LMI Approach to Nonlinear Sliding Surface Design," *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 12, pp. 1197-1200, 2010.



백 주 훈

1997년 서울대 기계설계학과 졸업. 1999년 동 대학교 석사. 2004년 동 대학교 전기공학부 박사. 2007년~2008년 고려대학교 기계공학부 연구교수. 2008년~현재 광운대학교 로봇학부 조교수. 관심분야는 다개체 시스템, 풍력 발전 제어시스템, 비선형 제어.



심 형 보

1993년 서울대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학교 석사. 2000년 동 대학교 박사. 2003년~현재 서울대학교 전기공학부 교수. 관심분야는 하이브리드 시스템, 다개체 시스템, 바이오 시스템.