Annales scientifiques de l'É.N.S.

Michel Demazure

Désingularisation des variétés de Schubert généralisées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 1 (1974), p. 53-88
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_1_53_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 7, 1974, p. 53 à 88.

DÉSINGULARISATION DES VARIÉTÉS DE SCHUBERT GÉNÉRALISÉES

PAR MICHEL DEMAZURE

A Henri Cartan,
en hommage respectueux

Soient k un corps, G un groupe algébrique semi-simple déployé sur k, B un groupe de Borel de G, X l'adhérence d'une orbite de B dans G/B (« variété de Schubert généralisée »). On construit (1) ci-dessous une variété lisse Z et un morphisme birationnel $f: Z \to X$; la variété Z est obtenue par des fibrations successives en droites projectives, et, dans le cas où $X = G/B$, est l'analogue direct de l'espace construit par Bott et Samelson dans [1], p. 970, dans le cas des groupes de Lie compacts; c'est pourquoi on appelle ici Z une « variété de Bott-Samelson ». Cette construction est donnée au paragraphe 3, après que le paragraphe 2 ait été consacré à l'étude détaillée des fibrations en droites projectives, notamment en ce qui concerne la cohomologie des fibrés vectoriels.

Au paragraphe 4, on montre comment cette construction permet de calculer très simplement l'anneau de Chow A (G/B), ainsi que différentes structures qui lui sont attachées; en particulier, nous donnons une démonstration de tous les résultats d'un célèbre manuscrit de C. Chevalley [5], resté impublié depuis 1958 (2).

Au paragraphe 5, on démontre le théorème suivant (5.4, th. 1) :

THÉORÈME. — *Supposons k de caractéristique* 0, *et soit $\mathscr{L}$ un module inversible sur* G/B *tel que* $H^0(G/B, \mathscr{L}) \neq 0$. *Alors* $H^q(X, \mathscr{L}) = 0$ *pour* $q > 0$ *et l'homomorphisme canonique* $H^0(G/B, \mathscr{L}) \to H^0(X, \mathscr{L})$ *est surjectif.*

On démontre aussi que $f_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{O}_X$ et que $R^q f_*(\mathcal{O}_Z) = 0$ pour $q > 0$, de sorte que $f: Z \to X$ est alors une désingularisation de X dans le sens le plus fort du terme et que X est de Cohen-Macaulay, et en particulier normale. On obtient enfin une « formule des caractères » pour la représentation naturelle de B dans $H^0(X, \mathscr{L})$.

Tous ces résultats (à l'exception du fait que X est de Cohen-Macaulay) restent valables en caractéristique quelconque pourvu que l'on vérifie une *conjecture* d'énoncé fort simple sur les « réseaux admissibles » [n° 5.3, condition (8)].

(1) *Ajouté sur épreuves.* — Cette construction était déjà connue, *cf.* H. C. HANSEN, *On cycles on flag manifolds*, *Math. Scand.*, vol. 33, 1973, p. 269-274.

(2) Signalons que dans le cas où $k = \mathbf{C}$, auquel cas on peut remplacer A (G/B) par l'anneau de cohomologie $H^*(G(\mathbf{C})/B(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, une démonstration de ces résultats vient d'être publiée au tome 28-3 des *Ouspekhi* par I. N. Bernstein, I. M. Gelfand et S. I. Gelfand.

Une remarque est nécessaire au sujet des paragraphes 2 et 3. Comme la construction des variétés de Bott-Samelson et la démonstration de leurs propriétés élémentaires s'étendent au cas d'un groupe déployé sur une base quelconque, par exemple sur l'anneau des entiers, j'ai rédigé ces deux paragraphes avec un *anneau de base* k, mais j'ai essayé de garder un style aussi proche que possible de celui de la géométrie algébrique « classique » sur un corps; cela explique dans une certaine mesure pourquoi certains énoncés et certaines démonstrations sont à la fois formellement insuffisants dans le cas général et d'aspect un peu étrange dans le cas des corps.

Ce travail a été exposé à un séminaire au Tata Institute à Bombay (Inde), en janvier 1973; je dois beaucoup à de longues conversations avec M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri et D.-N. Verma, et j'ai grand plaisir à les en remercier.

1. **Rappels**

Le but de ce paragraphe est principalement de fixer des notations.

1.1. Si X est un schéma, nous notons Pic (X) le groupe des classes de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles; si D est un diviseur de Cartier effectif sur X, $\mathcal{L}$ (D) est le module inversible donné par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}(D)^{\vee} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

1.2. Si X est un schéma lisse et quasi-projectif sur un corps k, A (X) est l'anneau de Chow de X, anneau des classes de cycles pour l'équivalence rationnelle, gradué par la codimension. Si Y est un sous-schéma fermé réduit, on note [Y] la classe du cycle Y dans A (Y). Si $\mathcal{L}$ est un module inversible sur X, on désigne par $c_1(\mathcal{L}) \in A^1(X)$ la première classe de Chern de $\mathcal{L}$; par exemple, si D est un diviseur effectif, on a $c_1(\mathcal{L}(D)) = [D]$. L'application

$$c_1: \quad \mathrm{Pic}(X) \to A^1(X)$$

est un isomorphisme de groupes. Si $f: X \to Y$ est un morphisme de schémas lisses et quasi-projectifs sur k, on note $f^*: A(Y) \to A(X)$ l'homomorphisme d'image réciproque, et si f est propre, on note $f_*: A(X) \to A(Y)$ l'homomorphisme d'image directe.

1.3. Si X est un schéma projectif et lisse sur un corps k, on désigne par K (X) l'anneau de Grothendieck de X, formé par les classes de faisceaux cohérents sur X, ou encore par les classes de faisceaux localement libres; les applications d'image directe (lorsque f est propre) et réciproque associées à un morphisme f sont notées respectivement $f_!$ et $f^!$; rappelons que si F est localement libre, alors $f^!(\mathrm{cl}(\mathcal{F})) = \mathrm{cl}(f^*(\mathcal{F}))$, tandis que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, on a

$$f_!(\mathrm{cl}(\mathcal{F})) = \sum(-1)^i \mathrm{cl}(R^i f_*(\mathcal{F})).$$

Si f est la projection de X sur un point, alors K (point) = **Z**, et $f_!(\mathrm{cl}(\mathcal{F}))$ n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X, \mathcal{F}) = \sum(-1)^i \mathrm{rg}\, H^i(X, F)$.

1.4. Plus généralement, soit X un schéma lisse et projectif sur un corps k, sur lequel opère à gauche un k-groupe algébrique H; soient $\pi : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ et $\omega : \mathrm{H} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ les morphismes $(h, h') \mapsto hh'$ et $(h, x) \mapsto hx$; dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \times \mathrm{H} \times \mathrm{X} \arrow[r, shift left=2, "1_{\mathrm{H}} \times \omega"] \arrow[r, "\pi \times 1_{\mathrm{X}}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{pr}_{23}"'] & \mathrm{H} \times \mathrm{X} \arrow[r, shift left, "\omega"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathrm{X}, \end{tikzcd}$$

on a

$$\omega \circ (1_{\mathrm{H}} \times \omega) = \omega \circ (\pi \times 1_{\mathrm{X}}), \qquad \mathrm{pr}_2 \circ (\pi \times 1_{\mathrm{X}}) = \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_{23}$$

et

$$\mathrm{pr}_2 \circ (1_{\mathrm{H}} \times \omega) = \omega \circ \mathrm{pr}_{23}.$$

Soit $\mathscr{F}$ un module cohérent sur X; une H-*linéarisation* de $\mathscr{F}$ est un isomorphisme $u : \mathrm{pr}_2^* (\mathscr{F}) \to \omega^* (\mathscr{F})$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pr}_{23}^* \mathrm{pr}_2^* (\mathscr{F}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{23}^* u"] \arrow[d, equal] & \mathrm{pr}_{23}^* \omega^* (\mathscr{F}) \arrow[r, equal] & (1 \times \omega)^* \mathrm{pr}_2^* (\mathscr{F}) \arrow[d, "(1 \times \omega)^* u"] \\ (\pi \times 1)^* \mathrm{pr}_2^* (\mathscr{F}) \arrow[r, "(\pi \times 1)^* u"] & (\pi \times 1)^* \omega^* (\mathscr{F}) \arrow[r, equal] & (1 \times \omega)^* \omega^* (\mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

de manière approchée, on se donne des homomorphismes $u_{h,x} : \mathrm{F}_x \to \mathrm{F}_{hx}$ satisfaisant à la condition de compatibilité évidente.

Supposons qu'il existe sur X un faisceau ample H-linéarisable; alors tout faisceau cohérent H-linéarisé possède dans la catégorie des faisceaux cohérents H-linéarisés une résolution finie par des faisceaux localement libres H-linéarisés, et on note $\mathrm{K}_{\mathrm{H}} (\mathrm{X})$ l'anneau des classes de faisceau cohérents H-linéarisés.

Soit Y un second schéma lisse et projectif sur lequel H opère, et possédant un faisceau ample H-linéarisable, et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme compatible avec les opérations de H; on définit alors de manière analogue à ci-dessus des applications

$$f^! : \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}) \qquad \text{et} \qquad f_! : \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y}).$$

Notons aussi que si Y est un point, alors $\mathrm{K}_{\mathrm{H}} (\mathrm{Y})$ est l'anneau R (H) des classes de représentations de H et $f_!$ (cl $(\mathscr{F})$) est donc la somme alternée des classes des représentations de H dans les $\mathrm{H}^i (\mathrm{X}, \mathscr{F})$.

1.5 (*Fibrés vectoriels associés*). Soient X un schéma sur l'anneau k sur lequel opère librement à *droite* le k-groupe B, et supposons que le quotient X/B existe de façon que $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{B}$ soit une fibration principale (localement triviale pour simplifier) de groupe B; soit d'autre part $\rho : \mathrm{B} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ une représentation linéaire de B dans un k-module projectif de rang fini V. On note $\mathscr{L}(\rho)$ le faisceau localement libre sur X formé des sections du fibré vectoriel $\mathrm{X} \times^{\mathrm{B}} \mathrm{V}$ quotient de $\mathrm{X} \times \mathrm{V}$ par la relation d'équivalence

$$(x, v) \sim (x, v)\, b = (xb, \rho(b)^{-1} v).$$

De manière équivalente, si U est un ouvert de X/B et $p^{-1}(\mathrm{U})$ son image réciproque dans X, alors $\mathrm{H}^0 (\mathrm{U}, \mathscr{L}(\rho))$ est l'ensemble des morphismes φ de $p^{-1}(\mathrm{U})$ dans V tels que $\varphi(xb) = \rho(b)^{-1} \varphi(x)$.

En particulier, à chaque caractère λ de B (homomorphisme de B dans le groupe multiplicatif) est associé un module inversible $\mathscr{L}(\lambda)$, d'où un homomorphisme de groupes $\mathsf{X}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{X}/\mathrm{B})$, où $\mathsf{X}(\mathrm{B})$ désigne le groupe des caractères de B.

Supposant maintenant que X/B est lisse et que k est un corps, de façon à disposer de l'anneau de Chow A (X/B) et composant l'homomorphisme précédent avec l'homomorphisme c_1 du n°1.2, on obtient un homomorphisme de $\mathsf{X}(\mathrm{B})$ dans $\mathrm{A}^1(\mathrm{X}/\mathrm{B})$ qui se prolonge en un homomorphisme d'anneaux gradués

$$c: \quad \mathsf{SX}(\mathrm{B}) \to \mathrm{A}(\mathrm{X}/\mathrm{B})$$

de l'algèbre symétrique du **Z**-module X (B) dans A (X/B), que l'on appelle *l'homomorphisme caractéristique de la fibration* $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{B}$.

Si on suppose de plus que X/B est projectif, de façon à disposer de l'anneau de Grothendieck K (X/B), on déduit de la construction donnée plus haut un homomorphisme d'anneaux $\mathsf{R}(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}(\mathrm{X}/\mathrm{B})$ que l'on appelle parfois aussi homomorphisme caractéristique.

1.6. Plus généralement, supposons donné dans la situation de 1.4 un k-groupe B opérant à droite sur X, de façon que les conditions de 1.5 soient satisfaites et que les opérations de H et B commutent. Alors, pour toute représentation linéaire ρ de B, le faisceau $\mathscr{L}(\rho)$ est muni d'une façon canonique d'une H-linéarisation; par exemple, si on identifie comme plus haut $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}/\mathrm{B}, \mathscr{L}(\rho))$ à l'ensemble des morphismes $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{V}$ tels que $\varphi(xb) = \rho(b)^{-1}\varphi(x)$, alors H y opère par $(h\varphi)(x) = \varphi(h^{-1}x)$. On en déduit donc un homomorphisme d'anneaux $\mathsf{R}(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}/\mathrm{B})$.

Cette construction s'applique par exemple lorsque X = H; plus particulièrement encore, prenons X = H = B; on obtient alors un morphisme $\mathsf{R}(\mathrm{H}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}/\mathrm{H})$, dont on vérifie aussitôt qu'il est l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme $\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\text{point}) \to \mathsf{R}(\mathrm{H})$ décrit en 1.4.

2. La construction élémentaire

2.1. Dans tout ce paragraphe, nous fixons les notations suivantes : k est un anneau de base (essentiellement **Z** ou un corps), P un k-groupe produit semi-direct d'un groupe unipotent lisse connexe U par un groupe réductif déployable L de rang semi-simple 1 et T un tore maximal déployé de L; nous notons $\mathrm{M} = \mathsf{X}(\mathrm{T})$ son groupe des caractères, α l'une des deux racines de L relativement à T, U_α et $\mathrm{U}_{-\alpha}$ les sous-groupes unipotents de L correspondant à ces racines, $\mathrm{B} = \mathrm{T}.\mathrm{U}_\alpha.\mathrm{U}$ et $\mathrm{B}' = \mathrm{T}.\mathrm{U}_{-\alpha}.\mathrm{U}$ les deux sous-groupes de Borel de P contenant T, w_α l'élément non neutre du groupe de Weyl de L relativement à T, considéré comme un automorphisme de T et de son groupe des caractères M, et $\alpha^\vee \in \mathrm{M}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathbf{Z})$ l'élément tel que

$$w_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \alpha, \qquad \lambda \in \mathrm{M}.$$

D'après le lemme de Bruhat, P est la réunion disjointe de l'ouvert $\mathrm{BB}' = (\mathrm{U}_\alpha.\mathrm{T}.\mathrm{U}_{-\alpha}).\mathrm{U}$ et d'un fermé que nous noterons $\mathrm{B}\,w_\alpha = w_\alpha\,\mathrm{B}'$; si n_α est un élément de $\mathrm{L}(k)$ normalisant T et représentant w_α, cette partie fermée est $\mathrm{B}\,n_\alpha = n_\alpha\,\mathrm{B}'$.

2.2. Par ailleurs, on se donne un k-schéma quasi-projectif X sur lequel B opère *à droite*, de façon que le quotient X/B existe et que la projection canonique $X \to X/B$ soit une fibration principale localement triviale.

Enfin, on se donne un k-groupe H opérant à gauche sur X, les opérations de H et B commutant.

2.3. Alors $B \times B'$ opère à droite sur $X \times P$ par $(x, p)(b, b') = (xb, b^{-1} pb')$, et les quotients correspondant $(X \times P)/B$ et $(X \times P)/(B \times B')$ sont les produits contractés $X' = X \times^{B} P$ et $X'/B' = X \times^{B} P/B'$; on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[r] & X'/B' \arrow[dd, "f"] \\ X \times P \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & X \arrow[r] & X/B \end{tikzcd}$$

(tous les morphismes sont évidents), où toutes les flèches sont des fibrations localement triviales (les fibres-type sont P, $B \times B'$, B, B′, P/B′); notons aussi que H opère à gauche sur tous les schémas du diagramme et que les morphismes sont compatibles avec ces opérations de H.

De cette façon, nous avons associé à X un nouveau schéma X′ sur lequel B′ opère à droite et H à gauche, de façon que les conditions de 2.2 soient satisfaites *mutatis mutandis:* c'est notre *construction élémentaire*. Le but de ce paragraphe est d'étudier en détail les propriétés du morphisme $f : X'/B' \to X/B$.

2.4. Comme $f : X'/B' \to X/B$ est l'espace fibré associé à la fibration principale $X \to X/B$ et à l'opération de B sur P/B′, qui est isomorphe à la droite projective $\mathbf{P}^1$, le morphisme f est *lisse et projectif*, donc X′/B′ est lisse et projectif si X/B l'est. De plus, comme le point $w_\alpha B'/B'$ de P/B′ est laissé fixe par B, il définit une *section* σ de f; si n_α represente w_α comme ci-dessus, σ applique la classe de x modulo B sur la classe de (x, n_α) modulo $B \times B'$. L'image de cette section est un diviseur D sur X′/B′; nous noterons $\mathscr{L}(D)$ le module inversible associé (1.1).

2.5. A tout caractère λ de T, faisons correspondre le module inversible $\mathscr{L}(\lambda)$ sur X/B défini par le caractère de B prolongeant λ et le module inversible $\mathscr{L}'(\lambda)$ sur X′/B′ défini par le caractère de B′ prolongeant λ (*cf.* 1.5).

LEMME 1. — *Pour tout* $\lambda \in M$, $\sigma^*(\mathscr{L}'(\lambda))$ *est isomorphe à* $\mathscr{L}(w_\alpha(\lambda))$.

Par définition, $\mathscr{L}'(\lambda)$ est le faisceau des sections de $X' \times^{B'} \mathbf{A}$ (on désigne par $\mathbf{A}$ la droite affine), c'est-à-dire de $X \times^{B} P \times^{B'} \mathbf{A}$, quotient de $X \times P \times \mathbf{A}$ par la relation d'équivalence $(x, p, a) \sim (xb, b^{-1} pb', \lambda(b')^{-1} a)$; son image réciproque $\sigma^*(\mathscr{L}'(\lambda))$ est le faisceau des sections de l'image réciproque de l'espace précédent, c'est-à-dire du quotient $X \times \{ n_\alpha \} \times \mathbf{A}$ par la relation d'équivalence induite. Mais on a

$$(x, n_\alpha, a) \sim (xb, b^{-1} n_\alpha (n_\alpha^{-1} b n_\alpha), \lambda(n_\alpha^{-1} b n_\alpha)^{-1} a) = (xb, n_\alpha, \lambda(n_\alpha^{-1} b n_\alpha)^{-1} a),$$

et on reconnait la définition de $\mathscr{L}(w_\alpha(\lambda))$.

LEMME 2. — *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{M}$, *le degré de* $\mathscr{L}'(\lambda)$ *le long de toute fibre de* f *est* $\langle \alpha^{\vee}, \lambda \rangle$.

On est réduit immédiatement au cas où k est un corps et où X/B est un point, auquel cas $\mathscr{L}'(\lambda)$ est le module inversible sur P/B′ associé au caractère λ de B′, ou encore le module inversible sur $\mathrm{L}/\mathrm{T}.\mathrm{U}_{-\alpha}$ associé au caractère λ de $\mathrm{T}.\mathrm{U}_{-\alpha}$; le résultat est alors bien connu. On peut par exemple le démontrer comme suit : il suffit de prouver que si $n = \langle \alpha^{\vee}, \lambda \rangle$ est $\geqq 0$, la dimension de $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}/\mathrm{TU}_{-\alpha}, \mathscr{L}'(\lambda))$ est $n+1$; or, par définition, cet espace est formé des fonctions φ sur L telles que $\varphi(ltu) = \varphi(l)\,\lambda(t)^{-1}$ pour $l \in \mathrm{L}$, $t \in \mathrm{T}$, $u \in \mathrm{U}_{-\alpha}$; recouvrant L par les deux ouverts $\mathrm{U}_\alpha.\mathrm{T}.\mathrm{U}_{-\alpha}$ et $n_\alpha\,\mathrm{U}_\alpha.\mathrm{T}.\mathrm{U}_{-\alpha}$, on obtient sans difficultés le résultat cherché.

LEMME 3. — *Le faisceau* $\sigma^*(\mathscr{L}(\mathrm{D}))$ *est isomorphe à* $\mathscr{L}(-\alpha)$.

Identifions P/B′ à $\mathbf{P}^1$ de façon que le point fixe de B soit ∞. Alors B opère sur $\mathbf{P}^1$ par $b.z = \alpha(b)\,z + u(b)$, où u est une fonction sur B; comme $\mathscr{L}_{\mathbf{P}^1}(\infty)$ est engendré par la fonction rationnelle z, on en déduit sans difficultés l'assertion annoncée.

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{M}$, $\mathscr{L}'(\lambda)$ *est isomorphe à* $f^*(\mathscr{L}(\lambda)) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes\langle \alpha^{\vee}, \lambda\rangle}$.

Les modules inversibles $\mathscr{L}'(\lambda)$ et $\mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes\langle \alpha^{\vee}, \lambda\rangle}$ ont même degré sur chaque fibre d'après le lemme 2. Il existe donc un module inversible $\mathscr{L}$ sur X/B tel que

$$f^*(\mathscr{L}) \simeq \mathscr{L}'(\lambda) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes(-\langle \alpha^{\vee}, \lambda\rangle)}.$$

Appliquant σ^* aux deux membres, on trouve d'après les lemmes 1 et 3 :

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}(w_\alpha(\lambda)) \otimes \mathscr{L}(-\alpha)^{\otimes(-\langle \alpha^{\vee}, \lambda\rangle)} = \mathscr{L}(w_\alpha(\lambda) + \langle \alpha^{\vee}, \lambda\rangle\alpha) = \mathscr{L}(\lambda).$$

Remarque. — Raisonnant comme dans le lemme 3, on peut prouver que

$$\Omega^1_{(\mathrm{X}'/\mathrm{B}')/(\mathrm{X}/\mathrm{B})} \simeq \mathscr{L}'(-\alpha).$$

2.6. Considérons maintenant le quotient $\mathrm{X}'/\mathrm{T} = \mathrm{X} \times^{\mathrm{B}} \mathrm{P}/\mathrm{T}$ et sa projection q sur X′/B′. Le morphisme $p\,\mathrm{T} \mapsto p\,\mathrm{T}\,w_\alpha = p\,w_\alpha\,\mathrm{T}$ est un automorphisme d'ordre 2 de P/T commutant à l'opération à gauche de B; il induit donc un automorphisme d'ordre 2 de X′/T, que nous noterons encore w_α.

PROPOSITION 2. — *Le module inversible* $w_\alpha^*(q^*(\mathscr{L}(\mathrm{D})))$ *est isomorphe à*

$$q^*(\mathscr{L}(\mathrm{D}) \otimes f^*(\mathscr{L}(\alpha)))^{\otimes(-1)}.$$

Notons d'abord que $q^*(\mathrm{D})$ est le diviseur $\mathrm{X} \times^{\mathrm{B}} \mathrm{B}/\mathrm{T}$, donc que $w_\alpha^*(q^*(\mathrm{D}))$ est le diviseur $\mathrm{X} \times^{\mathrm{B}} \mathrm{B}\,w_\alpha/\mathrm{T}$; ces deux diviseurs ont une intersection vide, donc

$$q^*(\mathscr{L}(\mathrm{D})) \otimes w^*(q^*(\mathscr{L}(\mathrm{D})))$$

s'identifie naturellement à $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, où E est le diviseur $\mathrm{X} \times^{\mathrm{B}} (\mathrm{B} \cup \mathrm{B}\,w_\alpha)/\mathrm{T}$, et il s'agit de montrer que $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est l'image réciproque du faisceau $\mathscr{L}(\alpha)$ sur X/B. Pour ce faire, il suffit d'exhiber une fonction φ sur P telle que $\varphi(bpt) = \alpha(b)^{-1}\,\varphi(p)$ pour tous points b, p, t de B, P, T respectivement, et telle que $\operatorname{div}(\varphi) = \mathrm{B} \cup \mathrm{B}\,w_\alpha$. Or, si on identifie P/B′ à $\mathbf{P}^1$ comme ci-dessus, et si p opère par $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, il suffit de prendre

$$\varphi(p) = cd/(ad-bc).$$

2.7. Supposons maintenant que k soit un corps, pour traduire les résultats précédents dans le cadre des anneaux de Chow. Considérons le diagramme

$$A(X/B) \underset{\sigma^*,\, f_*}{\overset{\sigma_*,\, f^*}{\rightleftarrows}} A(X'/B'),$$

et soit $\xi \in A^1(X'/B')$ la classe du diviseur D; on a donc

$$\xi = \sigma_*(1) = c_1(\mathscr{L}(D)).$$

Notons

$$c : SM \to A(X/B) \qquad \text{et} \qquad c' : SM \to A(X'/B')$$

les homomorphismes caractéristiques des fibrations

$$X \to X/B \qquad \text{et} \qquad X' \to X'/B' \quad (1.5).$$

PROPOSITION 3. — *L'homomorphisme d'anneaux de degré* 0 :

$$f^* : \quad A(X/B) \to A(X'/B')$$

est injectif; il identifie $A(X'/B')$ *avec* $A(X/B)[\xi]/(\xi^2 + c(\alpha)\xi)$. *Avec cette identification, on a pour* $a, b \in A(X/B)$ *les relations*

$$f^*(a) = a, \qquad \sigma_*(a) = a\xi, \qquad f_*(a+b\xi) = b, \qquad \sigma^*(a+b\xi) = a - bc(\alpha).$$

Notons d'abord les formules évidentes $f_* \circ \sigma_* = \mathrm{Id}$, $\sigma^* \circ f^* = \mathrm{Id}$. D'après la formule de projection pour σ, on a $\sigma_*(\sigma^*(a')) = \xi a'$ pour $a' \in A(X'/B')$; remplaçant a' par $f^*(a)$, $a \in A(X/B)$, on en déduit

$$\sigma_*(a) = \xi f^*(a).$$

Remplaçant maintenant a par $\sigma^*(a')$, on obtient $\xi a' = \xi f^*(\sigma^*(a'))$, et en particulier $\xi^2 = f^*(\sigma^*(\xi))\xi$; mais d'après le lemme 3, $\sigma^*(\xi) = -c(\alpha)$, donc

$$\xi^2 + f^* c(\alpha)\xi = 0.$$

Comme on sait par ailleurs ([7], p. 420, corollaire) que $A'(X'/B')$ est un $A(X/B)$-module libre de rang 2 de base $(1, \xi)$, cela implique la première assertion de la proposition. On a enfin $f_*(1) = 0$ puisque f_* est de degré (-1), ce qui, avec les relations déjà écrites, entraîne le reste de la proposition.

PROPOSITION 4. — *Pour tout* $u \in SM$, *on a* $\sigma^*(c'(u)) = c(w_\alpha(u))$ *et*

$$c'(u) = c(u) + c\left(\frac{u - w_\alpha(u)}{\alpha}\right)\xi.$$

Si $\lambda \in M$, on a d'après le lemme 1 et la proposition 1 :

$$\sigma^*(c'(\lambda)) = c(w_\alpha(\lambda)), \qquad c'(\lambda) = c(\lambda) + \langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \xi.$$

Ce sont les formules annoncées lorsque $u = \lambda \in M$. On en déduit aussitôt la première assertion; démontrons la seconde par récurrence sur le degré de u. Supposons donc que l'on ait

$$c'(u) = c(u) + c\left(\frac{u - w_\alpha(u)}{\alpha}\right),$$

et soit

$$v = u\lambda, \qquad \lambda \in \mathrm{M};$$

alors

$$c'(v) = c'(u)\,c'(\lambda) = c(u)\,c(\lambda) + c(a)\,\xi + c(b)\,\xi^2,$$

où

$$a = \lambda\frac{u - w_\alpha(u)}{\alpha} + \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle u, \qquad b = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \frac{u - w_\alpha(u)}{\alpha};$$

mais

$$\xi^2 = -c(\alpha)\,\xi,$$

donc

$$c(a)\,\xi + c(b)\,\xi^2 = c(a - b\,\alpha)\,\xi,$$

et un calcul immédiat donne

$$a - b\,\alpha = \frac{u\lambda - w_\alpha(u\lambda)}{\alpha}.$$

Considérons maintenant comme ci-dessus la projection $q : \mathrm{X}'/\mathrm{T} \to \mathrm{X}'/\mathrm{B}'$, c'est une fibration en espaces affines, donc q induit un isomorphime

$$q^* : \quad \mathrm{A}(\mathrm{X}'/\mathrm{B}') \to \mathrm{A}(\mathrm{X}'/\mathrm{T}),$$

de telle sorte qu'on peut transporter à $\mathrm{A}(\mathrm{X}'/\mathrm{B}')$ l'automorphisme d'ordre 2 de $\mathrm{A}(\mathrm{X}'/\mathrm{T})$ défini par w_α (2.6). D'après la proposition 2, on a aussitôt :

PROPOSITION 5. — *L'automorphisme* w_α^* *de* $\mathrm{A}(\mathrm{X}'/\mathrm{B}')$ *induit l'identité sur* $\mathrm{A}(\mathrm{X}/\mathrm{B})$ *et transforme* ξ *en* $-\xi - c(\alpha)$.

Remarque. — Comme on l'a remarqué plus haut, l'intersection des diviseurs $q^*(\mathrm{D})$ et $w_\alpha^*(q^*(\mathrm{D}))$ est vide, ce qui donne une autre démonstration de la formule $\xi(\xi + c(\alpha)) = 0$.

2.8. Supposons maintenant que k soit un corps et que X/B soit lisse et projectif, alors X'/B' l'est aussi; considérons les anneaux de Grothendieck de X/B et X'/B' et le diagramme

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}/\mathrm{B}) \underset{\sigma^!,\, f_!}{\overset{\sigma_!,\, f^!}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}(\mathrm{X}'/\mathrm{B}').$$

Les homomorphismes de restriction $\mathsf{R}(\mathrm{B}) \to \mathsf{R}(\mathrm{T})$ et $\mathsf{R}(\mathrm{B}') \to \mathsf{R}(\mathrm{T})$ sont bijectifs; d'autre part $\mathsf{R}(\mathrm{T})$ s'identifie à l'algèbre $\mathbf{Z}[\mathrm{M}]$ du groupe M (on note e^λ l'élément de $\mathbf{Z}[\mathrm{M}]$ correspondant à M), d'où des homomorphismes d'anneaux

$$\mathbf{Z}[\mathrm{M}] \to \mathsf{R}(\mathrm{T}) \to \mathsf{R}(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}(\mathrm{X}/\mathrm{B}),$$

$$\mathbf{Z}[\mathrm{M}] \to \mathsf{R}(\mathrm{T}) \to \mathsf{R}(\mathrm{B}') \to \mathrm{K}(\mathrm{X}'/\mathrm{B}'),$$

notés respectivement c_K et c'_K; remarquons que $c_K(e^\lambda) = \mathrm{cl}(\mathscr{L}(\lambda))$ et que c_K peut aussi être défini comme l'extension canonique à $\mathbf{Z}[M]$ de l'homomorphisme $\lambda \mapsto \mathrm{cl}(\mathscr{L}(\lambda))$ de M dans le monoïde multiplicatif de K (X/B); de même pour X'/B'.

Posons

$$x = \sigma_!(1) = \mathrm{cl}(\mathscr{O}_D) = 1 - \mathrm{cl}(\mathscr{L}(D))^{-1}.$$

D'après le lemme 3, on a

$$\sigma^!(x) = 1 - c_K(e^\alpha).$$

Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 donne :

PROPOSITION 6. — *L'homomorphisme* $f^!: K(X/B) \to K(X'/B')$ *est injectif et identifie* $K(X'/B')$ *à* $K(X/B)[x]/(x^2 - x(1 - c_K(e^\alpha)))$. *Avec ces identifications on a pour* $a, b \in K(X/B)$:

$$f^!(a) = a, \qquad \sigma_!(a) = ax, \qquad f_!(a+bx) = a+b, \qquad \sigma^!(a+bx) = a + b(1 - c_K(e^\alpha)).$$

PROPOSITION 7. — *Pour tout* $u \in \mathbf{Z}[M]$, *on a*

$$\sigma^!(c'_K(u)) = c_K(w_\alpha(u))$$

et

$$c'_K(u) = c_K(u) + c_K\left(\frac{u - w_\alpha(u)}{e^\alpha - 1}\right)x.$$

La première relation se déduit aussitôt du lemme 1. Posons d'autre part

$$c_K(e^\alpha) = a, \qquad \mathrm{cl}(\mathscr{L}(D)) = y;$$

on a d'après la proposition 1 :

$$(1) \qquad c'_K(e^\lambda) = c_K(e^\lambda) \cdot y^{\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle}, \qquad \lambda \in M.$$

Notons d'abord la formule

$$(2) \qquad y^n = \frac{1 - a^{-n}}{a - 1} x + 1, \qquad n \in \mathbf{Z};$$

il suffit en effet de remarquer qu'elle se réduit à $y^{-1} = -x+1$ pour $n = -1$ et de vérifier que le second membre dépend multiplicativement de n, ce qui se déduit aussitôt de la relation $x^2 = x(1-a)$. Utilisant alors (1) et (2) on obtient aussitôt la formule annoncée.

Considérant à nouveau la projection $q: X'/T \to X'/B'$, on obtient un isomorphisme $q^!: K(X'/B') \to K(X'/T)$, d'où après transport par $q^!$ un automorphisme w_α^* de K (X'/B').

PROPOSITION 8. — *L'automorphisme* w_α^* *de* K (X'/B') *induit l'identité sur* K (X/B) *et transforme* x *en* $-x + 1 - c_K(e^\alpha)$.

Avec les notations précédentes, on a

$$x = 1 - y^{-1} \qquad \text{et} \qquad w_\alpha^*(y) = y^{-1} \cdot a^{-1}$$

(prop. 2), donc

$$w_\alpha^*(x) = 1 - ay = 1 - a\left(\left(\frac{1 - a^{-1}}{a - 1}\right)x + 1\right) = 1 - x - a.$$

2.9. Gardons les notations précédentes. Remarquons que tous les modules construits ci-dessus, en particulier $\mathscr{L}(\mathrm{D})$ et les $\mathscr{L}(\lambda)$ et $\mathscr{L}'(\lambda)$ sont munis naturellement d'une H-linéarisation; si X/B possède un faisceau ample H-linéarisé, soit $\mathscr{L}$, alors X'/B' en possède aussi un, par exemple $f^*(\mathscr{L}) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})$. On peut alors appliquer 1.6 au lieu de 1.5 et on obtient des homomorphismes :

$$\mathbf{Z}[\mathrm{M}] \to \mathrm{R}(\mathrm{T}) \to \mathrm{R}(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}/\mathrm{B}),$$
$$\mathbf{Z}[\mathrm{M}] \to \mathrm{R}(\mathrm{T}) \to \mathrm{R}(\mathrm{B}') \to \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}'/\mathrm{B}'),$$

notés respectivement $c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}$ et $c_{\mathrm{K}}'^{\mathrm{H}}$; considérons aussi l'application d'image directe

$$f_! : \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}'/\mathrm{B}') \to \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}/\mathrm{B}).$$

PROPOSITION 9. — *Soit* $\mu \in \mathrm{M}$ *fixé tel que* $\langle \alpha^\vee, \mu \rangle = 1$; *posons*

$$\mu' = w_\alpha(\mu) = \mu - \alpha.$$

Pour tout $u \in \mathbf{Z}[\mathrm{M}]$ *on a*

$$f_!(c_{\mathrm{K}}'^{\mathrm{H}}(e^{\mu'} u')) = c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}\left(e^{\mu} \frac{u - w_\alpha(u)}{e^\alpha - 1} \right).$$

Identifions X/B au sous-schéma D de X'/B'. On a alors une suite exacte de modules H-linéarisés :

$$0 \to \mathscr{L}(\mathrm{D})^{-1} \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}'/\mathrm{B}'} \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}/\mathrm{B}} \to 0.$$

Tensorisant-la par le module inversible H-linéarisé $\mathscr{L}'(\mu'+\lambda) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes n}$, où $\lambda \in \mathrm{M}$ et $n \in \mathbf{Z}$, on obtient une suite exacte de modules H-linéarisés :

$$0 \to \mathscr{L}'(\mu'+\lambda) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes(n-1)} \to \mathscr{L}'(\mu'+\lambda) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes n} \to \sigma^*(\mathscr{L}'(\mu'+\lambda) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes n}) \to 0.$$

D'après les lemmes 1 et 3, $\sigma^*(\mathscr{L}'(\mu'+\lambda) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{D})^{\otimes n})$ est isomorphe à

$$\mathscr{L}(w_\alpha(\mu'+\lambda) - n\alpha) = \mathscr{L}(\mu+\lambda-(n+\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\alpha).$$

Posons

$$a(n) = f_!(c_{\mathrm{K}}'^{\mathrm{H}}(e^{\mu'+\lambda}).\mathrm{cl}(\mathscr{L}(\mathrm{D}))^n),$$
$$b(n) = c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}(e^{\mu+\lambda-(n+\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\alpha}).$$

Alors

(3) $$a(0) = f_!(c_{\mathrm{K}}'^{\mathrm{H}}(e^{\mu'+\lambda})),$$

tandis que d'après la suite exacte précédente :

(4) $$a(n) = a(n-1) + b(n).$$

D'un autre côté, le degré de $\mathscr{L}'(\mu' \times \lambda) \otimes \mathrm{L}(\mathrm{D})^{\otimes n}$ le long des fibres de f est égal d'après le lemme 2 à

$$\langle \alpha^\vee, \mu'+\lambda \rangle + n = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + n - 1;$$

si $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + n = 0$, alors ce degré est (-1) et $a(n) = 0$, donc

(5) $$a(-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle) = 0.$$

Supposons alors d'abord que $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = m > 0$; alors d'après (4), (5) :

$$a(0) = b(-m+1)+\ldots+b(0) = c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}(e^{\mu+\lambda}(e^{-\alpha}+\ldots+e^{-m\alpha}))$$
$$= c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}\left(e^{\mu+\lambda}\frac{1-e^{-m\alpha}}{e^{\alpha}-1}\right) = c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}\left(e^{\mu}\frac{e^{\lambda}-e^{w_\alpha(\lambda)}}{e^{\alpha}-1}\right),$$

d'où la proposition 9 dans ce cas. Si maintenant $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = -m < 0$, alors

$$a(0) = -(b(m)+\ldots+b(2)+b(1)) = -c_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}(e^{\mu+\lambda}(1+\ldots+e^{(m-1)})),$$

et on conclut par un calcul analogue. Enfin, si $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = 0$, alors $a(0) = 0$ par (5), ce qui achève la démonstration.

2.10. Pour simplifier, *supposons désormais que k est un corps.*

Pour toute représentation linéaire $\rho : \mathrm{B} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$, notons $\mathscr{L}(\rho)$ ou $\mathscr{L}(\mathrm{V})$ le faisceau sur X/B défini par ρ (1.5); définissons de même $\mathscr{L}'(\rho') = \mathscr{L}'(\mathrm{V}')$, faisceau sur X'/B' associé à une représentation $\rho' : \mathrm{B}' \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}')$. Nous nous intéressons maintenant au calcul de $f_* \mathscr{L}'(\mathrm{V}')$ et $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{V}')$.

LEMME 4. — *Soient* $\mathrm{P} \to \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *une représentation linéaire de* P, *et* V' *un sous-espace de* E *stable par* B'. *Alors* $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E}) = 0$ *et* $f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E})$ *s'identifie naturellement à* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$; *dans cette identification* $f_* \mathscr{L}'(\mathrm{V}')$ *est transformé en* $\mathscr{L}(\mathrm{V})$, *où* V *est le plus grand sous-espace de* V' *qui soit stable par* P.

Pour définir un isomorphisme de $f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E})$ sur $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, il suffit d'exhiber un isomorphisme « naturel » de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}/\mathrm{B}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$ avec $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}/\mathrm{B}, f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E})) = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}'/\mathrm{B}', \mathscr{L}'(\mathrm{E}))$; il suffira en effet ensuite de remplacer X par un ouvert variable stable par B. Or, $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}/\mathrm{B}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$ est l'ensemble des fonctions $a : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ telles que $a(xb) = b^{-1} a(x)$, tandis que $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}'/\mathrm{B}', \mathscr{L}'(\mathrm{E}))$ est formé des fonctions $a' : \mathrm{X}' \to \mathrm{E}$ telles que $a'(x'b') = b'^{-1} a'(x')$. Soit donc $a : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ telle que $a(xb) = b^{-1} a(x)$; définissons $\bar{a} : \mathrm{X} \times \mathrm{P} \to \mathrm{E}$ par $\bar{a}(x, p) = p^{-1} a(x)$; alors

$$\bar{a}(xb, b^{-1} pb') = b'^{-1} p^{-1} ba(xb) = b'^{-1} p^{-1} a(x) = b'^{-1} \bar{a}(x, p);$$

par passage au quotient par B, $\bar{a}$ définit donc une fonction $a' : \mathrm{X}' \to \mathrm{E}$ qui répond à la condition exigée; l'application $a \mapsto a'$ est un isomorphisme, car on construit une application réciproque en associant à a' l'application $a : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ définie par $a(x) = na'(\overline{(x, n)})$, où n est un représentant de w_α dans $\mathrm{P}(k)$, et où $\overline{(x, n)}$ est la classe de (x, n) dans X'.

Ayant obtenu l'identification annoncée, notons que a' appartient au sous-espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}'/\mathrm{B}', \mathscr{L}'(\mathrm{V}'))$ si et seulement si le morphisme $(x, p) \mapsto p^{-1} a(x)$ est à valeurs dans V', ce qui signifie que a est à valeur dans V.

Il nous reste à prouver que $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E}) = 0$; pour ce faire, on peut supposer que X/B est réduit à un point, c'est-à-dire que X' = P, et il suffit de prouver que $\mathscr{L}'(\mathrm{E})$ est constant [puisque P/B' est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ et que $\mathrm{H}^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}) = 0$]; mais cela est clair : il suffit d'associer à tout élément x de E la section a' telle que $a'(p) = p^{-1} x$.

Soit $x_{-\alpha}$ un isomorphisme du groupe additif sur $\mathrm{U}_{-\alpha}$ tel que

$$tx_{-\alpha}(a)t^{-1} = x_{-\alpha}(\alpha(t)^{-1} a)$$

pour tout point t de T, et soit $i : \mathbf{SL}_2 \to \mathrm{L}$ un homomorphisme tel que

$$i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = x_{-\alpha}(a),\ i\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix} = \alpha^{\vee}(z).$$

LEMME 5. — *Soit* $\rho : \mathrm{B}' \to \mathrm{GL}(\mathrm{F})$ *une représentation linéaire de* B′ *possédant la propriété suivante : il existe une représentation linéaire* $\tilde{\rho}$ *de* $\mathbf{SL}_2$ *dans* F *telle que*

$$\tilde{\rho}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \rho(x_{-\alpha}(a)), \qquad \tilde{\rho}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix} = z\,\rho(\alpha^{\vee}(z)).$$

Alors $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{F}) = 0$.

On peut supposer que X/B est réduit à un point, donc $\mathrm{X}' = \mathrm{P}$. De plus, comme l'image de i opère transitivement sur P/B′, on peut, prenant « l'image réciproque par i » de la situation, supposer que i est un isomorphisme de $\mathbf{SL}_2$ sur P. Alors ρ est le produit tensoriel de la restriction d'une représentation de P par une représentation de dimension 1, donc $\mathscr{L}'(\mathrm{F})$ est le produit tensoriel d'un faisceau constant (*cf.* démonstration du lemme 4) et d'un faisceau inversible, de degré -1 (lemme 2), donc $\mathrm{H}^1(\mathrm{P}/\mathrm{B}', \mathscr{L}'(\mathrm{F})) = 0$.

PROPOSITION 10. — *Soient* $\mathrm{P} \to \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *une représentation linéaire de* P, V′ *un sous-espace de* E *stable par* B′, V *le plus petit sous-espace stable par* P *contenant* V′*; soit* ρ *la représentation naturelle de* B′ *dans* V/V′. *Supposons qu'il existe une représentation* τ *de* SL_2 *dans* V/V′ *telle que*

$$\tau\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \rho(x_{-\alpha}(a)), \qquad \tau\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix} = z^{-1}\rho(\alpha^{\vee}(z)). \tag{6}$$

Notons $\mathrm{E}^{\vee}$, $\mathrm{V}^{\vee}$, $\mathrm{V}'^{\vee}$ *les duaux de* E, V, V′. *Alors* $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{V}'^{\vee}) = 0$ *et le morphisme* $f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E}^{\vee}) \to f_* \mathscr{L}'(\mathrm{V}'^{\vee})$ *s'identifie naturellement à* $\mathscr{L}(\mathrm{E}^{\vee}) \to \mathscr{L}(\mathrm{V}^{\vee})$.

De la suite exacte

$$0 \to \mathrm{K} \to \mathrm{E}^{\vee} \to \mathrm{V}'^{\vee} \to 0,$$

où K est l'orthogonal de V′, on tire une suite exacte

$$0 \to f_*\mathscr{L}'(\mathrm{K}) \to f_*\mathscr{L}'(\mathrm{E}^{\vee}) \to f_*\mathscr{L}'(\mathrm{V}'^{\vee}) \to \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{L}'(\mathrm{K}) \to \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{L}'(\mathrm{E}^{\vee}) \to \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{L}'(\mathrm{V}'^{\vee}) \to 0.$$

D'après le lemme 4, on a $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E}^{\vee}) = 0$, tandis que $f_* \mathscr{L}'(\mathrm{E}^{\vee})$ s'identifie à $\mathscr{L}(\mathrm{E}^{\vee})$ de façon que $f_* \mathscr{L}'(\mathrm{K})$ s'identifie à $\mathscr{L}(\mathrm{K}_1)$, où K_1 est le plus grand sous-espace de K stable par P; comme K_1 est l'orthogonal de V, on voit qu'il suffit de prouver maintenant que $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{K}) = 0$; mais, d'après le lemme 4, on a $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{K}_1) = 0$, puisque K_1 est stable par P. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{R}^1 f_* \mathscr{L}'(\mathrm{K}/\mathrm{K}_1) = 0$; comme K/K_1 est le dual de V/V′, ce dernier fait résulte du lemme 5.

2.11. Pour appliquer la proposition 10, nous allons étudier les représentations de P, en supposant à partir de maintenant que *k est de caractéristique* 0. Notons U^+, U^-, U^0, E^+, E^- les algèbres enveloppantes respectives de B^u, B'^u, $\mathrm{B}^u \cap \mathrm{B}'^u$, U_α, $\mathrm{U}_{-\alpha}$. On a

$$\mathrm{U}^{\pm} = \mathrm{U}^0 \otimes \mathrm{E}^{\pm}. \tag{7}$$

Le lemme et la proposition qui suivent m'ont été appris par D.-N. Verma. Posons

$$\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{Lie}(i)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X}_{-\alpha} = \mathrm{Lie}(i)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_\alpha = \mathrm{Lie}(i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

LEMME 6. — *Soit* I *un idéal à gauche de codimension finie de* U^0 *stable par* $\mathrm{ad}(\mathrm{X}_{-\alpha})$ *et* $\mathrm{ad}(\mathrm{H}_\alpha)$, *et soit n un entier* $\geqq 0$. *Soient* F *l'espace vectoriel quotient* $\mathrm{U}^-/(\mathrm{U}^-.\mathrm{I}+\mathrm{U}^-\mathrm{X}_{-\alpha}^{n+1})$, *et f_0 la classe de* 1. *Il existe une unique représentation τ de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}_2$ *dans* F *pour laquelle*

$$\tau(\mathrm{X}_{-\alpha})f = \mathrm{X}_{-\alpha}f, \quad f \in \mathrm{F}, \qquad \tau(\mathrm{X}_\alpha)f_0 = 0, \qquad \tau(\mathrm{H}_\alpha)f_0 = nf_0.$$

Notons d'abord la formule

$$\mathrm{ad}(\mathrm{X}_\alpha)\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} = \mathrm{X}_{-\alpha}^{(m-1)}(\mathrm{H}_\alpha - m + 1), \qquad m \in \mathbf{Z}, \tag{8}$$

où

$$\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} = \mathrm{X}_{-\alpha}^m/m! \quad \text{si } m \geqq 0, \qquad \mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} = 0 \quad \text{si } m < 0.$$

Soient x et h les deux applications linéaires de U^- dans U^- définies par

$$x(u\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)}) = [\mathrm{X}_\alpha, u]\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} + (n-m+1)\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m-1)}, \tag{9}$$

$$h(u\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)}) = [\mathrm{H}_\alpha, u]\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} + (n-2m)u\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)}, \tag{10}$$

où u parcourt U^0 et m parcourt $\mathbf{N}$. D'après (8), on a pour tout $v \in \mathrm{U}^-$:

$$x(v) \equiv [\mathrm{X}_\alpha, v] \bmod \mathrm{U}^-(\mathrm{H}_\alpha - n), \tag{11}$$

tandis que

$$h(v) = [\mathrm{H}_\alpha, v] + nv = \mathrm{H}_\alpha v - v(\mathrm{H}_\alpha - n) \equiv \mathrm{H}_\alpha v \bmod \mathrm{U}^-(\mathrm{H}_\alpha - n). \tag{12}$$

Notant x_- la multiplication à gauche par $\mathrm{X}_{-\alpha}$ dans U^-, on tire sans difficultés de (11) et (12) les formules

$$[h, x] = 2x, \qquad [h, x_-] = -2x_-, \qquad [x, x_-] = h;$$

il existe donc une représentation τ de $\mathfrak{sl}_2$ dans U^- telle que

$$\tau(\mathrm{X}_{-\alpha}) = x_-, \qquad \tau(\mathrm{X}_\alpha) = x, \qquad \tau(\mathrm{H}_\alpha) = h$$

et on a

$$\tau(\mathrm{X}_\alpha)(1) = 0, \qquad \tau(\mathrm{H}_\alpha)(1) = n.1.$$

Il est clair que $\mathrm{U}^-\mathrm{I}$ et $\mathrm{U}^-\mathrm{X}_{-\alpha}^{n+1}$ sont stables par $\mathrm{X}_{-\alpha}$ et H_α, montrons qu'ils sont stables par X_α; pour $\mathrm{U}^-\mathrm{X}_{-\alpha}^{n+1}$, cela résulte de la formule (9), puisque $\mathrm{U}^-\mathrm{X}_{-\alpha}^{n+1}$ est engendré par les $u\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)}$ pour $m \geqq n+1$; soient $u \in \mathrm{I}$ et $m \in \mathbf{N}$, on a modulo $\mathrm{U}^-(\mathrm{H}_\alpha - n) + \mathrm{U}^-.\mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} x(\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)}u) &\equiv [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)}]u + \mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)}[\mathrm{X}_\alpha, u] \quad [\text{formule } (11)] \\ &\equiv \mathrm{X}_{-\alpha}^{(m-1)}(\mathrm{H} - m + 1)u \qquad (\text{puisque } [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{I}] \subset \mathrm{I}) \\ &\equiv \mathrm{X}_{-\alpha}^{(m-1)}(n - m + 1)u \qquad (\text{puisque } [\mathrm{H}_\alpha - n, \mathrm{I}] \subset \mathrm{I}) \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Cela prouve l'existence de τ; l'unicité est immédiate.

Remarque. — On a par construction, pour $u \in \mathrm{U}^0$ et $m \in \mathbf{N}$,

$$\tau(\mathrm{X}_\alpha)(u\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} f_0) = \mathrm{ad}(\mathrm{X}_\alpha)(u)\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} f_0 + (n-m+1)\,u\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m-1)} f_0;$$

par récurrence sur l'entier $r \geqq 0$, on en tire

$$\tau(\mathrm{X}_\alpha^{(r)})(u\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m)} f_0) = \sum_s \binom{n-m+1}{s} \frac{\mathrm{ad}(\mathrm{X}_\alpha)^{r-s}}{(r-s)\,!}(u)\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{(m-s)} f_0. \tag{13}$$

Supposons alors donné un sous-groupe $\mathrm{U}_{\mathbf{Z}}^0$ de U^0, stable sous les $\mathrm{ad}(\mathrm{X}_\alpha)^m/m!$ et les $\mathrm{ad}(\mathrm{X}_{-\alpha})^m/m!$, alors le sous-groupe $\mathrm{F}_{\mathbf{Z}}$ de F engendré par les $u\,\mathrm{X}_\alpha^{(m)} f_0$, $u \in \mathrm{U}_{\mathbf{Z}}^0$, $m \in \mathbf{N}$, est aussi stable par les $\tau(\mathrm{X}_\alpha)^m/m!$ et les $\tau(\mathrm{X}_{-\alpha})^m/m!$.

PROPOSITION 11. — *Soient* $\mathrm{P} \to \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *une représentation de* P, *et* $e_0 \in \mathrm{E}$ *un vecteur propre sous* T, *non nul, de poids* λ, *stable par* U_α. *Posons* $n = \langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \geqq 0$; *alors l'annulateur de* e_0 *dans* U^- *est*

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}^-}(e_0) = \mathrm{U}^-\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}^0}(e_0) + \mathrm{U}^-\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{n+1}.$$

Posons

$$\mathrm{I} = \mathrm{U}^-\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}^0}(e_0) + \mathrm{U}^-\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{n+1} \subset \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}^-}(e_0);$$

posons $\mathrm{F} = \mathrm{U}^-/\mathrm{I}$ et soit $f_0 \in \mathrm{F}$ la classe de 1. Soit $p : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ l'application canonique; d'après le lemme 6, on peut munir F d'une structure de $\mathfrak{sl}_2$-module de façon que p soit un homomorphisme de $\mathfrak{sl}_2$-modules. Le $\mathfrak{sl}_2$-module E est engendré par l'orbite de e_0 sous $\mathrm{B}^u \cap \mathrm{B}'^u$, donc aussi par le sous-espace $\mathrm{U}^0\,e_0$; de même le $\mathfrak{sl}_2$-module F est engendré par $\mathrm{U}^0 f_0$; puisque l'annulateur de f_0 dans U^0 contient l'annulateur de e_0, l'application p induit une bijection de $\mathrm{U}^0 f_0$ sur $\mathrm{U}^0\,e_0$. Les $\mathfrak{sl}_2$-modules E et F étant semi-simples, il en résulte que p est bijectif, d'où la proposition.

2.12. Rappelons que k est supposé de caractéristique 0. Fixons les notations suivantes :

(14) $\begin{cases} \rho : \mathrm{P} \to \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \text{ est une représentation linéaire de P, } e \in \mathrm{E} \text{ est un vecteur propre} \\ \quad \text{de T non nul, fixe par } \mathrm{U}_{-\alpha}. \text{ On note V (resp. V') le sous espace de E engendré} \\ \quad \text{par } \mathrm{B}e \text{ (resp. } \mathrm{B}'e). \end{cases}$

Notons d'abord que V est aussi le plus petit sous-espace stable par P contenant V′. Soit λ le poids de e, posons $n = -\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \geqq 0$; on a $\mathrm{X}_\alpha^n\,e \neq 0$, $\mathrm{X}_\alpha^{n+1}\,e = 0$. Posons $v = \mathrm{X}_\alpha^n\,e/n!$, alors v est non nul, de poids $\lambda + n\,\alpha$ sous T et fixe par U; de plus $e = \pm\,\mathrm{X}_{-\alpha}^n\,v/n!$, donc tout sous-espace de E stable par P contenant e (resp. v) contient v (resp. e). Il s'ensuit que $\mathrm{V} = \mathrm{U}^-\,v$, puisque la droite kv est stable sous $\mathrm{T}.\mathrm{U}_\alpha$. D'après la proposition 11, l'application $u \mapsto uv$ induit une bijection

$$\mathrm{U}^-/(\mathrm{U}^-\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}^0}(v) + \mathrm{U}^-\,\mathrm{X}_{-\alpha}^{n+1}) \to \mathrm{V};$$

d'autre part, on a $\mathrm{V}' = \mathrm{U}^-\,e = \mathrm{U}^-\,\mathrm{X}_{-\alpha}^n\,v$, d'où une bijection

$$\mathrm{U}^-/(\mathrm{U}^-\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}^0}(v) + \mathrm{U}^-\,\mathrm{X}_{-\alpha}^n) \to \mathrm{V}/\mathrm{V}', \tag{15}$$

compatible avec l'action de U^- sur les deux membres; si $\bar{v}$ est la classe de v dans V/V', on a

(16) $$\rho(X_\alpha)\bar{v} = 0, \qquad \rho(H_\alpha)\bar{v} = n\bar{v}.$$

Si $n = 0$, alors $V/V' = 0$; si $n > 0$, on peut appliquer le lemme 6 au premier membre de (15); il existe donc une représentation τ de $\mathfrak{sl}_2$ dans V/V' telle que

(17) $$\tau(X_\alpha)\bar{v} = 0, \qquad \tau(H_\alpha)\bar{v} = (n-1)\bar{v}, \qquad \tau(X_{-\alpha}) = \rho(X_{-\alpha}).$$

Comparant (16) et (17), on obtient :

Il existe une représentation τ de $\mathbf{SL}_2$ dans V/V' telle que

(18) $$\tau\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \rho(x_{-\alpha}(a)), \qquad \tau\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix} = z^{-1}\rho(\alpha^\vee(z)).$$

On peut alors appliquer la proposition 10, et on obtient :

(19) *On a $R^1 f_* \mathscr{L}'(V'^\vee) = 0$, et le morphisme $f_*\mathscr{L}'(E^\vee) \to f_*\mathscr{L}'(V'^\vee)$ s'identifie naturellement à $\mathscr{L}(E^\vee) \to \mathscr{L}(V^\vee)$.*

2.13. Supposons donné un sous-groupe $U^0_{\mathbf{Z}}$ de U^0 stable sous les ad $(X_\alpha)^m/m!$ et les ad $(X_{-\alpha})^m/m!$; notons $V_{\mathbf{Z}}$ le sous-groupe de V engendré par les $u\, X^m_{-\alpha}\, v/m!$, où u décrit $U^0_{\mathbf{Z}}$ et m est un entier $\geqq 0$, et notons $(V/V')_{\mathbf{Z}}$ l'image de $V_{\mathbf{Z}}$ dans V/V'; alors, d'après la remarque suivant la proposition 10 :

(20) $(V/V')_{\mathbf{Z}}$ *est stable sous les* $\tau(X_\alpha)^m/m!$ *et les* $\tau(X_{-\alpha})^m/m!$.

3. Schémas de Bott-Samelson

3.1. Dans ce paragraphe et les deux suivants, on désigne par k un anneau (essentiellement $\mathbf{Z}$ ou un corps), par G un k-groupe réductif déployable, par T un tore maximal déployé de G, par B et $\tilde{B}$ deux groupes de Borel de G tels que $B \cap \tilde{B} = T$. On munit le groupe des caractères M de T de l'ordre partiel dans lequel les racines de B sont positives; on note R l'ensemble des racines de G relativement à T, R_+ l'ensemble des racines de B, S l'ensemble des racines simples correspondantes et W le groupe de Weyl de G relativement à T. Pour tout $\alpha \in R$, on note $s_\alpha \in W$ la symétrie relative à α, et on pose

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \alpha, \qquad \lambda \in M.$$

On note $l(w)$ la longueur d'un élément w de W relativement au système générateur $(s_\beta)_{\beta \in S}$ ([2], p. 1), et w_0 l'élément de W de longueur maximale; on a

$$l(w_0) = N = \frac{1}{2}|R| = \dim(G/B), \qquad w_0(R_+) = -R_+,$$

et, par [2], p. 158, corollaire 3,

(1) $$l(w_0 w) = N - l(w), \qquad w \in W.$$

3.2. Soit Bor (G) l'espace des sous-groupes de Borel de G, sur lequel G opère à gauche par conjugaison; on a des isomorphismes compatibles avec les opérations de G :

$$G/B \xrightarrow{f} \operatorname{Bor}(G) \xleftarrow{\tilde{f}} G/\tilde{B},$$

où, si g est un point de G, on a

$$f(g\,B/B) = g\,B\,g^{-1}, \qquad \tilde{f}(g\,\tilde{B}/\tilde{B}) = g\,\tilde{B}\,g^{-1}.$$

Soit $n_0 \in G(k)$ tel que $\operatorname{Int}(n_0)\,T = T$, $\operatorname{Int}(n_0)\,B = \tilde{B}$ (n_0 est donc un représentant de w_0), et soit $\theta : G \to G$ l'isomorphisme $x \mapsto x\,n_0$; on a

$$(2) \qquad \theta(gx\tilde{b}) = g\,\theta(x)\operatorname{Int}(n_0)^{-1}(\tilde{b}),$$

pour tous points g et x de G, $\tilde{b}$ de $\tilde{B}$; par passage aux quotients, θ donne donc l'isomorphisme composé

$$\bar{\theta} = f^{-1} \circ \tilde{f} : \quad G/\tilde{B} \to G/B.$$

Si w est un élément de W, identifié à un ensemble de classes latérales modulo T, on pose

$$X_w = \overline{B\,w\,B/B} \subset G/B,$$
$$Y_w = \overline{B\,w\,\tilde{B}/\tilde{B}} \subset G/\tilde{B},$$

où la barre désigne l'opération d'adhérence schématique (adhérence usuelle lorsque k est réduit), ce sont des sous-schémas fermés de G/B et $G/\tilde{B}$ respectivement, les « *variétés de Schubert généralisées* »; on a ([4], p. 13-11, cor. 2) :

$$(3) \qquad \dim X_w = \operatorname{codim} Y_w = l(w).$$

On a aussitôt $f(X_{ww_0}) = \tilde{f}(Y_w)$, donc

$$(4) \qquad \bar{\theta}(Y_w) = X_{ww_0}, \qquad w \in W.$$

3.3. Soient $w, w' \in W$; on a les implications immédiates suivantes :

$$(4) \qquad (w'\,B/B \in X_w(k)) \;\Rightarrow\; (X_{w'} \subset X_w) \;\Rightarrow\; [l(w') < l(w) \text{ ou } w' = w].$$

Le lemme suivant est extrait de [5] :

LEMME 1 ([5]) : (*a*) *Soient* $w, w' \in W$ *avec* $l(w) \leqq l(w')$ *et* $w' \neq w$; *alors* $X_w \cap w_0\,X_{w_0 w'} = \varnothing$.

(*b*) *L'intersection* $X_w \cap w_0\,X_{w_0 w}$ *est réduite à la section* $w\,B/B$.

Pour démontrer (*a*), on peut supposer que k est un corps; supposons $X_w \cap w_0\,X_{w_0 w} \neq \varnothing$ et soit A une composante irréductible de cette intersection. Alors A est non vide, propre sur k et stable par T, donc contient un point fixe de T d'après le théorème de Borel; un tel point fixe est de la forme $w''\,B/B$, où $w'' \in W$. On a alors $w''\,B/B \in X_w$, $w_0\,w''\,B/B \in X_{w_0 w'}$, ce qui d'après (4) implique

$$[l(w'') < l(w) \text{ ou } w'' = w] \qquad \text{et} \qquad [l(w_0\,w'') < l(w_0\,w') \text{ ou } w'' = w'];$$

d'après (1), cela implique

$$[l(w') < l(w) \text{ ou } w = w' = w''],$$

d'où (*a*). De plus, si $w = w'$, ce qui précède montre que A contient nécessairement w B/B. Pour prouver (*b*), il suffit donc de démontrer que $X_w \cap w_0 X_{w_0 w}$ est réduit à la section w B/B, au voisinage de cette section; mais si on pose $B_w = w \tilde{B} w^{-1}$, le morphisme $b \mapsto bw$ B/B induit des immersions ouvertes :

$$B_w \to G/B, \qquad B_w \cap B \to X_w, \qquad B_w \cap \tilde{B} \to w_0 X_{w_0 w},$$

et on conclut par le fait que la multiplication dans B_w induit un isomorphisme

$$(B_w \cap B) \times (B_w \cap \tilde{B}) \to B_w$$

(*cf.* [4], exp. 13 pour tout ce qui précède).

On en tire immédiatement :

PROPOSITION 1. — *Supposons que k soit un corps et soient* $w, w' \in W$ *avec* $l(w) + l(w') \leqq N$:

(*a*) ([5]) *Dans l'anneau de Chow* A (G/B), *on a*

$$[X_w].[X_{w'}] = \delta_{w,\, w_0 w'} [X_e],$$

où $[X_e]$ *est la classe d'un point.*

(*b*) *Dans l'anneau de Grothendieck* K (G/B), *on a*

$$\mathrm{cl}(\mathcal{O}_{X_w}).\mathrm{cl}(\mathcal{O}_{X_{w'}}) = \delta_{w,\, w_0 w'} \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{X_e}).$$

(*c*) *On a*

$$\chi(X_w, \mathcal{O}_{X_{w'}}) = \delta_{w,\, w_0 w'}.$$

Il suffit en effet de remarquer que

$$[w_0 X_{w'}] = [X_{w'}] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{w_0 X_{w'}}) = \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{X_{w'}})$$

puisque les opérations de G dans A (X/B) et K (X/B) sont triviales (*voir* par exemple [8], p. 506, lemme 1).

COROLLAIRE : (*a*) ([5]) A (G/B) *est un* **Z**-*module libre de base* $([X_w])_{w \in W}$. *Soit* $\nu : A(G/B) \to A^N(G/B)$ *la projection évidente. Pour tout* $u \in A(G/B)$, *les relations*

$$\left(u = \sum n_w [X_w]\right) \qquad \text{et} \qquad (\nu(u.[X_w]) = n_{w_0 w}[X_e],\ w \in W)$$

sont équivalentes.

(*b*) K (G/B) *est un* **Z**-*module libre de base* $(\mathrm{cl}(\mathcal{O}_{X_w}))_{w \in W}$. *Les formes linéaires* $(u \mapsto \chi(X_w, u))_{w \in W}$ *forment une base du* **Z**-*module dual.*

Cela résulte de la proposition, et du fait que A (G/B) est engendré par les $[X_w]$, et K (G/B) est engendré par les $\mathrm{cl}(\mathcal{O}_{X_w})$, fait qui résulte aussitôt de l'existence de la décomposition cellulaire $G/B = \bigcup_{w \in W} B w B/B$ (*cf.* [7], p. 431, prop. 7).

3.4. A tout caractère λ de T, associons le module inversible (G-linéarisé) $\mathscr{L}(\lambda)$ [resp. $\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)$] sur G/B (resp. $G/\tilde{B}$) associé à la fibration $G \to G/B$ (resp. $G \to G/\tilde{B}$) et au caractère de B (resp. $\tilde{B}$) défini par λ (*cf.* 1.5). L'isomorphisme $\bar{\theta} : G/\tilde{B} \to G/B$ transforme $\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)$ en $\mathscr{L}(w_0(\lambda))$ [formule (2)]. Rappelons que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\lambda))$ est l'espace des fonctions φ sur G telles que $\varphi(xb) = \varphi(x)\lambda(b)^{-1}$, et que G y opère par $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$; de même pour $H^0(G/\tilde{B}, \tilde{\mathscr{L}}(\lambda))$; d'après ce qui précède les représentations de G dans $H^0(G/\tilde{B}, \tilde{\mathscr{L}}(\lambda)$ et $H^0(G/B, \mathscr{L}(w_0(\lambda)))$ sont isomorphes. On a alors le lemme bien connu suivant :

LEMME 2. — *Supposons que k soit un corps, posons*

$$E_\lambda = H^0(G/\tilde{B}, \tilde{\mathscr{L}}(\lambda)) \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(w_0(\lambda))).$$

Supposons $E_\lambda \neq 0$. *Alors* E_λ *possède une unique droite invariante par* B^u, *cette droite est formée des éléments de poids* λ *sous* T. *Pour tout poids* μ *de* T *dans* E, *on a* $w_0(\lambda) \leqq \mu \leqq \lambda$. *Le dual* $E_\lambda^\vee$ *de* E_λ *est engendré comme* G-*module par ses éléments de poids* $-\lambda$.

Puisque $E_\lambda \neq 0$, il possède un élément non nul φ invariant par B^u, et on a $\varphi(utu') = \lambda(t)^{-1}$ pour tous points u, t, u' de B^u, T, B'^u respectivement; comme $B^u.T.B'^u$ est un ouvert de G, deux telles fonctions sont proportionnelles. Si ψ est un vecteur propre de T, pour le poids μ, on a

$$\mu(t)^{-1}\psi(u) = \psi(tuu') = \psi(tut^{-1}.tu') = \lambda(t)^{-1}\psi(tut^{-1}),$$

donc $\psi(tut^{-1}) = \psi(u)\lambda(t)\mu(t)^{-1}$; cela montre que $\lambda - \mu$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des racines positives, donc $\mu \leqq \lambda$, et que $\lambda = \mu$ si et seulement si ψ est constante sur B^u. Cela implique les deux premières assertions de la proposition, ainsi que l'inégalité $\mu \leqq \lambda$ pour tout poids μ de E_λ; comme $w_0(\mu)$ est aussi un poids de E_λ; on a $w_0(\mu) \leqq \lambda$, donc $\mu \geqq w_0(\lambda)$, d'où la troisième assertion. Enfin, pour tout sous-espace non nul V de E_λ, on a $E_\lambda^\lambda \subset V$, puisque B^u possède des invariants non nuls dans V, prenant pour V l'orthogonal d'un sous-module de $E_\lambda^\vee$, on en déduit la dernière assertion.

Le plus grand poids de E_λ *est donc* λ. D'autre part, comme $s_\alpha(\lambda) \leqq \lambda$ pour tout $\lambda \in R$ d'après le lemme, on a $(E_\lambda \neq 0) \Rightarrow (\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \geqq 0, \alpha \in S)$; la réciproque est vraie, et bien connue [*voir* par exemple ci-dessous 4.3, formule (5)].

3.5. Choisissons une décomposition réduite de w_0 :

$$w_0 = s_{\beta_1} s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_N}, \qquad \beta_i \in S, \tag{5}$$

et posons

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = s_{\beta_1}(\beta_2), \qquad \ldots, \qquad \alpha_N = s_{\beta_1} s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_{N-1}}(\beta_N). \tag{6}$$

Alors les α_i sont tous distincts et décrivent R_+ ([2]), p. 158, cor. 2). Notons w_i la symétrie s_{α_i}; on a

$$w_1 = s_{\beta_1}, \qquad w_2 = s_{\beta_1} s_{\beta_2} s_{\beta_1}, \qquad \ldots, \qquad w_N = s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_{N-1}} s_{\beta_N} s_{\beta_{N-1}} \ldots s_{\beta_1}, \tag{7}$$

donc

(8) $$w_1 w_2 \dots w_i = s_{\beta_i} s_{\beta_{i-1}} \dots s_{\beta_1}, \qquad 1 \leqq i \leqq \mathrm{N},$$

et en particulier

(9) $$w_1 \dots w_{\mathrm{N}} = s_{\beta_{\mathrm{N}}} \dots s_{\beta_1} = w_0^{-1} = w_0.$$

Dans toute la suite, tous les produits indexés par une partie de R_+ ou de $[1, \mathrm{N}]$ seront pris dans l'ordre $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathrm{N}})$ ou $(1, 2, \dots, \mathrm{N})$. Pour $\mathrm{K} \subset [1, \mathrm{N}]$, posons

$$w_{\mathrm{K}} = \prod_{i \in \mathrm{K}} w_i, \qquad s_{\mathrm{K}} = \prod_{i \in \mathrm{K}} s_{\beta_i}.$$

PROPOSITION 2. — *On a* $w_{\mathrm{K}}\, w_0 = s_{[1, \mathrm{N}]-\mathrm{K}}$.

Cela est clair si $\mathrm{K} = \varnothing$; si $\mathrm{K} \neq \varnothing$, soit i le plus petit élément de K et posons $\mathrm{L} = \mathrm{K} - \{ i \}$; nous pouvons supposer par récurrence que $w_{\mathrm{L}}\, w_0 = s_{[1, \mathrm{N}]-\mathrm{L}}$. Alors

$$\begin{aligned} s_{[1, \mathrm{N}]-\mathrm{K}} &= s_{[1, i-1]}\, s_{[i, \mathrm{N}]-\mathrm{K}} = s_{[1, i-1]}\, s_{[i+1, \mathrm{N}]-\mathrm{L}} \\ &= s_{[1, i-1]}\, s_{\beta_i}\, s_{[1, i-1]}^{-1}\, s_{[1, i]}\, s_{[i+1, \mathrm{N}]-\mathrm{L}} \\ &= w_i\, s_{[1, \mathrm{N}]-\mathrm{L}} = w_i\, w_{\mathrm{L}}\, w_0 = w_{\mathrm{K}}\, w_0. \end{aligned}$$

COROLLAIRE : (*a*) *On a* $l(w_k) \geqq |\mathrm{K}|$.

(*b*) *On a* $l(w_{[1, i]}) = i$, $l(w_{[i+1, \mathrm{N}]}) = \mathrm{N} - i$.

(*c*) *Soit* $w = w_{[1, i]}$. *Alors* $l(ww_k) > l(w)$ *si* $i < k \leqq \mathrm{N}$, *et* $l(ww_k) < l(w)$ *si* $1 \leqq k \leqq i$.

En effet,
$$l(w_{\mathrm{K}}) = \mathrm{N} - l(w_{\mathrm{K}}\, w_0) = \mathrm{N} - l(s_{[1, \mathrm{N}]-\mathrm{K}}) \geqq \mathrm{N} - (\mathrm{N} - |\mathrm{K}|) = |\mathrm{K}|,$$

d'où (*a*); d'après (8), on a $l(w_{[1, i]}) \leqq i$, d'où $l(w_{1, i}) = i$; d'autre part $w_{[i+1, \mathrm{N}]} = w_{[1, i]}^{-1}\, w_0$, d'où (*b*). Si $k > i$, alors $l(w_{[1, i]}\, w_k) \geqq i+1$ d'après (*a*) et (*b*); si $1 \leqq k \leqq i$, on a

$$w_{[1, i]}\, w_k = s_{\beta_i} \dots s_{\beta_{k+1}}\, s_{\beta_{k-1}} \dots s_{\beta_1},$$

donc $l(w_{[1, i]}\, w_k) \leqq i - 1$.

LEMME 3. — *Soit* $w \in \mathrm{W}$.

(*a*) *On peut choisir la décomposition* (5) *de façon que* $w = w_{[1, i]}$, $i = l(w)$. *On peut même imposer que* $s_{\beta_i} \dots s_{\beta_1}$ *et* $s_{\beta_{i+1}} \dots s_{\beta_{\mathrm{N}}}$ *soient des décompositions réduites de* w *et* ww_0 *respectivement, fixées à l'avance.*

(*b*) *On peut choisir la décomposition* (5) *de façon que* $w = w_{[i+1, \mathrm{N}]}$, $i = \mathrm{N} - l(w)$.

(*c*) *Soit* $\alpha \in \mathrm{S}$ *tel que* $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$; *on peut choisir* (5) *de façon que* $w = w_{[1, i]}$, $i = l(w)$, *que* (8) *soit une décomposition réduite de* w *donnée à l'avance et que* $s_\alpha = w_{\mathrm{N}}$.

Soit $w = s_{\beta_i}\, s_{\beta_{i-1}} \dots s_{\beta_1}$ une décomposition réduite de w; alors $l(ww_0) = \mathrm{N} - i$ et dans le cas (*c*) :

$$l(ww_0\, s_{w_0(\alpha)}) = l(ws_\alpha\, w_0) = \mathrm{N} - l(ws_\alpha) = \mathrm{N} - l(w) - 1 = l(ww_0) - 1;$$

choisissons une décomposition réduite de ww_0 :

$$ww_0 = s_{\beta_{i+1}} \ldots s_{\beta_N}$$

telle de plus dans le cas (*c*) que $s_{\beta_N} = s_{w_0(\alpha)}$ [remarquer que $-w_0(\alpha) \in S$]. Alors la décomposition $w_0 = s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_N}$ convient, d'où (*a*) et (*c*); enfin, (*b*) se déduit de (*a*) appliqué à $w^{-1} w_0$.

3.6. A partir de maintenant, nous fixons la décomposition (5), et nous posons

$$\begin{aligned}
R_0 &= \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} = R_+,\\
R_1 &= w_1(R_0) = \{-\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\},\\
R_2 &= w_2(R_1) = w_2 w_1(R_0) = \{-\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_i &= w_i(R_{i-1}) = w_i \ldots w_1(R_0) = \{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_N\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_N &= w_N(R_{N-1}) = w_0(R_0) = \{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_N\} = -R_+.
\end{aligned}$$

Chaque R_i, $0 \leqq i \leqq N$, est un système de racines positives; pour $1 \leqq i \leqq N$, α_i est une racine simple de R_{i-1}, $-\alpha_i$ est une racine simple de R_i, et

$$R_{i-1} \cup R_i = \{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_{i-1}, \pm\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_N\}$$

est une partie parabolique de R à $N+1$ éléments.

Soit B_i, $0 \leqq i \leqq N$, le groupe de Borel défini par R_i (on a donc $B_0 = B$, $B_N = \tilde{B}$) et soit P_i, $1 \leqq i \leqq N$, le sous-goupe parabolique de G défini par $R_i \cup R_{i-1}$, c'est-à-dire engendré par B_i et B_{i-1}. On a une chaîne d'inclusions de codimension 1 :

$$B_0 \subset P_1 \supset B_1 \subset P_2 \supset \ldots \supset B_{i-1} \subset P_i \supset B_i \subset \ldots \supset B_{N-1} \subset P_N \supset B_N.$$

Si, pour toute racine α, on note U_α le groupe unipotent de dimension 1 correspondant à α, alors

$$B_{i-1} = U_{\alpha_i}.(B_{i-1} \cap B_i), \qquad B_i = (B_{i-1} \cap B_i).U_{-\alpha_i},$$

et P_i est réunion disjointe de l'ouvert

$$B_{i-1} B_i = U_{\alpha_i}.B_i = B_{i-1}.U_{-\alpha_i}$$

et du sous-schéma fermé

$$w_i B_i = B_{i-1} w_i.$$

3.7. On peut alors appliquer N fois la construction élémentaire du paragraphe 2, à partir du schéma $B_0 = X_0$ sur lequel B_0 opère à droite et à gauche, et on obtient des schémas

$$X_0 = B_0, \qquad X_1 = B_0 \times^{B_0} P_1 = P_1, \qquad X_2 = B_0 \times^{B_0} P_1 \times^{B_1} P_2 = P_1 \times^{B_1} P_2, \qquad \ldots,$$
$$X_i = X_{i-1} \times^{B_{i-1}} P_i = P_1 \times^{B_1} P_2 \times^{B_2} \ldots \times^{B_{i-1}} P_i,$$

jusqu'à

$$X_N = P_1 \times^{B_1} P_2 \times^{B_2} \ldots \times^{B_{N-1}} P_N,$$

et on a un diagramme de projections et de sections, toutes équivariantes sous $B = B_0$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X_0 & & X_1 & & & & X_{i-1} & & X_i & & & & X_N \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
X_0/B_0 & \underset{\sigma_1}{\overset{f_1}{\leftrightarrows}} & X_1/B_1 & \leftrightarrows & \ldots & \leftrightarrows & X_{i-1}/B_{i-1} & \underset{\sigma_i}{\overset{f_i}{\leftrightarrows}} & X_i/B_i & \leftrightarrows & \ldots & \underset{\sigma_N}{\overset{f_N}{\leftrightarrows}} & X_N/B_N .
\end{array}$$

Le schéma X_i/B_i est donc le quotient de $P_1 \times \ldots \times P_i$ par l'action à droite de $B_1 \times \ldots \times B_i$ donnée par

$$(p_1, p_2, \ldots, p_i)(b_1, b_2, \ldots, b_i) = (p_1 b_1, b_1^{-1} p_2 b_2, \ldots, b_{i-1}^{-1} p_i b_i), \tag{10}$$

la projection f_i applique la classe de $(p_1, \ldots, p_i)$ sur celle de $(p_1, \ldots, p_{i-1})$, et la section σ_i applique la classe de $(p_1, \ldots, p_{i-1})$ sur celle de $(p_1, \ldots p_{i-1}, n_i)$, où n_i est un représentant de w_i dans $P_i(k)$.

3.8. Le morphisme $P_1 \times \ldots \times P_N \to G$ défini par la multiplication dans G passe au quotient et définit un morphisme

$$\psi : \quad P_1 \times^{B_1} P_2 \times \ldots \times^{B_{N-1}} P_N \to G$$

qui est (P_1, P_N)-*équivariant* [c'est-à-dire tel que $\psi(p_1 x p_N) = p_1 \psi(x) p_N$], et en particulier $(B, \tilde{B})$-équivariant, d'où un diagramme cartésien de morphismes B-équivariants :

$$\begin{array}{ccc}
X_N = P_1 \times^{B_1} \ldots \times^{B_{N-1}} P_N & \xrightarrow{\ \psi\ } & G \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_N/B_N = P_1 \times^{B_1} \ldots \times^{B_{N-1}} P_N/B_N & \xrightarrow{\bar{\psi}} & G/\tilde{B}
\end{array}$$

DÉFINITION 1. — *Le schéma* $Z = X_N/B_N$ *est appelé le schéma de Bott-Samelson de* G [*relatif aux choix de* T, B *et la décomposition* (5)], *et* $\bar{\psi}$ *est appelé le morphisme de Bott-Samelson de* G.

Notons que par construction, Z est à fibres irréductibles lisse et projectif. La projection canonique de $P_1 \times \ldots \times P_N$ sur Z induit un isomorphisme de $U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_N}$ sur un ouvert U de Z, et $\bar{\psi} \circ h$ induit un isomorphisme de $U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_N}$ sur l'ouvert $B\tilde{B}/\tilde{B}$ de $G/\tilde{B}$ (la « grosse cellule »), donc

PROPOSITION 2. — *Le morphisme de Bott-Samelson est birationnel.*

En fait, lorsque k n'est pas un corps, il convient d'être plus précis : le morphisme de Bott-Samelson est un « pseudo-isomorphisme ».

3.9. Pour $1 \leqq i \leqq N$, soit Z_i le sous-schéma fermé de Z défini par

$$Z_i = f_N^{-1} \ldots f_{i+1}^{-1}(\operatorname{Im} \sigma_i), \tag{11}$$

et, pour $K \subset [1, N]$, posons $Z_K = \bigcap_{i \in K} Z_i$. De manière plus concrète, un point de Z est dans Z_K s'il peut s'écrire comme la classe d'un point $(p_1, \ldots, p_N)$ de $P_1 \times \ldots \times P_N$ tel que x_i soit un représentant de w_i pour chaque $i \in K$. Les Z_i, $1 \leqq i \leqq N$, sont les « composantes irréductibles » (sans guillemets lorsque k est un corps), du complémentaire de l'ouvert U. On a aussitôt :

PROPOSITION 3. — *Chaque* Z_K *est un sous-schéma fermé lisse et à fibres irréductibles de* Z, *stable sous* B, *de codimension* $|K|$. *On a*

$$Z_{\varnothing} = Z, \qquad Z_{\{i\}} = Z_i, \qquad Z_K \cap Z_L = Z_{K \cup L}$$

et $Z_{[1, N]}$ *est une section de* Z.

3.10. Pour $K \subset [1, N]$, notons e_K le point de $Z(k)$ qui est l'image des points $(p_1, \ldots, p_N)$ de $P_1 \times \ldots \times P_N$ avec $p_i = 1$ pour $i \in K$ et p_i représentant w_i pour $i \in K$. On a

$$(e_L \in Z_K(k)) \iff (K \subset L), \tag{12}$$

$$\overline{\psi}(e_K) = w_K \tilde{B}/\tilde{B}. \tag{13}$$

LEMME 4. — *Les points fixes de* T *dans* Z *sont les* e_K, $K \subset [1, N]$.

En fait, l'énoncé précédent n'a de sens tel quel que si k est un corps; sinon il faudrait dire : pour qu'un point de Z dans une k-algèbre A soit fixe sous $T \otimes A$, il faut et il suffit qu'il soit localement sur Spec (A) égal à un des $(e_K)_A$. Soit n_i un représentant de w_i dans P_i pour chaque i, et soit $(p_1, \ldots, p_N)$ un point de $P_1 \times \ldots \times P_N$; pour que l'image de $(p_1, \ldots, p_N)$ dans Z soit fixe sous T, il faut et il suffit que l'on puisse trouver pour chaque point t de T des points $b_1(t), \ldots b_N(t)$ de $B_1, \ldots, B_N$ respectivement avec

$$tp_1 = p_1 b_1(t), \qquad p_2 = b_1(t)^{-1} p_2 b_2(t), \qquad \ldots, \qquad p_N = b_{N-1}(t)^{-1} p_N b_N(t).$$

Alors $\operatorname{Int}(p_1)^{-1}$ transporte T dans B_1; quitte à multiplier p_1 par un point convenable de B_1, on peut supposer que $p_1 = 1$ ou $p_1 = n_1$; alors $b_1(t)$ parcourt T lorsque t parcourt T, donc $\operatorname{Int}(p_2)^{-1}$ transporte T dans B_2, *et coetera.*

LEMME 5. — *Soient* $K \subset [1, N]$ et $w \in W$. *Pour que* $w \tilde{B}/\tilde{B}$ *soit contenu dans l'image de* Z_K *par* $\overline{\psi}$, *il faut et il suffit que* $w = w_L$ *avec* $K \subset L$.

Cela suffit d'après (12) et (13); inversement, on peut supposer que k est un corps; alors $\overline{\psi}^{-1}(w \tilde{B}/\tilde{B}) \cap Z_K$ est une partie fermée *non vide* de Z stable par T; d'après le lemme 4 et le théorème de Borel, elle contient donc l'un des e_L, mais on a forcément $K \subset L$ d'après (12), et on conclut par (13).

PROPOSITION 4. — *Soit* $K \subset [1, N]$; *on a*

$$\overline{\psi}(Z_K) = \bigcup_{L \supset K} B w_L \tilde{B}/\tilde{B}.$$

On peut supposer que k est un corps; alors $\overline{\psi}(Z_K)$ est une partie fermée de $G/\tilde{B}$, stable par B, donc réunion des orbites sous B qu'elle contient; ces orbites sont de la forme $B\, w\, \tilde{B}/\tilde{B}$, où $w \in W$, et il n'y a plus qu'à appliquer le lemme 5.

3.11. Théorème 1. — *Soit* $K \subset [1, N]$. *Alors :*

(*a*) *si* $l(w_K) \neq |K|$ (*i. e.* $> |K|$ *d'après* 3.5, *cor.*), *alors*

$$\dim \overline{\psi}(Z_K) < \dim(Z_K);$$

(*b*) *si* $l(w_K) = |K|$, *alors* $\overline{\psi}$ *induit un isomorphisme entre la* B-*orbite de* e_K *dans* Z *et la* B-*orbite* $B\, w_K\, \tilde{B}/\tilde{B}$ *de* $w_K\, \tilde{B}/\tilde{B}$ *dans* $G/\tilde{B}$, *et un morphisme birationnel de* Z_K *sur l'adhérence* Y_{w_K} *de* $B\, w_K\, \tilde{B}/\tilde{B}$.

On a, pour $K, L \subset [1, N]$ les relations

$$\operatorname{codim}(Z_K) = |K| \quad \text{(prop. 3)},$$

$$\operatorname{codim} B\, w_L\, \tilde{B}/\tilde{B} = l(w_L) \geqq |L| \quad [\text{formule (3) et 3.5, cor.}];$$

d'après la proposition 4, $\overline{\psi}(Z_K)$ est réunion de $B\, w_K\, \tilde{B}/\tilde{B}$ et d'une partie localement fermée de codimension $|K|+1$. On en conclut que l'égalité $\operatorname{codim} \overline{\psi}(Z_K) = K$ ne peut être atteinte que si $l(w_K) = |K|$, d'où (*a*). Si $l(w_K) = |K|$, alors $B\, w_K\, \tilde{B}/\tilde{B}$ est dense dans $\overline{\psi}(Z_K)$, donc $\overline{\psi}(Z_K) = Y_{w_K}$. De plus, on a alors

$$\dim B^u e_K \leqq \dim Z_K = \dim \overline{\psi}(Z_K) = \dim B^u w_K\, \tilde{B}/\tilde{B},$$

ce qui montre que le stabilisateur de e_K dans B^u est un sous-groupe du stabilisateur de $w_K\, \tilde{B}/\tilde{B}$, de même dimension; comme ce dernier est lisse et connexe, ils coïncident donc, ce qui prouve la première partie de (*b*); la seconde en résulte.

3.12. Il résulte donc de ce qui précède que, lorsque $l(w_K) = |K|$, $\overline{\psi}$ induit un *morphisme birationnel du schéma lisse* Z_K *sur la variété de Schubert* Y_{w_K}. Notons au passage que l'on a vu dans le lemme 3 que tout $w \in W$ peut s'écrire w_K avec $l(w_K) = |K|$ pour un choix convenable de la décomposition (5); en fait on peut même si l'on y tient choisir $K = [1, i]$ ou $K = [i+1, N]$; lorsque $K = [1, i]$, Z_K est la fibre de la projection naturelle de $Z = X_N/B_N$ sur X_i/B_i le long de la section image de $\sigma_i \ldots \sigma_1$; lorsque $K = [i+1, N]$, Z_K est l'image de X_i/B_i par l'immersion fermée $\sigma_N \ldots \sigma_{i+1}$.

3.13. Avant de passer à des applications plus sérieuses, notons que la proposition 4 permet de démontrer très facilement les résultats suivants, tirés de [5] :

Proposition 5 ([5]). — *Soient* $w, w' \in W$. (*a*) *Soit* $(s_1, \ldots, s_r)$ *une décomposition réduite de* w. *Pour que* $X_{w'} \subset X_w$, *il faut et il suffit que* w' *soit le produit d'une suite extraite de* $(s_1, \ldots, s_r)$.

(*b*) *Pour que* $X_{w'}$ *soit un sous-schéma de codimension* 1 *de* X_w, *il faut et il suffit que* w' *s'écrive* ws_α, *où* $\alpha \in R$ *et où* $l(ws_\alpha) = l(w)-1$.

(*c*) *Pour que* $Y_{w'}$ *soit un sous-schéma de codimension* 1 *de* Y_w, *il faut et il suffit que* w' *s'écrive* ws_α, *où* $\alpha \in R$ *et où* $l(ws_\alpha) = l(w)+1$.

Notons d'abord le lemme suivant :

LEMME 6. — *Soit* $K \subset [1, N]$ *avec* $l(w_K) = |K|$. *Pour que* $w \in W$ *soit tel que* $Y_w \subset Y_{w_K}$, *il faut et il suffit que* $w = w_L$ *avec* $K \subset L$.

En effet, si $l(w_K) = |K|$, on a $\overline{\psi}(Z_K) = Y_{w_K}$ (théorème 1), et le lemme n'est qu'une reformulation de la proposition 4.

Reprenons alors les notations de la proposition 5; d'après la formule (4), la relation $(X_{w'} \subset X_w)$ équivaut à $(Y_{w'w_0} \subset Y_{ww_0})$; d'après le lemme 3, où on échange les rôles de w et ww_0, on peut supposer que $ww_0 = w_{[1,i]}$ et que $(s_{\beta_{i+1}}, \ldots, s_{\beta_N}) = (s_1, \ldots, s_r)$; alors $(Y_{w'w_0} \subset Y_{ww_0})$ équivaut d'après le lemme 6 à l'existence d'un L contenant $[1, i]$ tel que $w'w_0 = w_L$, *i. e.* (prop. 2) que $w' = s_{[1,N]-L}$, c'est-à-dire que w' soit le produit d'une suite extraite de $(s_1, \ldots, s_r)$, d'où (*a*). On vérifie aussitôt que (*b*) et (*c*) sont équivalents. Pour démontrer (*c*), on peut supposer $w = w_{[1,i]}$; d'après le lemme 6, $Y_{w'}$ est un sous-schéma de codimension 1 dans Y_w si et seulement si $w' = w_L$ où $[1, i] \subset L$ et $l(w_L) = i+1$; comme $l(w_L) \geqq |L|$, cela implique nécessairement $L = [1, i] \cup \{k\}$, où $k > i$, et on conclut par 3.5, corollaire (*c*).

4. L'anneau de Chow de G/B

4.1. Dans ce qui suit, nous supposons que k est un *corps*. Nous utiliserons les homomorphismes caractéristiques des fibrations

$$X_N \to X_N/B_N, \qquad G \to G/\tilde{B} \qquad \text{et} \qquad G \to G/B,$$

que nous notons

$$\begin{aligned} c_Z &: \ \mathrm{S\,M} \to A(Z), \\ \tilde{c} &: \ \mathrm{S\,M} \to A(G/\tilde{B}), \\ c &: \ \mathrm{S\,M} \to A(G/B). \end{aligned}$$

Dans le diagramme

$$Z \xrightarrow{\overline{\psi}} G/\tilde{B} \xrightarrow{\overline{\theta}} G/B,$$

on a, en vertu du diagramme commutatif de 3.8 et de la formule (2) de 3.2, les relations

$$(1) \qquad c_Z = \overline{\psi}^* \circ \tilde{c}, \qquad \tilde{c} = \overline{\theta}^* \circ c \circ w_0, \qquad c = \overline{\theta}_* \circ \tilde{c} \circ w_0.$$

4.2. Appliquant N fois les propositions 3 et 4 du paragraphe 2, on obtient :

PROPOSITION 1. — *Soit* ξ_i *la classe dans* A (Z) *du cycle* Z_i, $1 \leqq i \leqq N$. *Alors la classe de* Z_K, $K \subset [1, N]$, *est* $\xi_K = \prod_{i \in K} \xi_i$, *les* ξ_K *forment une base du* **Z**-*module* A (Z) *et l'anneau* A (Z) *est le quotient de* $\mathbf{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ *par les relations*

$$\xi_1^2 = 0, \qquad \xi_2^2 + \langle \check{\alpha}_1, \alpha_2 \rangle \xi_1 \xi_2 = 0, \qquad \ldots,$$
$$\xi_N^2 + \langle \check{\alpha}_1, \alpha_N \rangle \xi_1 \xi_N + \ldots + \langle \check{\alpha}_{N-1}, \alpha_N \rangle \xi_{N-1} \xi_N = 0.$$

L'homomorphisme caractéristique $c_Z : \mathsf{S}\,\mathrm{M} \to \mathrm{A}(\mathrm{Z})$ *est donné par*

$$c_Z(u) = \sum_{\mathrm{K} \subset [1,\,\mathrm{N}]} \varepsilon\Delta_{\mathrm{K}}(u)\,\xi_{\mathrm{K}}$$

où $\varepsilon : \mathsf{S}\,\mathrm{M} \to \mathbf{Z}$ *est l'augmentation canonique et où*

$$\Delta_{\mathrm{K}} = \prod_{i \in \mathrm{K}} (\alpha_i^{-1}(\mathrm{Id} - w_i)).$$

4.3. D'autre part, d'après 3.11, théorème 1, on a

$$\text{(2)} \qquad \bar{\psi}_*(\xi_{\mathrm{K}}) = 0 \quad \text{si } l(w_{\mathrm{K}}) \neq |\mathrm{K}|, \qquad \bar{\psi}_*(\xi_{\mathrm{K}}) = [\mathrm{Y}_{w_{\mathrm{K}}}] \quad \text{si } l(w_{\mathrm{K}}) = |\mathrm{K}|;$$

puisque $\bar{\psi}_*(1) = 1$, on a par la formule de projection

$$\text{(3)} \qquad \bar{\psi}_* \circ \bar{\psi}^* = \mathrm{Id}.$$

De (1) et (3), on tire

$$\tilde{c}(u) = \bar{\psi}_* \circ \bar{\psi}^* \circ \tilde{c}(u) = \bar{\psi}_* \circ c_Z(u) = \sum \varepsilon\Delta_{\mathrm{K}}(u)\,\bar{\psi}_*(\xi_{\mathrm{K}}),$$

donc, d'après la proposition,

$$\text{(4)} \qquad \tilde{c}(u) = \sum_{\mathrm{K},\, l(w_{\mathrm{K}}) = |\mathrm{K}|} \varepsilon\Delta_{\mathrm{K}}(u)\,[\mathrm{Y}_{w_{\mathrm{K}}}].$$

Prenons en particulier $u = \lambda \in \mathrm{M}$; alors $\varepsilon\,\Delta_{\mathrm{K}}(u)$ est nul sauf lorsque $|\mathrm{K}| = 1$; si $\mathrm{K} = \{i\}$, alors $\varepsilon\,\Delta_{\mathrm{K}}(\lambda) = \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$, tandis que $l(w_{\mathrm{K}}) = 1$ si et seulement si $w_i = s_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{S}$; on en déduit donc la relation connue ([4], p. 16-05) :

$$\text{(5)} \qquad \tilde{c}(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathrm{S}} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle [\mathrm{Y}_{s_\alpha}], \qquad \lambda \in \mathrm{M}.$$

Utilisant alors la dernière formule (1) et la relation $\bar{\theta}_*([\mathrm{Y}_w]) = [\mathrm{X}_{ww_0}]$ [3.2, formule (4)], on obtient $c(\lambda) = \sum \langle \alpha^\vee, w_0(\lambda) \rangle \mathrm{X}_{s_\alpha w_0}$; notant alors que $-w_0$ transforme S en S, on obtient la forme équivalente

$$\text{(6)} \qquad c(\lambda) = -\sum_{\alpha \in \mathrm{S}} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle [\mathrm{X}_{w_0 s_\alpha}].$$

En particulier, si ω_α est le poids fondamental correspondant à $\alpha \in \mathrm{S}$, on a

$$\text{(7)} \qquad \tilde{c}(\omega_\alpha) = \mathrm{Y}_{s_\alpha}, \qquad c(\omega_\alpha) = -\mathrm{X}_{w_0 s_\alpha}.$$

Soient maintenant $u \in \mathsf{S}\,\mathrm{M}$ et $\mathrm{K} \subset [1,\,\mathrm{N}]$ tel que $l(w_{\mathrm{K}}) = |\mathrm{K}|$. On a successivement

$$\tilde{c}(u).[\mathrm{Y}_{w_{\mathrm{K}}}] = \tilde{c}(u).\bar{\psi}_*(\xi_{\mathrm{K}}) = \bar{\psi}_*(\xi_{\mathrm{K}}.\bar{\psi}^*\tilde{c}(u)) = \bar{\psi}_*(\xi_{\mathrm{K}}.c_Z(u)),$$

donc d'après la proposition

$$\text{(8)} \qquad \tilde{c}(u).[\mathrm{Y}_{w_{\mathrm{K}}}] = \sum_{\mathrm{L} \subset [1,\,\mathrm{N}]} \varepsilon\Delta_{\mathrm{L}}(u)\,\bar{\psi}_*(\xi_{\mathrm{K}}\,\xi_{\mathrm{L}}).$$

Nous allons expliciter le second membre de cette formule dans les deux cas suivants : u est de degré 1, u est de degré $|\mathrm{K}|$.

4.4. PROPOSITION 2 ([5]). — *Soient* $w \in \mathrm{W}$ *et* $\lambda \in \mathrm{M}$. *Alors, dans* $\mathrm{A}(\mathrm{G}/\tilde{\mathrm{B}})$, *on a*

$$\tilde{c}(\lambda).[\mathrm{Y}_w] = \sum_{\alpha \in \mathrm{R}_+,\, l(ws_\alpha) = l(w)+1} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \mathrm{Y}_{ws_\alpha}. \tag{9}$$

Donnons tout de suite les corollaires :

COROLLAIRE 1. — *Dans* $\mathrm{A}(\mathrm{G}/\mathrm{B})$, *on a*

$$c(\lambda).[\mathrm{X}_w] = \sum_{\alpha \in \mathrm{R}_+,\, l(ws_\alpha) = l(w)-1} -\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \mathrm{X}_{ws_\alpha}. \tag{10}$$

En effet, de (9), on déduit

$$c(w_0(\lambda))[\mathrm{X}_{ww_0}] = \sum \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \mathrm{X}_{ws_\alpha w_0},$$

la somme étant étendue au même ensemble que (9), donc

$$c(\lambda)[\mathrm{X}_w] = \sum_{a \in \mathrm{R}_+,\, l(ww_0s_\alpha) = l(ww_0)+1} \langle \alpha^\vee, w_0(\lambda) \rangle \mathrm{X}_{ww_0s_\alpha w_0},$$

ce qui donne (10) par la transformation déjà utilisée $\alpha \mapsto -w_0(\alpha)$. Utilisant alors (7), on en tire :

COROLLAIRE 2. — *Soient* $w \in \mathrm{W}$ *et* $\alpha \in \mathrm{S}$. *On a*

$$[\mathrm{Y}_{s_\alpha}].[\mathrm{Y}_w] = \sum_{\beta \in \mathrm{R}_+,\, l(ws_\beta) = l(w)+1} \langle \beta^\vee, \omega_\alpha \rangle \mathrm{Y}_{ws_\beta},$$

$$[\mathrm{X}_{w_0s_\alpha}].[\mathrm{X}_w] = \sum_{\beta \in \mathrm{R}_+,\, l(ws_\beta) = l(w)-1} \langle \beta^\wedge, \omega_\alpha \rangle \mathrm{X}_{ws_\beta}.$$

Venons-en à la démonstration de (9). D'après 3.5, lemme 3, on peut supposer que $w = w_{[1,i]}$; d'après (8), on a alors

$$\tilde{c}(\lambda).[\mathrm{Y}_w] = \sum_{1 \leqq k \leqq \mathrm{N}} \langle \alpha_k^\vee, \lambda \rangle \bar{\psi}_*(\xi_1 \ldots \xi_i.\xi_k);$$

Mais, d'après la proposition 1, $\xi_1 \ldots \xi_i.\xi_k$ est nul si $k \leqq i$, c'est-à-dire [3.5, cor. (*c*)] si $l(ww_k) < l(w)$; d'autre part, d'après (2), $\bar{\psi}_*(\xi_1 \ldots \xi_i\, \xi_k)$ est nul si $l(ww_k) \neq l(w)+1$ et égal à $[\mathrm{Y}_{ww_k}]$ si $l(ww_k) = l(w)+1$. La formule (9) résulte aussitôt de ces deux remarques.

4.5. THÉORÈME 1. — *Pour chaque* $\alpha \in \mathrm{S}$, *soit* $\mathrm{D}_{s_\alpha} : \mathbf{S}\,\mathrm{M} \to \mathbf{S}\,\mathrm{M}$ *l'opérateur* $u \mapsto [u - s_\alpha(u)]/\alpha$.

(*a*) *Soit* $w \in \mathrm{W}$. *Pour toutes les décompositions réduites* $(s_1, \ldots, s_r)$ *de* W, *le produit* $\mathrm{D}_{s_1} \ldots \mathrm{D}_{s_r}$ *prend la même valeur* D_w, *et si* $u \in \mathbf{S}\,\mathrm{M}$ *est de degré* $l(w) = \dim \mathrm{X}_w$, *on a dans* $\mathrm{A}(\mathrm{G}/\mathrm{B})$ *la relation*

$$c(u).[\mathrm{X}_w] = (-1)^{l(w)} \mathrm{D}_w(u)\,[\text{point}]. \tag{11}$$

(*b*) *L'homomorphisme caractéristique* $c : \mathbf{S}\,\mathrm{M} \to \mathrm{A}(\mathrm{G}/\mathrm{B})$ *est donné par*

$$c(u) = \sum_{w \in \mathrm{W}} (-1)^{l(w)} \varepsilon\, \mathrm{D}_{w_0w}(u)\,[\mathrm{X}_w]. \tag{12}$$

La relation (12) se déduit de (11) par 3.3, corollaire (*a*). Démontrons (*a*); soient $w \in W$ et $(s_1, \ldots, s_r)$ une décomposition réduite de w; d'après 3.5, lemme 3, on peut supposer que $ww_0 = w_{[1,i]}$ et que $(s_{\beta_{i+1}}, \ldots, s_{\beta_N}) = (s_1, \ldots, s_r)$; il s'agit alors de prouver que

$$c(u).[X_w] = (-1)^{l(w)} D_{s_1} \ldots D_{s_r}(u)[X_e],$$

ou encore, par la transformation usuelle, que

$$\tilde{c}(u).[Y_{w_{[1,i]}}] = (-1)^{l(w)} D_{s_1} \ldots D_{s_r} w_0(u)[Y_{w_0}]. \tag{13}$$

Reprenons alors la formule (8) avec $K = [1, i]$; comme on l'a déjà remarqué, on a $\xi_K \xi_j = 0$ lorsque $j \leqq i$, donc $\xi_K \xi_L = 0$ si $K \cap L \neq \varnothing$; d'autre part, comme u est supposé de degré $l(w) = N-i$, $\varepsilon \Delta_L(u)$ est nul pour des raisons de degré lorsque $|L| \neq N-i$; le second membre de (8) se réduit donc à $\varepsilon \Delta_{[i+1,N]}(u) \bar{\psi}_*(\xi_{[1,N]}) = \Delta_{i+1,N}(u)[Y_{w_0}]$; il ne reste donc qu'à calculer $\Delta_{[i+1,N]}$.

Or, posons pour chaque racine $\alpha \in R$, $\Delta_\alpha = \alpha^{-1}(\mathrm{Id} - s_\alpha)$, et notons que pour $\alpha \in R$ et $w \in W$, on a $w \Delta_\alpha w^{-1} = \Delta_{w(\alpha)}$; par définition, on a $\Delta_{[i+1,N]} = \Delta_{\alpha_{i+1}} \ldots \Delta_{\alpha_N}$. D'autre part, d'après 3.5, formules (6),

$$\Delta_{\alpha_j} = s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_{i-1}} \Delta_{\beta_i} s_{\beta_{i-1}} \ldots s_{\beta_1} = -s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_{i-1}} \Delta_{\beta_i} s_{\beta_i} \ldots s_1,$$

donc

$$\Delta_{[i+1,N]} = s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_i} (-1)^{N-i} \Delta_{\beta_{i+1}} \ldots \Delta_{\beta_N} w_0,$$

et la formule (13) s'ensuit (u est de degré $N-i$).

4.6. Il résulte du théorème 1 que $A(G/B)$ s'identifie à l'anneau H introduit algébriquement dans [6] (*voir* [6], cor. 4 à la prop. 3 et n° 8 — la différence de signe avec [6] tient à ce que, pour que les poids dominants correspondent à des diviseurs positifs, j'y utilisais l'homomorphisme caractéristique c_G obtenu par prolongement de $\lambda \mapsto c_1(L(-\lambda))$, donc égal en degré n à $(-1)^n c$). On peut donc énoncer en corollaire au théorème 1 tous les résultats de [6] concernant l'homomorphisme caractéristique. Citons simplement :

(*a*) Le noyau de c est le facteur direct de $\mathbf{S}\,M$ engendré par les invariants homogènes de degré > 0 de W ([6], cor. 2 à la prop. 3).

(*b*) Si $u \in \mathbf{S}^N(M)$, alors $c(u) = (-1)^N J(u)/d[pt]$, où $J = \det(w)\,w$ et d est le produit des racines positives ([6], prop. 3 (*b*)).

(*c*) L'indice de torsion, c'est-à-dire l'ordre du conoyau de $c^N : \mathbf{S}^N M \to A^N(G/B)$, annule le conoyau de c; en particulier $c \otimes \mathbf{Q}$ est surjectif ([6], prop. 5).

(*d*) Supposons G semi-simple; pour que c soit surjectif, il faut et il suffit que G soit produit de groupes $\mathbf{SL}_n$ et $\mathbf{Sp}_n$ ([6], prop. 7).

Remarquons aussi que, si l'on identifie $A(G/B)$ à son image par $\bar{\psi}^*$ dans $A(Z)$, le fait que c soit surjectif modulo torsion implique :

(*e*) Le sous-anneau $A(G/B)$ de $A(Z)$ est le plus petit sous-module facteur direct contenant l'image de c_Z, ou encore le plus petit sous-anneau, facteur direct comme **Z**-module, contenant les

$$c_Z(\lambda) = \sum_{1 \leq i \leq N} \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \xi_i, \qquad \lambda \in M.$$

C'est l'analogue de [1], p. 993, théorème III.

4.7. La projection $p : G/T \to G/B$ induit un isomorphisme $p^* : A(G/B) \to A(G/T)$; comme $W = N_G(T)/T$ opère sur G/T de manière naturelle, on en déduit une opération de W sur A (G/B); remarquons que l'homomorphisme caractéristique $\tilde{c} : \mathbf{S}\,M \to A(G/\tilde{B})$ est compatible avec les opérations de W sur les deux membres.

PROPOSITION 3. — *Soient $w \in W$ et $\alpha \in S$.*

(*a*) *Si $l(ws_\alpha) = l(w)+1$, on a $s_\alpha[Y_w] = [Y_w]$.*

(*b*) *Si $l(ws_\alpha) = l(w)-1$, on a*

$$s_\alpha[Y_w] = -[Y_w] - \sum \langle \beta^\vee, \alpha \rangle [Y_{ws_\alpha s_\beta}], \tag{14}$$

où la somme est étendue aux racines positives $\beta \neq \alpha$ telles que $l(ws_\alpha s_\beta) = l(w)$.

Remarquons tout de suite que par la méthode habituelle, on en déduit pour l'opération de W dans A (G/B) définie de manière analogue :

COROLLAIRE : (*a*) *Si $l(ws_\alpha) = l(w)-1$, on a $s_\alpha[X_w] = [X_w]$.*

(*b*) *Si $l(ws_\alpha) = l(w)+1$, on a*

$$s_\alpha[X_w] = -[X_w] - \sum \langle \beta^\vee, \alpha \rangle [X_{ws_\alpha s_\beta}], \tag{15}$$

où la somme est étendue aux racines positives $\beta \neq \alpha$ telles que $l(ws_\alpha s_\beta) = l(w)$.

Démontrons la proposition 3. D'après 3.5, lemme 3 (*c*), on peut supposer que $s = w_N$, et que $w = w_{[1,i]}$ dans le cas (*a*), $w = w_{[1,i]}w_N$ dans le cas (*b*) où $i < N$. Notons d'autre part que l'on à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X_N & \to & X_N/T & \to & X_N/B_N = Z \\ \psi\downarrow & & \downarrow & & \tilde{\psi}\downarrow \\ G & \to & G/T & \longrightarrow & G/B \end{array}$$

et que le morphisme ψ est équivariant sous P_N qui contient un représentant de w_N; il s'ensuit que $\bar{\psi}_* : A(Z) \to A(G/B)$ est compatible avec l'action de w_N sur les deux membres; mais on a vu en 2.7, proposition 5 que w_N laisse fixe les ξ_i pour $i < N$ et que

$$w_N(\xi_N) = -\xi_N - \sum_{j<N} \langle \alpha_j^\vee, \alpha_N \rangle \xi_j.$$

Dans le cas (*a*), on a

$$[Y_w] = \bar{\psi}_*(\xi_1 \ldots \xi_i), \qquad \text{donc} \quad w_N[Y_w] = [Y_w];$$

dans le cas (*b*), on a

$$[Y_w] = \bar{\psi}_*(\xi_1 \ldots \xi_i \xi_N), \qquad \text{avec} \quad w_{[1,i]} = ww_N = ws_\alpha,$$

donc

$$w_N[Y_w] = -[Y_w] - \sum_{j<N} \langle \alpha_j^\vee, \alpha_N \rangle \bar{\psi}_*(\xi_1 \ldots \xi_i . \xi_j),$$

et on conclut comme dans la démonstration de la proposition 2.

5. Le théorème de nullité

5.1. Nous utiliserons ci-dessous le résultat bien connu suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de schémas tel que* $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, $R^q f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ *pour* $q > 0$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_Y$*-module localement libre* $\mathscr{F}$, *les homomorphismes canoniques* $H^q(Y, \mathscr{F}) \to H^q(X, f^* \mathscr{F})$ *sont bijectifs pour* $q \geqq 0$.

En effet, $R^q f_*(f^* \mathscr{F})$ s'identifie à $R^q f_*(\mathcal{O}_X) \otimes \mathscr{F}$, et la suite spectrale de Leray dégénère.

La proposition suivante est tirée de [10].

PROPOSITION 2 ([10]). — *Soient* X *et* Y *deux schémas propres sur un anneau noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme,* X′ *un sous-schéma fermé de* X, Y′ *son image fermée par* f ([9], I.9.5), $\mathscr{L}$ *un module inversible ample sur* Y. *Supposons que :*

(*a*) $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$;

(*b*) $H^q(X, f^* \mathscr{L}^{\otimes n}) = 0$ *pour* $q > 0$ *et* n *grand*;

(*c*) $H^q(X, f^* \mathscr{L}^{\otimes n}) \to H^q(X', f^* \mathscr{L}^{\otimes n})$ *est surjectif pour tout* q *et* n *grand.*

Alors $f_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_{Y'}$, $R^q f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ *pour* $q > 0$ *et* $R^q f_*(\mathcal{O}_{X'}) = 0$ *pour* $q > 0$.

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes hypothèses, les homomorphismes canoniques*

$$H^q(Y, \mathscr{F}) \to H^q(X, f^* \mathscr{F}) \qquad et \qquad H^q(Y', \mathscr{F}) \to H^q(X', f^* \mathscr{F})$$

sont bijectifs pour tout q *et tout* $\mathcal{O}_Y$*-module localement libre* $\mathscr{F}$.

Pour démontrer la proposition 2, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient* X *et* Y *deux schémas propres sur un anneau noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme et* $\mathscr{L}$ *un module inversible ample sur* Y. *Alors, pour* $q \geqq 0$ *et* n *grand, on a des isomorphismes canoniques*

$$H^0(Y, R^q f_* \mathcal{O}_X \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \to H^q(X, f^* \mathscr{L}^{\otimes n}).$$

En effet, puisque f est propre les $R^q f_* \mathcal{O}_X$ sont cohérents; appliquant à Y le théorème de Serre, on en conclut que $H^p(Y, R^q f_* \mathcal{O}_X \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) = 0$ pour $p > 0$, $q \geqq 0$ et n grand. La suite spectrale de Leray :

$$H^p(Y, R^q f_*(f^* \mathscr{L}^{\otimes n})) = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{O}_X \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(X, f^* \mathscr{L}^{\otimes n})$$

dégénère donc lorsque n est assez grand, d'où le lemme.

Démontrons alors la proposition 2. D'après le lemme appliqué au morphisme f et au morphisme $X' \to Y$ induit par f, et les hypothèses (*b*) et (*c*), on a

$$\begin{gathered}
H^0(Y, R^q f_* \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0 \quad \text{pour } q > 0 \text{ et } n \text{ grand,} \\
H^0(Y, R^q f_* \mathcal{O}_{X'} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0 \quad \text{pour } q > 0 \text{ et } n \text{ grand,} \\
H^0(Y, f_* \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \to H^0(Y, f_* P_{X'} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \quad \text{est surjectif pour } n \text{ grand.}
\end{gathered}$$

Puisque Y est propre et $\mathcal{L}$ ample, il en résulte que $R^q f_* \mathcal{O}_X = 0$ pour $q > 0$, $R^q f_* \mathcal{O}_{X'} = 0$ pour $q > 0$ et que $f_* \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{X'}$ est surjectif; comme $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, cette dernière assertion signifie que $f_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{Y'}$, d'où la proposition.

5.2. *Supposons que k soit un corps de caractéristique* 0, et reprenons les notations des paragraphes 3 et 4. Soit λ un poids *dominant*, c'est-à-dire un élément λ de M tel que $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \geqq 0$ pour $\alpha \in R_+$. Notons $\mathcal{L}_Z(\lambda)$ le faisceau inversible sur Z associé au caractère λ de $B_N = \tilde{B}$, c'est-à-dire l'image réciproque $\bar{\psi}^* \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \bar{\psi}^* \bar{\theta}^* \mathcal{L}(w_0(\lambda))$. Soit $i \in [1, N]$.

PROPOSITION 3. — *Avec les notations précédentes, on a*

(1) $$H^q(Z, \mathcal{L}_Z(\lambda)) = 0 \quad \textit{pour} \quad q > 0,$$

(2) $$H^q(Z_{[1, i]}, \mathcal{L}_Z(\lambda)) = 0 \quad \textit{pour} \quad q > 0,$$

(3) *l'application de restriction* $H^0(Z, \mathcal{L}_Z(\lambda)) \to H^0(Z_{[1, i]}, \mathcal{L}_Z(\lambda))$ *est surjective.*

Soit $\bar{V}_{-\lambda}$ la représentation irréductible de G, de plus petit poids $(-\lambda)$ [donc de plus grand poids $-w_0(\lambda)$], et soit $\bar{V}_{-\lambda}^{-\lambda}$ la droite des éléments de poids $(-\lambda)$; pour $i \in [1, N]$, soit V_i le sous-espace de V engendré par $B_i \bar{V}_{-\lambda}^{-\lambda}$. On a

$$\bar{V}_{-\lambda} = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_N = \bar{V}_{-\lambda}^{-\lambda},$$

et on a pour chaque i des suites exactes de B_i-modules

$$\begin{gathered}
0 \to V_i \to V_0 \to F_i \to 0, \\
0 \to F_i^\vee \to V_0^\vee \to V_i^\vee \to 0,
\end{gathered}$$

d'où une suite exacte de faisceaux sur X_i/B_i [on note $\mathcal{L}_i(E)$ le faisceau sur X_i/B_i défini par une représentation linéaire E de B_i] :

(S_i) $$0 \to \mathcal{L}_i(F_i^\vee) \to \mathcal{L}_i(V_0^\vee) \to \mathcal{L}_i(V_i^\vee) \to 0.$$

Considérons alors les projections successives $f_i : X_i/B_i \to X_{i-1}/B_{i-1}$; d'après 2.12, on a

(4) $$R^1(f_i)_* \mathcal{L}_i(V_i^\vee) = 0,$$

(5) $\begin{cases} \text{l'homomorphisme canonique } (f_i)_* \mathcal{L}_i(V_0^\vee) \to (f_i)_* \mathcal{L}_i(V_i^\vee) \text{ s'identifie naturellement} \\ \quad \text{à l'homomorphisme } \mathcal{L}_{i-1}(V_0^\vee) \to \mathcal{L}_{i-1}(V_{i-1}^\vee). \end{cases}$

Comme $\mathscr{L}_N(\check{V}_N) = \mathscr{L}_Z((\bar{V}_{-\lambda})^\vee) = \mathscr{L}_Z(\lambda)$, on en déduit aussitôt, en notant $f^{(i)}$ la projection $f_{i+1} \circ \ldots \circ f_N$ de $Z = X_N/B_N$ sur X_i/B_i :

$$R^q f^{(i)} \mathscr{L}_Z(\lambda) = 0, \qquad q > 0, \tag{6}$$

(7) $\left\{\begin{array}{l}\text{l'homomorphisme canonique } f^{(i)} \mathscr{L}_Z(\check{V}_0) \to f^{(i)} \mathscr{L}_Z(\lambda) \text{ s'identifie naturellement} \\ \quad \text{à l'homomorphisme } \mathscr{L}_i(\check{V}_0) \to \mathscr{L}_i(\check{V}_i).\end{array}\right.$

Prenant alors $i = 0$, on obtient (1), ainsi qu'un isomorphisme de $\check{V}_0 = \check{\bar{V}}_{-\lambda}$ sur $H^0(Z, \mathscr{L}_Z(\lambda))$; revenant alors à (5) et (6), et utilisant le fait que $Z_{[1,i]}$ est l'une des fibres de $f^{(i)}$ (3.12), on obtient (2) et (3).

5.3. Avant de tirer les conséquences de la proposition 3, essayons de nous débarrasser de l'hypothèse que k est de caractéristique 0. Fixons les notations suivantes : $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée sur $\mathbf{Q}$ de système de racines R, $\mathfrak{u}^+$ la sous-algèbre unipotente définie par les racines positives, $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ un système de Chevalley de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, U, U^+ les algèbres enveloppantes respectives de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{u}_+$, $U_{\mathbf{Z}}$, $U^+_{\mathbf{Z}}$ les ordres de U, U^+ engendrés respectivement par les $(X^n_\alpha/n!)$ pour $\alpha \in R$, $n \in \mathbf{N}$, et les $(X^n_\alpha/n!)$ pour $\alpha \in R_+$, $n \in \mathbf{N}$. Soit comme ci-dessus λ un poids dominant de R, et soit $V_{-\lambda}$ la représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ de plus petit poids $-\lambda$. Soit $e \in V_{-\lambda}$ un vecteur non nul de poids $(-\lambda)$, alors $(V_{-\lambda})_{\mathbf{Z}} = U_{\mathbf{Z}}\, e = U^+_{\mathbf{Z}}\, e$ est un réseau admissible de $V_{-\lambda}$ (dans tout ce numéro, nous utilisons la terminologie de [3], § 12). Considérons la condition suivante :

(8) $\left\{\begin{array}{l}\textit{Soit } \mu = w(-\lambda) \textit{ un poids extrémal de } V_{-\lambda}, \textit{ et soit } e_\mu \textit{ un générateur du } \mathbf{Z}\textit{-module} \\ \quad V^\mu_{-\lambda} \cap (V_{-\lambda})_{\mathbf{Z}}. \textit{ Alors le } \mathbf{Z}\textit{-module } U^+_{\mathbf{Z}}\, e_\mu \textit{ est facteur direct dans } U^+_{\mathbf{Z}}\, e = (V_{-\lambda})_{\mathbf{Z}}.\end{array}\right.$

Transformant la condition (8) par un des représentants privilégiés du groupe de Weyl définis par le système de Chevalley, on en déduit la condition en apparence plus forte : si μ est un poids extrémal de $V_{-\lambda}$, R_1 un système de racines positives de R, $\mathfrak{u}_1$ la sous-algèbre unipotente correspondant à R_1, U_1 son algèbre enveloppante, alors $(U_1 \cap U_{\mathbf{Z}})\, e_\mu$ est facteur direct dans $(V_{-\lambda})_{\mathbf{Z}}$.

Prenons alors pour k un corps quelconque, pour G le groupe semi-simple simplement connexe déployé sur k correspondant à $\mathfrak{g}$, et pour $\bar{V}_{-\lambda}$ la représentation $\bar{V}_{-\lambda} = (V_{-\lambda}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$ de G; on vérifie alors sans difficultés, en utilisant 2.13, que la démonstration donnée de la proposition 3 reste valable, pourvu que la condition (8) soit satisfaite; de plus, la démonstration montre que $H^0(Z, \mathscr{L}_Z(\lambda))$ s'identifie à $\check{\bar{V}}_{-\lambda} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}((V_{-\lambda})_{\mathbf{Z}}, k)$. Enfin, comme la restriction que G soit semi-simple simplement connexe est évidemment sans influence sur l'énoncé, on obtient :

Proposition 4. — *Sous l'hypothèse* (8), *les conclusions de la proposition* 3 *sont satisfaites sans hypothèses sur le corps k; de plus* $H^0(Z, \mathscr{L}_Z(\lambda))$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}((V_{-\lambda})_{\mathbf{Z}}, k)$.

5.4. Je n'ai pas été capable de démontrer (8) en dehors de certains cas particuliers, et je le propose comme *conjecture;* j'en tirerai certaines conséquences dans la suite. Ces conséquences n'utilisent pas nécessairement toute la force de (8) : par exemple, si la caractéristique p de k est donnée, il suffit pour démontrer les conclusions de la proposition 3, de supposer qu'il n'existe pas de p-torsion dans les quotients $U_{\mathbf{Z}}^+ e_\mu/U_{\mathbf{Z}}^+ e$. Si cette conjecture n'était que partiellement valable, il resterait donc sans doute quelque chose des énoncés où je l'utilise.

Dans toute la suite, nous supposerons donc, sauf mention du contraire, que *soit k est de caractéristique* 0, *soit la conjecture* (8) *est satisfaite* pour tout système de racines et tout poids dominant.

On peut alors appliquer la proposition 2 avec

$$X = Z, \qquad Y = G/\tilde{B}, \qquad f = \bar{\psi}, \qquad X' = Z_{[1,i]} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L} = \tilde{\mathscr{L}}(\lambda),$$

où λ est un caractère tel que $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle > 0$ pour $\alpha \in R_+$; l'hypothèse (a) est satisfaite puisque $\bar{\psi}$ est birationnel et $G/\tilde{B}$ normal, et les hypothèses (b) et (c) résultent des propositions 3 et 4. En conclusion :

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{On a} \\ \qquad R^q \bar{\psi}_*(\mathscr{O}_Z) = 0 \qquad \text{pour} \quad q > 0, \\ \qquad R^q \bar{\psi}_*(\mathscr{O}_{Z_{[1,i]}}) = 0 \qquad \text{pour} \quad q > 0 \\ \text{et} \\ \qquad \bar{\psi}_*(\mathscr{O}_{Z_{[1,i]}}) = \mathscr{O}_{Y_w}, \qquad \text{où} \quad w = w_{[1,i]}. \end{array}\right.$$

On peut alors appliquer la proposition 1 à $Z \to G/\tilde{B}$ et $Z_{[1,i]} \to Y_w$:

PROPOSITION 5. — *Les applications canoniques*

$$H^q(G/\tilde{B}, \mathscr{F}) \to H^q(Z, \bar{\psi}^*(\mathscr{F})) \qquad \textit{et} \qquad H^q(Y_w, \mathscr{F}) \to H^q(Z_{[1,i]}, \bar{\psi}^*(\mathscr{F}))$$

sont bijectives pour tout q et tout faisceau localement libre $\mathscr{F}$ sur $G/\tilde{B}$.

Appliquant à nouveau la proposition 3, et notant 1° que tout élément du groupe de Weyl peut se mettre sous la forme $w_{[1,i]}$ pour des choix convenables; 2° que $\lambda \in M$ est dominant si et seulement si $H^0(G/\tilde{B}, \tilde{\mathscr{L}}(\lambda)) \neq 0$ (*cf.* 3.4); 3° que, si l'on suppose G semi-simple simplement connexe, ce qui est loisible, tout module inversible sur $G/\tilde{B}$ est isomorphe à un $\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)$ [*cf.* 3.3 corollaire (a) et 4.3, formule (5)], on obtient :

THÉORÈME 1. — *Soit $w \in W$ et soit $\mathscr{L}$ un module inversible sur* $G/\tilde{B}$ *tel que* $H^0(G/\tilde{B}, \mathscr{L}) \neq 0$. *Alors :*

(a) $H^q(G/\tilde{B}, \mathscr{L}) = 0$ *pour* $q > 0$, $H^q(Y_w, \mathscr{L}) = 0$ *pour* $q > 0$;

(b) *l'homomorphisme canonique* $H^0(G/\tilde{B}, \mathscr{L}) \to H^0(Y_w, \mathscr{L})$ *est surjectif.*

On obtient d'ailleurs en passant :

PROPOSITION 6. — *Si λ est dominant,* $H^0(G/\tilde{B}, \tilde{\mathscr{L}}(\lambda))$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}((V_{-\lambda})_{\mathbf{Z}}, k)$.

Donnons quelques corollaires du théorème 1 :

COROLLAIRE 1. — *Les variétés de Schubert* X_w *et* Y_w *sont normales.*

Il suffit en effet de le démontrer pour Y_w avec $w = w_{[1,i]}$; mais alors, d'après (9), il existe un schéma normal $Z_{[1,i]}$ et un morphisme $\bar{\psi} : Z_{[1,i]} \to Y_w$ tel que $\bar{\psi}_* (\mathcal{O}_{Z_{[1,i]}}) = \mathcal{O}_{Y_w}$.

COROLLAIRE 2. — *Si* k *est de caractéristique* 0, *les variétés de Schubert* X_w *et* Y_w *sont de Cohen-Macaulay.*

Pour $Y_{w_{[1,i]}}$, cela résulte de (9) ci-dessus et de [11], remarque et proposition à la fin du chapitre I, paragraphe 3. Le cas général en résulte.

COROLLAIRE 3. — *Soient* H *un* k-*groupe lisse affine connexe*, P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* H *tels que* $P \subset Q$, *et* $f : H/P \to H/Q$ *la projection canonique.*

(*a*) *On a* $H^q(H/P, \mathcal{O}_{H/P}) = 0$ *pour* $q > 0$.

(*b*) *On a* $R^q f_* (\mathcal{O}_{H/P}) = 0$ *pour* $q > 0$, $f_* (\mathcal{O}_{H/P}) = \mathcal{O}_{H/Q}$.

(*c*) *Pour tout module localement libre* $\mathcal{F}$ *sur* H/Q, *l'homomorphisme*

$$H^q(H/Q, \mathcal{F}) \to H^q(H/P, f^*(\mathcal{F}))$$

est bijectif pour tout q.

Fixons d'abord P et Q, en laissant H variable. On a $(a) \Rightarrow (b)$ puisque les fibres de f sont isomorphes à Q/P, et $(b) \Rightarrow (c)$ d'après la proposition 1. D'autre part, on peut supposer que k est algébriquement clos et que H est semi-simple; lorsque P est un groupe de Borel, (*a*) résulte du théorème 1, d'où (*a*), (*b*) et (*c*) en ce cas. Appliquant alors (*c*), on en déduit que $H^q(H/Q, \mathcal{O}_{H/Q}) = 0$ pour $q > 0$ pour tout Q, d'où (*a*) en général, d'où (*b*) et (*c*).

5.5. Considérons maintenant les homomorphismes caractéristiques (1.6) :

$$a_i : \quad \mathbf{Z}[M] \to \mathsf{R}(T) \to \mathsf{R}(B_i) \to K_B(X_i/B_i);$$

notons que

$$a_0 : \quad \mathbf{Z}[M] \to K_B(B/B) = \mathsf{R}(B)$$

est l'isomorphisme canonique et que

$$a_N : \quad \mathbf{Z}[M] \to K_B(X_N/B_N) = K_B(Z)$$

est l'homomorphisme tel que

$$a_N(e^\lambda) = \mathrm{cl}(\mathcal{L}_Z(\lambda)).$$

D'autre part, soit ρ_i la demi-somme des éléments de R_i; alors ρ_0 est la demi-somme des racines positives, $\rho_N = -\rho_0$, et pour chaque $i \geqq 1$, on a

$$\rho_i = w_{i-1}(\rho_{i-1}), \qquad \langle \alpha_i^\vee, \rho_{i-1} \rangle = 1.$$

Les morphismes

$$f_i : \quad X_i/B_i \to X_{i-1}/B_{i-1} \qquad \text{et} \qquad \sigma_i : \quad X_{i-1}/B_{i-1} \to X_i/B_i$$

donnent des homomorphismes de groupes

$$(f_i)_!, (\sigma_i)^! : \quad K_B(X_i/B_i) \to K_B(X_{i-1}/B_{i-1}),$$

et d'après 2.8, proposition 7 et 2.9, proposition 9, on a

$$\sigma_i^! \circ a_i = a_{i-1} \circ w_i, \tag{10}$$

$$(f_i)_! \circ a_i(e^{\lambda+\rho_i}) = a_{i-1}(\Lambda_{\alpha_i}(e^\lambda)\, e^{\rho_{i-1}}), \qquad \lambda \in \mathrm{M}, \tag{11}$$

où, pour chaque racine α, $\Lambda_\alpha : \mathbf{Z}[\mathrm{M}] \to \mathbf{Z}[\mathrm{M}]$ est l'opérateur tel que

$$\Lambda_\alpha(u) = \frac{u - s_\alpha(u)}{e^\alpha - 1}. \tag{12}$$

Nous nous proposons de calculer l'application composée

$$h: \quad \mathbf{Z}[\mathrm{M}] \xrightarrow{a_\mathrm{N}} \mathrm{K_B}(\mathrm{Z}) \xrightarrow{j^!} \mathrm{K_B}(\mathrm{Z}_{[1,i]}) \xrightarrow{f_!} \mathrm{K_B}(\text{point}) \to \mathrm{R}(\mathrm{B}) \to \mathbf{Z}[\mathrm{M}],$$

où $j : \mathrm{Z}_{[1,i]} \to \mathrm{Z}$ est l'inclusion et $f : \mathrm{Z}_{[1,i]} \to (\text{point})$ la projection; notons que par définition

$$h(e^\lambda) = \sum (-1)^q \operatorname{cl}(\mathrm{H}^q(\mathrm{Z}_{[1,i]}, \mathscr{L}_\mathrm{Z}(\lambda))). \tag{13}$$

Or on a un diagramme cartésien de morphismes B-équivariants

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}_{[1,i]} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Z} \arrow[d, "f_{i+1} \circ \ldots \circ f_\mathrm{N}"] \\ (\text{point}) \arrow[r, "\sigma_i \circ \ldots \circ \sigma_1"] & \mathrm{X}_i/\mathrm{B}_i \end{tikzcd}$$

donc

$$f_! \circ j^! = \sigma_1^! \circ \ldots \circ \sigma_i^! \circ (f_{i+1})_! \circ \ldots \circ (f_\mathrm{N})_!;$$

appliquant alors les formules (10) et (11), on obtient

$$h(e^{\lambda+\rho_\mathrm{N}}) = e^{\rho_0}\, w_1 \ldots w_i \Lambda_{\alpha_{i+1}} \ldots \Lambda_{\alpha_\mathrm{N}}(e^\lambda). \tag{14}$$

LEMME 2. — *On a*

$$w_1 \ldots w_i \Lambda_{\alpha_{i+1}} \ldots \Lambda_{\alpha_\mathrm{N}} = (-\Lambda_{\beta_{i+1}}) \ldots (-\Lambda_{\beta_\mathrm{N}})\, w_0.$$

Posons pour simplifier $s_r = s_{\beta_r}$, $1 \leqq r \leqq \mathrm{N}$; pour chaque r, on a $\alpha_r = s_1 \ldots s_{r-1}(\beta_r)$, donc

$$\Lambda_{\alpha_r} = s_1 \ldots s_{r-1} \Lambda_{\beta_r} s_{r-1} \ldots s_1 = s_1 \ldots s_{r-1}(-\Lambda_{\beta_r}) s_r s_{r-1} \ldots s_1.$$

Le lemme résulte immédiatement de là et des relations $w_1 \ldots w_i = s_i \ldots s_1$ et $s_\mathrm{N} \ldots s_1 = w_0$.

La formule (14) devient donc, en posant $\rho = \rho_0$ et en remplaçant λ par $w_0(\lambda) + \rho$,

$$h(e^{w_0(\lambda)}) = e^\rho(-\Lambda_{\beta_{i+1}}) \ldots (-\Lambda_{\beta_\mathrm{N}})(e^{\lambda-\rho}). \tag{15}$$

THÉORÈME 2. — *Pour chaque* $\alpha \in \mathrm{S}$, *notons* $\mathrm{L}_{s_\alpha} : \mathbf{Z}[\mathrm{M}] \to \mathbf{Z}[\mathrm{M}]$ *l'opérateur* $u \mapsto [u - s_\alpha(u)]/(1 - e^\alpha)$. *Soit* $w \in \mathrm{W}$.

(*a*) *Pour toutes les décompositions réduites* $(s_1, \ldots, s_r)$ *de* w, *le composé* $\mathrm{L}_{s_1} \ldots \mathrm{L}_{s_r}$ *prend la même valeur* L_w.

(*b*) *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{M}$, *l'élément* $\sum (-1)^q \operatorname{cl}(\mathrm{H}^q(\mathrm{X}_w, \mathscr{L}(\lambda)))$ *de* $\mathsf{R}(\mathrm{B}) = \mathbf{Z}[\mathrm{M}]$ *est* $e^\rho \mathrm{L}_w(e^{\lambda-\rho})$, *où* ρ *est la demi-somme des racines positives.*

Notons d'abord que pour démontrer (*b*), on peut remplacer X_w par Y_{ww_0} et $\mathscr{L}(\lambda)$ par $\tilde{\mathscr{L}}(w_0(\lambda))$; pour démontrer à la fois (*a*) et (*b*), il suffit de prouver que, si $(s_1, \ldots, s_r)$ est une décomposition réduite de w, l'élément $(-1)^q \operatorname{cl}(\mathrm{H}^q(\mathrm{Y}_{ww_0}, \tilde{\mathscr{L}}(w_0(\lambda)))$ est égal à $e^\rho \mathrm{L}_{s_1} \ldots \mathrm{L}_{s_r}(e^{\lambda-\rho})$. Or, c'est ce qui résulte de (15) et de la proposition 5 dans le cas particulier où $ww_0 = w_{[1, i]}$ et $(s_1, \ldots, s_r) = (s_{\beta_{i+1}}, \ldots, s_{\beta_N})$; on conclut alors par 3.5, lemme 3 (*a*), appliqué à ww_0.

COROLLAIRE 1. — *On a* $\chi(\mathrm{X}_w, \mathscr{L}(\lambda)) = \varepsilon \mathrm{L}_w(e^{\lambda-\rho})$, *où* $\varepsilon : \mathbf{Z}[\mathrm{M}] \to \mathbf{Z}$ *est l'augmentation canonique.*

Appliquant maintenant le théorème 1, on obtient :

COROLLAIRE 2. — *Soit* $w \in \mathrm{W}$ *et soit* $\lambda \in \mathrm{M}$ *tel que* $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \leqq 0$ *pour* $\alpha \in \mathrm{S}$.

(*a*) *On a* $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}_w, \mathscr{L}(\lambda) = 0$ *pour* $q > 0$.

(*b*) *La classe de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_w, \mathscr{L}(\lambda))$ *dans* $\mathsf{R}(\mathrm{B})$ *est* $e^\rho \mathrm{L}_w(e^{\lambda-\rho})$; *la dimension de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_w, \mathscr{L}(\lambda))$ *est* $\varepsilon \mathrm{L}_w(e^{\lambda-\rho})$.

(*c*) *L'application canonique* $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}/\mathrm{B}, \mathscr{L}(\lambda)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_w, \mathscr{L}(\lambda))$ *est surjective.*

Exemple 1. — Prenons $w = e$; alors $\mathrm{X}_w = \mathrm{B}/\mathrm{B}$ est réduit à un point, et

$$e^\rho \mathrm{L}_w(e^{\lambda-\rho}) = e^\rho e^{\lambda-\rho} = e^\lambda,$$

comme il convient.

Exemple 2. — Prenons $w = w_0$; alors $\mathrm{X}_w = \mathrm{G}/\mathrm{B}$; de plus (voir ci-dessous) :

$$\mathrm{L}_{w_0} = e^{-\rho} \mathrm{J}(e^{-\rho})^{-1} \mathrm{J}, \tag{16}$$

où $\mathrm{J} = \sum \det(w) w$. On obtient donc que la classe de $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}/\mathrm{B}, \mathscr{L}(\lambda))$ dans $\mathsf{R}(\mathrm{B})$ est $\mathrm{J}(e^{\lambda-\rho})/\mathrm{J}(e^{-\rho})$, ou encore $\mathrm{J}(e^{w_0(\lambda)+\rho})/\mathrm{J}(e^\rho)$, et on retrouve la *formule d'Hermann Weyl* [le plus grand poids de $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}/\mathrm{B}, \mathscr{L}(\lambda))$ est $w_0(\lambda)$ d'après 3.4].

5.6. Les opérateurs L_w jouissent par construction des propriétés suivantes :

$$\mathrm{L}_w \mathrm{L}_{w'} = \mathrm{L}_{ww'} \quad \text{si} \quad l(ww') = l(w) + l(w'), \tag{17}$$

$$\mathrm{L}_s \mathrm{L}_s = \mathrm{L}_s \quad \text{si} \quad l(s) = 1. \tag{18}$$

De (17) et (18), on déduit

$$\mathrm{L}_w \mathrm{L}_s = \mathrm{L}_w \quad \text{si} \quad l(s) = 1, \quad l(ws) = l(w) - 1, \tag{19}$$

$$\mathrm{L}_s \mathrm{L}_w = \mathrm{L}_w \quad \text{si} \quad l(s) = 1, \quad l(sw) = l(w) - 1. \tag{20}$$

Notons que ces formules impliquent que pour tous $w, w' \in \mathrm{W}$, il existe un unique w'' tel que $\mathrm{L}_w \mathrm{L}_{w'} = \mathrm{L}_{w''}$, et que cette relation équivaut à $\mathrm{X}_w \mathrm{X}_{w'} = \mathrm{X}_{w''}$. D'après (20) par exemple, on a $s_\beta \mathrm{L}_{w_0} = e^\beta \mathrm{L}_{w_0}$ pour tout $\beta \in \mathrm{S}$; si l'on pose $\mathrm{A} = e^\rho \mathrm{J}(e^{-\rho}) \mathrm{L}_{w_0}$, on a $s_\beta \mathrm{A} = -\mathrm{A}$, donc $w \mathrm{A} = \det(w) \mathrm{A}$ pour tout $w \in \mathrm{W}$. D'autre part, raisonnant comme dans le lemme 3 de [6], on obtient une relation de la forme

$$L_{w_0} = (-1)^N \prod_{\alpha \in R^+} (1-e^{\alpha})^{-1} w_0 + \sum_{w' \neq w_0} a(w') w',$$

où $a(w')$ appartient au corps des fractions de $\mathbf{Z}[M]$; on en déduit que le coefficient de w_0 dans A est $(-1)^N e^{\rho} J(e^{-\rho}) \prod (1-e^{\alpha})^{-1} = (-1)^N$. Comme de plus A est anti-invariant, on a $A = J$, d'où la formule (16).

Enfin, d'après 3.3, corollaire à la proposition 1 et le corollaire 1 ci-dessus, on a :

PROPOSITION 7. — *Il existe une base* $(a_w)_{w \in W}$ *du* **Z**-*module* $K(G/B)$ *telle que l'homomorphisme caractéristique*

$$c_K : \quad \mathbf{Z}[M] \to R(B) \to K(G/B)$$

soit donné par

$$c_K(e^{\lambda}) = \sum_{w \in W} \varepsilon L_w(e^{\lambda - \rho}) a_w.$$

Cela justifie les allusions du n° 9 de [6].

5.7. *Remarque.* — En vertu de l'invariance des caractéristiques d'Euler-Poincaré par spécialisation, la proposition 7 et le corollaire 1 au théorème 2 sont valables en toutes caractéristiques, même sans supposer vérifiée la conjecture (8).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BOTT et H. SAMELSON, *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces* (*Amer. J. Maths.*, vol. 80, 1958, p. 964-1029).

[2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[3] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 8 (à paraître).

[4] C. CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie algébriques* (*Séminaire*, 1956-1958, Multigraphié, Secrétariat mathématique, Paris, 1958).

[5] C. CHEVALLEY, *Sur les décompositions cellulaires des espaces* G/B (Manuscrit non publié, *circa* 1958).

[6] M. DEMAZURE, *Invariants symétriques des groupes de Weyl et torsion* (*Inventiones Mathematicae*, vol. 21, 1973, p. 287-301).

[7] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections* (exposé 4 *in Anneaux de Chow et applications*, *Séminaire C. Chevalley*, 1958, Multigraphié, Secrétariat mathématique, Paris, 1958).

[8] A. GROTHENDIECK, *Torsion homologique et sections rationnelles* (exposé 5 *in Anneaux de Chow et applications*, *Séminaire C. Chevalley*, 1958, Multigraphié, Secrétariat Mathématique, Paris, 1958).

[9] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique* (*Publications Mathématiques de l'I. H. E. S.*, n° 4, 1960).

[10] G. KEMPF, *Schubert methods with an application to algebraic curves*, Multigraphié, Stichting Mathematisch Centrum, 6/71, Amsterdam.

11] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD et B. SAINT-DONAT, *Toroidal Embeddings*, I, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 339, Springer-Verlag, 1974.

Michel DEMAZURE,
Bât. 425,
Centre Scientifique,
F 91405 Orsay.

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1973.)