

Dr Branislav Perme,
pukovnik, dipl. inž.
Vojnotehnička akademija VJ,
Beograd

ODREĐIVANJE SILE KOJOM SE FLUID SUPROTSTAVLJA KRETANJU KRUTOG TELA

UDC: 532

Rezime:

U radu se istražuje veličina pridružene mase ili, kako se još naziva, moment inercije fluida kojom se on suprotstavlja promeni svoje brzine. Fluid, kao i svaka druga kruta materija, protivi se promeni brzine svog kretanja. Kod krute materije mera tog otpora jednaka je masi krutog tela, dok se u fluidu ta masa ne može unapred znati već se mora odrediti. Njeno određivanje povezano je sa određenim poteškoćama čije se poreklo nalazi u veličini fluidne mase, njenim fizičkim i hemijskim osobinama, kao i obliku i zakonu promene brzine krutog tela dok se ono kreće kroz prostor ispunjen fluidom.

Ključne reči: fluid, kruto telo, pridružena masa, otpor fluida, eksperimentalno određivanje.

DETERMINATION OF FLUID FORCE RESISTING TO RIGID BODY MOTION

Summary:

The paper investigates added mass quantity or, in other words, fluid inertia moment by which fluid resists to the change of its velocity. Fluid, as any other rigid substance, resists to the change of its velocity. In rigid substances the resistance equals the mass of rigid body while in fluids that mass cannot be known in advance, it has to be determined. Its determination is accompanied by certain difficulties due to fluid mass quantity, its physical and chemical properties as well as to the form and the law of rigid body velocity change while the body is moving through space filled with fluid.

Key words: fluid, rigid body, added mass, fluid resistance, experimental determination.

Uvod

Pri svakom kretanju krutog tela kroz masu fluida, u fluidu dolazi do pojave sile kojom se on opire tom kretanju, jer se narušava njegova do tada postignuta ravnoteža. Radi savladavanja tog otpora kruto telo mora da utroši deo svoje kinetičke energije da bi u fluidu savladalo rad viskoznih sila, a pomeranjem fluida napravilo mesta za svoje dalje kretanje kroz prostor fluida. Ovaj otpor kretanju mani-

festuje se kroz pojavu sile koja se naziva silom otpora ili hidrodinamičkom silom. Može se zaključiti da je ta sila složena, a njena složenost se ogleda u tome što je ona, najčešće, sastavljena od dve komponente.

Jedna komponenta je sila otpora u fluidu koja nastaje usled viskoznih osobina fluida koji se pokreće. Ta sila se naziva viskoznom silom, a pojavljuje se na onim mestima fluidnog prostora na kojima dolazi do pojave relativnih brzina

između slojeva samog fluida. Ta mesta se nalaze u okolini krute materije, i to počev od površine njenog omotača, gde čestice fluida imaju brzinu jednaku brzini krute materije, pa prema unutrašnjosti fluidne mase gde se još oseća uticaj kretanja. Rad ove viskozne sile prevodi energiju kretanja fluidne mase, koju je prouzrokovala kruta materija svojim kretanjem, u toplotnu energiju fluida. Na taj način deo kinetičke energije krutog tela prevodi se na niži stepen energije, ocenjujući toplotnu energiju kao energiju nižeg stepena, jer se, obrnutim postupkom, iz tako stvorene toplotne energije nikada više ne može dobiti ona količina kinetičke energije koja je proizvela tu toplotnu energiju.

Druga komponenta sila nastaje usled predaje kinetičke energije masi fluida, radi čega nastaje promena brzine mase fluida. Po drugom Njutnovom zakonu svako telo se protivi promeni brzine proporcionalno svojoj masi. Upravo ovaj zakon objašnjava prirodu ove druge sile: ta sila je sila inercije mase fluida i direktno je proporcionalna masi fluida kojoj je telo svojim kretanjem poremetilo ravnotežno stanje.

Navedene sile se javljaju pri svakom kretanju krute materije kroz fluid, ali uticaj njihovog rada nije u svakom fluidu isti. Zbog toga se, u zavisnosti od slučaja, jedna od sila može zanemariti u odnosu na drugu kao mala veličina višeg reda. Na primer, takav je slučaj kada se kruto telo – projektil kreće kroz vazdušni prostor. Zbog male gustine vazdušne mase inercione sile koje se javljaju u vazdušnoj masi mogu se bez veće pogreške zanemariti, što se u praksi i čini, a da ostanu uticajne samo sile viskoznog trenja. Međutim, kada se kruto telo kreće kroz vodu, kao što je, na primer, kretanje

vesla, pokrenuta masa vode je velika, pa je i njena inercijalna sila velika. Ova inercijalna sila se ne može više zanemariti, a u zavisnosti od temperature, njenog fizičkog i hemijskog sastava može se odlučiti o tome da li se uticaj viskozne sile može ili ne može zanemariti.

Matematički model definicije hidrodinamičke sile otpora

U teoriji mehanike fluida razrađena je metoda određivanja inercijalne sile za slučaj kada se brzina pokrenute mase fluida može izraziti potencijalom brzine. Međutim, problem određivanja ove sile postaje složeniji kada kretanje tela kroz fluid nije unapred poznato ili definisano. Radi toga se i u ovom pristupu, radi lakšeg definisanja sile, razmatra poznat slučaj, kada je kretanje tela kroz fluid unapred poznato. Radi toga razmatra se harmonijsko kretanje krutog tela u beskonačnoj masi fluida, koje prouzrokuje, takođe, harmonijsko kretanje fluida.

Polazi se od toga da se ukupna sila hidrodinamičkih otpora, koja se javlja pri nestacionarnom kretanju krutog tela kroz fluidnu masu, može definisati izrazom:

$$F = -m \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} c_b \rho A |v|v \quad (1)$$

gde je:

m – ukupna masa fluida koja se pokrenula kao posledica kretanja krutog tela kroz fluid;

c_b – koeficijent otpora krutog tela;

A – površina poprečnog preseka krutog tela u ravni normalnoj na pravac kretanja krutog tela;

ρ – gustina fluida;

v – brzina pokrenutog fluida.

U ovom slučaju uveden je proizvod intenziteta brzine i same brzine fluida da

bi se ukazalo na to da ima slučajeve kada sila otpora pomaže kretanju krute materije. Takav slučaj nastaje kada se fluid počne kretati u istom pravcu u kome se kreće i kruto telo. Takvo kretanje nastaje kada fluid teži da ispuni prazninu nastalu pomeranjem krutog tela, i krene za telom većom brzinom od brzine tela.

Umesto veličine m često je povoljnije uvesti bezdimenzionalnu veličinu definisanu u obliku:

$$c_m = \frac{4m}{\rho l A} \quad (2)$$

koja se naziva koeficijent pridružene mase, odnosno koeficijent momenta inercije fluida.

U ovom izrazu veličina l predstavlja karakterističnu dužinu, kao što je, na primer, širina vesla.

Koeficijenti c_m i c_b veoma su složene funkcije parametara celokupnog sistema – fluida i krute materije. Izraz (1) može se lakše analizirati kada se pretpostavi da se brzina fluida menja po nekom poznatom harmonijskom zakonu, što je u praksi češći slučaj [1]. Kada se uvede brzina, kao harmonijska funkcija $v = v_0 \cos \theta$, gde je $\theta = \omega t$, izraz za hidrodinamičku silu (1) može se prevesti u bezdimenzionalni oblik tako što se navedena jednačina podeli izrazom koji karakteriše sile. Tako jednačina (1) poprima oblik:

$$\frac{F}{\rho v_0^2 A} = \frac{\pi}{4} c_m \frac{b\omega}{v_0} \sin \theta - \frac{1}{2} c_b |\cos \theta| \cos \theta \quad (3)$$

U slučaju kada se posmatra pojava koja se dešava u bezgraničnoj tečnosti, koeficijenti c_m i c_b zavise, u opštem slučaju, od parametara: $\theta = \omega t$, $S = \frac{2\pi v_0}{b\omega}$ i

$$R_e = \frac{v_0 l}{\nu}, \text{ gde je } \nu \text{ – kinematska viskoznost.}$$

Bezdimenzionalni brojevi S i R_e ekvivalentni su brojevima Struhala i Reynoldsa. U širokom dijapazonu Reynoldsovog broja, uticaj ovog broja na koeficijente c_m i c_b praktično je beznačajan. Prema tome, ti koeficijenti mogu se praktično posmatrati samo kao funkcije parametara θ i S .

Kada se hidrodinamička sila (3) razvije u Furijeov red dobija se:

$$\frac{F}{\rho v_0^2 A} = A_1 \sin \theta + A_3 \sin 3\theta + A_5 \sin 5\theta + \dots \\ \dots + B_1 \cos \theta + B_3 \cos 3\theta + B_5 \cos 5\theta + \dots \quad (4)$$

U ovom redu nema parnih harmonika jer je zbog simetrije toka ispunjen uslov:

$$F(\theta) = -F(\theta + \pi) \quad (5)$$

Koeficijenti A_1, A_3, \dots i B_1, B_3, \dots zavise samo od bezdimenzionalnog parametra S , a mogu se odrediti prema izrazima:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F \sin n\theta}{\rho v_0^2 A} d\theta \text{ i } B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F \cos n\theta}{\rho v_0^2 A} d\theta \quad (6)$$

Radi prikladnijeg upoređenja jednačine (3) sa jednačinom (4) koristi se proizvod $\cos \theta$ razložen u red:

$$|\cos \theta| \cos \theta = a_0 + a_1 \cos \theta + \\ + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos 3\theta + \dots \quad (7)$$

gde je $a_n = 0$ za sve parne brojeve a

$$a_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8}{n(n^2 - 4)\pi}, \quad (8)$$

za sve neparne brojeve.

Korišćenjem izraza (7) i uvodeći novu oznaku za količnik:

$$B'_1 = \frac{B_1}{a_1}, \quad B'_3 = B_3 - \frac{a_3}{a_1} B_1, \quad B'_5 = B_5 - \frac{a_5}{a_1} B_1, \dots \quad (9)$$

dobija se:

$$\frac{F}{\rho v_0^2 A} = A_1 \sin \theta + B'_1 \cos \theta |\cos \theta| + \Delta R \quad (10)$$

gde je:

$$\Delta R = A_3 \sin 3\theta + A_5 \sin 5\theta + \dots \\ + B'_3 \cos 3\theta + B'_5 \cos 5\theta + \dots$$

Upoređivanjem jednačina (3) i (10) dobija se:

$$\frac{\pi}{4} c_m(\theta) \frac{l\omega}{v_0} = A_1 + A_3 \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} + A_5 \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} + \dots \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} c_b(\theta) = -B'_1 - B'_3 \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} - B'_5 \frac{\cos 5\theta}{\cos \theta} - \dots \quad (12)$$

Ili,

$$c_m(\theta) = \frac{4 v_0}{\pi l\omega} [A_1 + A_3 + A_5 + \dots + \\ + 2(A_3 + A_5 + \dots) \cos 2\theta + \\ + 2(A_5 + A_1 + \dots) \cos 4\theta + \dots] \quad (13)$$

$$c_b(\theta) = -2B'_1 + \frac{2}{|\cos \theta|} [B'_3 - B'_5 + \dots - \\ - 2(B'_3 - B'_5 + \dots) \cos 2\theta - \\ - 2(B'_5 - B'_7) \cos 4\theta - \dots] \quad (14)$$

U izrazu (10) viši harmonici mogu se zanemariti kao male veličine višeg reda, tako da je približno $A_3 = A_5 = \dots = B_3 = B_5 = \dots = 0$, pa se koeficijent pridružene mase i koeficijent otpora mogu odrediti po jednostavnijim formulama:

$$c_m = \frac{4 v_0}{\pi l\omega} A_1 = \frac{4 v_0}{\pi l\omega} \int_0^{2\pi} \frac{F \sin \theta}{\rho v_0^2 A} d\theta \quad (15)$$

$$c_b = -2B'_1 = -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{F \cos \theta}{\rho v_0^2 A} d\theta \quad (16)$$

Kada se već zanemaruju viši harmonici, koeficijent pridružene mase i koeficijent otpora mogu se iskazati, bez veće pogreške, kao veličine koje imaju konstantne srednje vrednosti. Te srednje vrednosti mogu se naći kao:

$$c_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} c_m(\theta) \sin^2 \theta d\theta \quad (17)$$

$$c_b = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} c_b(\theta) |\cos \theta| \cos^2 \theta d\theta \quad (18)$$

Primenom ovih usrednjenih vrednosti, izraz za hidrodinamičku silu otpora (3) dobija oblik:

$$\frac{F}{\rho v_0^2 A} = \frac{\pi}{4} c_m \frac{l\omega}{v_0} \sin \theta - \frac{1}{2} c_b |\cos \theta| \cos \theta + \Delta R \quad (19)$$

Koeficijenti c_m i c_b za razliku od koeficijenata u izrazu (3), zavise samo od bezdimenzionalnog parametra S . Njihova vrednost se lako može odrediti na osnovu izraza (15) i (16), kada su poznati osnovni harmonici po kojima je razložena hidrodinamička sila. Funkcija ΔR takođe se može odrediti, ali u većini praktičnih slučajeva ona se može i zanemariti. Za $\Delta R = 0$ izraz za hidrodinamičku silu, po formuli (3), glasi:

$$\frac{F}{\rho v_0 A} = \frac{\pi}{4} c_m \frac{b\omega}{v_0} \sin \theta - \frac{1}{2} c_b |\cos \theta| \cos \theta \quad (20)$$

Primenom ekvivalentne linearizacije dobija se još jednostavniji oblik hidrodinamičkih sila. Nelinearan član u jednačini (20), odnosno odgovarajuća sila otpora

$$F_c = -\frac{1}{2} c_b \rho v_0^2 A |\cos \theta| \cos \theta,$$

zamenjuje se ekvivalentnim linearnim članom:

$$\frac{F'_c}{\rho v_0^2 A} = -\varepsilon_0 c_b \cos \theta$$

Koeficijent ε_0 određuje se iz uslova jednakosti disipacije energije oscilovanja, za period pri linearnom i nelinearnom zakonu oscilovanja. Koristeći zakon za disipaciju energije

$$\Delta E = \int_0^{2\pi/\omega} F_c |v| dt$$

dobija se

$$\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\cos \theta| \cos^2 \theta d\theta.$$

Iz tog uslova proizilazi da je $\varepsilon_0 = \frac{4}{3\pi}$.

Primenom ovih linearizovanih članova dobija se i izraz za linearizovanu hidrodinamičku silu:

$$\frac{F}{\rho v_0 A} = \frac{\pi}{4} c_m \frac{l\omega}{v_0} \sin \theta - \frac{3}{4\pi} c_b \cos \theta \quad (21)$$

Izraz (20), kao i izraz (21) koriste se pri rešavanju različitih zadataka. Treba napomenuti da je rešenje dobijeno za slučaj poznatog harmonijskog kretanja fluida prouzrokovanog istim takvim kretanjem krutog tela kroz beskonačnu masu fluida.

Principi eksperimentalnih metoda za određivanje pridružene mase i koeficijenta otpora

Matematičke metode, ma koliko bile precizne u opisivanju hidrodinamičkih procesa u interakciji fluida i krute materije ponekad je teško iskoristiti zbog komplikovanih odnosa između parametara. Radi toga je preporučljivo da se proračuni

provere eksperimentalnim putem ili da se samo eksperimentalnim putem nađe tražena veličina. Teškoće nastaju kada kretanje tela nije unapred poznato, već je proizvoljno, poprečni presek krutog tela je nepravilnog oblika, a sve se odigrava u konačnoj masi fluida. To ukazuje da prisustvo površine dodira fluida sa sredinom manje gustine, kao i površine krutih materija koje ograničavaju fluidni prostor utiče na količinu pokrenute tečnosti, odnosno na veličinu pridružene mase.

U praksi se za određivanje pridružene mase, odnosno momenta inercije fluida, koriste tri metode.

Prva metoda određivanja pridružene mase sastoji se u tome da se upoređuju oscilovanja tela u dve različite sredine od kojih je, obično, jedna sredina vazduh, a druga fluid u čijoj se masi očekuje kretanje krutog tela.

Druga metoda određivanja pridružene mase sastoji se u tome da se odredi koeficijent prigušenja slobodnih oscilacija krutog tela u konkretnom fluidu.

Treća metoda određivanja pridružene mase i koeficijenta otpora sastoji se u tome da se meri promena hidrodinamičke sile kada telo stacionarno prinudno osciluje.

Za prve dve metode primenjuju se isti postupci ispitivanja. Telo se pričvrsti, ili se postavi kao klatno, tako da može savršeno da osciluje u tečnosti i sa zadatim stepenima slobode.

Proces određivanja pridružene mase tečnosti po principu oscilovanja u dve sredine određuje se na sledeći način: najpre se utvrdi masa tela koje treba da osciluje m_0 i nalaze njegove slobodne frekvencije u dve različite sredine: u vazduhu f_0 i f u vodi, odnosno tečnosti kod koje se traži pridružena masa. Na osnovu tih podataka pridružena masa tečnosti izračunava se po formuli:

$$m = m_0 \left(\frac{f_0^2}{f^2} - 1 \right).$$

Ova metoda je već dugo poznata i dosta se, zbog svoje jednostavnosti, koristi za određivanje pridruženih masa, odnosno, momenta inercije fluida pri kretanju različitih tela.

Druga metoda zasniva se na određivanju koeficijenta prigušenja slobodnih oscilacija tela u tečnosti iz koga se onda računaju odgovarajući koeficijenti otpora i pridružene mase. Koeficijenti dobijeni na taj način predstavljaju srednje vrednosti koeficijenata.

Trećom metodom određuje se pridružena masa i otpor pomoću harmonijskog analizatora krivih koje prikazuju promenu hidrodinamičke sile koja deluje na telo pri njegovom oscilovanju u tečnosti po harmonijskom zakonu.

Zaključak

Pri kretanju krutog tela kroz masu fluida koji karakteriše veća vrednost gustine, kao što su na primer tečnosti, deo energije krutog tela prenosi se na fluid,

što se u njemu manifestuje kao promena brzine kretanja. Kako se svaka materija protivi promeni brzine, i to proporcionalno pokrenutoj masi, i u fluidu se javlja inercioni otpor kretanju. Problem koji se u ovom slučaju javlja je određivanje mase fluida koja je pokrenuta. Ta masa naziva se pridružena masa. Poznavanje veličine pridružene mase važno je za praksu, jer se time određuje i deo energije koju je kruta materija predala fluidu.

Pridružena masa fluida može se odrediti za slučajeve poznatog zakona kretanja krute materije i kretanja fluida. Međutim, mnogo češće se kruta materija proizvoljno kreće, tj. kreće se po proizvoljnom zakonu. U tom slučaju jedino je moguće pridruženu masu odrediti eksperimentalnim putem, i to jednom od navedenih metoda.

Literatura:

- [1] Keulegan G. H. and Carpenter L. H.: Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid, J. of research of national bureau of standards, 1956. vol. 60, № 5.
- [2] К. К. Федяевский, Я. И. Войткунский, Ю. Фаддев: Гидромеханика, Судостроение, Ленинград, 1968.
- [3] Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович: Динамика танко-стенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость, Машиностроение, Москва 1971.
- [4] Б. Т. Емцов: Техническая гидромеханика, Машиностроение, 1978.