

재귀원형군과 하이퍼큐브의 고장 감내에 대한 결정적 척도*

박 정흠¹, 김 희철²

¹가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3777

²한국외국어대학교 컴퓨터 및 정보통신공학부
449-791 경기도 용인군 모현면 왕산리 산 89
hckim@hufs.ac.kr
전화 (031) 330-4267, 팩스 (031) 333-1696

Deterministic Measures of Fault-Tolerance in Recursive Circulants and Hypercubes

Jung-Heum Park¹ and Hee-Chul Kim²

¹School of Computer Science and Electronic Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3777

²Computer Science & Information Communications Engineering Division
Hankuk University of Foreign Studies
Wangsan-ri 89, Mohyun-myun, Yongin-gun, Kyonggi-do 449-791
hckim@hufs.ac.kr
TEL (031) 330-4267, FAX (031) 333-1696

* 이 논문은 한국과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구(R02-2000-00289)의 연구비를 지원 받았음.

재귀원형군과 하이퍼큐브의 고장 감내에 대한 결정적 척도*

Deterministic Measures of Fault-Tolerance in Recursive Circulants and Hypercubes

요약

다중 컴퓨터 네트워크의 고장 감내에 대한 대표적인 결정적 척도로 연결도와 에지 연결도가 있다. 연결도나 에지 연결도는 어떤 정점 분리 집합이나 에지 분리 집합을 제거했을 때 남은 그래프의 형태를 고려하지 않는다는 문제가 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 superconnectivity, toughness, scattering number, vertex-integrity, binding number, restricted connectivity와 같은 일반화된 연결성 척도들이 함께 사용된다. 이 논문에서는 재귀원형군과 하이퍼큐브의 고장 감내에 대한 이러한 결정적 척도를 분석하고, 고장 감내 측면에서 비교한다.

키워드: 고장 감내, 연결도, 재귀원형군, 하이퍼큐브

Abstract

The connectivity and edge-connectivity have been the prime deterministic measure of fault tolerance in multicomputer networks. These parameters have a problem that they do not differentiate the different types of disconnected graphs which result from removing the disconnecting vertices or disconnecting edges. To compensate for this shortcoming, one can utilize generalized measures of connectedness such as superconnectivity, toughness, scattering number, vertex-integrity, binding number, and restricted connectivity. In this paper, we analyze such deterministic measures of fault tolerance in recursive circulants and hypercubes, and compare them in terms of fault tolerance.

Key Words: Fault tolerance, connectivity, recursive circulants, hypercubes

* 이 논문은 한국과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구(R02-2000-00289)의 연구비를 지원 받았음.

1 서론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크(multicomputer network)를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다[11]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드와 노드를 서로 이어주는 통신 링크로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 연결망 구조(interconnection structure)는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

연결망 구조를 설계함에 있어서 노드의 수가 많아질수록 고장 감내(fault tolerance)에 대한 중요성이 높아가고 있다. 감내할 고장의 형태는 게이트에서 노드나 통신 링크에 이르기까지 다양하게 고려할 수 있지만, 노드나 통신 링크에서 발생하는 고장에 감내하고자 하는 시스템 레벨 고장 감내(system-level fault tolerance)가 다중 컴퓨터 네트워크에서는 보편적이고 타당한 모델로 인정되고 있다.

시스템에 고장이 발생하더라도 원래의 기능을 수행할 수 있을 때, 그 시스템을 고장 감내 시스템이라고 부른다. 원래 기능을 수행한다는 것에 대한 서로 다른 두 가지 해석이 있다. 하나는 원래 시스템의 연결망 구조를 유지하는 것이 원래의 기능을 수행한다는 것이라고 간주하는 것인데, 이에 대한 기본적인 접근 방식은 시스템 전반에 걸쳐서 노드나 통신 링크를 중복(redundancy)시키고 이들을 재구성(reconfiguration)하는 것이다. 이러한 접근을 시도한 연구가 계속되고 있으나, 노드나 통신 링크의 중복으로 인한 비용이 상당히 높다는 것이 문제점으로 지적되고 있다.

이 논문에서는 원래 기능을 수행한다는 것을 연결망 구조를 유지하는 것으로 간주하지 않고, 고장이 아닌 노드 사이에 통신 경로가 있는 것으로 간주한다. 다시 말하면, 어떤 고장이 발생하더라도 연결망 구조가 연결되어 있다는 것을 의미한다. 이와 관련하여 확률적 척도(probabilistic measure)와 결정적 척도(deterministic measure)가 제안되고 있다. 확률적 접근에서는 노드나 통신 링크에 고장이 발생할 확률이 주어져 있을 때, 네트워크가 원래의 기능을 수행할, 즉 연결되어 있을 확률을 구하는 것이다. 이 확률이 높을수록 고장 감내도가 높다고 말할 수 있다.

다중 컴퓨터 네트워크의 연결망 구조의 고장 감내에 대한 대표적인 결정적 척도로 연결도(connectivity)와 에지 연결도(edge-connectivity)가 있다. 그래프의 연결도는 임의의 k 개 미만의 노드에 고장이 발생하여 이것들을 제거하더라도 그래프가 연결되어 있는 최대 정수 k 를 말한다. 에지 연결도는 연결도와 유사하게 정의할 수 있는데, 고장이 노드에 발생하지 않고 에지(통신 링크)에 발생한다는 것이다.

연결망 구조의 고장 감내에 대한 척도로 연결도나 에지 연결도의 단점은 어떤 정점 집합이나 에지 집합을 제거했을 때(제거된 정점이나 에지 집합을 분리 집합(disconnecting set)이라고 한다), 남은 그래프의 형태를 고려하지 않는다는 것이다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 superconnectivity, toughness, scattering number, vertex-integrity, binding number,

restricted connectivity와 같은 척도들이 사용되는 것으로 알려져 있다. 이런 척도들은 연결도(에지 연결도)와 함께 사용될 때 고장 감내에 대한 좋은 척도로 인정되고 있다[8,9].

이런 척도들이 고장 감내에 대한 훌륭한 척도로 인정됨에도 불구하고, 많은 연결망 구조에서 이런 척도에 대한 분석이 되어 있지 않다. 이 논문에서는 재귀원형군(recursive circulant)과 하이퍼큐브(hypercube)에 대해서 이러한 고장 감내에 대한 척도를 분석하고, 두 연결망 구조를 고장 감내 측면에서 비교해 보고자 한다.

재귀원형군은 [10]에서 제안된 다중 컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(N, d)$ 는 N 개의 노드 $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ 을 가지고 $s + d^i \equiv t \pmod{N}$ 을 만족하는 정수 i , $0 \leq i \leq \lceil \log_d N \rceil - 1$ 가 존재하면 두 노드 v_s, v_t 를 잇는 에지가 있다. 이 논문에서는 N 이 2의 거듭제곱으로 제한되고 $d=4$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 를 고려한다. 재귀원형군의 예가 아래 그림 1에 있다. $G(2^m, 4)$ 는 분지수가 m 이며, 연결도나 에지 연결도도 m 이다. 또한 $G(2^m, 4)$ 는 정점 대칭이며, 해밀톤 사이클을 가진 삼분 그래프(tripartite graph)임이 알려져 있다[1].

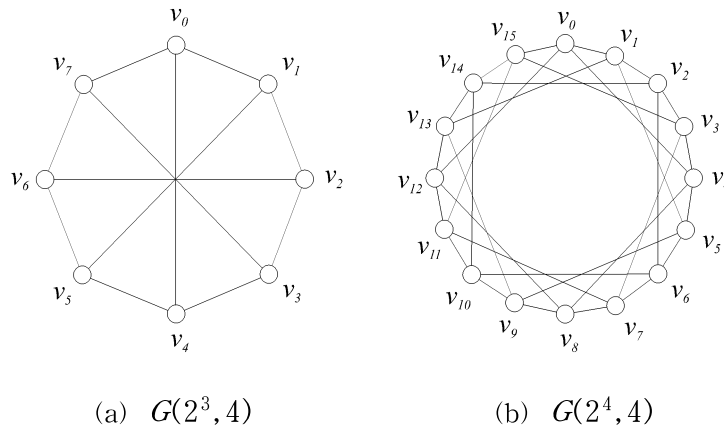


그림 1 재귀원형군의 예

m -차원 하이퍼큐브 Q_m 의 정점 집합은 m -비트 이진 스트링들이고, 두 이진 스트링에서 한 비트만 서로 다르다면 이들 사이에 에지가 있다. Q_m 은 분지수가 m 이며, 연결도나 에지 연결도가 모두 m 이다. 또한 Q_m 은 정점 대칭이며 에지 대칭이고, 해밀톤 사이클을 가진 이분 그래프(bipartite graph)로 알려져 있다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서 고장 감내에 대한 결정적 척도의 정의와 기존 연구 결과를 기술하고, 하이퍼큐브에 대해서 분석되지 않은 결정적 척도를 분석한다. 3절에서는 재귀원형군에 대한 결정적 척도의 분석을 다룬다. 4절에서 재귀원형군과 하이퍼큐브의 고장 감내에 대한 분석을 요약하고 앞으로의 연구 과제를 기술한다.

2 고장 감내에 대한 결정적 척도

2.1 Superconnectivity

그래프 G 의 최소 정점 분리 집합이 모두 분지수가 δ 인 한 정점에 인접한 정점들이면 G 를 $\text{super-}\kappa$ 라고 부른다. 여기서 δ 는 G 의 최소 분지수를 말한다. $\text{super-}\kappa$ 인 그래프의 연결도는 항상 δ 와 같게 된다. $\text{super-}\kappa$ 와 유사하게 에지 분리 집합을 고려한 $\text{super-}\lambda$ 를 정의할 수 있다.

연결된 circulant 그래프는 사이클 그래프와 홀수 n 에 대하여 $C_{2n}(2, 4, 6, \dots, n)$ 을 제외하면 모두 $\text{super-}\lambda$ 임이 알려져 있다[5]. 또한 연결되어 있고 에지 대칭인 그래프는 그것이 사이클 그래프가 아니면 모두 $\text{super-}\lambda$ 임이 알려져 있다. 채귀원형군 $G(cd^m, d)$ 는 길이가 6 이상인 사이클 그래프가 아니면 $\text{super-}\kappa$ 이고, 길이가 4 이상인 사이클 그래프가 아니면 $\text{super-}\lambda$ 이다[2]. 따라서 채귀원형군 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 $\text{super-}\kappa$ 이고 $\text{super-}\lambda$ 이다. 하이퍼 큐브 Q_m , $m \geq 3$ 도 $\text{super-}\kappa$ 이고 동시에 $\text{super-}\lambda$ 임이 알려져 있다[4].

2.2 Toughness

완전 그래프 K_n 의 toughness는 ∞ 로 정의한다. 완전 그래프가 아닌 그래프의 toughness $t(G)$ 는 다음과 같이 정의한다. 여기서 $G \langle V-F \rangle$ 는 그래프 G 에서 정점 분리 집합 F 를 제거했을 때 남은 그래프, 즉 $V-F$ 로 유도되는(induced) G 의 부그래프를 말하고, $c(G \langle V-F \rangle)$ 는 $G \langle V-F \rangle$ 에 있는 연결된 요소의 수를 말한다.

$$t(G) = \min \{ |F| / c(G \langle V-F \rangle) \mid F \text{는 } G \text{의 정점 분리 집합} \}$$

toughness는 원래 해밀톤 그래프일 필요조건을 얻기 위해서 도입된 개념이었다. 해밀톤 그래프의 toughness는 1 이상이다. [6]에 있는 미해결 문제인 모든 toughness가 2 이상인 그래프는 해밀톤 사이클을 가지느냐는 것에 대해서는 toughness가 $3/2$ 이상이면 해밀톤 그래프가 아닌 예가 발견되었고, 또한 toughness가 $3/2$ 이상인 모든 그래프는 2-팩터(factor), 즉 분지수가 2인 정규 스패닝 부그래프를 가지느냐는 문제는 부정되었다[13]. 현재 까지 유효한 가설은 어떤 상수 t 가 존재하여 toughness가 t 이상인 모든 그래프는 해밀톤 그래프이라는 것이다. 임의의 고정된(fixed) t 에 대해서, toughness가 t 이상임을 인식하는 문제는 coNP-complete 문제임이 알려져 있고, 몇몇 그래프 부류에서 toughness를 계산하는 효율적인 알고리즘이 개발되어 있다[9].

채귀원형군 $G(2^m, 4)$ 의 toughness에 대해서는 다음이 성립한다. 이 정리의 증명은 3절에서 다루기로 한다.

정리 1 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 의 toughness $t(G)$ 는 $4/3 \leq t(G) \leq 5/3$ 이다.

이제 하이퍼큐브 Q_m 의 toughness에 대해서 고려하기로 한다. 하이퍼큐브가 해밀톤 사이클을 가진 이분 그래프라는 사실을 이용하여 toughness를 분석할 수 있다.

보조 정리 1 이분 그래프 G 의 toughness $t(G)$ 는 $t(G) \leq 1$ 이다.

증명 이분 그래프의 정점을 인접한 두 정점은 서로 다른 색을 가지도록 흰색과 검정색으로 칠할 수 있다. 흰색 정점의 수를 n_0 , 검정색 정점의 수를 n_1 이라고 하고, 일반성을 잃지 않고 $n_0 \leq n_1$ 이라고 하자. 흰색 정점을 분리 집합으로 잡으면, 분리된 그래프에는 검정색 정점만 남게 되는데 이들 사이에 에지가 없으므로 n_1 개의 연결된 요소를 가지게 된다. 따라서 $t(G) \leq n_0/n_1 \leq 1$ 이 성립한다. \square

보조 정리 2 해밀톤 그래프 G 의 toughness $t(G)$ 는 $t(G) \geq 1$ 이다.

증명 하나의 해밀톤 사이클로 이루어진 사이클 그래프의 toughness가 1 이상임을 보이면 충분하다. 사이클 그래프에서 정점을 하나 제거하더라도 그래프는 연결되어 있다. 정점 2개를 제거하면, 최대 2개의 연결된 요소를 가지게 된다. 일반적으로 k 개의 정점을 제거하더라도, 연결된 요소의 수가 k 개를 넘지는 않음을 쉽게 알 수 있다. 이것은 $t(G) \geq 1$ 임을 의미한다. \square

정리 2 하이퍼큐브 Q_m , $m \geq 2$ 의 toughness는 1이다.

2.3 Scattering number

완전 그래프 K_n 의 scattering number는 $-\infty$ 라고 정의한다. 완전 그래프가 아닌 경우 그래프 G 의 scattering number $sc(G)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$sc(G) = \max \{ c(G \setminus V-F) - |F| \mid F \text{는 } G \text{의 정점 분리 집합} \}$$

$sc(G) \leq 0$ 이면 $t(G) \geq 1$ 이고, 그 역도 성립함을 정의로부터 알 수 있다. $sc(G) > 0$ 인지를 판별하는 문제는 NP-complete임이 알려져 있고, 몇몇 그래프 부류에서 scattering number를 찾는 효율적인 알고리즘이 개발되어 있다[9].

재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 의 scattering number는 아래와 같다. 그 증명은 3절에서 다루기로 한다. 하이퍼큐브 Q_m 의 scattering number는 정리 2의 toughness 분석으로부터 쉽게 알 수 있다.

정리 3 (a) $G(2^m, 4)$, $m \geq 2$ 의 scattering number $sc(G)$ 는 $2 - m$ 이다.

(b) 하이퍼큐브 Q_m , $m \geq 2$ 의 scattering number는 0이다.

2.4 Vertex-integrity

그래프 G 의 vertex-integrity $I(G)$ 는 다음과 같이 정의한다. 여기서 $n(G \langle V-S \rangle)$ 는 $G \langle V-S \rangle$ 에서 최대 연결된 요소의 크기(정점 수)를 말한다.

$$I(G) = \min \{ |S| + n(G \langle V-S \rangle) \mid S \subseteq V \}$$

$I(G) \leq k$ 인지를 판별하는 문제는 NP-complete임이 알려져 있다[3]. 평면 그래프로 제한 하더라도 마찬가지이다. 몇몇 그래프 부류에서 $I(G)$ 를 찾는 알고리즘이 개발되어 있다[9]. 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 의 vertex-integrity는 분석되어 있지 않고, 하이퍼큐브 Q_m 의 vertex-integrity는 $O(2^m \log m / \sqrt{m})$ 임이 알려져 있다[3].

2.5 Binding number

그래프 G 의 binding number $b(G)$ 는 다음과 같이 정의된다. 여기서 $\mathcal{N}(S)$ 는 S 에 속한 정점에 인접한 정점들의 집합을 말한다. 즉, $\mathcal{N}(S) = \{y \in V \mid \text{어떤 } x \in S \text{에 대해서 } (x, y) \in E \text{이다}\}$.

$$b(G) = \min \{ |\mathcal{N}(S)| / |S| \mid \emptyset \neq S \subseteq V \text{이고 } \mathcal{N}(S) \neq V \text{이다} \}$$

$b(G) \geq 4/3$ 인 그래프는 완전 매칭(perfect matching)이 있다[12]. [6]에 있는 $b(G) \geq 3/2$ 인 그래프는 모두 길이 3인 사이클을 가지느냐는 문제와 $b(G) \geq 3/2$ 인 그래프는 pancyclic, 즉 3이상 $|V|$ 이하인 임의의 길이를 가진 사이클이 존재하느냐는 문제는 참인 것으로 판명되었다[13]. 그리고 일반적인 그래프의 binding number는 다항 시간에 구할 수 있음이 알려져 있다[7].

재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 의 binding number는 알려져 있지 않고, 하이퍼큐브 Q_m 의 binding number는 다음과 같다.

정리 4 Q_m , $m \geq 2$ 의 binding number는 1이다.

증명 Q_m 의 노드는 m -비트 이진 스트링으로 나타낸다. 1의 개수가 짝수인 정점을 짝수 정점, 홀수이면 홀수 정점이라고 하자. 짝수 정점과 홀수 정점의 수는 각각 2^{m-1} 이다. 모든 짝수 정점 집합을 S 라고 두면, $\mathcal{N}(S)$ 는 모든 홀수 정점이 된다. 이 경우 $|\mathcal{N}(S)| / |S| = 1$ 이다. 이제 $b(Q_m) \geq 1$ 임을 보이면 충분하다. m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m = 2$ 인 경우 당연히 성립하므로, $m \geq 3$ 임을 가정한다. Q_m 에서 마지막 비트가 0인 정점과 1인 정점의 집합을 각각 V_0 , V_1 이라고 하고, $V = V_0 \cup V_1$ 라고 둔다. V_0 나 V_1 로 유도

된 부그래프는 모두 Q_{m-1} 과 동형이다. S 는 Q_m 의 정점 부분 집합으로 $S \neq \emptyset$, $\mathcal{N}(S) \neq V$ 를 만족한다고 하고, $S_0 = S \cap V_0$, $S_1 = S \cap V_1$ 이라고 하자. 모든 i , $0 \leq i \leq 1$ 에 대해서 $S_i = \emptyset$ 이거나 혹은 $|\mathcal{N}(S_i) \cap V_i| / |S_i| \geq 1$ 을 보이기로 한다. $S_i \neq \emptyset$ 라고 가정하자. $\mathcal{N}(S_i) \cap V_i \neq V_i$ 인 경우는 귀납적 가설에 의해서 $|\mathcal{N}(S_i) \cap V_i| / |S_i| \geq 1$ 이다. $\mathcal{N}(S_i) \cap V_i = V_i$ 인 경우는 $|\mathcal{N}(S_i) \cap V_i| / |S_i| = 2^{m-1} / |S_i| \geq 1$ 이다.

경우 1 $S_0 = \emptyset$ (대칭적으로 $S_1 = \emptyset$). $S_1 \neq \emptyset$ 이므로, $|\mathcal{N}(S)| / |S| = |\mathcal{N}(S_1)| / |S_1| \geq |\mathcal{N}(S_1) \cap V_1| / |S_1| \geq 1$ 이다.

경우 2 $S_0, S_1 \neq \emptyset$. $|\mathcal{N}(S_0) \cap V_0| / |S_0| \geq 1$ 이고 $|\mathcal{N}(S_1) \cap V_1| / |S_1| \geq 1$ 이므로, $|\mathcal{N}(S)| / |S| \geq (|\mathcal{N}(S_0) \cap V_0| + |\mathcal{N}(S_1) \cap V_1|) / (|S_0| + |S_1|) \geq 1$ 이다. \square

2.6 Restricted connectivity

연결도나 에지 연결도를 고려할 때 모든 노드나 통신 링크가 잠재적인 고장 집합(faulty set)이 될 수 있다고 간주한다. 어떤 노드나 통신 링크는 절대 고장이 날 수 없는 경우를 고려할 수 있다. 이러한 노드나 링크들의 집합을 forbidden faulty set이라고 한다. 만약 네트워크에서 최소 분리 집합의 크기(원소의 수)를 k 라고 할 때, 서로 다른 분리 집합의 수가 모든 가능한 경우의 수인 $\binom{|V|}{k}$ 에 비해서 매우 작은 경우에, forbidden faulty set의 노드들을 포함하지 않는 분리 집합을 구하면, 고장 감내도가 연결도보다 클 수 있다. 어떤 노드나 통신 링크의 집합에 고장이 발생할 확률이 너무 작아서 무시할 수 있는 경우도, 그것을 forbidden faulty set이라고 둘 수 있다. 이런 배경에서 restricted connectivity라는 개념이 나오게 되었다[8].

정점 v 에 인접한(adjacent) 정점 집합을 $A(v)$, 인접한(incident) 에지 집합을 $I(v)$ 라고 하자. F 가 모든 정점 v 에 대해서 $A(v)$ 를 포함하지 않는다고 할 때의 restricted vertex-connectivity를 $\kappa'(G)$, F 가 모든 정점 v 에 대해서 $I(v)$ 를 포함하지 않는다고 할 때의 restricted edge-connectivity를 $\lambda'(G)$ 라고 정의한다.

임의의 그래프 G 에 대해서 $\lambda'(G)$ 는 network flow를 이용하여 계산할 수 있다고 알려져 있지만, $\kappa'(G)$ 에 대한 알고리즘은 알려져 있지 않다. 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 에 대한 restricted connectivity는 다음과 같고, 그 증명은 3절에서 다루기로 한다. 하이퍼큐브 Q_m , $m \geq 3$ 에 대해서 $\kappa'(Q_m) = \lambda'(Q_m) = 2m - 2$ 이다[8].

정리 5 (a) $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 의 restricted vertex-connectivity $\kappa'(G) = 2m - 2$ 이다.

(b) $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 의 restricted edge-connectivity $\lambda'(G) = 2m - 2$ 이다.

3 재귀원형군의 결정적 척도 분석

3.1 재귀원형군의 재귀적 구조

재귀원형군 $G(N, d)$ 는 $N = cd^m$, $1 \leq c < d$ 일 때 재귀적 구조(recursive structure)를 갖는다. 다시 말하면, $G(cd^m, d)$ 는 아래 성질을 이용하여 재귀적으로 정의할 수 있다[10].

성질 1 V_i 를 다음과 같이 정의되는 $G(cd^m, d)$, $m \geq 1$ 의 정점 부분집합이라고 하자: $V_i = \{v_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$. 모든 $0 \leq i < d$ 에 대해서 V_i 로 유도된 $G(cd^m, d)$ 의 부그래프는 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형(isomorphic)이다.

$G(cd^m, d)$, $m \geq 1$ 은 다음과 같이 d 개의 $G(cd^{m-1}, d)$ 를 이용하여 설계할 수 있다. $G_i(V_i, E_i)$, $0 \leq i < d$ 를 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형인 그래프라고 하고 $V_i = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_{cd^{m-1}-1}\}$ 라 두자. 그리고 G_i 는 v'_j 을 v_j 에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형이라고 하자. v'_j 를 v_{jd+i} 로 다시 레이블한 다음, 정점 집합을 $\bigcup_{0 \leq i < d} V_i$ 이라고 두고, 에지 집합을 $\bigcup_{0 \leq i < d} E_i \cup X$ 이라고 두면 $G(cd^m, d)$ 가 정의된다. 여기서 X 는 크기가 1인 에지의 집합으로 $\{(v_j, v_{j'}) \mid j+1 \equiv j' \pmod{cd^m}\}$ 이다. 4개의 $G(8, 4)$ 로 $G(32, 4)$ 을 설계한 예가 그림 2에 있다.

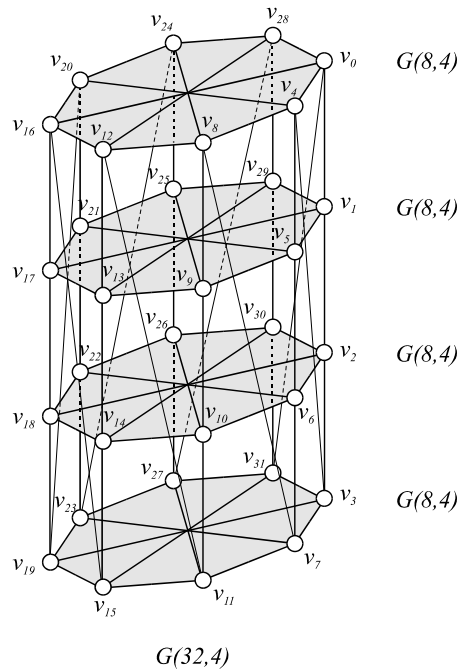


그림 2 $G(32, 4)$ 의 재귀적 구조

$G(2^m, 4)$ 는 $G(cd^m, d)$ 부류에 속하므로 재귀적 구조를 갖는다. $G(2^m, 4)$ 의 재귀적 구조에서는 $G(2^{m-2}, 4)$ 와 동형인 G_0, G_1, G_2, G_3 에 크기가 1인 에지가 2^m 개 추가되어 있다.

3.2 $G(2^m, 4)$ 의 toughness와 scattering number

toughness와 scattering number는 그래프 G 의 정점 분리 집합 F 와 $G \langle V-F \rangle$ 의 연결된 요소의 수 $c(G \langle V-F \rangle)$ 를 이용하여 정의된다. 그런데 $c(G \langle V-F \rangle)$ 는 항상 G 의 독립수(independence number), 즉 최대 독립 집합의 크기 이하가 된다. $G(2^m, 4)$ 의 독립수는 다음과 같이 알려져 있다[1].

보조 정리 3 $G(2^m, 4)$ 의 독립수는 $\frac{3}{8} \cdot 2^m$ 이다.

$G(2^m, 4)$ 의 정점 부분 집합 $V_i = \{v_j \mid j \equiv i \pmod{4}\}$, $0 \leq i \leq 3$ 이라고 두고, V_i 로 유도된 부그래프를 G_i 라고 하자. 그리고 F 를 $G(2^m, 4)$ 의 정점 분리 집합이라고 하고, $F_i = V_i \cap F$ 라고 둔다. $G(2^3, 4)$ 와 $G(2^4, 4)$ 를 분석한 다음, 이를 기반으로 $G(2^m, 4)$ 의 toughness와 scattering number를 분석하고자 한다.

보조 정리 4 $G(2^3, 4)$ 의 toughness는 $4/3$ 이고 scattering number는 -1 이다.

증명 정점 분리 집합 F 에 대해서, $|F| \geq 3$ 이고, 보조 정리 3에 의해서 $c(G \langle V-F \rangle)$ 는 3 이하이다.

경우 1 $|F|=3$. $G(2^3, 4)$ 는 super- κ 이므로 F 는 어떤 한 정점에 모두 인접하게 되고, $c(G \langle V-F \rangle)$ 는 2이다.

경우 2 $|F| \geq 4$. $c(G \langle V-F \rangle)$ 는 3 이하이다. $F = \{v_0, v_1, v_3, v_6\}$ 일 때 연결된 요소의 수가 3이다.

따라서 $G(2^3, 4)$ 의 toughness는 $4/3$ 이고 scattering number는 -1 이다. \square

보조 정리 5 $G(2^4, 4)$ 의 toughness는 $4/3$ 이고 scattering number는 -2 이다.

증명 $|F| \geq 4$ 이고, $G \langle V-F \rangle$ 의 연결된 요소의 수는 독립수 이하, 즉 $c(G \langle V-F \rangle) \leq \frac{3}{8} \cdot 2^4 = 6$ 이다. 아래 각 경우에 대해서 $G \langle V-F \rangle$ 의 연결된 요소의 수 $c(G \langle V-F \rangle)$ 를 찾고, toughness와 scattering number를 분석하기 위해서 $|F| / c(G \langle V-F \rangle)$ 와 $c(G \langle V-F \rangle) - |F|$ 를 계산하기로 한다.

경우 1 $|F|=4$. $G(2^4, 4)$ 가 super- κ 이므로 F 는 한 정점에 모두 인접하게 된다. $G\langle V-F \rangle$ 의 연결된 요소의 수는 2임을 확인할 수 있다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F \rangle) = 2$ 이고, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| = -2$ 이다.

앞으로는 $|F| \geq 5$ 인 경우를 고려한다.

경우 2 어떤 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i|=0$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0|=0$ 이라고 하자. 그러면, $V_0 \cup (V_1 - F_1) \cup (V_3 - F_3)$ 으로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. G_2 에는 최대 2개의 연결된 요소를 가질 수 있으므로, $c(G\langle V-F \rangle) \leq 3$ 이다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 5/3$ 이고, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq -2$ 이다.

이제 모든 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| \geq 1$ 인 경우를 고려한다.

경우 3 어떤 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i|=1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0|=1$ 이라고 하자.

경우 3.1 $|F_1|=1$ (혹은 대칭적으로 $|F_3|=1$). $(V_0 - F_0) \cup (V_1 - F_1)$ 로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. 그리고 이 부그래프에 G_2 의 F_2 에 속하지 않은 정점 중 최대 하나를 제외하고 모두 연결되어 있다. G_3 에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 $c(G\langle V-F \rangle) \leq 3$ 이고, $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 5/3$, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq -2$ 이다.

경우 3.2 $|F_2|=1$. 위 경우 3.1에 의해서 $|F_1|, |F_3| \geq 2$ 이고, 따라서 $|F| \geq 6$ 이다. $V_0 - F_0$ 로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, $V_1 - F_1$ 에 속한 최대 한 정점을 제외하고는 모두 이 부그래프에 연결되어 있다. G_2 와 G_3 에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 $c(G\langle V-F \rangle) \leq 4$ 이고, $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 3/2$, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq -2$ 이다.

경우 3.3 $|F_1|, |F_2|, |F_3| \geq 2$. 이 때 $|F| \geq 7$ 이다. $V_0 - F_0$ 로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, $V_1 - F_1$ 에 속한 최대 한 정점을 제외하고는 모두 이 부그래프에 연결되어 있다. $V_3 - F_3$ 에 대해서도 마찬가지이다. G_2 에 최대 2개의 연결된 요소가 있을 수 있으므로, $c(G\langle V-F \rangle) \leq 1 + 1 + 2 + 1 = 5$ 이다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 7/5$, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq -2$ 이다.

이제 $|F| \geq 8$ 인 경우를 고려하면 충분하다.

경우 4 $|F| \geq 8$. $c(G\langle V-F \rangle) \leq 6$ 이므로 $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 4/3$, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq -2$ 이다.

위의 모든 경우에서 $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 4/3$ 이고 $F = \{v_0, v_2, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{13},$

v_{15} 일 때 $c(G\langle V-F \rangle) = 6$ 이 되어 $G(2^4, 4)$ 의 toughness는 $4/3$ 가 된다. 또한 모든 경우에 $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq -2$ 이고 경우 1에서 등식이 성립하므로 $G(2^4, 4)$ 의 scattering number는 -2 이다. \square

이제 정리 1, 즉 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 의 toughness $t(G)$ 는 $4/3 \leq t(G) \leq 5/3$ 임을 증명한다.

정리 1의 증명 $G(2^m, 4)$ 에서 독립 집합에 속하지 않은 정점들을 정점 분리 집합으로 잡으면, 생성되는 연결된 요소의 수는 독립수 $\frac{3}{8} \cdot 2^m$ 와 같다. 이 때 $|F| / c(G\langle V-F \rangle) = 5/3$ 가 되므로, 이것은 $t(G)$ 의 상한값이 된다. 이제 m 에 대한 수학적 귀납법으로 $t(G) \geq 4/3$ 임을 증명한다. $m=3, 4$ 인 경우는 앞의 보조 정리 4와 5에 의해서 성립한다. $m \geq 5$ 라고 가정한다. 정점 분리 집합 F 는 $|F| \geq m \geq 5$ 를 만족한다.

경우 1 어떤 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| \leq 1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| \leq 1$ 이라고 가정한다.

경우 1.1 $|F_1| \leq 1$ (대칭적으로 $|F_3| \leq 1$). $(V_0 - F_0) \cup (V_1 - F_1)$ 로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, G_2 와 G_3 에 각각 최대 하나의 연결된 요소가 있으므로, $c(G\langle V-F \rangle) \leq 3$ 이다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 5/3$ 이다.

경우 1.2 $|F_2| \leq 1$. 각각 $V_0 - F_0$ 와 $V_2 - F_2$ 로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. G_1 과 G_3 에 각각 최대 하나의 연결된 요소가 있고, 이들 연결된 요소는 정점 하나로 이루어져 있다. 그런데 G_1 과 G_3 에 동시에 하나의 연결된 요소가 존재할 수 없음을 보인다. 만약 그렇지 않다고 가정하면, 즉 G_1 과 G_3 에 있는 정점 $v_j, v_{j'}$ 이 각각 연결된 요소를 이룬다면 v_j 와 인접하면서 G_0 과 G_2 에 있는 정점 v_{j-1}, v_{j+1} 은 각각 F_0 과 F_2 에 속해야 한다. $v_{j'}$ 에 대해서도 마찬가지이다. $|F_0|, |F_2| \leq 1$ 이므로 이것은 불가능하다. 따라서 $c(G\langle V-F \rangle) \leq 3$ 이며, $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 5/3$ 이다.

경우 1.3 $|F_1|, |F_2|, |F_3| \geq 2$. $(V_0 - F_0) \cup (V_1 - F_1) \cup (V_3 - F_3)$ 으로 유도되는 부그래프는 최대 3개의 연결된 요소를 가진다. $V_0 - F_0$ 로 유도된 그래프는 연결되어 있고, $|F_0| \leq 1$ 임에 유의한다. $V_2 - F_2$ 로 유도된 부그래프는 F_2 가 G_2 의 정점 분리 집합인 경우는 귀납적 가설에 의해서 $|F_2| / c(G\langle V_2 - F_2 \rangle) \geq 4/3$, 즉 $c(G\langle V_2 - F_2 \rangle) \leq (3/4) |F_2|$ 이다. F_2 가 G_2 의 정점 분리 집합이 아닌 경우라도 $|F_2| \geq 2$ 이므로, 위 식은 성립한다. 따라서 $c(G\langle V-F \rangle) \leq 3 + (3/4) |F_2|$ 이다. 그런데, $3 \leq (3/4) (|F_0| + |F_1| + |F_2|)$ 이므로, $c(G\langle V-F \rangle) \leq (3/4) (|F_0| + |F_1| + |F_2|) + (3/4) |F_2| = (3/4) |F|$ 가 성립한다. 즉, $|F| / c(G\langle V-F \rangle) \geq 4/3$ 이다.

경우 2 모든 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| \geq 2$. 위 경우 1.3과 같이 모든 i 에 대해서 $V_i - F_i$ 로 유도된 부그래프의 연결된 요소의 수 $c(G \langle V_i - F_i \rangle) \leq (3/4) |F_i|$ 가 성립한다. 따라서 $c(G \langle V - F \rangle) \leq \sum_{0 \leq i \leq 3} c(G \langle V_i - F_i \rangle) \leq (3/4) \sum_{0 \leq i \leq 3} |F_i| = (3/4) |F|$ 이다. 즉, $|F| / c(G \langle V - F \rangle) \geq 4/3$ 이다. \square

이제 정리 3 (a), 즉 $G(2^m, 4)$, $m \geq 2$ 의 scattering number $sc(G) = 2 - m$ 임을 증명한다.

정리 3 (a)의 증명 $G(2^2, 4)$ 의 scattering number는 0임을 쉽게 알 수 있다. $m=3, 4$ 인 경우는 보조 정리 4와 5에 의해서 성립한다. 한 정점에 인접한 모든 정점을 정점 분리 집합 F 로 잡으면, $c(G \langle V - F \rangle) = 2$ 가 되고 따라서 $sc(G) \geq 2 - m$ 이 된다. 이제 $m \geq 5$ 인 경우 $G(2^m, 4)$ 의 scattering number $sc(G) \leq 2 - m$ 임을 m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명하고자 한다. 어떤 경우는 $c(G \langle V - F \rangle) \leq 2$ 임을 보이면 충분하다. 왜냐하면 F 가 정점 분리 집합이어서 $|F| \geq m$ 이므로 $c(G \langle V - F \rangle) - |F| \leq 2 - m$ 이 성립하기 때문이다.

경우 1 어떤 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| = 0$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| = 0$ 이라고 가정한다. $V_0 \cup (V_1 - F_1) \cup (V_3 - F_3)$ 으로 유도된 부그래프는 연결되어 있다.

경우 1.1 $|F_1| \leq 1$ (대칭적으로 $|F_3| \leq 1$). $V_2 - F_2$ 에 속한 정점은 최대 한 정점을 제외하고 모두 G_1 에 연결되어 있으므로, $c(G \langle V - F \rangle) \leq 2$ 이다.

경우 1.2 $|F_1|, |F_3| \geq 2$. $G \langle V_2 - F_2 \rangle$ 가 연결된 그래프일 경우는 $c(G \langle V - F \rangle) \leq 2$ 가 된다. $G \langle V_2 - F_2 \rangle$ 가 연결된 그래프가 아닌 경우는 귀납적 가설에 의해서 $c(G \langle V_2 - F_2 \rangle) - |F_2| \leq sc(G_2) = 2 - (m - 2)$ 가 성립한다. 그리고 $c(G \langle V - F \rangle) \leq 1 + c(G \langle V_2 - F_2 \rangle)$ 이고, $|F| = |F_1| + |F_2| + |F_3| \geq |F_2| + 2 + 2$ 이다. 따라서 $c(G \langle V - F \rangle) - |F| \leq 1 + c(G \langle V_2 - F_2 \rangle) - (|F_2| + 2 + 2) = c(G \langle V_2 - F_2 \rangle) - |F_2| - 3 \leq 2 - (m - 2) - 3 \leq 2 - m$ 이다.

이제 모든 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| \geq 1$ 인 경우를 고려한다.

경우 2 어떤 i, j , $0 \leq i \neq j \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| = |F_j| = 1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| = 1$ 이라고 가정한다.

경우 2.1 $|F_1| = 1$ (대칭적으로 $|F_3| = 1$). $V_2 - F_2$ 에 속한 정점 최대 하나를 제외하고는 모두 G_1 에 연결되어 있고, $V_3 - F_3$ 에 속한 정점도 최대 하나를 제외하고는 모두 G_0 에 연결되어 있다. $G \langle (V_0 - F_0) \cup (V_1 - F_1) \rangle$ 이 연결된 그래프이므로, $c(G \langle V - F \rangle) \leq$

3이다. $c(G\langle V-F \rangle) \leq 2$ 인 경우는 당연하므로, $c(G\langle V-F \rangle) = 3$ 인 경우를 고려한다. 이 경우 $V_2 - F_2$ 에 속한 정점 하나가 연결된 요소가 되기 위해서는 G_2 에서도 연결된 요소가 되어야 한다. 이것은 $|F_2| \geq m-2$ 임을 의미한다. $V_3 - F_3$ 에 속한 정점 하나에 대해서도 마찬가지이므로, $|F_3| \geq m-2$ 이다. 따라서 $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq 3 - \{2(m-2) + 2\} = 5 - 2m \leq 2 - m$ 이다. $m \geq 5$ 임에 유의한다.

경우 2.2 $|F_2| = 1$. 이 경우 정리 1의 증명에서 경우 1.2에서 보인 것과 같이 $c(G\langle V-F \rangle) \leq 3$ 이다. 경우 2.1에서와 같이 G_1 혹은 G_3 에 속한 한 정점이 연결된 요소를 이루기 위해서는 G_1 혹은 G_3 에서도 연결된 요소이어야 하므로, $|F_1| \geq m-2$ 혹은 $|F_3| \geq m-2$ 가 성립한다. 따라서 $|F| = |F_0| + |F_1| + |F_2| + |F_3| \geq 1 + (m-2) + 1 + 2 = m+2$ 이고, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq 3 - (m+2) \leq 2 - m$ 이 성립한다.

경우 3 모든 $F_i, 0 \leq i \leq 3$ 은 $|F_i| \geq 1$ 이며, F_i 들 중에서 $|F_i| = 1$ 인 것이 하나 이하. F_i 가 G_i 의 정점 분리 집합인 경우는 귀납적 가설에 의해서 $c(G\langle V_i - F_i \rangle) - |F_i| \leq 2 - (m-2)$ 가 성립한다. 그렇지 않은 경우는 $c(G\langle V_i - F_i \rangle) - |F_i| = 1 - |F_i|$ 가 되는데, 이것은 $|F_i| = 1$ 이면 0이 되고, $|F_i| \geq 2$ 이면 -1 이하가 된다. F_i 들 중에 몇 개가 G_i 의 정점 분리 집합이 되느냐에 따라 경우를 나누어서 고려해 본다.

경우 3.1 F_i 들 모두가 G_i 의 정점 분리 집합. 이 경우 각 F_i 는 $|F_i| \geq m-2$ 이므로, $|F| \geq 4m-8$ 이다. 정리 1에 의해서 $c(G\langle V-F \rangle) \leq \frac{3}{4} \cdot |F|$ 이므로, $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq \frac{3}{4} \cdot |F| - |F| = -\frac{1}{4} \cdot |F| \leq -\frac{1}{4} \cdot (4m-8) = 2 - m$ 이다.

경우 3.2 F_i 들 중에 3개가 G_i 의 정점 분리 집합. $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq \sum_{0 \leq i \leq 3} c(G\langle V_i - F_i \rangle) - |F| = \sum_{0 \leq i \leq 3} \{c(G\langle V_i - F_i \rangle) - |F_i|\} \leq 3\{2 - (m-2)\} + 0 = 12 - 3m \leq 2 - m$ 이다. $m \geq 5$ 임에 유의한다.

경우 3.3 F_i 들 중에 2개가 G_i 의 정점 분리 집합. $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq \sum_{0 \leq i \leq 3} \{c(G\langle V_i - F_i \rangle) - |F_i|\} \leq 2\{2 - (m-2)\} + 0 + -1 = 7 - 2m \leq 2 - m$ 이다.

경우 3.4 F_i 들 중에 하나가 G_i 의 정점 분리 집합. $c(G\langle V-F \rangle) - |F| \leq 2 - (m-2) + 0 + -1 + -1 = 2 - m$ 이다.

경우 3.5 F_i 들 모두는 G_i 의 정점 분리 집합이 아님. 모든 $G\langle V_i - F_i \rangle$ 는 연결된 그래

프이고 F 는 정점 분리 집합이므로, 어떤 $0 \leq i < 3$ 에 대해서 $V_i - F_i$ 에 속한 정점 x 와 $V_{i+1} - F_{i+1}$ 에 속한 정점 y 를 잇는 에지는 존재하지 않는다. 이것은 $|F_i \cup F_{i+1}| \geq 2^{m-2}$ 임을 의미한다. $c(G \langle V - F \rangle) \leq 4$ 이므로, $c(G \langle V - F \rangle) - |F| \leq 4 - 2^{m-2} \leq 2 - m$ 이다. \square

3.3 $G(2^m, 4)$ 의 restricted connectivity

$G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 에 대해서 $\kappa(G) = 2m - 2$ 임을 증명한다.

정리 5 (a)의 증명 $G(2^m, 4)$ 의 분지수는 m 이고 길이 3인 사이클을 가지고 있지 않으므로 [1], 서로 인접한 두 정점 v, w 에 인접한 정점의 집합 F , 즉 $F = A(v) \cup A(w) - \{v, w\}$ 의 크기는 $2m - 2$ 이다. 따라서 $\kappa(G) \leq 2m - 2$ 이다. 이제 $|F| \leq 2m - 3$ 인 임의의 정점 부분 집합 F 에 대해서, $c(G \langle V - F \rangle) \leq 2$ 이고, 모든 $v \in V$ 에 대해서 $A(v) \not\subseteq F$ 이면 $G \langle V - F \rangle$ 는 연결된 그래프임을 m 에 대한 수학적 귀납법으로 보인다. $m = 3$ 인 경우는 $G(2^3, 4)$ 의 연결도가 3이고 super- κ 이므로 성립한다. $m \geq 4$ 이라고 가정한다.

경우 1 어떤 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| = 0$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| = 0$ 이라고 가정한다. $V_0 \cup (V_1 - F_1) \cup (V_3 - F_3)$ 으로 유도된 부그래프는 연결되어 있다.

경우 1.1 $|F_1| = 0$ (대칭적으로 $|F_3| = 0$). $V_2 - F_2$ 에 있는 정점은 G_1 에 연결되어 있으므로, $G \langle V - F \rangle$ 는 연결된 그래프이다.

경우 1.2 $|F_2| = 0$. $|F| \leq 2m - 3$ 이므로 $V_1 - F_1 \cup V_3 - F_3 \neq \emptyset$ 이고 따라서 $G \langle V - F \rangle$ 는 연결된 그래프이다.

경우 1.3 $|F_1|, |F_2|, |F_3| \geq 1$.

경우 1.3.1 $|F_1| = 1$ (대칭적으로 $|F_3| = 1$). $V_2 - F_2$ 에 속한 최대 한 정점 x 를 제외하고 모두 G_1 에 연결되어 있다. 따라서 $c(G \langle V - F \rangle) \leq 2$ 이고 또한 $x \in F$ 이거나 $A(x) \not\subseteq F$ 이면 $G \langle V - F \rangle$ 는 연결된 그래프이다.

경우 1.3.2 $|F_2| = 1$. $G \langle V_2 - F_2 \rangle$ 는 연결된 그래프이므로 $c(G \langle V - F \rangle) \leq 2$ 이다. 두 개의 연결된 요소를 가지기 위해서는 $|F_1| \geq 2^{m-2} - 1$, $|F_3| \geq 2^{m-2} - 1$ 즉, $|F| \geq 2^{m-2} - 1 + 1 + 2^{m-2} - 1 = 2^{m-1} - 1$ 이어야 하는데, 이것은 $|F| \leq 2m - 3$ 이라는 가정에 모순이므로 $G \langle V - F \rangle$ 는 연결된 그래프이다.

경우 1에 의해서 어떤 F_i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| = 0$ 이면 다른 F_j , $j \neq i$ 들은 $|F_j| \geq 2$ 라고 가정할 수 있다. 이 경우에 대한 고려는 뒤로 미루고, 우선 모든 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서

$|F_i| \geq 1$ 인 경우를 고려한다.

경우 2 모든 $i, 0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| \geq 1$ 이고, 어떤 $i, 0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| = 1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| = 1$ 이라고 가정한다.

경우 2.1 $|F_1| = 1$ (대칭적으로 $|F_3| = 1$). $(V_0 - F_0) \cup (V_1 - F_1)$ 로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. G_2 에 속하는 최대 한 정점 x 를 제외하고 $V_2 - F_2$ 에 속한 모든 정점은 G_1 에, G_3 에 속하는 최대 한 정점 y 를 제외하고 $V_3 - F_3$ 에 속한 모든 정점은 G_0 에 연결되어 있다. 만약 $x, y \in F$ 이라면 $G \setminus (V - F)$ 는 연결된 그래프이다. x 나 y 둘 중 하나, 일반성을 잃지 않고 $x \in F$ 이라면 $c(G \setminus (V - F)) \leq 2$ 이고 또한 $A(y) \notin F$ 이면 $G \setminus (V - F)$ 는 연결된 그래프가 된다. 마지막으로 $x, y \notin F$ 인 경우에 x 나 y 둘 중 하나가 $V_0 - F_0$ 을 포함하는 연결된 요소에 포함되는 경우는 위 주장이 성립한다. 그렇지 않은 경우는 $|F| \geq 1 + 1 + m - 2 + m - 2 = 2m - 2$ 가 되어 $|F| \leq 2m - 3$ 이라는 가정에 모순이 된다.

경우 2.2 $|F_2| = 1, |F_1|, |F_3| \geq 2$ 이다. $V_0 - F_0$ 으로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, $V_1 - F_1$ 에 속하는 최대 한 정점 x 를 제외하고 모두 G_0 에 연결되어 있다. $V_2 - F_2$ 로 유도된 부그래프도 연결되어 있고, $V_3 - F_3$ 에 속하는 최대 한 정점 y 를 제외하고 모두 G_2 에 연결되어 있다. 먼저 $V_0 - F_0$ 을 포함하는 연결된 요소와 $V_2 - F_2$ 를 포함하는 연결된 요소가 같음을 보인다. 서로 다른 연결된 요소라면, $V_1 - \{x\}$ 에 속하는 임의의 정점 p 에 대해서 $p \in F_1$ 이거나 혹은 p 에 인접하고 V_2 에 속한 정점 q 는 $q \in F_2$ 이다. 이것은 $|F_1 \cup F_2| \geq 2^{m-2} - 1$ 임을 의미하고, $|F| \geq 2^{m-2} - 1 + 1 + 2 = 2^{m-2} + 2$ 가 되어 $|F| \leq 2m - 3$ 이라는 가정에 모순이 된다. 경우 2.1과 같이 x 나 y 중 최소한 하나가 F 에 속하거나 혹은 $x, y \notin F$ 이고 x 나 y 둘 중 하나가 $V_0 - F_0$ 을 포함하는 연결된 요소에 포함되는 경우에 증명이 완성된다. 그렇지 않은 경우는 $|F| \geq 1 + m - 2 + 1 + m - 2 = 2m - 2$ 가 되어 $|F| \leq 2m - 3$ 이라는 가정에 모순이 된다.

경우 1과 2에 의해서 어떤 $F_i, 0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $|F_i| \leq 1$ 이면 다른 $F_j, j \neq i$ 들은 $|F_j| \geq 2$ 라고 가정할 수 있다.

$m = 4$ 인 경우는 위의 주장이 성립함을 알 수 있다. 즉, 어떤 F_i 에 대해서 $|F_i| \leq 1$ 일 때는 경우 1과 2에 의해서 $|F| \geq 6$ 이고, 모든 F_i 에 대해서 $|F_i| \geq 2$ 일 때는 $|F| \geq 8$ 이 되어, $|F| \leq 2 \cdot 4 - 3 = 5$ 라는 사실에 모순이 된다. 이후로는 $m \geq 5$ 라고 가정한다.

이제 모든 $i, 0 \leq i < 3$ 에 대해서 (x, y) 가 에지가 되는 $V_i - F_i$ 에 속한 정점 $x, V_{i+1} - F_{i+1}$ 에 속한 정점 y 가 존재함을 보인다. 만약 모든 $V_j - F_j$ 에 속한 정점 x, V_{j+1}

– F_{j+1} 에 속한 정점 y 가 에지를 이루지 않는다고 가정하자. 이것은 $|F_j \cup F_{j+1}| \geq 2^{m-2}$ 을 의미한다. 경우 1과 2에 의해서 F_j 와 F_{j+1} 을 제외한 나머지 두 F_i 들에 정점이 2 이상 포함되므로, $|F| \geq 2^{m-2} + 2$ 가 되는데, 이것은 $|F| \leq 2m-3$ 이라는 가정에 모순이 된다. 이것은 모든 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $G \langle V_i - F_i \rangle$ 은 연결되어 있다면, $G \langle V - F \rangle$ 가 연결된 그래프임을 의미한다. 이제 어떤 $G \langle V_i - F_i \rangle$ 가 연결된 그래프가 아니라고 가정하고, 일반성을 잃지 않고 $G \langle V_0 - F_0 \rangle$ 이 연결된 그래프가 아니라고 둔다. $G \langle V_0 - F_0 \rangle$ 에 속한 크기가 가장 작은 연결된 요소의 정점 집합을 R 이라고 하자.

경우 3.1 $|R| \geq 2$. 귀납적 가설에 의해서 $|F_0| \geq 2(m-2) - 2$ 이다. 경우 1과 2에 의해서 $|F_1| + |F_2| + |F_3| \geq 4$ 이므로 $|F| \geq 2(m-2) - 2 + 4 = 2m-2$ 가 되어 $|F| \leq 2m-3$ 이라는 가정에 모순이 된다.

경우 3.2 $|R| = 1$. $R = \{x\}$ 라고 둔다. $|F_0| \geq m-2$ 이다. 그리고 $|F_1|, |F_2|, |F_3| < m-2$ 이다: 만약 그렇지 않다면, $|F| \geq m-2 + m-2 + 2 = 2m-2$ 가 되어 모순이다. 따라서 $G \langle V_1 - F_1 \rangle, G \langle V_2 - F_2 \rangle, G \langle V_3 - F_3 \rangle$ 은 각각 연결된 그래프이고, $(V_1 - F_1) \cup (V_2 - F_2) \cup (V_3 - F_3)$ 으로 유도된 부그래프도 연결되어 있다. 귀납적 가설에 의해서 $G \langle V_0 - F_0 - R \rangle$ 도 연결된 그래프이다. $G \langle V_0 - F_0 - R \rangle$ 이 독립된 연결된 요소를 이루지 않고, $(V_1 - F_1) \cup (V_2 - F_2) \cup (V_3 - F_3)$ 으로 유도된 부그래프에 연결되어 있음을 보인다. 만약 그렇지 않다면 $V_0 - F_0 - R$ 에 인접하면서 V_1 이나 V_3 에 속한 정점은 모두 F 에 속해야 한다. 이것은 $|F| \geq 2 \cdot |V_0 - F_0 - R| + |F_0| \geq 2^{m-2}$ 를 의미하는데, $|F| \leq 2m-3$ 이라는 가정에 모순이 된다. 따라서 $c(G \langle V - F \rangle) \leq 2$ 이고, $A(x) \notin F$ 이면 $G \langle V - F \rangle$ 는 연결된 그래프이다. \square

이제 $G(2^m, 4)$, $m \geq 2$ 에 대해서 $\lambda'(G) = 2m-2$ 임을 보인다.

정리 5 (b)의 증명 $G(2^m, 4)$ 에 있는 서로 인접한 두 정점 v, w 에 인접한 에지 집합 $F = I(v) \cup I(w) - (v, w)$ 는 분리 집합이고 크기는 $2m-2$ 이다. 이제 $|F| \leq 2m-3$ 인 임의의 에지 부분 집합 F 에 대해서, $c(G-F) \leq 2$ 이고, 모든 $v \in V$ 에 대해서 $I(v) \not\subseteq F$ 이면 $G-F$ 는 연결된 그래프임을 m 에 대한 수학적 귀납법으로 보인다. $m=2$ 인 경우는 당연히 성립하고, $m=3$ 인 경우는 $G(2^3, 4)$ 의 에지 연결도가 3이고 super- λ 이므로 성립한다. $m \geq 4$ 이라고 가정한다. $X = \{(v_j, v_{j'}) \mid j+1 \equiv j' \pmod{2^m}\}$ 이라고 두면, X 는 $G(2^m, 4)$ 의 해밀톤 사이클을 이룬다. $|X \cap F| < 2$ 인 경우는 $G(2^m, 4)$ 가 당연히 연결되어 있으므로, $|X \cap F| \geq 2$ 라고 가정한다. G_j 의 에지 집합을 E_j 라고 하고, G_i 와 G_j , $j \equiv i+1 \pmod{4}$ 사이에 있는 에지를 $X_{i,j}$ 이라고 한다. 그리고 $F_i = E_i \cap F$, $F_{i,j} = X_{i,j} \cap F$ 라고 둔다. G_i 에서 F_i 에 속한 에지를 제거한 그래프를 $G_i - F_i$ 라고 쓰기로 한다.

경우 1 모든 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $G_i - F_i$ 가 연결된 그래프. 먼저 $F_{i,j} = X_{i,j}$ 를 만족하는 $F_{i,j}$, $0 \leq i \leq 3$ 은 하나 이하임을 보인다. 만약 둘 이상이라면, $|F| \geq 2^{m-2} + 2^{m-2} = 2^{m-1}$ 이 되어, $|F| \leq 2m-3$ 이라는 가정에 모순이다. 따라서 $G-F$ 는 연결된 그래프이다.

경우 2 어떤 i , $0 \leq i \leq 3$ 에 대해서 $G_i - F_i$ 가 연결된 그래프가 아님. 일반성을 잃지 않고 $G_0 - F_0$ 이 연결된 그래프가 아니라고 가정한다. $|F_0| \geq m-2$ 이다. 다른 $G_i - F_i$, $1 \leq i \leq 3$ 은 각각 연결된 그래프이다: 만약 그렇지 않다면, $|F| \geq m-2 + m-2 + |X \cap F| \geq 2m-2$ 이므로, $|F| \leq 2m-3$ 이라는 가정에 모순이다. 또한 $G_i - F_i$, $1 \leq i \leq 3$ 은 서로 연결되어 하나의 연결된 요소 C 에 속한다: 만약 그렇지 않다면, $|F| \geq m-2 + 2^{m-2}$ 인데 이 또한 모순이다. $G_0 - F_0$ 에 속한 크기가 최소인 연결된 요소의 정점 집합을 R 이라고 하자.

경우 2.1 $|R| \geq 2$. 귀납적 가설에 의해서 $|F_0| \geq 2(m-2) - 2$ 이다. $G_0 - F_0$ 의 연결된 요소는 모두 C 에 속함을 보인다. 만약 C 에 속하지 않는 연결된 요소 R' 이 있다면, R' 에 속한 정점에 인접하고 X 에 속한 모든 에지는 F 에 포함되어야 하므로, $|F| \geq 2(m-2) - 2 + 2|R'| \geq 2m-2$ 이므로 $|F|$ 의 가정에 모순이다. 따라서 $G-F$ 는 연결된 그래프이다.

경우 2.2 $|R| = 1$. $|F_0| \leq 2(m-2) - 3 = 2m-7$ 인 경우는 귀납적 가설에 의해서 $G_0 - F_0$ 는 2개의 연결된 요소를 가지고, 다른 연결된 요소 R' 의 크기는 $|R'| = 2^{m-2} - 1$ 이므로 경우 2.1과 같이 R' 은 C 에 속함을 보일 수 있다. $|F_0| \geq 2m-6$ 인 경우는 $|F - F_0| \leq 3$ 이므로, 정점의 수가 2 이상인 연결된 요소는 C 에 속하고 정점의 수가 1인 최대 하나의 연결된 요소 R 만이 C 에 속하지 않을 수 있다. 따라서 두 경우 모두 $G-F$ 의 연결된 요소의 수는 2 이하이고, $K(x) \not\subseteq F$ 이면 $G-F$ 는 연결된 그래프가 된다. 여기서, $R = \{x\}$ 이다. \square

4 결론

이 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 와 하이퍼큐브 Q_m 의 고장 감내에 대한 결정적 척도를 조사하고 분석하였다. 이것을 정리하면 표 1과 같다. superconnectivity나 restricted connectivity 측면에서는 같고, toughness나 scattering number 측면에서는 $G(2^m, 4)$ 가 Q_m 보다 우수한 것으로 나타났다. $G(2^m, 4)$ 의 toughness, vertex-integrity, binding number를 분석하는 것은 앞으로의 연구 과제이다. 다만 $G(2^3, 4)$ 의 vertex-integrity와 binding number는 각각 6과 $7/5$ 로 Q_3 의 5와 1보다 크다.

표 1 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 와 하이퍼큐브 Q_m 의 고장 감내도 비교 ($m \geq 3$)

		$G(2^m, 4)$	Q_m
노드의 수		2^m	2^m
분지수		m	m
superconnectivity	super- κ	yes	yes
	super- λ	yes	yes
toughness $t(G)$		$4/3 \leq t(G) \leq 5/3$	1
scattering number $sc(G)$		$2 - m$	0
vertex-integrity $I(G)$?	$O(2^m \log m / \sqrt{m})$
binding number $b(G)$?	1
restricted connectivity	$\kappa'(G)$	$2m - 2$	$2m - 2$
	$\lambda'(G)$	$2m - 2$	$2m - 2$

참고문헌

- [1] 박 정흠, 좌 경룡, “재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 사이클과 그래프 Invariant,” *한국정보과학회 논문지* **26(8)**, pp. 999-1008, 1999.
- [2] 정 성우, 김 숙연, 박 정흠, 좌 경룡, “Recursive Circulant 그래프의 연결도,” *한국정보과학회 봄 학술발표논문집* **19(1)**, pp. 591-594, 1992.
- [3] K.S. Bagga, L.W. Beineke, W.D. Goddard, M.J. Lipman, and R.E. Pippert, “A survey of integrity,” *Discrete Applied Mathematics* **37/38**, pp. 13-28, 1992.
- [4] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fabrega, M.A. Fiol, “Superconnectivity of bipartite digraphs and graphs,” *Discrete Mathematics* **197/198**, pp. 61-75, 1999.
- [5] F.T. Boesch and J.F. Wang, “Super line-connectivity properties of circulant graph,” *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* **7**, pp. 89-98, 1986.
- [6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.
- [7] W.H. Cunningham, “Computing the binding number of a graph,” *Discrete Applied Mathematics* **27**, pp. 283-285, 1990.
- [8] A.-H. Esfahanian, “Generalized measures of fault tolerance with application to n-cube networks,” *IEEE Trans. Computers* **38(11)**, pp. 1586-1591, 1989.
- [9] D. Kratsch, T. Kloks, and H. Muller, “Measuring the vulnerability for classes of intersection graphs,” *Discrete Applied Mathematics* **77**, pp. 259-270, 1997.
- [10] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, “Recursive circulants and their embeddings among hypercubes,” *Theoretical Computer Science* **244**, pp. 35-62, 2000.

- [11] D. A. Reed and R. M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.
- [12] A.M. Robertshaw and D.R. Woodall, "Binding number conditions for matching extension," *Discrete Mathematics* **248**, pp. 169–179, 2002.
- [13] <http://www.math.fau.edu/locke/unsolved.htm>