SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LUCA PRATELLI

Deux contre-exemples sur la convergence d'intégrales anticipatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 110-112

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__110_0>

Deux contre–exemples sur la convergence d'intégrales anticipatives

LUCA PRATELLI
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Via Buonarroti 2, I–56127 Pisa

On se place dans les hypothèses de [1]. On considère donc l'espace Ω des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, le processus canonique

$$W = (W_t)_{0\leq t\leq 1}$$

(défini par $W_t(\omega) = \omega(t)$), la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1}$ associée à ce processus, et l'unique loi P sur $\mathcal{F}_1$ qui rend W un mouvement brownien issu de l'origine. Une variable aléatoire réelle F sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ est dite ***régulière*** si on peut trouver une famille finie $t_1, \ldots, t_m$ de points de $[0,1]$ et un élément f de $C_p^\infty(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$, tels que l'on ait

$$F = f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_m}).$$

On désigne par $\mathcal{S}$ la classe des variables aléatoires régulières.

Premier contre–exemple. On se propose de construire une suite (F^n) d'éléments bornés de $\mathcal{S}$ qui possède les propriétés suivantes:

(a) La suite (F^n) converge uniformément vers 0.

(b) Les processus DF^n sont constants par rapport au temps et uniformément bornés.

(c) La suite des intégrales de Skorokhod $\int_0^1 F^n \bullet dW$ ne converge pas en loi vers la constante 0.

Il en résultera que les Corollaires 2.1 et 2.2 du Théorème 1.1 de [1] (donc *a fortiori* le Théorème 1.1 lui même) sont faux.

Pour construire une suite $(F^n)_{n\geq 1}$ avec les propriétés désirées, posons, pour tout entier n strictement positif,

$$F^n = n^{-1} \sin(nW_1). \tag{1}$$

On a alors, pour tout élément s de $[0,1]$,

$$D_s F^n = \cos(nW_1). \tag{2}$$

Les propriétés (a), (b) découlent immédiatement des relations (1), (2). On a en outre (voir [2], Th. 3.2)

$$\int_0^1 F^n \bullet dW = n^{-1} W_1 \sin(nW_1) - \cos(nW_1),$$

de sorte que la propriété (c) résulte de la relation suivante:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\cos^2(nW_1)\right] &= \tfrac{1}{2}\left(1+\mathbf{E}\left[\cos(2nW_1)\right]\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(1+\exp\left(-2n^2\right)\right).\end{aligned}$$

Deuxième contre-exemple. On se propose maintenant de construire une suite (u^n) de processus possédant les propriétés suivantes:

(α) La suite (u^n) converge, presque sûrement et dans $L^2([0,1]\times\Omega)$, vers W.

(β) Pour tout n, l'intégrale d'Itô de u^n coïncide avec celle de Stratonovich:

$$\int_0^t u^n\,dW = \int_0^t u^n \circ dW. \tag{3}$$

(γ) Les sommes de Riemann "à la Stratonovich", relatives aux processus u^n et aux différentes subdivisions de $[0,1]$, forment un ensemble borné dans $L^2(P)$.

Pour une telle suite (u^n), le premier membre de (3) convergera en probabilité, lorsque n tend vers l'infini, vers

$$\int_0^t W\,dW = \int_0^t W\circ dW - \frac{1}{2}t\,.$$

La suite (u^n) montrera donc que la version "à la Stratonovich" du Théorème 1.1 de [1] est, elle aussi, fausse.

Pour construire une suite (u^n) avec les propriétés désirées, posons, pour tout entier n strictement positif,

$$u^n_t = W_{\tau_n(t)}, \quad \text{avec} \quad \tau_n(t) = [t-(1/n)]^+.$$

On vérifie immédiatement qu'avec cette définition les conditions (α), (β) ci-dessus sont remplies. Occupons nous de la condition (γ).

Etant donnés une suite finie $t_0,\dots,t_m$ de points de $[0,1]$, avec

$$0=t_0<\cdots<t_m=1,$$

un entier n strictement positif et un élément t de $[0,1]$, considérons la "somme de Riemann" $S=\sum_{i=1}^m X_i$, où

$$X_i = \left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)(t_i-t_{i-1})^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} u^n_s\, I_{[0,t]}(s)\,ds.$$

Il suffira de montrer que la norme de S dans $L^2(P)$ est majorée par une constante universelle. A cet effet, commençons par remarquer que l'on a, pour tout i,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X_i\,|\,\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] &= (t_i-t_{i-1})^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathbf{E}\left[\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)u^n_s\,|\,\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] I_{[0,t]}(s)\,ds\\ &\le (t_i-t_{i-1})^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[s-t_{i-1}]^+\,ds = \frac{1}{2}(t_i-t_{i-1})\,.\end{aligned}$$

En appliquant deux fois cette remarque, on trouve, pour tout couple i, j d'entiers distincts (compris entre 1 et m)

$$\mathbf{E}[X_i X_j] \le \frac{1}{4}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}).$$

En outre, pour tout indice i, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_i^2] &\le \mathbf{E}\left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} W_{\tau_n(s)}^2 \, ds\right] \\
&= (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{E}\left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 W_{\tau_n(s)}^2\right] ds \\
&\le \left(\mathbf{E}\left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^4\right]\right)^{\frac{1}{2}} (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\mathbf{E}\left[W_{\tau_n(s)}^4\right]\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&= 3 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau_n(s) \, ds.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S^2] &= \sum\nolimits_{i \neq j} \mathbf{E}[X_i X_j] + \sum\nolimits_i \mathbf{E}[X_i^2] \\
&\le \frac{1}{4} + 3 \int_0^1 \tau_n(s) \, ds \le \frac{1}{4} + \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BOBADILLA, R. REBOLLEDO, E. SAAVEDRA, *Sur la convergence d'intégrales anticipatives*, Sém. Prob. XXVI, LN 1526, 1992, p. 505–513.

[2] D. NUALART, E. PARDOUX, *Stochastic Calculus with Anticipating Integrands*, Probability Theory and Related Fields 78 (1988), 80–129.