

Die physiologischen Grundlagen der Geometrie von Euklid.

Eine Lösung des Raumproblems.

Von

E. von Cyon.

Inhalt.

	Seite
1. Einleitung	576
2. Der Raumsinn und die Richtungsgefühle. Innervations- und Bewegungsempfindungen. Die Augenstellungen und die Ebenen der Bogengänge	581
3. Der bisherige Stand des Raumproblems	592
4. Die Nicht-Euklid'schen Raumformen	599
5. Der physiologische Ursprung der Definitionen und Axiome von Euklid	610
6. Eine Lösung des Raumproblems	625

1. Einleitung.

Plato hat der Mathematik eine Mittelstellung zwischen der philosophischen und der sinnlichen Erkenntnis angewiesen. Und dies mit Recht. Der Philosoph postuliert, der Mathematiker deduciert, der Naturforscher entscheidet mit Hilfe der sinnlichen Erkenntnis, ob und welche Postulate, also auch, welche aus ihnen abgeleiteten Sätze auf reeller Wahrheit beruhen. Seitdem die Leistungsfähigkeit unserer Sinnesorgane durch Erfindung der Teleskope, Mikroskope und vollkommener Mess- und Wäginstrumente bedeutend gesteigert wurde und die Naturforschung, immer mehr vom mathematischen Denken durchdrungen, es gelernt hat, die höhere Analysis anzuwenden, um die weitesten Konsequenzen aus ihren Erfahrungssätzen zu ziehen, hat sie eine Reihe bedeutender Erfolge bei der Lösung von Welt- und Lebensproblemen gefeiert, die den menschlichen Geist von jeher beschäftigt haben.

Die Frage nach dem Ursprunge unserer räumlichen Anschauungen, das sogenannte Raumproblem ist erst im Beginne des

vorigen Jahrhunderts in das Bereich der exacten Naturforschung, und zwar der Physiologie der Sinnesorgane übertragen worden. Die seit Jahrtausenden anhaltenden Erörterungen, die Lösung des Raumproblems betreffend, drehten sich in letzter Instanz um die Frage, ob unsere geometrischen Vorstellungen nur auf den Erfahrungen unserer Sinnesorgane beruhen, oder ob sie erst durch gewisse, unserem Geiste (oder Gehirne) innewohnenden aprioristischen Ideen und Begriffe bedingt werden. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Alternativen konnte nur die experimentelle Physiologie geben, wie es auch Aufgabe der Physiologen war, eventuell den Mechanismus aufzuklären, dank welchen die Erregungen unserer Sinnesorgane uns bestimmte geometrische Formen erkennen lassen.

Mit welchem Erfolge mehrere hervorragende Physiologen im Laufe des vorigen Jahrhunderts dieser Aufgabe nachzukommen suchten, ist bekannt. Es genügt, nur an die Namen von Purkinje, Johannes Müller, Donders, Helmholtz, Hering und Wundt zu erinnern. Wenn es ihnen trotz der erzielten Erfolge doch nicht gelingen wollte, eine definitive Lösung des Problems zu geben, so lag es vorzugsweise daran, dass sie ihre Studien über die Wahrnehmungen unserer Sinnesorgane fast ausschliesslich auf den Gesichtssinn beschränkten. Ihre Lösungen galten also nur dem Sehraume. Die wirkliche Lösung lag aber nicht im Gesichtssinne, überhaupt in keinem der fünf geläufigen Sinnesorgane, sondern in einem sechsten Sinne — dem Raumsinne. Dieser ursprünglichste und in der Thierwelt verbreitetste Sinn ist ausser Acht gelassen worden, — weil seine Thätigkeit eine fast ununterbrochene ist, weil seine Empfindungen, von immer gleicher Art und gleicher Intensität, uns nur Anschauungen über drei unveränderliche Eigenschaften (oder Eigenthümlichkeiten) des unendlichen Weltraums geben. Seine Empfindungen sind die der drei Richtungen, der sagittalen (Vorne und Hinten) der transversalen (Rechts und Links) und der verticalen (Oben und Unten). Auf diesen drei Richtungsempfindungen beruhen unsere Vorstellungen und Begriffe der drei Ausdehnungen des Raumes resp. der drei Abmessungen der in ihnen sich bewegenden festen Körper.

Die Empfindungen dieser drei Richtungen sind uns so geläufig, so frühzeitig angewöhnt, dass sie meistens unbewusst bleiben. Im Laufe

der ontogenetischen — vielleicht sogar der phylogenetischen — Entwicklung sind sie ganz instinctiv geworden. Sogar der Physiolog fragte sich kaum, worauf diese Empfindungen beruhen. Und wenn ihrem Ursprung nachgeforscht wurde, so lautete die geläufige Antwort: in unseren Bewegungs- oder Innervationsempfindungen. Die einfache Ueberlegung, dies sei schon darum unmöglich, weil die Richtung der Bewegung vorausgeht, die Richtungsempfindung schon da sein muss, damit eine Bewegung in einer bestimmten Richtung stattfindet, ist nicht gemacht worden. Der Begriff der Bewegungsempfindung ist auch an sich unbestimmt. Gewisse Empfindungen, die man darunter versteht, sind überhaupt nicht vorhanden. Die Vorhandenen sind kaum im Stande, Aufschluss über die Richtung der Bewegung zu geben¹⁾.

In der Wirklichkeit werden uns die Empfindungen der drei Grundrichtungen durch ein specielles Sinnesorgan ad hoc geliefert, das, wie meine seit drei Jahrzehnten verfolgten Versuche und Beobachtungen in unzweifelhafter Weise festgestellt haben, seinen Sitz im Ohrlabyrinth hat. Bei den ersten Wiederholungen der berühmten Versuche von Flourens über die Folgen der Durchtrennungen der häutigen Bogengänge wurde meine besondere Aufmerksamkeit, einerseits auf die grosse Gesetzmässigkeit gelenkt, mit welcher Verletzungen oder Reizungen eines Bogengangpaares Bewegungen der Thiere in der Ebene, in welcher das Paar gelegen ist, hervorrufen, — andererseits auf die eigenthümliche Lage der drei Bogengangpaare in drei senkrecht zu einander stehenden Ebenen, entsprechend den drei Ausdehnungen des Raumes. Ich vermochte durch gewisse Operationen sowohl Tauben als Frösche dazu zwingen, ihre Bewegungen nur in bestimmten Richtungen auszuführen. Künstlich erzeugte ungewohnte Kopfstellungen, sowie Verwirrungen des Sehraumes, hervorgerufen durch prismatische Brillen, veranlassten bei Thieren analoge Zwangsbewegungen. In der ersten Mittheilung dieser Versuche sprach ich daher die Vermuthung aus, dass die Bogengänge mit den Raumempfindungen und Raumvorstellungen in Beziehung stehen. (Ib, 261.)

Die Entdeckung des dominirenden Einflusses, welchen die Bogengänge auf den oculomotorischen Apparat auszuüben vermögen (1875), indem jede Erregung eines Bogenganges Bewegungen der Augäpfel

1) Siehe nächstes Capitel.

auslöst, die durch die Achse des Bogenganges bestimmt waren, sowie das gleich darauf (1876) festgestellte Vermögen des Ohrlabyrinths, die Innervationsstärken des gesammten Muskelsystems zu bestimmen und zu reguliren, liessen die im Jahre 1873 ausgesprochene Vermuthung zur Gewissheit werden. Mit Hülfe der darauf folgenden Untersuchungen vermochte ich dann die Existenz eines besonderen Sinnesorgans im Ohrlabyrinth festzustellen, welches uns die verschiedenen Richtungsempfindungen liefert. In der im Jahre 1878 (4 und 1b) erschienenen ausführlichen Mittheilung meiner darauf bezüglichen Untersuchungen entwickelte ich die Theorie dieses Sinnesorgans, nach welcher die Bogengänge das periphere Organ des sechsten Sinnes, des Raumsinnes, seien. Der N. vestibularis wurde als Raumnerv, der N. Cochlearis als alleiniger Hörnerv bezeichnet. Die Wahrnehmungen dieses Sinnesorgans dienen den Thieren zur Orientirung ihrer Bewegungen in den drei Richtungen des Raumes und zur Localisirung der Gegenstände im äusseren Raume. Der Mensch verwendet die Wahrnehmungen noch ausserdem zur Bildung seiner Vorstellungen von den drei Ausdehnungen des Raumes. Sämmtliche Empfindungen unserer anderen Sinnesorgane, soweit sie auf die Anordnungen der uns umgebenden Gegenstände im Raume und auf die Stellung unseres eigenen Körpers in demselben Bezug haben, werden auf das ideale System von drei rechtwinkligen Coordinaten übertragen, das uns direct durch die Empfindungen des Bogengangapparates geliefert wird.

Die nachgewiesene Existenz eines derartigen Sinnesorgans ermöglichte die Lösung desjenigen Theils des allgemeinen Raumproblems, das bis dahin für den Philosophen und den Mathematiker die Klippe bildete, an der alle Erklärungsversuche scheiterten: Wodurch ist der menschliche Geist gezwungen, seine sämmtlichen Wahrnehmungen sich in der geometrischen Form eines dreidimensionalen Raumes vorzustellen?

War es schon damals möglich, die Ergebnisse meiner Untersuchungen für das allgemeine Raumproblem zu verwerthen? Dies schien geradezu ein Erforderniss zu sein, und beabsichtigte ich auch, sofort an diese Aufgabe heranzutreten (4, 59). Manche Umstände verzögerten aber die Ausführung dieses Vorhabens. Wie jede neue wissenschaftliche Errungenschaft, die dem angewöhnten Ideengang und den herrschenden Auffassungen widerspricht, hat auch die Demonstration eines speciellen Sinnesorgans für die Raumempfindungen im

Beginne einiges Befremden hervorgerufen. So eindeutig die betreffenden experimentellen Ergebnisse auch waren, — deren tatsächliche Richtigkeit von Niemand bestritten, im Gegentheil von mehreren Seiten bestätigt und erweitert wurde, — so konnte man die Existenz eines speciellen Sinnesorgans, dazu bestimmt, uns Raumpfindungen zu geben, nicht leicht anerkennen. Auch herrschten zu jener Zeit ganz sonderbare Hypothesen über die Functionen des Ohrlabyrinths, die zwar nur auf einer kleinen Anzahl missverständlicher Beobachtungen und roh ausgeführter Versuche beruhten, aber trotzdem (oder eben desswegen) schnell populär geworden sind.

Die polemischen Auseinandersetzungen¹⁾ mit den Vertretern dieser Hypothesen erforderten neue experimentelle Forschungen, deren Ergebnisse sämmtlich die Grundlagen meiner Theorie befestigt und erweitert haben. Mehrere wichtige Voraussetzungen, die ich auf Grund der früheren Ergebnisse formulirt habe, sind seitdem, theils durch meine eigenen, theils auch durch die experimentellen Untersuchungen anderer Forscher vollauf bestätigt worden. (So z. B. die Untersuchungen von Yves Delage über die Rolle der Otocysten bei Wirbellosen [12], die von mir über die Fähigkeit der Neunaugen, mit nur zwei Bogengangpaaren sich nur in zwei Richtungen des Raumes zu orientiren [4, 93], die von Rawitz über die Orientirung der japanischen Tanzmäuse, die nur ein Paar normaler Bogengänge besitzen [13], und endlich die Versuche an Taubstummen von James, Strehl, Brück u. A.)

So haben sich mit der Zeit so ziemlich alle überhaupt in Betracht kommenden Forscher, die auf diesem Gebiete selbstständig experimentirt haben, allmählig zu der Ueberzeugung bekehrt, das Ohrlabyrinth sei ein Sinnesorgan für die Orientirung der Thiere in den verschiedenen Richtungen des Raumes (7, 283 ff.). Auch dass der Bogengangapparat die Innervation des gesammten Systems der willkürlichen Muskeln beherrscht — wie ich dies im Jahre 1876 festgestellt habe (2 und 3) —, wird jetzt auch so ziemlich allgemein anerkannt (siehe 7, 284).

Seit der ersten Entwicklung meiner Raumtheorie hat auch das allgemeine Raumproblem, wenn nicht eine volle Umgestaltung, so doch eine gewaltige Verschiebung durch die Entwicklung der Nicht-Euklidischen Geometrie erfahren.

1) Siehe den kritischen Theil meiner Arbeiten 5 und 6.

Die Mathematiker, welche seit Jahrtausenden bestrebt waren, die natürlichen Grundlagen der Geometrie von Euklid zu finden und Beweise für die absolute Gewissheit ihrer Axiome zu häufen, machten plötzlich kehrt. Für die meisten Begründer der Nicht-Euklidischen Geometrie sollen jetzt diese Axiome nur für bestimmte Raumformen gelten. Es sind neue Raumformen von Lobatschewsky und Riemann ausgedacht worden, auf welche die Axiome Euklids nicht anwendbar sind. Für diese Raumformen wird jetzt bei der Lösung des allgemeinen Raumproblems die Gleichwerthigkeit mit dem Euklidischen Raume vindicirt. Ja, es wird sogar die Frage gestellt, ob der Weltraum nicht ein vier- oder fünfdimensionaler sei, oder ob er nicht etwa die Form einer pseudosphärischen Fläche besitze (Clifford).

Unter solchen Umständen musste bei der Verwerthung der Functionen des Raumsinnesorgans zur Lösung des Raumproblems ganz besondere Rücksicht auf diejenigen Lösungen genommen werden, welche die eminentesten Vertreter der neuen, „imaginären“ Geometrie, dem Beispiele von Helmholtz folgend, vorgeschlagen haben. So kam es, dass in dieser Untersuchung den Nicht-Euklidischen Raumformen eine besondere Besprechung gewidmet werden musste, — natürlich nur, insofern deren Geometrie für das allgemeine Raumproblem in Betracht kommt.

Aufgabe der Psychophysiologie ist es, an der Hand der festgestellten Verrichtungen des Ohrlabyrinths zu entscheiden, ob unsere sinnlichen Wahrnehmungen der Eigenschaften des äusseren Raumes mit den Sätzen der Geometrie von Euklid, oder mit denen der neuen Geometrie von Lobatschewsky und Riemann-Helmholtz übereinstimmen. Es ist hier der Versuch gemacht, dieser Aufgabe Genüge zu leisten und so der Physiologie ein Gebiet zurückzuerstatten, das Helmholtz im Jahre 1870 durch seinen berühmten Vortrag, gehalten im Docenten-Verein in Heidelberg, den Mathematikern überliefert hat.

2. Der Raumsinn und die Richtungsgefühle. Innervations- und Bewegungsempfindungen. Die Augenstellungen und die Ebenen der Bogengänge.

Die Ergebnisse der in den letzten Jahren ausgeführten Versuche über die Verrichtungen des Ohrlabyrinths wurden in meiner letzten

Mittheilung in diesem Archiv ausführlich auseinandergesetzt und in folgenden drei Sätzen resümirt (7 und 9).

1. Die eigentliche Orientirung in den drei Ebenen des Raumes, d. h. die Wahl der Richtungen, in denen unsere Bewegungen stattfinden sollen, sowie die Coordinirung der für das Einschlagen und Einhalten dieser Richtungen nothwendigen Nervencentra bildet die ausschliessliche Function des Bogengangapparates.

2. Die dabei erforderliche Regulirung der Innervationsstärken sowohl für diese Centra als für diejenigen, welche die Erhaltung des Gleichgewichts und die sonstigen willkürlichen Bewegungen beherrschen, geschieht vorzugsweise durch Vermittlung des Ohrlabyrinths.

Beim Ausfall des Ohrlabyrinths kann diese Regulirung, wenn auch in weniger vollkommener Weise, durch die anderen Sinnesorgane (Auge, Tastorgane u. s. w.) ersetzt werden.

3. Die durch die Erregung der Bogengänge erzeugten Empfindungen sind Richtungsempfindungen. Sie gelangen zur bewussten Wahrnehmung nur bei auf sie gerichteter Aufmerksamkeit. Diese Empfindungen geben uns direct die Begriffe von den drei Hauptrichtungen des Raumes, der sagittalen (Vorn und Hinten), der verticalen (Oben und Unten) und der lateralen oder transversalen (Rechts und Links). Sie geben uns also direct die Anschauung eines Systems von drei zu einander senkrechten Coordinaten, die den drei Ausdehnungen des Raumes entsprechen.

Thiere mit nur zwei Bogengangpaaren (z. B. *Petromyzon fluviatilis*) erhalten Empfindungen von nur zwei Richtungen und vermögen sich daher nur in diesen zu orientiren (4 und 1b, 337 ff.). Thiere mit einem Bogengangpaar (gewisse japanische Tanzmäuse und wahrscheinlich *Myxine*) haben Empfindungen nur der einen Richtung; sie orientiren sich nur in dieser (7, 212 ff., 9).

Diese drei Sätze geben einfach die thatsächlichen Ergebnisse der zahllosen Versuche und Beobachtungen wieder. Ihre Verwerthung für den Ursprung unserer Vorstellungen vom Raume erfolgt erst weiter unten, nachdem durch Darlegung der jetzigen Stellung der Philosophen und Mathematiker zum Raumproblem zuerst die zu lösenden Aufgaben näher präcisirt sein werden. Hier soll nur

die rein physiologische Bedeutung dieser Verrichtungen näher erörtert werden.

Wie bei allen äusseren Sinnesorganen verlegen wir auch die Ursachen der Empfindungen der Ampullennerven nach aussen. Wir erkennen, dank diesen Richtungsempfindungen, die drei Ausdehnungen des Raumes und die drei Abmessungen der festen Körper, Tiefe, Höhe und Breite. Wenn wir jede Richtungsempfindung in zwei zerlegen, z. B. die verticale in oben und unten, so will dies nur die Beziehungen der betreffenden Richtung des äusseren Raumes zu unserem bewussten Ich bezeichnen. Unser Bewusstsein entspricht in diesem Falle dem O-Punkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems. In ihm wechseln die Grundrichtungen ihr Vorzeichen. Es wäre daher nützlich, von nun an Oben, Rechts und Vorn als die positiven verticalen, transversalen und sagittalen Richtungen, Unten, Links und Hinten als die negativen zu bezeichnen. Wenn vom Sinne einer Richtung gesprochen wird, so bezieht sich dies nur auf das Vorzeichen derselben.

Diese Unterscheidungen bieten ausser dem allgemeinen¹⁾ noch ein rein physiologisches Interesse: sämtliche uns bis jetzt bekannte Täuschungen des sechsten Sinnes bestehen in der That nur in Täuschungen über dieses Vorzeichen.

Wir täuschen uns z. B. beim Eisenbahnfahren nur darüber, ob wir nach vorn oder nach rückwärts fahren, — nie verwechseln wir aber die sagittale mit der transversalen Richtung. Bei der Ballonfahrt können wir die Empfindung des Aufsteigens verwechseln mit der des Absteigens, — nie aber mit der der seitlichen Bewegung. Auch beim Untertauchen unter's Wasser mit geschlossenen Augen und verstopften Ohren, wobei die vollständigste Verwirrung der Richtungsempfindungen stattfindet (5, 111), irren wir uns über den Sinn der Richtungen²⁾.

Der Ursprung unserer Richtungsempfindungen wurde bisher dem Gesichtssinn oder den sogenannten Bewegungsempfindungen zugeschrieben. Auf die Rolle des Gesichtssinns wird unten zurück-

1) Siehe Cap. 5 S. 512 den Einwand von Helmholtz.

2) Ueber den persönlichen Fehler bei Bestimmungen der Richtungen im dunklen Raume hoffe ich nächstens ausführlicher berichten zu können. Siehe auch über ähnliche Täuschungen das Capitel IX von 5.

gekommen. Zuerst sollen die Bewegungsempfindungen, denen besonders die Nichtphysiologen eine so grosse Bedeutung zuschreiben, berücksichtigt werden.

Der Physiolog kennt streng genommen nur die eine Art regelmässiger Wirkungen von centripetalen Muskelnerven: das sind diejenigen reflectorischen Aenderungen im Herzschlag und Blutdruck, welche durch die Herz- und Gefässnerven vermittelt werden. Diese Wirkungen sind wahrscheinlich dazu bestimmt, die Blutmengen in der Muskelsubstanz in den verschiedenen Phasen ihrer Thätigkeit und Ruhe zu reguliren. Zeitweise erhalten wir von den Muskeln Gefühle der Ermüdung, der Steifigkeit oder der Spannung, besonders nach deren Ueberanstrengung, und wenn deren Zusammenziehungen sich grössere Widerstände entgegenstellen. Vom Muskelschmerz als pathologischer Erscheinung kann hier abgesehen werden.

Irgend welche Bewegungs- oder Contractionsempfindungen, die man als Muskelgefühle beschreibt, erhalten wir keine. Deren eventuelle Verwerthung zur Bildung von Richtungsbegriffen ist also vollständig ausgeschlossen¹⁾. Man griff daher, um den Muskelcontractionen die gewünschte Rolle zu erhalten, zu den sogenannten Innervationsempfindungen. Nicht die Contraction selbst, sondern die Innervation der Muskeln soll zu unserem Bewusstsein gelangen. Die Lehre von den Innervationsempfindungen der Augenmuskeln ist besonders von Wundt in meisterhafter Weise begründet und entwickelt worden (14). So verlockend auch eine solche Hypothese erscheinen mag, einer näheren Prüfung kann sie aber kaum widerstehen. Was zuerst die Innervationen der Kopf-, Rumpf- und Extremitätenmuskeln anbelangt, so könnten solche Innervationsempfindungen, wenn sie auch existirten, uns von keinerlei Nutzen bei der Bestimmung von Richtungen sein, und zwar aus folgendem Grunde. Bei jeder auch noch so einfachen Bewegung contrahiren sich, ausser denjenigen Muskeln, die direct die gewünschte Bewegung realisiren sollen, noch eine grosse Anzahl anderer Muskeln, so z. B. ihre Antagonisten, um eine Ueberschnappung der Bewegung zu verhindern, sodann diejenigen Hilfsmuskeln, welche die Extremitäten oder den Rumpf zu fixiren haben²⁾, u. s. w.

1) Es ist oben S. 578 schon hervorgehoben worden, dies sei schon aus dem Grunde unmöglich, dass die Richtung der Bewegung voraus ist.

2) Vor mehr als 35 Jahren habe ich diese Verhältnisse näher erörtert

Zwei Bewegungen, deren Endziel und Richtung ganz verschieden sind, können durch die Innervation derselben Muskeln ausgeführt werden. Wie sollen uns unter diesen Umständen etwaige Innervationsempfindungen über das Ziel oder die Richtung einer Bewegung unterrichten?

Aber auch bei den Augenmuskeln stellt sich dieselbe Schwierigkeit einer Verwerthung der Innervationsempfindungen für das Erkennen der Richtungen entgegen: die antagonistischen Muskeln spielen ja auch bei den Aenderungen der Augenstellung eine unentbehrliche Rolle, — gleichgültig, ob durch Erregung oder Hemmung ihrer Bewegungen.

Die Innervationsempfindungen als solche wären also nur schwer verwendbar für die Bestimmung der Richtung: sie müssten denn gleichzeitig uns über die Intensitätsunterschiede der Innervation jedes einzelnen Muskels unterrichten! Die Complicirtheit einer solchen Einrichtung ist aber kaum zu übersehen. Die unzähligen unbewussten Empfindungsdifferenzen sollten im Stande sein, sowohl die Richtung der Blicklinie anzugeben als auch uns zu ermöglichen, um die Gegenstände im Sehraum genau zu localisiren und, endlich sogar unsere Begriffe eines dreidimensionalen Raumes zu bilden! Trotz der evidenten Unwahrscheinlichkeit eines solchen Mechanismus konnten bis jetzt die Vertreter der empiristischen Theorien in der physiologischen Optik dessen Annahme doch nicht entbehren.

E. Hering war wohl der einzige Physiologe, der die Annahme solcher unwahrscheinlicher Vorrichtungen zu umgehen suchte, indem er den Nervenenden der Netzhaut die Fähigkeit zugeschrieben hat, die Breite, Höhe und Tiefe direct wahrzunehmen. Dadurch hat Hering gleichzeitig das Raumproblem auf den für den Naturforscher allein zulässigen Boden gestellt: ohne die Existenz specieller Sinnesvorrichtungen für die Erkenntniss der drei Richtungen des Raumes ist in der That eine befriedigende Lösung des Raumproblems unmöglich.

Die gegenseitigen Einwände, welche die Vertreter der empiristischen und der nativistischen Anschauungen gegen die Hypothesen von Hering und Helmholtz vorgebracht haben, sind be-

und begründet, und zwar sowohl in meiner Monographie über die *Tabes dorsalis* (Berlin 1867) wie in meiner Dissertation „*De Choreae Indole*“ etc. Berlin 1864.

kannt und brauchen hier nicht erörtert zu werden. Diese Einwände sind gewichtig genug, um die Entscheidung zwischen den Beiden unmöglich zu machen. Die Hering'sche Theorie besitzt den Vorzug der grösseren Einfachheit. Sie bedarf keiner weiteren Hilfs-hypothesen rein speculativer Natur und beschränkt ihre Erfahrungen zwar auf den Sehraum allein, vermag aber viel ungezwungener dieselben für den wirklichen Raum zu verwerthen. Trotz ihrer grösseren Wahrscheinlichkeit — oder vielmehr dank derselben — hat sie wenig Anhänger gefunden.

Aber weder die Hering'sche noch die Helmholtz'sche Hypothese können gegen die festgestellte Thatsache aufkommen, dass Blindgeborene genaue Richtungs- und Raumvorstellungen besitzen! Vermochte ja der blindgeborene Saunderson sogar eine Geometrie zu schreiben. Die Annahme, bei Blindgeborenen vermögen die Empfindungen der Tastorgane diejenigen des Gesichtsinns zu ersetzen, ist doch kaum ernstlich zu nehmen. Das Auge unterrichtet uns über die Lage und Bewegungen äusserer Gegenstände im weiten Sehraume; die Tastorgane — nur über die unmittelbar berührten Gegenstände im winzigen Tasträum.

Blindgeborene führen, wie Donders gezeigt hat, ganz regelmässige Augenbewegungen aus. Dies deutet schon darauf hin, dass diese Bewegungen nicht durch unsere Gesichtseindrücke ausgelöst zu werden brauchen. Wie verworren müssten auch bei einem solchen Blindgeborenen die Begriffe der Richtungen sein, wenn die „Innervationen“ seiner Augenmuskeln mit Richtungsempfindungen verbunden wären! Der Ursprung dieser Begriffe musste also nothwendiger Weise anderswo gesucht werden als in den Gesichts- und Tastorganen; dies war schon vor meinen Untersuchungen über das Ohrlabyrinth klar.

Das Auge ist auch aus mehreren Gründen viel weniger dazu angepasst, als Organ für Richtungs- und Raumpfindungen zu dienen, als das Gehörorgan: 1. Der anatomische Bau und die Lage des Bogengangapparates, sowie die bekannte Lagerung der Nervenendigungen in den Ampullen und Otocysten in drei senkrecht zu einander gestellten Ebenen sind, wie schon mehrfach auseinandergesetzt wurde, ganz besonders für die Rolle eines Sinnesorgans für den Raumsinn geeignet. 2. Der sogenannte N. acusticus besteht aus zwei, ihrem Ursprunge, ihrer Structur und ihrer centralen Verbreitung nach, ganz verschiedenen Nervenstämmen, dem

N. vestibularis, den ich als N. spatialis bezeichnet habe (4), und dem N. cochlearis, dem eigentlichen Gehörnerv. Auch entwicklungsgeschichtlich unterscheiden sich diese beiden Nerven ganz gewaltig. Während das Ohrlabyrinth am frühesten bei den niederen Thieren aufzutreten pflegt, sollen sich nach Flechsig beim Menschen die centralen Verläufe der reinen akustischen Nerven sich erst später und zwar schon nach der Geburt entwickeln.

Wie die leider nicht zu Ende geführte Untersuchung von Eichler in Ludwig's Laboratorium gezeigt hat (15), sind die Einrichtungen der Blutcirculation in dem Bogengangapparat ganz verschieden von denen in der Schnecke. Mit diesen Einrichtungen hängen wahrscheinlich die pulsatorischen Schwankungen der Endo- und Perilymphe zusammen, welche ich im Jahre 1878 zuerst beschrieben habe (4). Das Ohrlabyrinth besitzt also zwei morphologisch verschiedene und selbstständige Sinnesorgane, von denen das eine für die Tonempfindungen, das andere für Richtungs- und Raumempfindungen bestimmt ist.

Der Vorwurf, welcher der Hering'schen Theorie gemacht worden ist, es sei unzulässig, denselben Nervenfasern gleichzeitig zwei verschiedene Empfindungsweisen (Gesichts- und Richtungsempfindungen) zuzuschreiben, kann daher die Lehre vom Sitze des sechsten Sinnes im Ohrlabyrinth nicht treffen¹⁾.

3. Die Fähigkeit der Netzhaut, von der äusseren Welt Empfindungen zu erhalten, ist räumlich nur auf das vor ihr liegende Sehfeld beschränkt, während das Gehörorgan, dank der Kopfleitung im Stande ist, gleichzeitig und bei unveränderter Stellung im Raume Erregungen von allen Richtungen des Raumes zu erhalten. Um in den verschiedenen Richtungen liegende äussere Gegenstände auf die empfindlichen Stellen der Netzhaut einwirken zu lassen, müssen dagegen die Stellungen der Augen und eventuell die des Kopfes und des ganzen Körpers gewechselt werden.

4. Endlich giebt es in der Functionsweise des Gesichtsansorgans, wie auch der meisten übrigen bekannten Sinne eine Eigenthümlichkeit, von welcher das Gehörorgan frei ist. Bei Erregungen der Netzhaut, der Haut oder der Zunge wird gleichzeitig mit der

1) Es sind mehrfach Krankheitsfälle beschrieben worden, in welchen durch einseitigen Druck auf den Vestibularnerven die Fähigkeit, die Richtung zu erkennen auf der entsprechenden Seite verschwunden war, die Hörfähigkeit aber intact blieb.

Qualität der Erregung auch die Lage des Erregers empfunden. Dank der in 3. angegebenen besonderen Fähigkeit des Gehörorgans, von allen Richtungen des Raumes herkommende Erregungen gleichzeitig empfinden zu können, wird nothwendiger Weise die Lage des Erregers oder richtiger die Richtung, in der er gelegen ist, gesondert von der Qualität der Erregung empfunden. Wir nehmen den Ton sogleich wahr; von dem Orte, wo der Ton erzeugt wurde, erkennen wir zuerst nur die Richtung¹⁾. Die Ursache der Erregung sowie deren genaue Lage können wir erst nach genauerer Präcisirung dieser Richtung feststellen, und zwar mit Zuhülfenahme der anderen Sinnesorgane, — in erster Linie des Gesichtssinnes.

Der sich dabei abspielende physiologische Vorgang ist etwa folgender: Wir richten unseren Blick in der empfundenen Richtung, um die Lage und das Wesen der Erregung, d. h. des ton- oder geräuscherzeugenden Objects zu erkennen; die Erregung der Nervenenden der Ampullen löst zu diesem Zwecke Bewegungen der Augäpfel, und eventuell des Kopfes und des Rumpfes aus.

In dieser Nothwendigkeit für das Ohrlabyrinth, die Muskeln dieser Organe in Thätigkeit zu versetzen, liegt der genetische Grund für die Beherrschung der Nervencentra dieser motorischen Apparate durch die Ampullenerven.

Seitdem diese gesetzmässige Beherrschung in den siebenziger Jahren festgestellt und beschrieben wurde, ist dieselbe auch in den Vordergrund der meisten Beobachtungen an dem Bogengangapparat getreten. Niemand wollte sich aber der mühevollen Aufgabe unterziehen, meine Versuche zu wiederholen resp. zu ergänzen, um eine genauere Deutung dieser Abhängigkeit der Augenbewegungen von den betreffenden Bogengängen zu ermöglichen. Man zog es vor, meinen Behauptungen vollen Glauben zu schenken und die Erscheinung — natürlich mit Verschweigung meines Namens — als eine neu entdeckte Thatsache mitzutheilen, wobei die Deutung durch nichtssagende Bezeichnungen, wie z. B. die des Tonuslabyrinths, ersetzt wurde.

1) Das Riechorgan bietet in dieser Beziehung eine Analogie mit dem Gehörorgan; darauf beruht vielleicht seine Fähigkeit, bei niederen Thieren gleichfalls für die Orientirung zu dienen (7, 249 ff. und 10).

Um zu einer solchen Deutung zu gelangen, gibt es nur den einen sicheren Weg, nämlich nach dem eventuellen Zweck der Erscheinung zu forschen. Die absolute Gesetzmässigkeit sämtlicher Naturerscheinungen bedingt gleichzeitig deren Zweckmässigkeit. Die mit Unrecht verschmähte Teleologie wird daher immer ein wichtiges Hilfsmittel für unseren Geist sein, um zum Verständniss verwickelter Naturerscheinungen zu gelangen.

Welchen Zweck kann nun die Einrichtung haben, dass jede künstliche Erregung eines Bogengangpaares regelmässige Bewegungen der Augäpfel, des Kopfes und des Rumpfes in der Ebene dieses Bogenganges auslöst? Bei verschiedenen Thieren sind die Bewegungen des einen oder des anderen dieser Körpertheile vorherrschend. Aber, wie ich gezeigt habe, kann man jedes Thier zwingen, indem man die Bewegungen seines Körpers und Kopfes unmöglich macht, bei den erwähnten Erregungen nur Augenbewegungen auszuführen (4, 5 und 6). Die Verstellung der Blicklinie ist also der erste Zweck aller dieser von dem Bogengang ausgelösten Bewegungen. Daraus folgt: Die Richtung der Blicklinie hängt in gesetzmässiger Weise von der Qualität der Richtungsempfindung ab, welche die Erregung der betroffenen Ampullenerven erzeugt. Darin allein liegt der ganze Sinn der Abhängigkeit des oculomotorischen Apparates von dem Ohrlabyrinth¹⁾.

Für Thiere sowie für den Naturmenschen ist es ein gebietendes Erforderniss, die Ursache und den Abstand des geräuscherregenden Objectes zu erkennen, und dies sowohl für die Nothwehr als für den Angriff. Sobald sie dessen Richtung wahrgenommen haben, suchen sie mit Beihülfe des Sehorgans dieser Ursache nachzuspähen. Dabei erlernen sie allmähig, die zur Erreichung ihres Zweckes erforderlichen Muskelbewegungen auszuführen. So bildeten sich im Laufe von Jahrtausenden die reflectorischen Beziehungen zwischen den Ampullenerven und den motorischen Nerven aus, die in dem Mechanismus der Beherrschung der letzteren durch die ersteren ihren vollkommensten Ausdruck gefunden haben. Die Vertheilung der Innervationsstärken zwischen den in Thätigkeit zu versetzenden Muskeln, die Aufhebung der Hemmungen von Seiten der Antagonisten, —

1) Die Irrlehre von der sogenannten compensatorischen Natur gewisser Augenbewegungen verzögerte am längsten das klare Verständniss des ganzen Vorganges.

mit einem Worte, das ganze Spiel dieses wunderbaren Mechanismus geschieht, wie früher (7, 287 ff.) erläutert wurde, durch Ausschaltung von Widerständen, etwa in der Weise wie die Vertheilung elektrischer Kräfte zwischen zahlreichen Leitern. Dem Zwecke der Selbsterhaltung entsprechend functionirt aber dieser Mechanismus in automatischer Weise: Die Erregung der Ampullennerven vermag schon die erforderlichen Bewegungen auf rein reflectorischem Wege, ohne Betheiligung des Bewusstseins, auszulösen.

Die zeitliche Reihenfolge der sich dabei abspielenden Vorgänge zeigt, wie verfehlt es war, das Ohrlabyrinth als ein Sinnesorgan für die Stellungen des Kopfes oder für die Erhaltung des Gleichgewichts betrachten zu wollen. Es wäre dies auch eine ganz absonderliche Functionsweise. Die Bewegung der sensiblen Nerven der Muskeln, der Haut, der Gelenke, der Sehnen u. s. w. sollten, statt direct zum Bewusstsein zu gelangen, dies erst auf dem Umwege eines anderen peripheren Sinnesorgans thun!

In der Wirklichkeit bestimmen wir die Lage unserer Körpertheile im Raume mit Hilfe der Empfindungen des Ohrlabyrinths in derselben Weise, wie wir dies für die Lage der äusseren Gegenstände thun. Diese Empfindungen geben uns nur die drei Richtungen, die drei Coordinaten des Raumes an, die für die Lagebestimmung erforderlich sind¹⁾.

Diese bewusste Verwendung der Richtungsempfindungen des Bogengangapparates zur Orientirung im Raume bedarf nicht nothwendig der Beihülfe des Gesichtssinnes. Die Empfindungen der anderen sensiblen Gebilde des Körpers können genügen. Daher vermögen Blindgeborene sich zu orientiren, sowohl über die Verschiebungen ihrer einzelnen Körpertheile, als auch über die Bewegungen ihres ganzen Körpers im äusseren Raume. Im Gegentheil, bei erhaltenem Gesichtssinn und verlorenen oder gestörten Functionen des Ohrlabyrinths ist eine vollkommene Orientirung in den drei Richtungen des Raumes unmöglich.

Eine vollkommene Regulirung der Innervationsstärken der Augen- resp. Kopf- oder Körpermuskeln durch das Ohrlabyrinth muss sowohl bei der Localisirung der äusseren Gegenstände im Sehraum als auch bei unserer eigenen Orientirung stattfinden. Es fragt sich nun, ob eine Wahrnehmung dieser Innervationsstärken für

1) Diese Deutung der Rolle des Ohrlabyrinths habe ich im Gegensatze zu der Goltz'schen schon im Jahre 1873 vertreten (siehe 1a, b, 5 und 6).

das Augenmaass durchaus erforderlich ist. Der Erfolg der ausgeführten Bewegungen ist für dieses Maass freilich nicht ausreichend, wie auch die Empfindungen, die wir durch Zerrungen der Haut, Sehnen und auch durch den Bienendruck in der Augenhöhle erhalten, nur beschränkte Beihülfe beim Messen der Abstände gewähren können. Wie aber oben (s. S. 584 ff.) schon erörtert, ist eine Wahrnehmung der Innervationsstärken in hohem Grade unwahrscheinlich. Für das Augenmaass kann die alleinige Kenntniss der Verschiebung der Augenachsen gegen die Achsen der Bogengänge wahrscheinlich schon genügen.

Die drei Hauptebenen, welche die physiologische Optik als die des wirklichen Raumes annimmt, sind willkürlich gewählt worden. Bei unserem jetzigen Wissen der gesetzmässigen Abhängigkeit der Augenbewegungen von den Bogengängen dürften die drei Ebenen der Bogengänge allein als die Hauptebenen des wirklichen Raumes gelten.

Die Drehachsen der Augäpfel müssen also auf das System der drei rechtwinkligen Coordinaten des Bogengangapparates bezogen werden. „Denkt man sich, sagt Hering (16, 548), dass der jeweilige Ort der Aufmerksamkeit bedingt ist durch einen psychophysischen Process, so kann man diesen Process zugleich als das physische Moment gelten lassen, welches die entsprechende Innervation auslöst.“ Der psychophysische Process, der unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, ist die durch die Erregung der Ampullen erzeugte Wahrnehmung einer bestimmten Richtung; diese Erregung gibt also, wie man jetzt behaupten kann, das physische Moment ab, welches die Augenstellung verändert.

Um genauer den Mechanismus feststellen zu können, durch welchen die Verschiebung der Augenachsen auf das Coordinatensystem des Bogengangapparates uns in den Stand setzt, durch das Augenmaass den Ort des fixirten Objectes und den Abstand zwischen den gesehenen Objecten zu bestimmen, ist vorerst eine Revision der Gesetze erforderlich, welche die Bewegungen der Augäpfel in ihrer Abhängigkeit von den Bogengängen beherrschen. Und zwar muss diese Revision aus einleuchtenden Gründen mit Hülfe von Versuchen an Affen gemacht werden¹⁾.

1) In meiner letzten Arbeit (7, 230) sind die Methoden angegeben, die bei einer solchen Revision benutzt werden müssen.

Es bedarf wohl keiner besonderen Erörterung, um darzuthun, dass die angeborenen Einrichtungen, auf welchen die Association der Augenbewegungen beruht, in den Hirncentra zu suchen sind, welche die Versibularnerven mit den optischen und oculomotorischen Nerven verbinden. Die psychologischen Beziehungen zwischen den Begriffen der Richtung und des Abstandes werden durch die nämlichen Hirncentra vermittelt, da ja diese beiden Begriffe in den Empfindungen des Raumsinns und des Gesichtssinns ihren Ursprung haben.

Die Begriffe der Richtung und des Abstandes wurden seit Jahrtausenden als Grundlagen zum Aufbau der Geometrie benutzt. Im Capitel 5 soll gezeigt werden, dass dies auch mit Recht so geschah.

3. Der bisherige Stand des Raumproblems.

A. Hat der Raum eine selbstständige reelle Existenz, unabhängig von der sich in ihm bewegenden Materie, oder ist er mit der Materie resp. mit deren Bewegung identisch?

B. Worauf beruht die Nothwendigkeit für den menschlichen Geist, den Raum als dreidimensional zu betrachten, und die Unmöglichkeit, die Empfindungen unserer Sinne in einer anderen als in dieser geometrischen Form zu ordnen?

C. Welches ist der Ursprung der geometrischen Axiome von Euklid, und worauf beruht ihre apodiktische Gewissheit, da ihre Richtigkeit nie direct bewiesen werden konnte?

In diesen drei Fragen ist das ganze Raumproblem enthalten, welches auch sonst seine besonderen Gestaltungen im Laufe der Jahrtausende waren. Philosophen, Mathematiker und Naturforscher suchten vorzugsweise die eine oder andere dieser Fragen zu lösen, je nach dem näherem Zweck ihrer Forschungen. Trotz der unendlichen Zahl der vorgeschlagenen Lösungen des Raumproblems kann man aber in den Beantwortungen dieser Fragen zwei streng gesonderte Kategorien unterscheiden, die empiristische und die nativistischen.

Locke (17), der darauf verzichtete, eine Definition des Raumes und der Ausdehnung zu geben, nahm die Existenz eines reellen leeren Raumes an, in welchem die Materie sich frei bewegt. Unsere Kenntnisse von diesem Raum sollen auf den Erfahrungen unserer Sinnesorgane, besonders der Gesichts- und Tastorgane beruhen.

Ein entschiedener Gegner angeborener Ideen, kann Locke als der Schöpfer der empiristischen Raumtheorie gelten. Berkeley verwarf den Begriff eines absoluten Raumes und behauptete, unsere Raumvorstellungen würden von den Erfahrungen über die Bewegung abgeleitet. „Ist es möglich, dass wir die Idee der Ausdehnung haben, ehe wir Bewegungen ausführen? Mit anderen Worten, kann ein Mensch, der niemals Bewegungen ausgeführt hat, sich Gegenstände vorstellen, die sich in einer Entfernung von einander befinden?“ (18.) In der Formulierung dieser beiden Fragen sind in ovo so ziemlich die sämtlichen Lösungen des Problems enthalten, denen die modernen Vertreter der empiristischen Anschauungen, sowohl Philosophen als Mathematiker und Physiologen, huldigen, mit dem Unterschiede aber, dass die Letzteren meistens die Realität des absoluten Raumes anerkennen.

Ein ganz gewaltiger Fortschritt in der Behandlung des Raumproblems wurde gemacht, als Kant seine berühmte aprioristische Theorie der Raumvorstellungen formuliert hat. Zu dieser Formulierung ist er erst in späteren Jahren seines Wirkens gekommen. Früher war Kant ein eifriger Verfechter des selbstständigen Vorhandenseins eines absoluten Raumes, der eine von der Materie gang unabhängige Existenz besitzt. Ja, die Existenz des objectiven Raumes betrachtete Kant in seiner im Jahre 1768 erschienenen Schrift „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume“ als eine nothwendige Vorbedingung für das Wesen der Materie. Aber schon im Jahre 1770 (19) entwickelte Kant seine ganz entgegengesetzte Lehre, die ihre endgültige Gestalt in der „Kritik der reinen Vernunft“ (1781) erhalten hat. Diese Lehre beherrscht auch jetzt noch das ganze Raumproblem; sie soll hier mit den eigenen Worten ihres Schöpfers wiedergegeben werden.

„1. Der Raum ist kein empirischer Begriff, der von äusseren Erfahrungen abgezogen werden kann. Denn damit gewisse Empfindungen auf etwas ausser mich bezogen werden (d. i. auf etwas in einem anderen Orte des Raumes, als darinnen ich mich befinde), ingleichen, damit ich sie als ausser und neben einander, mithin nicht bloss verschieden, sondern als in verschiedenen Orten vorstellen könne, dazu muss die Vorstellung des Raumes schon zu Grunde liegen . . .“

„2. Der Raum ist eine nothwendige Vorstellung a priori, die allen äusseren Anschauungen zu Grunde liegt. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass kein Raum sei, ob

man sich gleich ganz wohl denken kann, dass keine Gegenstände darin angetroffen werden . . .“

„3. Der Raum ist kein . . . allgemeiner Begriff von Verhältnissen der Dinge überhaupt, sondern eine reine Anschauung.“ (20, 29).

Als Hauptargument zu Gunsten der aprioristischen Natur unserer Raumvorstellungen führt Kant die Apodikticität der geometrischen Axiome an, die als absolut sicher gelten, ohne dass ihre Richtigkeit je bewiesen werden konnte . . . „Denn die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d. i. mit dem Bewusstsein ihrer Nothwendigkeit verbunden; z. B. der Raum hat nur drei Abmessungen; dergleichen Sätze aber können nicht empirische oder Erfahrungssätze sein, noch aus ihnen abgeleitet werden.“

Der grosse Vortheil der Kant'schen Lehre besteht darin, dass sie das ganze Raumproblem löst oder, richtiger, zu lösen scheint. Die drei im Eingang dieses Capitels formulirten Fragen werden mit einem Mal beantwortet. Ihre Hauptschwächen liegen darin, dass sie erstens nur eine Voraussetzung, ein Postulat ist, dessen Richtigkeit nicht bewiesen wird, und dass sie, ausserdem, im Grunde nichts erklärt.

Ein Postulat kann für den Philosophen und den Mathematiker für weitere Deductionen und Ausführungen von grossem Werthe sein. Der Naturforscher, der den Mechanismus der Erscheinungen zu erklären sucht, muss Beweise für die Begründung des Postulats verlangen und wird der Entstehung und den organischen Ursachen der aprioristischen Anschauungen nachforschen.

Die einzige positive Stütze der Kant'schen Lehre — die Apodikticität der Axiome — kann auch bestritten werden. Sie kann andererseits, wie im fünften Capitel gezeigt wird, ihren Grund auch anderswo als in einer aprioristischen Anschauung unseres Geistes haben.

Die der Kant'schen entgegengesetzte Lösung des Raumproblems hat im vorigen Jahrhundert ihre systematische Entwicklung besonders durch J. Stuart Mill erhalten (21). Mit Recht bestreitet Mill, dass den mathematischen Wissenschaften eine grössere Gewissheit als den experimentellen zukommt. Die rein mathematisch entwickelten Theorien werden erst durch die Erfahrung bestätigt und zur Gewissheit erhoben¹⁾.

1) Die Identität von Licht und Elektrizität ist erst durch die genialen Experimente von Hertz mit Sicherheit festgestellt worden. Die elektrodynamische

Den Definitionen der Geometrie soll nur eine relative Richtigkeit zukommen. Die Axiome besitzen zwar volle Gültigkeit, das Gleiche ist aber auch für viele Wahrheiten der rein experimentellen Wissenschaften der Fall. Die Definitionen seien nach Mill nur Generalisationen gewisser Wahrnehmungen äusserer Objecte: der Punkt nur das „minimum visibile“; die eindimensionale Linie nur die Abstraction eines Kreidestrichs oder eines gespannten Fadens; der vollkommene Kreis — die Erinnerung an die Durchschnittsfläche eines Baumes. Die Definitionen der Geometrie können daher nur eine approximative Gültigkeit beanspruchen.

Das Gewagte dieser Mill'schen Argumentation liegt auf der Hand. Die Definitionen der Euklidischen Geometrie beziehen sich auf einen idealen ausdehnungslosen Punkt, auf eine Linie, die eine Länge ohne Breite ist, auf eine ideale Gerade, die in's Unendliche verlängert werden kann u. s. w.

Die realen Linien, Punkte, Geraden u. s. w., an denen unsere Erfahrungen gemacht werden, besitzen diese Eigenschaften nicht. Wie konnten denn aus der Idealisierung so roher Erfahrungen abgeleitete Schlüsse zu absolut richtigen Axiomen führen? Stuart Mill greift, um diesem Einwande zu entgehen, zur Association von Ideen zwischen immer und ausnahmslos verbundenen Vorstellungen. Er muss aber zugeben, dass es sehr schwierig ist, Vorstellungen zu trennen, wenn die entsprechenden Empfindungen niemals gesondert dem menschlichen Geist dargeboten werden.

Die Möglichkeit, durch Idealisierung der an realen Gegenständen gemachten Erfahrungen die Definitionen und Axiome der Geometrie abzuleiten, ist von Philosophen und Mathematikern, welche den empirischen Ursprung dieser Wissenschaft beweisen wollten, vielfach erörtert und immer bejahend beantwortet worden.

Bei der Abwesenheit eines Sinnesorgans, welches uns die Begriffe von idealen Linien, Punkten, Winkeln, Kreisen u. s. w. geben könnte, war auch die Annahme einer solchen Möglichkeit für die Empiriker von unumgänglicher Nothwendigkeit. Die Berechtigung einer solchen Annahme, wenn es sich darum handelt, den Ursprung der Axiome zu erklären, ist aber mehr als zweifelhaft. „Stammen die

Theorie von Maxwell hat nur auf die Möglichkeit einer solchen Identität hingewiesen.

Axiome aus der Erfahrung?“ schreibt F. Klein. „Helmholtz ist hierfür bekanntlich in nachdrücklicher Weise eingetreten. Aber seine Darlegungen erscheinen nach bestimmter Richtung unvollständig. Man wird, wenn man dieselben überdenkt, zwar gerne zugeben, dass die Erfahrung an dem Zustandekommen der Axiome einen grossen Antheil hat, man wird aber bemerken, dass gerade derjenige Punkt bei Helmholtz unerörtert bleibt, der dem Mathematiker vor anderen interessant ist. Es handelt sich um einen Process, den wir in genau derselben Weise bei der theoretischen Behandlung irgend welcher empirischer Daten nunmehr vollziehen, und der ebendamit dem Naturforscher völlig selbstverständlich erscheinen mag.“¹⁾

„Ich werde mich in allgemeiner Fassung so ausdrücken: Die Ergebnisse irgend welcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter particulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präcision und Allgemeinheit. In dieser ‚Idealisirung‘ der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome...“ So drückt sich F. Klein, einer der eminentesten Vertreter der Nicht-Euklidischen Theorien, aus (22, 4). Wie alle Vertheidiger dieser Theorien ist Klein kein Anhänger der Meinung, „als seien die Axiome nach ihrem concreten Inhalte Nothwendigkeiten der inneren Anschauung“; er muss also, in gewissen Grenzen, der Erfahrung und der Gewöhnung einen Antheil an dem Ursprung der Axiome zugestehen. Die Idealisirung der Erfahrungen ist für Klein aber bei Weitem nicht so „selbstverständlich“, wie sie z. B. Helmholtz erscheint. Ein Verfahren, das in der theoretischen Physik gang und gäbe ist, kann nicht ohne Weiteres zur Begründung von Axiomen von „absoluter Präcision“ gedient haben. Denn dadurch unterscheiden sich eben die Axiome von Euklid, dass sich ihre absolute Gültigkeit während Jahrtausende bewährt hat, ohne je bewiesen worden zu sein, dass noch nie auch die geringste Thatsache constatirt worden ist, welche mit ihnen in Widerspruch gerathen wäre. In dieser tausendjährigen Bestätigung einen Beweis für die Berechtigung zu solcher Idealisirung bei der

1) Nur dieser Passus ist von mir gesperrt wiedergegeben.

Aufstellung von Axiomen ersehen zu wollen, wie dies häufig geschieht, wäre auch dann kaum zulässig, wenn es absolut keine andere Möglichkeit als durch Idealisierung gäbe, den Ursprung der Axiome zu erklären. Da aber dies (siehe Cap. 5) nicht der Fall ist, so beweist diese Bestätigung eben das Gegentheil: die Nichtberechtigung, die Axiome mit gewöhnlichen physikalischen Hypothesen, die einen zeitlich-beschränkten Werth besitzen, zu vergleichen.

Würden auch die eminentesten Mathematiker aller Zeiten so viel Mühe verwendet haben, um Beweise für das elfte Axiom von Euklid zu sammeln, wenn die blosse Idealisierung roher Erfahrungen zur Begründung von Axiomen genügt hätte? Mit Hülfe einiger Kreidestriche hätten sie sich ja das viele Kopfzerbrechen ersparen können. . . . Es wird in Capitel 5 näher auseinandergesetzt, dass die psychischen Vorgänge, mit deren Hülfe der synthetische Aufbau der Geometrie aus den Definitionen und Axiomen von Euklid stattgefunden hat, der „Idealisierung“ gerade entgegengesetzt waren: an realen geometrischen Figuren wurden nur die Sätze bestätigt, welche von vorher wahrgenommenen idealen Grössen abgeleitet wurden.

Es hat nicht an Versuchen gefehlt, die zwischen den beiden sich gegenüberstehenden Theorien bestehende Kluft durch vermittelnde Lehren zu überbrücken.

Die Hegel'sche Lehre von dem gemeinschaftlichen Ursprung unserer Raumvorstellungen von der Erfahrung und von aprioristischen Ideen sowohl wie das „Zusammenwirken“ verschiedener Factoren Herbart's gehören zu solchen missglückten Versuchen. Sie vereinigten eigentlich nur die Lücken der empiristischen und aprioristischen Auffassungen.

Nach einer anderen Richtung hin versuchte einer der hervorragendsten Vertreter der empiristischen Theorien — Taine — die Schwierigkeit zu umgehen. Nachdem er sehr weitläufig und mit grossem Scharfsinn unsere geometrischen Anschauungen von Bewegungsempfindungen abzuleiten versuchte, griff er endlich zu einer ganz anderen Vorstellungsweise: „Le temps est le père de l'espace!“, was wohl sagen will, dass die Gleichzeitigkeit analoger sinnlicher Empfindungen den Begriff des Raumes gibt.

Diese Aushülfe ist aber nicht stichhaltig: Eine solche Gleichzeitigkeit kann höchstens den Begriff der Entfernung oder des

Abstandes liefern, aber nicht den eines Raumes und am wenigsten eines Raumes von drei Ausdehnungen.

Nur ein Philosoph hat es im vorigen Jahrhundert versucht, die empiristische Raumtheorie mit Hülfe der Analyse der Bewegungen fester Körper direct zu begründen, indem er von einer solchen Analyse den Ursprung der geometrischen Axiome ableitete, — das ist Ueberweg. Eine volle Lösung des Problems hat er freilich nicht geben können, weil eine solche, ohne die Zuhülfenahme der Verrichtungen des sechsten Sinnes, überhaupt unmöglich ist. Dagegen hat Ueberweg mehrere gewichtige Beiträge zu einer solchen Lösung geliefert, die einen bedeutenden Fortschritt ausmachen. Kaum 22 Jahre alt, hat er eine kleine Schrift verfasst: „Die Principien der Geometrie wissenschaftlich dargestellt“¹⁾ (23), in der er die Grundformen der Euklidischen Geometrie und auch einige Eigenschaften des Raumes mit ausserordentlicher Schärfe und wahrhaft genialer Intuition abzuleiten vermochte. Um seinen gewonnenen Sätzen „absolute Genauigkeit“ beilegen zu können, war er natürlich auch gezwungen, zu deren Idealisierung seine Zuflucht zu nehmen. An sich selbst sind aber diese Sätze vollkommen für die Bewegungen fester Körper gültig, und wie gleich gezeigt wird, haben sie auch glänzende Bestätigungen erfahren.

Der Ausgangspunkt Ueberweg's bei der Analyse der Bewegungen fester Körper war folgender:

„Ein materieller, fester Körper kann nach dem Zeugniß der Sinne (I), wenn er unbefestigt ist, überall hin gelangen, wo sich nicht schon ein anderer fester Körper befindet; (II) derselbe, an einer einzelnen Stelle festgehalten, kann sich nicht mehr unbeschränkt überallhin bewegen, ist aber doch nicht aller Bewegungen beraubt; (III) ausserdem nach an einer zweiten Stelle festgehalten, kann derselbe an keiner Stelle mehr alle bei (II) möglichen Bewegungen machen, aber doch immer noch bewegt werden; (IV) wird aber eine dritte Stelle des Körpers befestigt, die bei (III) noch bewegt werden konnte, so wird alle Bewegung derselben überhaupt unmöglich.“

Wie schon Wassiliew (24 a und b) hervorgehoben hat, sind diese Ausgangspunkte Ueberweg's, mit den drei Annahmen identisch, welche Helmholtz im Jahre 1867 bei seinen berühmten Untersuchungen über die Riemann'schen Raumformen benutzte (Siehe Cap. 4), Untersuchungen, die später Sophus Lie

1) Dieselbe wurde 3—4 Jahre später im Archiv für Philologie und Pädagogik Bd. 17, 1851, veröffentlicht.

in seiner Theorie der Transformationsgruppen (26) weiter entwickelt hat¹⁾.

Auch die Resultate, zu denen Ueberweg bei jener Analyse gelangt ist, decken sich so ziemlich mit denen von Helmholtz und Sophus Lie. So vermochte auch Ueberweg aus den Bewegungen fester Körper die drei Eigenschaften des Raumes, Gleichmässigkeit, Continuität und Unendlichkeit abzuleiten. Auch die Bedeutung der Gruppen, die er als Reihen bezeichnete, erkannte Ueberweg ganz richtig. Selbstverständlich sind die Methoden und die Beweisführungen von Helmholtz und Sophus Lie viel strenger und präziser entwickelt als dies bei Ueberweg der Fall ist. Manches hat er nur geahnt, was seine Nachfolger streng bewiesen haben. Seine Untersuchung ist deshalb aber um so bewunderungswürdiger²⁾.

In den folgenden Capiteln wird noch mehrmals auf die Ueberweg'sche Schrift zurückgegriffen. Deren synthetischer Theil ist von besonderem Werthe gerade für meine jetzige Untersuchung, dank der entscheidenden Bedeutung, welche Ueberweg mit Recht dem Begriff der Richtung, bei der Erklärung der Definitionen und der Axiome von Euklid, beigelegt hat.

4. Die Nicht-Euklid'schen Raumformen.

Die Frage nach dem Ursprunge der Axiome von Euklid beschäftigte hauptsächlich die Mathematiker; und zwar waren ihre Bemühungen meistens darauf gerichtet, Beweise für das elfte Axiom,

1) Siehe nächstes Capitel.

2) Die Untersuchung Ueberweg's ist ziemlich unbemerkt geblieben, und scheint er selbst überrascht worden zu sein, als dieselbe in französischer Uebersetzung von Delbœuf dessen „Prolégomènes de la Géométrie“ (27) hinzugefügt wurde. Wie aus seiner kurzen Notiz über Delbœuf's Schrift hervorgeht (28), war Ueberweg über die Reproduction seiner Schrift wenig erfreut. Der geringe Anklang, welchen dieselbe gefunden, hat ihn vielleicht an deren Werthe zweifeln gemacht. Auch ist er später von selbst zur Ueberzeugung gelangt, es sei unmöglich, in den alleinigen Erfahrungen über die Bewegungen fester Körper die Grundlagen für die Lösung des Raumproblems zu finden. In dem diesem Problem gewidmeten Abschnitt seiner Logik (29) erwähnt er nicht einmal seine Jugendschrift. Auch in seinem Grundriss der Geschichte der Philosophie (30) ist von derselben keine Rede. Glücklicher Weise hat Moritz Brasch in seinem Buche über Friedrich Ueberweg (31) seine geometrischen Abhandlungen abgedruckt. Dieselben verdienen sicherlich eine sachkundige Würdigung von Seiten der Mathematiker.

das der Parallelen, zu finden. „In der Theorie der Parallellinien,“ schrieb Gauss (33, 166), „sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklid war. Diess ist die partie honteuse der Mathematik, die früh oder spät eine ganz andere Gestalt bekommen muss.“ Das elfte Axiom oder die fünfte Forderung, wie man jetzt mit Vorliebe sagt, lautet bei Euklid: „Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, dass die beiden inneren, an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so treffen diese beiden Linien genügsam verlängert an eben der Seite zusammen.“¹⁾ Die Nothwendigkeit dieses Grundsatzes ist bei Weitem nicht so selbstverständlich, wie die der übrigen Axiome von Euklid, die er als allgemeine Begriffe (*notions communes*) hingestellt hat. Sie bedarf also des Beweises. Aus den vergeblichen Bemühungen der Mathematiker, einen solchen Beweis zu finden, ist die Geometrie der Nicht-Euklidischen Raumformen entstanden.

Die Geschichte dieses Entstehens soll hier nur insofern berührt werden, als diese Geometrie für die Lösung des Raumproblems in Betracht kommt. Der französische Mathematiker Legendre (47) suchte das Parallelaxiom durch den gleichwerthigen Satz, die Winkelsumme eines Dreiecks betrage zwei Rechte, zu beweisen. Es gelang ihm, dabei den Nachweis zu geben, dass diese Winkelsumme nicht grösser als zwei Rechte sein könne. Das Gegentheil, dass sie auch nicht kleiner als zwei Rechte sein kann, vermochte er nicht zu beweisen. In den dreissiger Jahren des vorigen Jahrhunderts wählte der geniale russische Mathematiker Lobatschewsky (34) eine ganz andere Beweisführung. Er versuchte es, ob durch die Entwicklung einer dem elften Axiom entgegengesetzten Forderung, man nicht auf unüberwindliche Widersprüche stossen würde und auf diesem Wege die Nothwendigkeit dieses Axioms beweisen könnte. Bei seinen synthetischen Ableitungen gelangte Lobatschewsky aber zu dem überraschenden Resultat, es seien keine solchen Widersprüche vorhanden, und es könne eine Raumform geben,

1) Wo nicht das Gegentheil gesagt wird, sind die Citate aus Euklid der Uebersetzung von J. Fr. Lorenz (1781) entnommen. Dieselbe ist genau nach dem griechischen Text gemacht worden und wurde später (1808—1824) von Mollweide verbessert (32).

in welcher die Winkelsumme eines Dreiecks kleiner sei als zwei Rechte, in welcher also das Parallelaxiom von Euklid und folglich sämtliche von ihm abhängigen geometrischen Sätze keine Gültigkeit haben.

Fast gleichzeitig mit Lobatschewsky gelangte ein junger ungarischer Artilleriehauptmann, Johann v. Bolyai, angeregt durch seinen Vater, einen Mitschüler und Freund von Gauss, zu demselben Resultat. So wurde die Geometrie der imaginären oder Nicht-Euklidischen Raumformen geschaffen¹⁾.

Im Jahre 1854 entwickelte Riemann die Möglichkeit noch einer anderen Raumform, der sphärischen, in welcher das Parallelaxiom gleichfalls ungültig sei und die Winkelsumme eines Dreiecks grösser als zwei Rechte sein könne. In einer Variante dieser Raumform soll auch das zwölfte Axiom von Euklid — „zwei gerade Linien schliessen keinen Raum ein“ — keine Anwendung finden. Als Grundlage für seine analytischen Ableitungen benutzte Riemann einen algebraischen Ausdruck, das Krümmungsmaass von Gauss, das der Krümmung einer Fläche entspricht und durch den Abstand zweier in beliebiger Richtung von einander liegenden Punkte gegeben wird. Riemann stellte als Axiom auf, dass in jedem Raume, in welchem die freie Bewegung fester Körper möglich ist, dieses Krümmungsmaass überall einen constanten Werth hat (36).

Die Riemann'sche Raumform ist besonders von Helmholtz weiter untersucht worden. Ausgehend von drei Annahmen über die freien Beweglichkeitsbedingungen fester Körper, — Annahmen, die identisch mit den von Ueberweg im Jahre 1850 gemachten sind (siehe oben S. 598), — hat Helmholtz auf analytischem Wege die Bedeutung jenes algebraischen Ausdrucks (Krümmungsmaass) entwickelt, den Riemann als Grundlage genommen hat. Die von Riemann aufgestellte Forderung, der Raum dürfte als Zahlenmannigfaltigkeit angesehen werden, betrachtete dabei Helmholtz ausdrücklich als Axiom²⁾.

1) Ueber die sehr interessante Vorgeschichte dieser Geometrie, von Euklid bis Gauss, siehe das Werk von Stäckel und Engel (35), das mehrmals hier citirt wird.

2) Nach Riemann soll der Raum ein besonderer Fall einer dreifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit sein, in welcher sich das Quadrat des Bogenelementes durch eine quadratische Form der Differentiale der Coordinaten ausdrückt.

Auf Grundlage seiner berühmten analytischen Untersuchungen (1868) gelangte Helmholtz zu Resultaten, die in dem Hauptsatze gipfelten, dass die Unterschiede der verschiedenen Raumformen sich durch ihre Krümmungsmaasse kennzeichnen. In einem Vortrag „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“, gehalten in Heidelberg im Jahre 1870, hat Helmholtz es vermocht, die allgemeine Aufmerksamkeit auf die neue Geometrie zu lenken.

Die Nicht-Euklidische Geometrie nimmt jetzt als gleichberechtigt drei Raumformen an, die sich folgendermaassen kennzeichnen: 1. Der Euklidische Raum: Parallelaxiom gültig, also die Winkelsumme eines Dreiecks gleich zwei Rechten; Krümmungsmaass gleich Null. 2. Der Lobatschewsky'sche Raum: Winkelsumme eines Dreiecks kleiner als zwei Rechte; Krümmungsmaass besitzt negatives Vorzeichen. 3. Der Riemann-Helmholtz'sche: Winkelsumme grösser als zwei Rechte; Krümmungsmaass hat positives Vorzeichen. In einer Variante dieser Raumform, vermögen auch zwei gerade Linien einen Raum zu umschliessen. Die Euklidische Raumform soll nach Riemann ein ebener Raum sein; der Lobatschewsky'sche wurde von Beltrami als ein pseudo-sphärischer bezeichnet; der Riemann-Helmholtz'sche — ist der sphärische Raum.

Dass die Schöpfung der neuen Geometrie einen grossen Einfluss auf unsere Vorstellungen vom Raume haben muss, schien unvermeidlich. Gauss, der die Möglichkeit einer Geometrie, welche von dem elften Axiom unabhängig wäre, vorhersagte, setzte auch voraus, dass dieselbe eine Lösung des Raumproblems zur Folge haben wird. In seiner Correspondenz, welche die Nothwendigkeit einer Nicht-Euklidischen Geometrie behandelt, findet man zahlreiche Andeutungen, in welchem Sinn diese Lösung geschehen wird. Es sollen einige solche Stellen hier wiedergegeben werden:

So schrieb Gauss an Olbers im Jahre 1817:

„Ich komme immer mehr zur Ueberzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem anderen Leben zu anderen Einsichten in das Wesen des Raumes, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichem Range setzen ...“ (33, 177).

Aus den gesperrten Worten folgt also, dass Gauss den aprioristischen Ursprung der Geometrie nicht anerkennen wollte. Er hielt an dem Standpunkt fest, den Newton in folgenden Worten formulirte: „Fundatur igitur Geometria in praxi mechanica et nihil aliud, quam Mechanicae universalis pars illa, quae artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat.“

„... Ich weiss nicht,“ schrieb Gauss an Bessel, den 27. Januar 1829, „ob ich mit Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter consolidirt, und meine Ueberzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Bötier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.“

„... Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre eine ganz andere Stellung in unserem Bewusstsein a priori wie die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzten eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass, wenn die Zahl bloss unseres Geistes Product ist, der Raum auch ausser unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.“ (Brief vom 9. April 1830.)

Gauss war also weder von der Nothwendigkeit noch von der absoluten Wahrheit der Euklidischen Geometrie überzeugt. Der Raum besitzt eine Realität, und nur die Zahl ist aprioristischen Ursprungs.

In mehreren Schreiben wendet sich Gauss auch direct gegen Kants Lehre, so z. B. am 6. März 1832 in einem Schreiben an Wolfgang von Bolyai:

„... Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte, zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen anderen, ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsätze angedeutet, der in Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht, Stück 4 p. 625 . . .“ (33, 224.)

Lobatschewsky, dem es gelungen ist, die Lösung zu geben, die Gauss angestrebt hat, war ähnlicher Ansicht über die Kant'sche Lehre.

„Den geometrischen Begriffen selbst ist noch nicht die Wahrheit eigen, die man hat beweisen wollen, und die ebenso wie andere physische Gesetze nur durch die Erfahrung bestätigt werden kann, also zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen.“ (34.)

... „In der Natur,“ sagt noch Lobatschewsky, „erkennen wir eigentlich nur die Bewegung, ohne die Sinneseindrücke nicht möglich sind. Alle übrigen Begriffe, zum Beispiel die geometrischen, sind künstlich von unserem Verstande erzeugt, indem sie aus den Eigenschaften der Bewegung abgeleitet sind, und deshalb ist der Raum an und für sich abgesondert für uns nicht vorhanden.“ ... „Ohne Zweifel werden immer die Begriffe zuerst gegeben sein, die wir in der Natur vermittelst unserer Sinne erwerben. Der Verstand kann und muss sie auf die kleinste Zahl zurückführen, damit sie dadurch der Wissenschaft als feste Grundlage dienen können.“ ...

Mit einem Worte, wie Gauss so nahm auch Lobatschewsky an, dass die geometrischen Wahrheiten aus der Erfahrung abgeleitet sind, und dass ihnen keine apodiktische Gewissheit zukommt. Dagegen ist der Raum für Gauss eine Realität; nach Lobatschewsky kommt ihm keine „abgesonderte“ Existenz zu.

Ebenso entschieden hat sich Riemann zu Gunsten des empirischen Ursprungs unserer Raumvorstellungen ausgesprochen. Den Beweis dafür erblickt er darin, „dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Maassverhältnisse fähig ist und der Raum also einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet“ (36). Die Sätze der Geometrie sollen sich daher nicht aus allgemeinen Begriffen ableiten lassen, sondern diejenigen Eigenschaften, durch welche der Raum sich von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können.

In seinem erwähnten Vortrag (25) sucht auch Helmholtz mehrmals die Sätze der Nicht-Euklidischen Geometrie als Argumente gegen den aprioristischen Ursprung unserer Raumvorstellungen zu verwerthen. „Wenn aber,“ sagt er, „Räume anderer Art in dem angegebenen Sinne vorstellbar sind, so wäre damit auch widerlegt, dass die Axiome der Geometrie nothwendige Folgen einer a priori gegebenen transcendenten Form unserer Anschauungen im Kant'schen Sinne seien.“ (25, 22.) Der rein empirische Ursprung dieser Axiome soll nach Helmholtz in ganz unzweifelhafter Weise durch die Möglichkeit bewiesen werden, uns pseudo-sphärische und sphärische Räume auszudenken, in denen die Axiome von Euklid keine Gültigkeit haben.

Sind nun diese übereinstimmenden Ansichten der Schöpfer der imaginären Geometrie auch wirklich berechtigt?

Ist es ihnen wirklich gelungen, den aprioristischen oder wenigstens den nativistischen¹⁾ Ursprung der Raumvorstellungen zu widerlegen resp. den empirischen zu beweisen? Mit einem Worte: haben Gauss, Lobatschewsky, Riemann, Helmholtz und ihre Nachfolger es wirklich vermocht, eine entscheidende Lösung des Raumproblems zu geben? Die Frage muss entschieden verneint werden. Weder über die Realität des absoluten Raumes noch über die Herkunft unserer Vorstellungen vom dreidimensionalen Raume hat die Nicht-Euklidische Geometrie irgend welche definitive Aufklärungen gebracht.

Nach Gauss ist der Raum eine Realität, nach Lobatschewsky ist „der Raum an und für sich abgesondert für uns nicht vorhanden“. Ja, noch mehr, im Laufe der durch seinen Vortrag erzeugten Polemik mit Land, Albert Krause u. a. fand Helmholtz Veranlassung, sogar den Raum an sich für rein transcendental zu erklären. Nur für die Axiome wollte er noch den empirischen Ursprung beibehalten (25, 391).

Irgend welche Aufklärung oder Beweise für diesen empirischen Ursprung vermochte aber Helmholtz nicht einmal für die Axiome von Euclid zu geben. Denn die Bestätigungen dieser Axiome aus der Erfahrung, die er in grosser Anzahl anführt, können ja nur für den physischen Raum gelten, den er von dem transcendentalen unterscheiden will. Dagegen bezeigen diese angeführten Erfahrungen geradezu, dass die Axiome von Riemann-Helmholtz über das Krümmungsmaass und den Raum als Zahlenmannigfaltigkeit mit ihnen in unversöhnlichem Widerspruche stehen.

„Alle Systeme praktisch ausgeführter Messungen,“ gibt Helmholtz zu (25, 23), „bei denen die drei Winkel grosser geradliniger Dreiecke einzeln gemessen worden sind, also auch namentlich alle Systeme astronomischer Messungen, welche die Parallaxe der unmessbar, weit entfernten Fixsterne gleich Null ergeben, ... bestätigen empirisch das Axiom der Parallelen und zeigen, dass in unserem Raume und bei Anwendung unserer Messungsmethoden das Krümmungsmaass des Raumes als von Null ununterscheidbar er-

1) Diese beiden Hypothesen sind nicht nothwendig identisch.

scheint.“ Das Gleiche folgt auch aus den Behauptungen von Lobatschewsky: „J'ai prouvé ailleurs, en m'appuyant sur quelques observations astronomiques, que dans un triangle, dont les côtés sont de la même grandeur à peu près que la distance de la terre au soleil, la somme des angles ne peut jamais différer des deux angles droits d'une quantité, qui puisse surpasser 0,0003" en secondes sexagésimales. Or, cette difference doit être d'autant moindre, que les côtés d'un triangle sont plus petits.“ Diese winzige Grösse kann doch noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen.

Die Erfahrung lehrt also, dass in unserem Weltraum das Parallelaxiom von Euklid absolute Gültigkeit hat¹⁾. Wie soll also die Nicht-Euklidische Geometrie, welche von diesem Axiom unabhängig ist, den empirischen Ursprung unserer Raumvorstellungen beweisen?

Uebrigens, wenn der Raum eine blosse Zahlenmannigfaltigkeit wäre, so würde dies ja eher für den aprioristischen Ursprung unserer Raumvorstellungen sprechen; denn dass „die Zahl bloss unseres Geistes Product ist“, wird ja mit Gauss auch von den meisten Mathematikern angenommen.

Bei der Unmöglichkeit, einerseits den wirklichen Ursprung der Axiome von Euklid zu demonstrieren, andererseits für die Axiome von Riemann empirische Beweise zu finden, bestreiten Helmholtz und die meisten Nicht-Euklidianer die absolute Gültigkeit der Euklidischen Axiome, um so der Kant'schen Lehre ihr Hauptargument zu entreissen. Und dies, trotzdem sie selbst neue und werthvolle Belege für deren Gültigkeit anführen und nur, weil man imaginäre Raumformen ausdenken kann, welche vom Parallelaxiom unabhängig sind. Sind wir aber wirklich im Stande, wie Helmholtz es will, uns genaue Vorstellungen von pseudo-

1) Die Bezeichnung des Euklidischen Raumes als ebener Raum hat viele Schwierigkeiten erhoben. Helmholtz gesteht dies, indem er schreibt: „Wir werden nun weiter zu fragen haben, wo diese besonderen Bestimmungen herkommen, welche unseren Raum als ebenen Raum charakterisiren, da dieselben nicht in den allgemeinen Begriff einer ausgedehnten Grösse von drei Dimensionen und freier Beweglichkeit der in ihr enthaltenen begrenzten Gebilde eingeschlossen sind.“ (25, 22.) Um dieser, auch nach Killing (37) unpassenden Bezeichnung aus dem Wege zu gehen, hat F. Klein die Euklid'sche Raumform die parabolische genannt; die Lobatschewsky'sche Raumform bezeichnet Klein als die hyperbolische, die Riemann'sche als die elliptische.

sphärischen und sphärischen Räumen oder, richtiger gesagt, von den Wahrnehmungen zu machen, welche wir erhalten würden, wenn wir plötzlich in solche Räume versetzt werden? Die Malereien, die Helmholtz von solchen Wahrnehmungen macht, sind, wie F. Klein ganz richtig sagt, „eine Mischung von wahr und falsch“ (22, 26), können jedenfalls nicht als Beweise gelten für „die Reihe der sinnlichen Eindrücke, welche eine sphärische oder pseudosphärische Welt uns geben würde, wenn sie existierte“ (Helmholtz).

Dass die Nicht-Euklidische Geometrie nicht im Stande ist, die Frage nach den Ursachen zu beantworten, die uns zwingen, unsere Anschauungen auf einen dreidimensionalen Raum zu beschränken, dies gestehen ihre Vertreter ausdrücklich: „Anders ist es mit den Dimensionen des Raumes,“ sagt Helmholtz. „Da alle unsere Mittel sinnlicher Anschauung sich nur auf einen Raum von drei Dimensionen erstrecken und die vierte Dimension nicht bloss eine Abänderung von Vorhandenem, sondern etwas vollständig Neues wäre, so befinden wir uns schon wegen unserer körperlichen Organisation in der absoluten Unmöglichkeit, uns eine Anschauungsweise einer vierten Dimension vorzustellen“ (25, 29).

Gauss war derselben Ansicht: „... Was noch zu desideriren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist, und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als drei Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber, in abstracto betrachtet, nicht widersprechend ist und füglich höheren Wesen zukommen könnte.“ (Brief an Gerling, 8. April 1844. 33, 241.)

Professor Killing, ein fast fanatischer Nicht-Euklidianer, schreibt: „So sehr die Frage nach der Dreizahl der Dimensionen die Philosophen beschäftigt hat, ist es bisher nicht gelungen, einen von unserer Erfahrung unabhängigen tieferen Grund dafür anzugeben ...“¹⁾

Trotzdem also die Schöpfer der Nicht-Euklidischen Geometrie die Kant'sche Lehre vom aprioristischen Ursprunge unserer Raumbegriffe bekämpften, waren sie gezwungen, auch in der Frage über die Herkunft der dreidimensionalen Anschauungen sich auf den Standpunkt Kant's zu stellen.

Der eminente Mathematiker H. Poincaré, einer der Förderer

1) In den drei Citaten sind die Sätze von mir gesperrt gedruckt.

der neuen Geometrie, hat in mehreren Aufsätzen über deren Stellung zum Raumproblem sich noch viel deutlicher im Sinne Kant's aussprechen müssen.

Zum Ausgangspunkte seiner Betrachtungen über die Grundlagen der Geometrie nimmt Poincaré, einerseits gewisse Voraussetzungen über die Bewegungsempfindungen, hauptsächlich der Augenmuskeln, andererseits die Entwicklungen von Sophus Lie über die Gruppenbildungen bei den Bewegungen fester Körper.

Poincaré's Voraussetzungen über die Bedeutung der Bewegungsempfindungen sind vom physiologischen Standpunkt aus meistens unzutreffend. Sie beziehen sich übrigens nur auf den Sehraum, nicht auf den wirklichen Raum. Unsere Erörterungen im zweiten Kapitel machen es überflüssig, hier auf diese Auseinandersetzungen näher einzugehen. Von Bedeutung für die uns hier beschäftigenden Fragen sind hauptsächlich die Schlüsse von Poincaré, weil sie evident beweisen, dass, auch mit Zuhülfenahme der so bedeutungsvollen analytischen Studien von Sophus Lie über die Transformations-Gruppen, es nicht möglich sei, die natürlichen Grundlagen der Axiome von Euklid und den Ursprung unserer dreidimensionalen Raumanschauung aufzuklären. „La notion de ces corps idéaux“ (der geometrischen Figuren), schreibt Poincaré, „est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir“ (38).

In einem ausführlicheren Aufsätze über denselben Gegenstand ist diese Auffassung noch kategorischer ausgedrückt: „Geometry is not an experimental science; experience forms merely the occasion for our reflecting upon the geometrical ideas which preexist in us“ (39, 41).

Dabei hebt Poincaré mit Recht hervor, dass er darin in voller Uebereinstimmung mit Helmholtz und Sophus Lie ist: „I differ from them in one point only, but probably the difference is in the mode of expression only and at the bottom we are completely in accord“ (39, 40). Dieser Punkt betrifft folgenden Einwurf, den man Helmholtz und Lie gemacht hat: „But your group presupposes space; to construct it you are obliged to assure a continuum of three dimensions. You proceed as if you already know analytical Geometry.“ Der Unterschied zwischen „presupposes“ und „preexists“ ist in der That unerheblich.

Die gezwungene Rückkehr der hervorragendsten Vertreter der

Nicht-Euklidischen Geometrie¹⁾ zu preexistirenden oder aprioristischen geometrischen Vorstellungen oder angeborenen „körperlichen Organisationen“ beweist zur Evidenz, dass es den Mathematikern, ebensowenig wie den Philosophen der empiristischen Schulen, gelingen wollte, mit Hilfe von Erfahrungen an den Bewegungen fester Körper den Ursprung der Axiome von Euklid und den unserer dreidimensionalen Raumschauungen zu erklären. Sie mussten, ebenso wie Kant, ihre Zuflucht zu aprioristischen Auffassungen nehmen.

Der Raum muss vorhanden sein, damit Bewegungen fester Körper möglich seien. Die Vorstellungen eines dreidimensionalen Raumes müssen schon gegeben sein, damit wir Bewegungen in demselben beobachten können. Solange die Existenz und die Verrichtungen eines besonderen Raumsinnes, dazu bestimmt uns diese Vorstellungen zu geben, unbekannt waren, musste Kant's Lehre, trotz ihrer Lücken, als die einzig logisch Voraussetzbare gelten.

„Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitle Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.“

So sprach Gauss im Jahre 1816. Trotz der Schöpfung der Nicht-Euklidischen Geometrie behielten diese Worte in Bezug auf das Raumproblem ihre volle Geltung, bis zur Entdeckung eines speciellen Sinnesorgans für unsere räumlichen Wahrnehmungen.

1) Cayley und F. Klein machen insofern eine Ausnahme, als sie die metaphysische Frage von den Eigenschaften des Raumes durch die Frage nach den Verfahren zur Ausmessung von Abständen ersetzt haben. Der competenteste Kenner der Lobatschewsky'schen Schriften, Professor Wassilieff, versichert, dass auch Lobatschewsky „die Theorien über die Eigenschaften des Raumes nicht gebilligt haben würde“. Er würde die Weiterentwicklung seiner Geometrie in dem gleichen Sinne wie Cayley u. F. Klein verfolgt haben (40, 237).

5. Der physiologische Ursprung der Definitionen und Axiome von Euklid.

Verfolgt man die während der letzten Jahrhunderte sich wiederholenden Bemühungen, mathematische Beweise für die Axiome von Euklid, — oder für deren Unabhängigkeit von einander — zu finden, so begegnet man dem Begriffe der Richtung, als Leitmotiv bei den meisten der vorgeschlagenen Lösungen. Bis zur Hälfte des vorigen Jahrhunderts beherrschte dieser scheinbar so klare Begriff die Bestrebungen der Mathematiker und Philosophen. Sogar Lobatschewsky, der erste Begründer der neuen Geometrie, machte noch den Versuch, mit Hülfe der Richtung das elfte Axiom zu beweisen, indem er die Parallellinien als Linien gleicher Richtung definierte (40, 239)¹⁾.

Im Nachlass und Briefwechsel von Gauss taucht der Begriff der Richtung sehr häufig bei den Versuchen auf, eine Theorie der Parallellinien zu entwickeln. In den berühmten Aufsätzen von Sir John Herschel, erschienen im *Quarterly Review*, — wo er zu Gunsten Stuart Mill's gegen Whewell in der Streitfrage über den Ursprung unserer Raumbegriffe Stellung genommen hat, — wird manchmal die Entscheidung in dem Begriffe der Richtung gesucht: „Nun ist die einzige klare Vorstellung, die wir uns von der Geradheit der Linie machen können, Gleichförmigkeit der Richtung, denn der Raum ist in der letzten Analyse nichts als eine Menge von Entfernungen und Richtungen“ (42).

Auch Ueberweg hat in seiner schon citirten Arbeit, beim synthetischen Aufbau der Geometrie, mit Erfolg die „Richtung“ als Grundlage benutzt. In neuester Zeit hat Riehl einen bemerkenswerthen Versuch gemacht, mit Hülfe von Richtungsempfindungen das ganze Raumproblem zu lösen (43). Leider hat er die Richtungsempfindungen von den problematischen Bewegungsempfindungen abzuleiten gesucht, und daran scheiterte sein Versuch. Den sonst ganz richtigen Gedanken Riehl's hat unlängst (1890) Heymans von Neuem aufgenommen. Meine Untersuchungen über die Existenz eines besonderen Sinnesorgans für die Richtungsempfindungen waren

1) Swinden im Jahre 1790 und C. F. Jacobi im Jahre 1824 (42) haben die gleiche Auffassung vertreten.

ihm aber unbekannt (44). Mit den Bewegungsempfindungen konnte er ebenso wenig vorwärts kommen, wie sein Vorgänger.

Wenn die Verwendung des Begriffes der Richtung nicht vermochte, einen entscheidenden Erfolg in der Geometrie zu erlangen, so lag dies an der Schwierigkeit, eine genaue Definition der „Richtung“ zu geben. Die Mathematiker legten aber merkwürdiger Weise gerade auf diese Definition ein besonderes Gewicht. Gauss suchte gegen diese Tendenz zu reagiren — aber vergebens. Dies ist um so mehr zu bedauern, dass, wie aus dem folgendem Citate klar hervorgeht, Gauss den physiologischen Ursprung des Begriffes der Richtung sicherlich geahnt hat . . . „Der Unterschied zwischen Rechts und Links lässt sich aber nicht definiren, sondern nur vorzeigen, so dass es damit eine ähnliche Bewandtniss hat, wie mit Süß und Bitter. Omne simile claudicat aber; das Letztere gilt nur für Wesen, die Geschmacksorgane haben, das erstere für alle Geister, denen die materielle Welt apprehensibel ist. Zwei solche Geister aber können sich über Rechts und Links nicht anders unmittelbar verständigen, als indem Ein und dasselbe materielle, individuelle Ding eine Brücke zwischen ihnen schlägt, ich sage unmittelbar, da auch A sich mit Z verständigen kann, indem zwischen A und B eine materielle Brücke, zwischen B und C eine andere u. s. w. geschlagen werden oder worden sein kann. Welche Geltung diese Sache in der Metaphysik hat, und dass ich darin die schlagende Widerlegung von Kant's Einbildung finde, der Raum sei bloss die Form unserer äusseren Anschauung, habe ich succinet in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831, S. 635 ausgesprochen.“ (Brief an Schumacher vom 8. Februar 1846, 33, 247).

Diese Worte des bedeutendsten Mathematikers des vorigen Jahrhunderts könnten als Motto der vorliegenden Untersuchung gelten; sie enthalten die wesentliche Grundlage der hier gegebenen Lösung des Raumproblems. Die drei Grundrichtungen Sagittal, Transversal und Vertical sind Grundempfindungen wie Süß und Bitter oder wie Roth, Grün und Violet. Die Brücken, welche erforderlich sind, um eine Verständigung zwischen den verschiedenen Geistern zu ermöglichen, — die erste Vorbedingung für die wissenschaftliche Behandlung einer Frage — diese Brücken sind durch die Untersuchungen errichtet worden, welche die Existenz eines besonderen Sinnesorgans festgestellt haben, dazu bestimmt, uns drei verschiedene Richtungsempfindungen zu geben . . .

Die Möglichkeit einer Verständigung über den Begriff der Richtung brachte es mit sich, dass in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts dieser Begriff, als eine der Grundlagen der Geometrie, ganz zurückgestellt und bei der Lösung des Raumproblems durch den Begriff des Abstandes ersetzt wurde. Schon hat Proklos zu diesem letzteren Begriff für die Deutung des elften Axioms gegriffen. Die Definition der parallelen Linien, als Linien von gleichem Abstand (equidistante Linien) hat seither mehrmals die Geometer angezogen. Wenn der Begriff des Abstandes endlich den Sieg über den der Richtung davongetragen hat, so geschah dies theilweise dank der Physiologie oder richtiger der physiologischen Optik. Bei der Analyse der Bewegungen fester Körper kommt fast ausschliesslich der Sehraum in Betracht, und der Abstand als eine durch das Augenmaass bestimmbare oder, richtiger, wahrnehmbare Grösse musste bei der Verwerthung dieser Analyse für die Erkenntniss des wirklichen Raumes nothwendiger Weise eine hervorragende Rolle spielen. Darum glaubte auch Helmholtz, den Begriff der Richtung bekämpfen zu müssen. „Wie soll man aber Richtung definiren, doch wieder nur durch die gerade Linie; hier bewegen wir uns in einem Circulus vitiosus. Richtung ist sogar der speciellere Begriff, denn in jeder geraden Linie giebt es zwei entgegengesetzte Richtungen ¹⁾“ (25, 392).

Wenn eine Definition der Richtung auch in der That unmöglich wäre, so dürfte dies kein unüberwindliches Hinderniss für die Verwendung des Begriffs der Richtung als Grundlage der Geometrie bilden ²⁾. Die analoge Schwierigkeit, andere Empfindungen, wie Roth, Grün und Violet oder Blau genauer zu definiren, haben ja auch Young und Helmholtz nicht verhindert, die Farbenlehre aufzubauen. Um eine solche Verwendung fruchtbringend zu machen,

1) Letzteres beruht, wie schon oben (S. 583) gezeigt wurde, auf einer Verwechslung der Richtung als Eigenschaft des Raumes mit dem Sinne der Richtung, die nur eine Beziehung dieser Eigenschaft zu unserem „Ich“ bedeutet.

2) Es gibt aber auch hervorragende Vertreter der Nicht-Euklidischen Geometrie, die es für deren weitere Entwicklung erforderlich halten, auch den Begriff des Abstandes aufzugeben. So schreibt Killing: „. . . Die Geometrie, gleichwie sie den Begriff der Richtung in dem vom Parallelaxiom geforderten Sinn hat aufgeben müssen, so auch den Begriff des Abstandes als Grundbegriff nicht wird festhalten können, und somit weit über Nicht-Euklidische Raumformen in engerem Sinne hinausgehen muss. . .“ (37, V.)

sollte der Nachweis genügen, die Begriffe der Richtung beruhen ebenso auf sinnlichen Empfindungen, wie die Begriffe von Roth und Grün oder Süss und Bitter. Einen solchen Nachweis haben aber meine Untersuchungen in überzeugender Weise schon im Jahre 1878 geliefert.

Es soll nun hier der Versuch gemacht werden, die Definitionen und Axiome von Euklid auf ihren natürlichen Ursprung aus den sinnlichen Wahrnehmungen des Bogengangapparates zurückzuführen. Weit davon entfernt, die Einzelheiten der nun folgenden Demonstration als endgültig hinzustellen, soll dieser erste Versuch nur dazu dienen, die Ueberzeugung zu wecken, dass die naturgemässen Grundlagen der Geometrie von Euklid auf rein sinnlichen Wahrnehmungen des Raumsinnorgans beruhen. Die weitere Ausnützung dieser Grundlagen von Seiten kompetenter Mathematiker wird dann sicherlich nicht ausbleiben.

Es sollen daher hier nur einige der wichtigsten geometrischen Grössen von Euklid berücksichtigt werden.

Die gerade Linie wird von Euklid definiert: „Eine gerade Linie ist diejenige, welche zwischen allen in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt.“ (Lorenz.)¹⁾ *Recta linea est quaecunque ex aequo punctis in ea sitis jacet*²⁾.

Die französische Uebersetzung, wie sie König (45) ebenfalls nach dem griechischen Text giebt, hat den gleichen Sinn: „La ligne droite est celle qui est également située entre ses extrémités.“

Der Begriff der geraden Linie, welchen Euklid definiren wollte, erscheint ganz klar: eine Linie, die gegen alle ihre Punkte auf einerlei Art gelegen ist, will sagen, eine Linie, die nach keiner Seite hin ausbiegt, deren alle Punkte gleichmässig, d. h. in derselben Richtung gelegen sind. Die gerade Linie ist die Linie einer Richtung.

Ueberweg glaubte dieser Definition eine strengere wissenschaftliche Begründung zu geben, indem er die Richtung aus der

1) Die von den Nicht-Euklidianern bevorzugte Uebersetzung von Heiberg lautet folgendermaassen: „Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.“

2) Der griechische Text Euklid's lautet: *Εὐθεία γραμμὴ ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*. Clavius hat folgende Deutung dieser Definition vorgeschlagen: „Nullum punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum vel huc vel illuc flectendo subsaltat.“

Bewegung fester Körper abzuleiten suchte: „Diejenige Linie, welche bei der Drehung um zwei ihrer Punkte in sich bleibt, heisst gerade.“

An sich ist eine solche Definition schon zulässig, um so mehr als auch die Drehung eine Richtung voraussetzt.

Sie ist aber für die hier in Betracht kommende Frage keinesfalls zutreffend. Wenn man nach dem Ursprung der Definitionen und Axiome von Euklid nachforschen will, ist es nicht gestattet, ihm einen Ideengang oder Voraussetzungen zuzuschreiben, die er schon darum nicht haben konnte, dass sie erst im Laufe des vorigen Jahrhunderts entstanden sind¹⁾. Es ist sicherlich kein Zufall, dass Euklid im ersten Buche den Begriff der Bewegung ausgeschlossen hat. Die Begriffe der Richtung und der Lage genügten ihm vollständig, um die in diesem Buche vorkommenden Grössen zu definiren und um gewisse Axiome, die er als allgemeine Begriffe (*notions communes*) auffasste, zu formuliren.

Nur beim Axiom der Congruenz soll Euklid zur Bewegung gegriffen haben. Aber auch dies ist mehr als zweifelhaft. Das achte Axiom lautet: „Quae sibi mutuo congruunt sunt aequalia“, d. h. „Grössen, die auf einander passen, sind einander gleich“ (Lambert), oder „Was einander deckt, ist einander gleich“ (Lorenz); „Les grandeurs qui conviennent sont égales et semblables et réciproquement“ (König).

Von Bewegung ist hier keine Rede, höchstens von Umlegung²⁾. Und auch dies ist problematisch. Wenn man Kindern die Geometrie lehrt, z. B. die Congruenz der Dreiecke, so denkt doch Niemand daran, das eine Dreieck auf das andere wirklich zu legen.

Die älteren Geometer haben viel richtiger die Congruenz auf den Satz der Gleichheit³⁾ (*similitude*) zurückgeführt, der uns direct

1) Soll ja nach Poincaré Euklid sogar die Bildung von Gruppen, wie sie Sophus Lie entwickelt hat, geahnt haben!

2) „Euklid,“ schreibt Stäckel (35, 8), „hat gewiss absichtlich in dem ganzen ersten Buche den Begriff der Bewegung nur bei dem Beweise des ersten Congruenzsatzes benutzt. Stillschweigend macht er hier sogar von der Umlegung Gebrauch. Sollte ihm entgangen sein, dass bei der Geometrie der Ebene zwischen Bewegung und Umlegung ein wesentlicher Unterschied besteht?“ Dies ist eben Euklid so wenig entgangen, dass er sogar kaum von dem Begriff der Umlegung Gebrauch machte, — von Bewegung ist in dem Congruenzsatze aber keine Spur zu finden.

3) So z. B. König (45): „Pour Euclide congruence est une notion commune“ die mit dem grossen Princip der Gleichheit verbunden ist (6. Buch).

durch die Anschauung gegeben ist¹⁾). Wie sollen auch an Bewegungen realer Körper gemachte Erfahrungen zum Satze der Congruenz führen? Wo sind denn solche Körper, die vollkommen congruent oder auch nur vollkommen gleich wären?

Eine vollkommene Congruenz kommt eigentlich nur in unserem Bewusstsein zu Stande, und zwar meistens durch Verschmelzung zweier identischer Netzhautbilder oder durch Wahrnehmung identischer Eindrücke von zwei zwar verschiedenen, aber gleich erscheinenden Dingen.

Wie dem auch sei, bei der Definition der geraden Linie hat Euklid nur an Lage und Richtung gedacht. Darüber herrscht volle Uebereinstimmung. Es handelt sich also bei unserem jetzigen Wissen über den Ursprung der Richtungsempfindungen nur darum, die Entstehung des Begriffs der geraden Linie als der Linie einer Richtung physiologisch zu begründen.

Es wurde im zweiten Capitel die functionelle Bedeutung der Beherrschung der Augenmuskeln durch die Bogengänge erörtert und gezeigt, warum eine jede Erregung der Ampullennerven, gleichzeitig mit der Erzeugung einer Richtungsempfindung, gewisse Augenbewegungen auslöst, welche die Blicklinie in der empfundenen Richtung wendet (S. 589 ff.), d. h. zur Quelle dieser Erregung. Kann die Augenbewegung allein eine solche Richtung der Blicklinie nicht erzielen, so rufen die Ampullennerven auf reflectorischem Wege die erforderlichen Kopf- resp. Körperbewegungen hervor.

Der Weg, der von der Erregungsquelle zur Nervenstelle führt, wo eine bestimmte Richtung empfunden wird, gibt die gerade Linie dieser einen Richtung an; die Blicklinie veranschaulicht diese gerade Linie. Die ideale Richtung ist ihrem Wesen nach unbegrenzt. Dagegen ist die ihr entsprechende oder richtiger mit ihr zusammenfallende gerade Linie begrenzt, einerseits durch den Ausgangspunkt der Erregung, andererseits durch den Punkt, wo diese Erregung wahrgenommen wird. Sie ist gleich dem Abstände zwischen diesen beiden Punkten. Aber diese gerade Linie kann selbstverständ-

1) F. Klein hat gezeigt, dass man die projectivische Geometrie ohne Zuhilfenahme der Bewegung aufbauen könne, indem man sie durch die Vergleichung ersetzt. „Jede Strecke, jeder Winkel ist sich selbst congruent“ (Hilbert; 46), dies wird doch nicht durch die Bewegung gelehrt.

lich in der ihr entsprechenden Richtung nach Willkür verlängert werden¹⁾).

Aus dieser durch den Ursprung der idealen geraden Linie bedingten Fähigkeit entstand die zweite Forderung von Euklid: Jede begrenzte gerade Linie stetig in gerader Richtung zu verlängern.

Psychologisch könnte man also die gerade Linie etwa so definieren: die ideale gerade Linie ist die veranschaulichte Vorstellung einer empfundenen Richtung.

Die Entstehungsweise des Begriffs der geraden Linie bedingt es, dass die gerade Linie die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten (Archimed) ist und rechtfertigt auch die Definition von Legendre: „La droite est le plus court chemin d'un point à un autre.“ Es wurde dieser Definition der Vorwurf gemacht, sie bedürfe noch einer Definition des „Weges“. Dieser „Weg“ oder Abstand fällt aber mit der „Richtung“ zusammen, wie wir sahen. Die Definition von Legendre entspricht daher noch viel enger dem physiologischen Ursprung der idealen geraden Linie.

Euklid hat seine Definition nicht nur durch die eben citirte zweite Forderung vervollständigt und präcisirt, sondern auch durch das zwölfte Axiom: „Zwei gerade Linien können keinen Raum einschliessen“, oder was dasselbe ist, können sich nur in einem Punkte schneiden.

Auch dieses Axiom bestätigt ebenso wie die zweite Forderung den physiologischen Ursprung des Begriffs der geraden Linie. Sie folgt unmittelbar aus der Wahrnehmung der Richtung und aus ihrer Projection nach aussen²⁾. Die verschiedenen Richtungsempfindungen treffen nur in unserem Bewusstsein zusammen. In welchem Sinne sie auch verlängert d. h. projicirt werden, sie müssen divergiren: die verschiedenen Richtungen schneiden sich nur einmal in unserem Bewusstsein³⁾.

1) Bei der Verlängerung dieser geraden Linie nach der Seite des letzteren Punktes ändert sich das Vorzeichen (oder Sinn) ihrer Richtung (siehe oben S. 583).

2) Wie bei allen Empfindungen unserer äusseren Sinnesorgane.

3) In seinem berühmten Vortrage (25 b) suchte Helmholtz seinen Zuhörern die zweite Variante der Riemann'schen Raumform, in der auch das zwölfte Axiom von Euklid ungültig sein soll, dadurch mundgerecht zu machen, dass er die Definition der geraden Linie von Legendre, die gerade Linie sei der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten umkehrte. Für die Bewohner der

Der überzeugende Beweis, dass der Begriff der geraden Linie als Linie der einen Richtung seinen Ursprung in den Wahrnehmungen des Ohrlabyrinths hat, wird durch die Thatsache geliefert, dass alle Thiere und Menschen, die ein normalfunctionirendes Ohrlabyrinth besitzen — und nur solche —, die gerade Linie als den kürzesten Weg kennen. Nur sie schlagen mit der grössten Präcision die geradlinige Richtung ein, um am schnellsten zu ihrem Ziele zu gelangen. Man beobachte z. B. Brieftauben, wenn sie auf dem Heimweg begriffen sind (7 u. 10), Hunde, wenn sie die Strasse kreuzen oder um eine Strassenecke umbiegen, auf der Jagd gehetzte Thiere, die auf der Flucht begriffen sind, und man wird erstaunen, mit welcher Präcision sie jedes Mal ihre Richtung wechseln und die Diagonale einzuschlagen verstehen, um ihren Weg abzukürzen. Kinder, die das Gehen erst zu erlernen beginnen, machen die grösste Anstrengung, um in gerader Richtung zu gehen, sobald sie zu einem Ziele gelangen wollen.

Dagegen bewegen sich Thiere, die kein Ohrlabyrinth besitzen, und wenn sie mit Hülfe ihrer Gesichts- und Geruchsorgane noch so vollkommen sich zu orientieren verstehn, wie z. B. Bienen und Ameisen (7 und 10) nur in Halbkreisen und in Bogen: die gerade Linie ist ihnen unbekannt¹⁾.

Bei der ersten Kategorie von Thieren vermögen angeborene oder erworbene Defecte des Bogengangapparates die Kenntniss der geraden Richtungslinie aufzuheben, wie dies an gewissen japanischen Tanzmäusen, an Neunaugen²⁾, an speciell operirten Tauben, Fröschen, Kaninchen etc. zu sehen ist, und zwar auch dann, wenn ihre Gesichts-

Oberfläche einer Kugel gibt es viele kürzeste Linien zwischen zwei Punkten, — also auch viele gerade Linien! Albert Krause (47, 50) hat schon den logischen Fehler solcher Umkehrung eines Satzes hervorgehoben. Alle Affen sind Thiere, — desswegen sind aber nicht alle Thiere Affen.

1) Auf dieser Unkenntniss der geraden Richtung beruhen auch die meisten Fliegen- und Insectenfänger, die durch gewisse riechende Substanzen diese Thiere durch eine relativ weite Oeffnung in einen geschlossenen Raum verlocken: die gefangenen Thiere gehen um die Eingangsöffnung herum, ohne den Ausweg zu finden, weil sie die gerade Richtung nicht einzunehmen verstehen.

2) Diese ein- und zweidimensionale Wesen, d. h. Wesen, die nur eine oder zwei Richtungen des Raumes kennen, bewegen sich nie geradlinig, sondern nur im Zickzack und in Kreisen.

organe vollkommen erhalten sind. Auch beim Menschen kann die Kenntniss der geraden Linie momentan oder auf längere Zeit aufgehoben werden durch Krankheiten des Ohrlabyrinths, durch Intoxicationen, ungewohnte Bewegungen, wie das Schaukeln, Drehungen um die Längsachse und alle anderen Störungen der harmonischen Beziehungen zwischen dem Raum- und Gesichtsinne¹⁾.

Die unzähligen Versuche und Betrachtungen, welche diese Thatsache in unzweifelhafter Weise festgestellt haben, lassen nur die eine Deutung zu: Die Begriffe der geraden Linie, diese fundamentale Raumgrösse der Geometrie, rühren von den Richtungsempfindungen des Ohrlabyrinths her.

Der Nachweis des natürlichen Ursprungs der von Euklid gegebenen Definition der gerade Linie, ermöglicht auch, die Schwierigkeiten zu heben, welche seine Definition der Parallellinien bis jetzt geboten hat: „Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und auf keiner der beiden Seiten zusammentreffen, soweit man sie auch verlängern mag.“

Die Schwierigkeit lag hauptsächlich in der Unmöglichkeit, den Beweis zu geben, dass die gezeichneten Linien wirkliche gerade Linien sind, die in einer Ebene liegen. Um zur Erklärung der Parallellinien zu gelangen, nehmen die Mathematiker zu dem Begriffe der Richtung oder dem des Abstandes ihre Zuflucht (siehe oben). Beide Begriffe sind, wie eben gezeigt worden, physiologischen Ursprungs und seien bestimmend für die Definition der geraden Linie von Euklid. Dadurch werden der natürliche

1) Siehe die Capitel über Dreh- und Gesichtsschwindel, über Taubstumme u. s. w. in den Untersuchungen 4, 5, 6 und 7. Dieser Schwindel muss entstehen jedes Mal, wenn das gewohnte harmonische Zusammenwirken des Ohrlabyrinths mit der Netzhaut anormaler Weise gestört wird, sei es durch abnorme Gesichtsempfindungen, durch Störungen im Ohrlabyrinth selbst oder in den Associationscentra dieser Organe. Taubstumme, die an ein solches harmonisches Zusammenwirken nicht gewöhnt sind, oder bei denen durch Defecte des Bogengangapparates kein solches Zusammenwirken überhaupt möglich sei, solche Taubstumme dürfen weder den Schwindel noch die Seekrankheit kennen: diesen Schluss habe ich im Jahre 1878 aus meiner Theorie des Raumsinns deducirt. Zahlreiche Versuche an Taubstummen von James, Strehl u. A. haben seitdem die Richtigkeit dieser Deduction vollauf bestätigt.

Ursprung und auch die Berechtigung der obigen Definition der Parallelen direct bewiesen.

Demgemäss fällt es nicht schwer, sich zu überzeugen, dass Kinder und Erwachsene, wenn sie auch keinerlei geometrischen Unterricht genossen haben, sehr gut wissen, dass parallele Richtungen nicht zusammentreffen können. Eine blossе Nachfrage genügt, um zu zeigen, dass dieses Wissen nicht durch die Erfahrung erlangt ist, sondern auf einer directen Anschauung beruht. Auch Thiere kennen diese Eigenthümlichkeit der parallelen Richtungen. Man beobachte nur Spiele von Kindern unter sich oder mit Thieren oder auch Thiere, die der Verfolgung zu entweichen suchen. Das im Spiel oder im Ernst verfolgte Thier sucht bei der Flucht immer* die gleiche Richtung wie das Verfolgende zu bewahren; während im Gegentheil das Verfolgende das Verfolgte durch die Abweichung von der parallelen Richtung zu erwischen sucht. Wechselt ersteres die Richtung, so schlägt auch sofort das Verfolgte diese neue Richtung ein, wobei es auch durch das Augenmaass den gleichen Abstand zu bewahren sucht. Geschieht das Spiel in einem beschränkten Raume, so sieht man die Verfolgung in Zickzacklaufen ausarten¹⁾.

Wenn die Spielenden oder Verfolgten nicht die Vorstellung hätten, dass bei Einhaltung der parallelen Richtungen ein Zusammentreffen unmöglich sei, so würde es den Verfolgten doch viel einfacher erscheinen, eine Richtung einzuschlagen, die der des Verfolgers entgegengesetzt ist.

Von Idealisirungen oder Abstractionen gemachter Erfahrungen kann wohl bei Thieren nicht die Rede sein: diese Ueberzeugung ist ihnen also direct durch ihre Sinneswahrnehmungen gegeben. Es liegt hier ebenfalls ein Beispiel des Zusammenwirkens des Ohrlabyrinths mit dem Sehorgan vor, auf welchem die erforderliche Harmonie zwischen dem Sehraum und dem wirklichen Raum beruht. Die Begriffe der Richtung und des Abstandes sind die beiden natürlichen Grundlagen der Geometrie eben dank dieser Harmonie, ohne welche jede Orientirung und jede Localisirung unmöglich wäre. Da die, den drei Ausdehnungen des Raumes entsprechenden Richtungsempfindungen die bestimmende Rolle bei der

1) Ueber das Zickzackspiel der Thiere siehe z. B. das interessante Werk von Groos: „Die Spiele der Thiere.“ (49.)

Orientirung spielen, so müssen die Bogengänge die Bewegungen der Muskeln beherrschen, welche die Localisirung in dem Seh- und Tastraume, die nur kleine Bruchtheile des Weltraumes seien, ermöglichen.

Bei den Erklärungsversuchen der Definition der Parallelen wurde ausser der Richtung und des Abstands auch der Begriff der Unendlichkeit der geraden Linie mehrmals herangezogen, wie er aus der zweiten Forderung Euklids folgt. Es ist schon gezeigt worden, dass die Berechtigung dieser Forderung auch in der Wahrnehmung der idealen Richtung liegt.

Die Demonstration des physiologischen Ursprungs der Definitionen der geraden Linie und der Parallelen aus den Richtungsempfindungen könnte bei der grundlegenden Bedeutung dieser beiden geometrischen Grössen für diesen ersten Versuch genügen. Es soll aber noch gezeigt werden, dass auch der analoge Ursprung der anderen Definitionen von Euklid ohne Schwierigkeiten in derselben Weise sich herleiten lässt. Noch einige Beispiele sollen daher angeführt werden.

Der Winkel wird von Euklid folgendermassen definiert: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen.“ Neigung kann keinen anderen Sinn haben als Richtungsunterschied, da ja die Worte „nicht in gerader Linie“ nur eine Deutung zulassen, „in derselben Richtung“. Ueberweg, der auch in dem synthetischen Theil seiner sehr bedeutenden Arbeit soviel Beispiele wirklich ausserordentlicher Intuition gegeben hat, — formulirte die betreffende Definition Euklid's folgendermassen: „Der Unterschied der Richtungen zweier von einem Punkte ausgehender Linien heisst Winkel.“ Es genügte Ueberweg, den Begriff der Richtung bei der Ableitung der Euklidischen Raumformen im Geiste anwesend zu haben, um die richtige Formulirung zu treffen. Denn auch bei der jetzigen Kenntniss des physiologischen Ursprungs des Begriffes Richtung könnte man nicht zutreffender den Winkel definiren. Es ist kaum nöthig, die Worte „von einem Punkte ausgehender“ durch „in einem Punkte zusammentreffender“ zu ersetzen, — denn wir projeciren ja unsere Empfindungen nach aussen.

Die Lage der Bogengänge in drei senkrecht zu einander stehenden Ebenen bedingt es, dass die Anschauung des rechten Winkels

uns unmittelbar gegeben ist. Daher geht auch die Definition dieses Winkels bei Euklid derjenigen der anderen Winkel (spitzen und stumpfen) voraus.

Die Definition der Ebene als Fläche, welche „zwischen allen in ihr befindlichen Linien auf einerlei Art gelegen ist“, wurde von allen Geometern als analog der Definition der geraden Linie aufgefasst. Bei unserem jetzigen Wissen von der Entstehungsweise des Begriffs der geraden Linie liegt es nahe, den Begriff der Ebene auf die identischen Richtungsempfindungen sämtlicher in der Ebene eines bestimmten Bogenganges gelegenen Nervenenden zurückzuführen. Werden ja die Qualitäten dieser Empfindungen durch die gegenseitige Lage der drei Bogengänge in drei zu einander senkrechten Ebenen bedingt.

Die Begriffe der stumpfen und spitzen Winkel, sowie die des Kreises könnten vielleicht durch die Drehungen der Augäpfel (und eventuell des Kopfes) entstanden sein, die bei der Präcisirung der empfundenen Richtungen auftreten, da solche Drehungen mit einer Verschiebung der Augenachsen gegen die Coordinaten der Bogengänge verbunden sind. (S. 591.)

Den Punkt definiert Euklid als etwas, „was keine Theile hat“. Statt dieser Definition wurden mehrere andere vorgeschlagen, wie z. B. „der Punkt ist die Grenze der Linie“ (Legendre), oder „die Stelle, wo zwei Linien sich kreuzen“ (Blanchet). Nach den vorangegangenen Auseinandersetzungen über den Ursprung der geraden Linie bietet die Deutung dieser beiden Definitionen keinerlei Schwierigkeit. Möglicher Weise ist aber dennoch die von Euklid gegebene Definition physiologisch die am meisten präzise. Es wurde dieser Definition der Vorwurf der zu grossen Allgemeinheit gemacht; sie soll z. B. auch auf das Bewusstsein, die Intelligenz oder die Seele¹⁾ bezogen werden können. Dieser Vorwurf deutet aber vielleicht auf den wahren Begriff hin, der Euklid bei seiner Definition vorgeschweht hat: Der Punkt, wo alle Richtungsempfindungen zusammentreffen, ist eben das untheilbare Bewusstsein. Das selbstbewusste Ich, in dem die Richtungen des Raumes sich kreuzen, — ist das, was „keine Theile“ oder „keine Ausdehnung“ hat.

Die Definitionen von Euklid sind also, wie ich glaube bewiesen zu haben, keine Postulate oder Hypothesen, wie viele Mathe-

1) Siehe Delbœuf (27).

matiker geglaubt haben, sondern der Ausdruck von Begriffen, die direct durch die sinnlichen Wahrnehmungen eines besondern Sinnesorgans gegeben sind. Die geometrischen Figuren sind ideale Raumgrössen und nicht geometrische Körper, wie die Empiristen sie zu bezeichnen pflegen. Sie entstehen auf Erregungen der äusseren Welt und werden bestimmt durch die Form unseres Empfindens. Die Axiome von Euklid sind unmittelbare Folgerungen aus diesen sinnlichen Wahrnehmungen, welche in den Definitionen mehr oder weniger präcise formulirt wurden. Sie sind so enge mit den sinnlichen Wahrnehmungen verknüpft, dass sie uns als durch directe Anschauung gegeben erscheinen. Sie bedürfen keiner mathematischen Beweise, sondern nur Bestätigungen durch die Erfahrungen an realen Gegenständen. Euklid hat sie daher als allgemeine Begriffe (*notions communes*) hingestellt, ohne Beweise zu geben, die er für überflüssig hielt.

Der physiologische Ursprung der idealen Raumgrössen, auf welche sich die Axiome von Euklid beziehen, ist der Grund der apodiktischen Gewissheit, welche ihnen bis gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts auch von denjenigen Mathematikern zuerkannt wurde, die am eifrigsten bemüht waren, mathematische Beweise für das elfte Axiom zu suchen¹⁾. Die blosser Anschauung lehrte schon, dass, wenn zwei in einer Ebene liegende gerade Linien mit einer sie schneidenden geraden innere Winkel bilden, die kleiner als zwei Rechte sind, diese geraden Linien nicht parallel sein können, also bei ihrer Verlängerung sich nähern müssen. Dass sie, wenn genügend verlängert, auch zusammentreffen, dies folgt aus dem Begriffe der parallelen Richtungen, wie ihn uns die sinnliche Wahrnehmung aufzwingt. Die Geometer, welche, wie Ramus, Clairaut u. A., immer behauptet haben, es sei unnütz, nach Beweisen zu suchen für etwas, was an sich vollkommen klar ist, hatten, ebenso wie Euklid, vollkommen Recht.

Jetzt, wo die natürlichen Grundlagen der geometrischen Definitionen festgestellt wurden, also auch die Berechtigung der Begriffe von der geraden Linie und den Parallelen nicht mehr bestritten werden kann, — erlangen auch die vielen mathematischen Beweis-

1) „Euklides ab omni naevo viudicatus,“ so lautet die berühmte Schrift von Saccheri, eines Vorläufers der Nicht-Euklidischen Geometrie.

führungen des elften Axioms, wie sie von Wallis, Saccheri¹⁾, Lambert u. A. gegeben wurden, ihre volle Gültigkeit.

Es kann daher dem von Riemann, Helmholtz u. A. gemachten Versuch, die Axiome von Euklid wegen der Nicht-Euklidischen Geometrie, als nicht mehr absolut gültig hinzustellen, keinesfalls beigestimmt werden. Dieser Versuch verdankt wohl sein Entstehen hauptsächlich dem Wunsche, der Kant'schen Lehre ihr Hauptargument, die apodiktische Gewissheit der geometrischen Axiome, zu entziehen²⁾. Aber, wie aus der Feststellung der natürlichen Grundlagen dieser Axiome jetzt hervorgeht, hat diese Gewissheit einen ganz anderen Ursprung als die unserem Geiste innewohnenden aprioristischen Ideen, nämlich den unserer — sinnlichen Wahrnehmungen.

1) Besonders die drei geometrisch-physikalischen Beweise von Saccheri.

2) Riemann stand bekanntlich ganz unter dem Einfluss der Herbart'schen Anschauungen, die auch auf Helmholtz nicht ohne Wirkung waren. Es wäre aber von hohem Interesse zu erfahren, ob Helmholtz bis zu Ende an der in seiner Heidelberger Rede ausgesprochenen Ansicht festgehalten hat, die Nicht-Euklidische Geometrie habe das Raumproblem in einer Kant ungünstigen Weise entschieden. Es liegen mehrere Anzeichen vor, dass dem nicht ganz so ist. In der zweiten Auflage seiner Physiologischen Optik hat er nirgends der Nicht-Euklidischen Raumformen gedacht. Der Name Riemann's wird nur einmal auf Seite 336 im Vorbeigehen erwähnt, ohne Bezug auf die hier vorliegende Frage. Dagegen hat Helmholtz an den Capiteln, wo die nativistischen und empirischen Raumtheorien discutirt werden, in der neuen Auflage nichts geändert, mit Ausnahme eines Satzes, der sich eben auf Kant bezieht: „So betrachtete er namentlich die geometrischen Axiome auch als ursprünglich in der Raumanschauung gegebene Sätze, eine Ansicht, die ich zu widerlegen gesucht habe,“ (S. 613) statt „über welche sich noch streiten lässt“ (1. Auflage S. 456). Wie Arthur König in seiner Einleitung sagt, lag es auch nicht in der Absicht von Helmholtz, irgendwelche Aenderungen in diesem Theile (von S. 640 an) vorzunehmen. Im Jahre 1880 hatte ich mit Helmholtz eine mehrstündige Besprechung über meine Raumtheorie, die ja in vielen Punkten mit seinen Ansichten schwer zu versöhnen war. Die Beweisfähigkeit meiner thatsächlichen Ergebnisse gab er gerne zu. Sein Hauptargument gegen meine Theorie bestand darin, dass er die Möglichkeit von Empfindungen der Ausdehnungen nicht zugeben konnte. Damals war nur der französische Text meiner Arbeit erschienen, in welchem, um das vieldeutige Wort *Direction* möglichst zu vermeiden, meistens „*sensations d'étendue*“ statt „*sensations de direction*“ gesetzt war. Als ich Helmholtz auf diesen Umstand aufmerksam machte, rieth er mir angelegentlichst, im deutschen Text nur von den ganz einwandfreien „Richtungsempfindungen“ zu sprechen, die einem physiologisch klaren Begriff entsprechen. Diesen Rath des genialen Meisters habe ich seitdem auch genau befolgt.

Die Nothwendigkeit einer solchen Bekämpfungsweise der Lehre von Kant existirt also nicht mehr.

Dass sämtliche empirischen Beobachtungen und Erfahrungen die Gültigkeit der Euklid'schen Axiome, — und nur dieser — vollauf bestätigen, mussten ja, wie oben gezeigt (S. 605 ff.), auch Riemann und Helmholtz zugeben.

Der vor Jahren gelieferte Nachweis, dass unsere Vorstellungen von dem dreidimensionalen Raume mit Hülfe der Richtungsempfindungen der Bogengänge gebildet werden, ist jetzt erweitert und vervollständigt worden: Die physiologischen Verrichtungen des Ohrlabyrinths geben auch die wichtigsten natürlichen Grundlagen der Begriffe ab, auf welchen die Euklidische Geometrie aufgebaut wurde. Diess bildet eine scharfe Scheidewand zwischen dieser und der Nicht-Euklidischen Geometrie. Mathematisch mögen sich die Euklidischen von den Nicht-Euklidischen Raumformen nur durch das Vorzeichen ihres Krümmungsmaasses — oder, viel sicherer, — durch ihre Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Parallelaxiom — unterscheiden. Physicalisch ist der Unterschied zwischen den beiden Geometrien ein ganz gewaltiger: die Euklidische Geometrie beruht allein auf unserer sinnlichen Erkenntniss. Nur ihre Sätze konnten daher durch die Erfahrung und durch Messungen im uns zugänglichen Raume bestätigt und bewiesen werden. Die „dem gesunden Menschenverstande scheinbar so widerstrebenden Gedankenbildungen“ (Stäckel) der Nicht-Euklidischen Geometrie sind, wie ihr bekannter Ursprung es zeigt, reine Producte der mathematischen Ableitungen von Gauss, Lobatschewsky, Bolyai, Riemann und Helmholtz. Sie sind also rein transcendente Schöpfungen einiger hervorragender Geister. Ihre Raumformen sind imaginäre und der menschlichen Vorstellung nur sehr schwer, — wenn überhaupt zugänglich. Sie widerspricht auch aller Anschauung. Die Bewegungsgesetze fester Körper im sphärischen und pseudo-sphärischen Raume sind zwar mit Zuhülfenahme variabler Gleichungen mit grosser Präcision abgeleitet worden. Ob sie aber wirklich wo realisirt sind — bleibt bis jetzt problematisch.

Von einer Gleichstellung der beiden Geometrien, und noch weniger von der Betrachtung der Euklidischen Geometrie als des Specialfalles einer allgemeinen Geometrie, in der vom Parallelaxiom abgesehen wird, (F. Klein, David Hilbert, H. Poincaré) kann daher kaum

die Rede sein. Es mag analytisch zulässig sein, die einzelnen Axiome als unabhängig von einander zu betrachten; physicalisch ist dies, nach dem gemeinschaftlichen Ursprunge der Definitionen und Axiome von Euklid, besonders von der geraden Linie und den Parallellinien, sicherlich unstatthaft.

Unser logisches Denken beruht zum Theil auf den Begriffen, die der Euklidischen Geometrie als Grundlagen gedient haben, so wie diese Geometrie selbst die möglichst consequente logische Entwicklung dieser Begriffe ist.

F. A. Taurinus, einer der Vorläufer der neuen Geometrie, sagte: . . . „Wenn die Vorstellung des Raumes als die blosse Form der äusseren Sinne betrachtet werden darf, so ist unstreitig das Euklidische System das Wahre“ (35, 51). Dass unsere Vorstellungen der geometrischen Grössen wirklich diesen Ursprung haben, — glaube ich zur Genüge festgestellt zu haben.

6. Eine Lösung des Raumproblems.

Von den drei Fragen, die das Wesen des Raumproblems ausmachen (siehe oben S. 592), haben hier zwei ihre Lösung gefunden, indem die Geometrie von Euklid auf ihre naturgemässe Begründung zurückgeführt worden ist. Der Euklidische Raum ist auch der physiologische Raum, d. h. die geometrischen Formen, welche Euklid behandelt, sind durch die Wahrnehmungen unserer Sinne, speciell des sechsten Sinns, des Raumsinns, gegeben.

Die dritte Frage des Raumproblems, die über die reale Existenz des Raumes, darf kaum vom Naturforscher erörtert werden; — denn eine Verneinung dieser Frage würde die Negation der Existenz der Sinnesorgane, des menschlichen Verstandes und der des Naturforschers selbst involviren. Das Causalgesetz ist die erste Grundlage jeder menschlichen Erkenntniss. Dasselbe zwingt uns, die Existenz eines wirklichen realen Raumes anzuerkennen, ohne welchen weder Bewegungen fester Körper noch irgend welche Empfindungen möglich wären.

Der Berkeley'sche Phänomenalismus wird dem Naturforscher, trotz aller Bewunderung für den Scharfsinn seines Begründers, immer als unannehmbar erscheinen. Wenn es keine andere als psychische Wahrheit gäbe, so müssten alle Menschen die gleichen An-

sichten haben. Man findet aber kaum zwei Methaphysiker, die über irgend eine erkenntnisstheoretische Frage vollständig übereinstimmen.

Es ist daher sicherlich kein Zufall, dass die Physiologen erst für das Raumproblem thätiges Interesse gewonnen haben, seitdem Kant durch die Lehre von dem „Ding an sich“ das Berkeley'sche System mit den ersten Erfordernissen der menschlichen Vernunft versöhnt hat.

Die Lehre von dem aprioristischen Ursprung unserer Raumvorstellung gab wenigstens eine greifbare Unterlage für die naturwissenschaftliche Discussion. Es wurde oben (S. 593) erwähnt, dass Kant zu dieser Lehre erst seine Zuflucht nahm, als er die Unmöglichkeit erkannte, aus der Erfahrung allein, soweit sie auf den Wahrnehmungen der bekannten fünf Sinne (eigentlich nur des Gesichtssinnes) beruhte, das Entstehen unserer Anschauungen von einem dreidimensionalen Raume abzuleiten.

Diese Unmöglichkeit hat auch die Schöpfer der Nicht-Euklidischen Geometrie zu Kant's Lehre zurückgedrängt, trotzdem sie selbst sich als entschiedene Anhänger der empirischen Anschauungen erklärten¹⁾. Die Feststellung der Existenz eines speciellen Raumsinnes, dem wir die Wahrnehmungen der drei Richtungen des Raumes verdanken, hat diese Unmöglichkeit beseitigt. Angeboren oder präexistirend sind nicht unsere Raumanschauungen oder geometrische Ideen, sondern die Sinnesorgane, welche uns diese Anschauungen geben. Thiere benutzen die Wahrnehmungen der drei Richtungen des Raumes zur Orientirung ihrer Bewegungen und zur Localisirung der äusseren Gegenstände im Seh- und Tastraume. Der Mensch verwendet dieselben noch ausserdem, um die Vorstellungen von den drei Ausdehnungen des Raumes und den drei Abmessungen fester Körper zu bilden. Auf das System der drei rechtwinkligen Coordinaten, errichtet durch die Empfindungen der drei in zu einander senkrechten Ebenen gelegenen Bogengänge, überträgt der Mensch die Empfindungen seiner anderen Sinnesorgane.

Die Worte Kant's: „Der Raum ist nichts anderes als nur die Form aller Erscheinungen äusserer Sinne“ können in dieser Fassung nicht mehr gelten. Physiologisch müsste der Satz jetzt

1) Siehe oben S. 607 ff.

folgendermaassen lauten: Die Eigenschaften des Raumes sind uns durch die Form der Wahrnehmungen des Raumsinnes gegeben. Die „körperliche Organisation“, die Helmholtz als nothwendig voraussetzte, um die gezwungene Anschauung eines dreifach ausgedehnten Raumes zu erklären, beruht nicht nur auf den Functionen des peripheren Bogengangapparates allein, sondern auch auf dem Vermögen der Hirncentra der Raumnerven, die Erregungen der letzteren in der Form von Richtungen drei verschiedener Qualitäten oder Modalitäten wahrzunehmen.

Entsprechen die wahrgenommenen drei Richtungen des Raumes auch drei realen Ausdehnungen des äusseren Raumes, oder sind die drei Dimensionen nur reale Eigenschaften fester Körper¹⁾? Der anatomische Bau und die gegenseitige Lage der Bogengänge scheint bei diesem Sinnesorgane wirklich auf eine gewisse Uebereinstimmung zwischen der Natur unserer Perceptionen und den Eigenschaften der „Dinge an sich“ hinzuweisen. Ueberweg, der die Existenz des Raumsinnorgans nicht kannte, ahnte schon die Nothwendigkeit einer solchen Uebereinstimmung.

„Wären nun diese letzteren (die ausserhalb seines Bewusstseins liegenden Dinge) anderen Gesetzen unterworfen als solchen, die aus der Natur des dem percipirenden Wesen geometrisch-erkennbaren Raumes sich verstehen lassen, so würde dieses Wesen zwar eine in sich harmonische reine Geometrie gewinnen können, aber keine in sich harmonische angewandte Geometrie, keine auf die durch Sinnesaffectionen bedingte Erscheinungen passende geometrisch-physicalische Erklärung“ . . .

Wie könnten auch alle bis jetzt ausgeführten physicalischen und astronomischen Messungen die Gesetze der Geometrie von Euklid bestätigen, wenn unsere Anschauungen der drei Richtungen des Raumes nicht realen Eigenschaften des wirklichen Weltraums entsprechen würden?

Besitzt dieser Weltraum nur drei Ausdehnungen oder rührt diese Anzahl nur von der beschränkten Organisation unseres Ohr-labyrinths ab? Könnten Geschöpfe mit einem System von vier Bogengangpaaren, für die vielleicht das vierrethwinklige Coordinatensystem von Weierstrass das gewohnte wäre, sich auch eine Vor-

1) Als solche Dimensionen betrachte ich, gemäss der Definition von Euklid (11. Buch), die Länge, Breite und Tiefe; und nicht die drei Begrenzungen — Punkt, Linie und Fläche der neueren Geometer.

stellung von einer vierten Ausdehnung des Raumes (nicht der festen Körper) machen?

Wir vermögen wohl algebraisch dem Raume n Ausdehnungen zuzuschreiben, aber wie Albert Krause ganz richtig sagte, „an dem Charakter der Raumschauung als ein nur in drei zu einander rechtwinklig stehenden Richtungen Ausgedehntes ändert eine algebraische Methode, welche aus practischen Gründen eine vierte Richtung mit behandelt, gar nichts“.

Wir dürfen dennoch nicht ein für alle Mal die obige Frage verneinen.

Wir sehen auch Aetherschwingungen nur von einer beschränkten Anzahl Wellenlängen und hören nur Luftschwingungen von nur wenigen Octaven. Wir kennen aber Aether- und Luftschwingungen, welche die Netzhaut- resp. die Schneckennerven nicht zu erregen vermögen. Ja, wir vermögen sogar die unsichtbaren Hertz'schen Aetherwellen zu hören, und mehrere Octaven unhörbarer Luftschwingungen dank R. König an den Staubfiguren zu sehen. Warum soll sich daher auch die Vermuthung von Newcomb nicht einst bewahrheiten können, dass die Gesetze der Bewegung in der vierten Dimension für die Bewegungen der Moleküle gültig seien?

Hat ja Riemann in seiner berühmten Habilitationsschrift vom Jahre 1854 über die Hypothesen der Geometrie vorhergesagt, dass die Voraussetzungen seiner Geometrie für die Maassverhältnisse im unendlich Kleinen zutreffen werden . . .

L i t e r a t u r.

- 1 a) E. v. Cyon, Ueber die Functionen der halbcirkelförmigen Canäle. Dieses Archiv 1873.
- 1 b) —, Gesammelte physiologische Arbeiten. Berlin 1888.
- 2) —, Les rapports physiologiques entre le nerf acoustique et l'appareil oculomoteur. Compt. rend. de l'Acad. des Sciences 1876.
- 3) —, Les organes périphériques du sens de l'espace. Compt. rend. 1877.
- 4) —, Recherches expérimentales sur les fonctions etc. Bibliothèque des Hautes Études t. 8. 1878. (2, 3 und 4 sind ebenfalls in den Gesammelten Arbeiten erschienen.)
- 5) —, Bogengänge und Raumsinn. Archiv von du Bois-Reymond 1897.

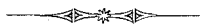
- 6) E. v. Cyon, Die Functionen des Ohrlabyrinths, Dieses Archiv Bd. 71. 1898.
- 7) —, Ohrlabyrinth, Raumsinn und Orientirung. Dieses Archiv Bd. 78. 1900.
- 8) —, Le sens de l'espace chez les souris japonaises. Cinquantainere de la Soc. de Biologie 1899.
- 9) —, Le sens de l'espace. Compt. rend. 1900.
- 10) —, L'orientation chez les pigeons voyageurs. Revue scientifiques 1900.
- 11) —, Le sens de l'espace. Dictionnaire de Physiologie de Chr. Richet t. 5. 1901.
- 12) Ives Delage, Sur une fonction nouvelle des otocystes comme organes d'orientation locomotrice. Arch. de Zoologie expérimentale t. 5. 1887.
- 13) Bernhardt Rawitz, Das Gehörorgan der japanischen Tanzmäuse. Archiv f. Physiologie von Engelmann 1899.
- 14) W. Wundt, Beiträge zur Theorie der Sinneswahrnehmung. Leipzig 1862.
- 15) Eichler, Die Wege des Blutstroms durch den Vorhof der Bogengänge beim Menschen. Mitgetheilt von C. Ludwig. Abhandl. der kgl. sächsischen Gesellsch. der Wissensch. Bd. 21. 1893.
- 16) E. Hering, Der Raumsinn und die Bewegungen des Auges. Hermann's Handbuch der Physiologie Bd. 3. 1879.
- 17) Locke, Versuch über den menschlichen Verstand. Uebersetzt von Kirchmann. Berlin 1873.
- 18) G. Berkeley, Works edited by Fraser vol. 3. Oxford 1871.
- 19) Im. Kant, De mundi sensibilis atque intelligibil forma etc. 1770.
- 20) —, Kritik der reinen Vernunft. 6. Aufl. Leipzig 1818.
- 21) John Stuart Mill, System der inductiven und deductiven Logik. Kap. 4.
- 22) Felix Klein, Zur ersten Vertheilung des Lobatschewsky - Preises. Kasan 1897.
- 23) Fr. Ueberweg, Die Principien der Geometrie wissenschaftlich aufgebaut. Archiv f. Philologie und Pädagogik Bd. 17. 1881.
- 24a) A. Wassilieff, Raum und Bewegung. Physik-mathem. Jahrbuch. Moscou 1900 (russisch).
- 24b) —, Les idées d'Auguste Comte etc. L'Enseignement mathématique. 2^e Année. 15. Mai 1900.
- 25) H. Helmholtz, Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vorträge und Reden Bd. 2. Braunschweig 1876.
- 26) Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3. Leipzig 1895.
- 27) Delbœuf, Prolegomènes philosophiques de la Géometrie etc. Liège 1860.
- 28) Fr. Ueberweg, J. Delbœuf, Prolegomènes etc. Zeitschrift f. Philosophie und philos. Kritik Bd. 37. Halle 1860.
- 29) —, System der Logik und Geschichte der logischen Lehren. 3. Aufl. Bonn 1868.
- 30) —, Grundriss der Geschichte der Philosophie. 7. Auflage, bearbeitet von M. Heinze. 1886.
- 31) Moritz Brasch, Die Welt- und Lebensanschauung Friedrich Ueberweg's. Leipzig 1889.
- 32) Euklid, Elemente der Geometrie. Uebersetzt von Lorenz. 8. Auflage. Berlin 1818.

- 630 E. v. Cyon: Die physiologischen Grundlagen der Geometrie von Euklid.
- 33) C. F. Gauss, Werke Bd. 8. Leipzig 1900. Teubner.
- 34a) Lobatschewsky, Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.
- 34b) —, Neue Anfangsgründe der Geometrie. Vollständige Sammlung der geometrischen Abhandlungen. Kasan 1883—1886.
- 35) Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig 1895.
- 36) B. Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationsschrift von 1854. (Gesammelte Werke. Leipzig 1867.)
- 37) W. Killing, Die Nicht-Euklidischen Raumformen etc. Leipzig 1895.
- 38) H. Poincaré, L'espace et la géométrie. Revue de Metaphysique 1895.
- 39) —, On the foundations of Geometry. The Monist. October 1898.
- 40) A. Wassilieff, Nicolai Iwanowitsch Lobatschewsky. Rede. Leipzig 1895. Teubner.
- 41) C. F. Jacobi, De undecimo Euclidis axiomatic indicium. Jena 1824.
- 42) Sir John Herschel, Quarterly Review. Juni 1841. (In seinen Essays wiedergegeben.)
- 43) Riehl, Der philosophische Criticismus. Leipzig 1876—1887.
- 44) G. Heymans, Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens. Leiden 1890.
- 45) Euclide, Éléments de Geometrie, traduit par Koenig. Pierre v. Os. Paris 1762.
- 46) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1899.
- 47) Legendre, Nouvelle théorie des parallèles etc. Paris 1803.
- 48) Albert Krause, Kant und Helmholtz. Lahr 1878.
- 49) Karl Groos, Die Spiele der Thiere. Jena 1896.

Berichtigung:

Seite 242, Zeile 26 von oben: „Die Art der Entleerung“, muss heissen: „Die Art der Ernährung“.

Seite 244, Zeile 27 von oben: „sondern aus Contractionen“, muss heissen: „sondern als Contractionen“.



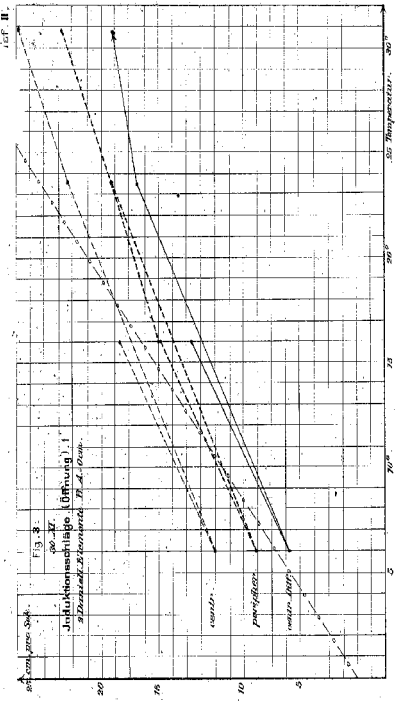
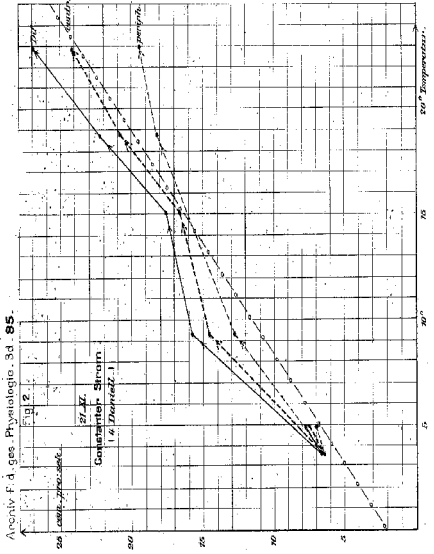


Fig. 2.

Fig. 3.

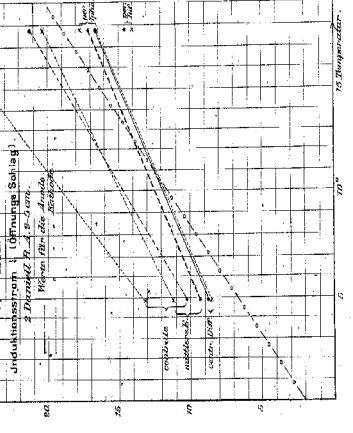
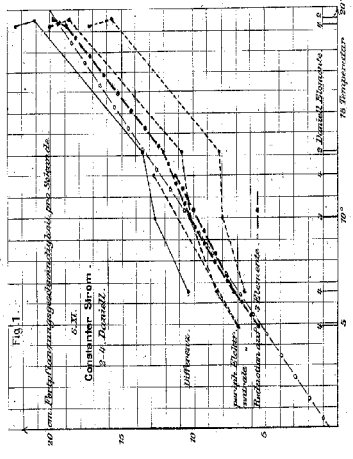
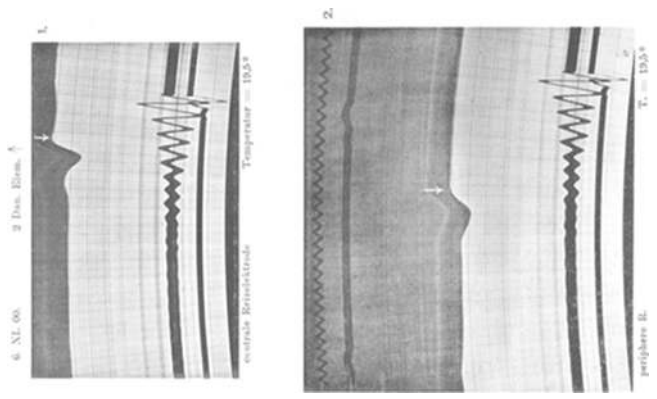
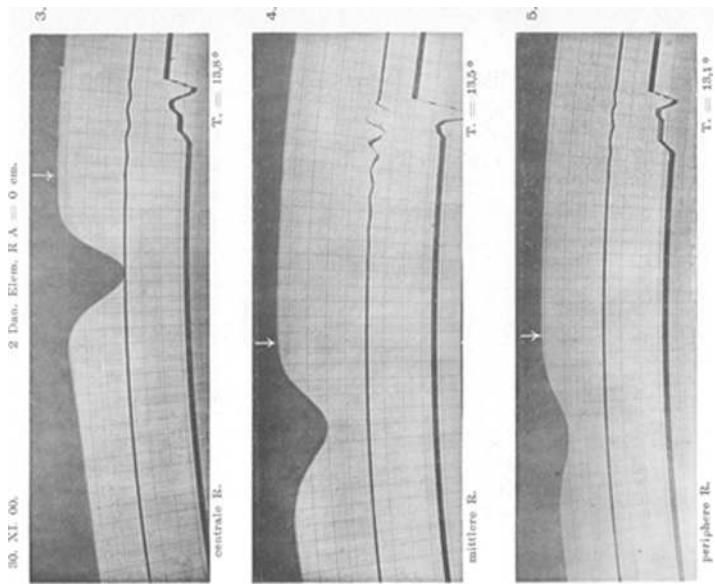


Fig. 1.

Fig. 4.

Induktionsstrom (Öffnungsschlag).

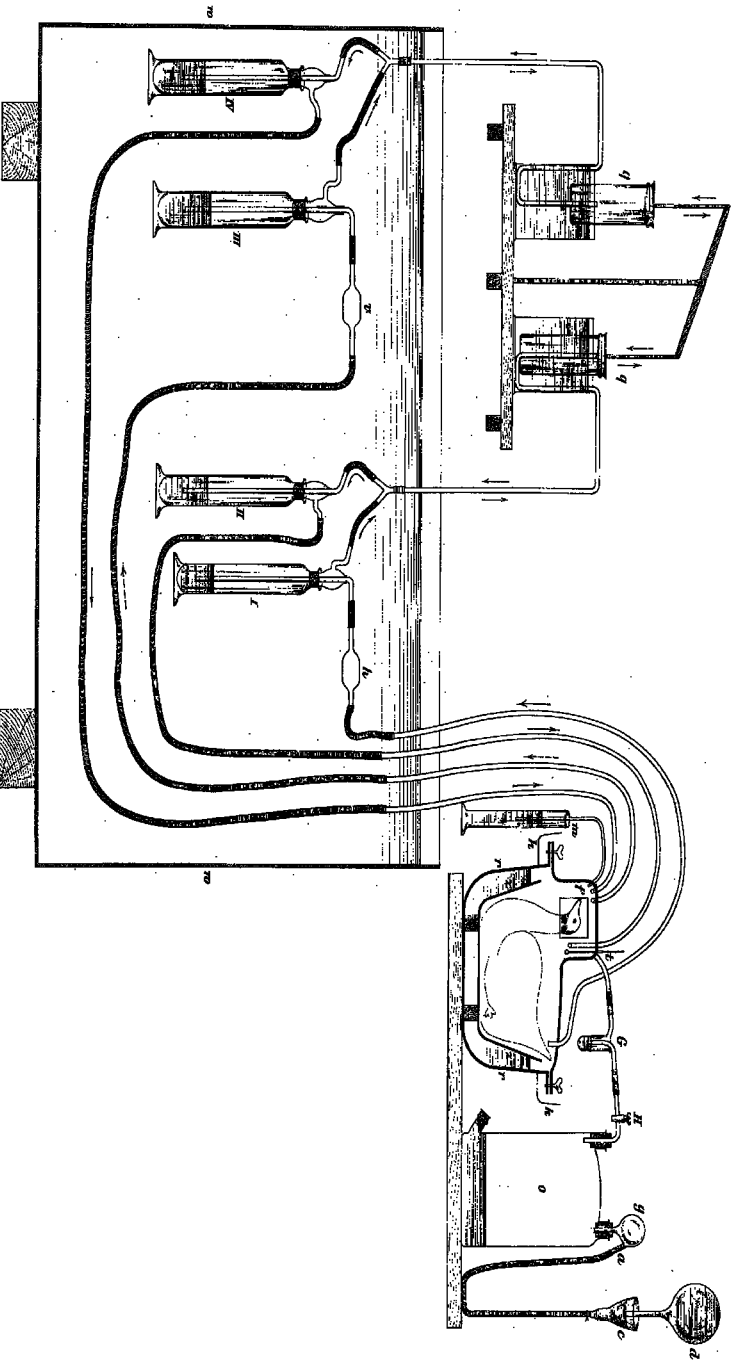


Stimmgabel.

Jaquet.

Kapillar-
 Elektrometer-
 Kurve.

Reihebel.



Ulm, Mechel'sche Buchdruckerei.

Wiederg. nach Strömmer, 85.