Differentialoperatoren bei partiellen Differentialgleichungen (*).

PETER BERGLEZ

*Herrn Prof. Dr. K. W. Bauer
zum 60. Geburtstag gewidmet*

Summary. – *In the present paper those formally hyperbolic differential equations are characterized for which solutions can be represented by means of differential operators acting on holomorphic functions. This is done by a necessary and sufficient condition on the coefficients of the differential equation. These operators are determined simultaneously. By it a general procedure is presented to construct differential equations and corresponding differential operators which map holomorphic functions onto solutions of the differential equations. We also discuss the question under which circumstances all the solutions of a differential equation can be represented by differential operators. For the equations characterized previously we determine the Riemann function. Some special classes of differential equations are investigated in detail. Furthermore the possibility of a representation of pseudo-analytic functions and the corresponding Vekua resolvents by differential operators is discussed.*

0. – Einleitung.

Zur Darstellung der Lösungen elliptischer beziehungsweise formal hyperbolischer Differentialgleichungen sind verschiedene Methoden entwickelt worden. Einerseits bedient man sich gewisser Integraloperatoren (vgl. z.B. [10], [21]), andererseits sind in den letzten Jahren unter Verwendung spezieller Differentialoperatoren interessante Ergebnisse erzielt worden (vgl. z.B. [7]).

Die Integraldarstellung nach I. N. VEKUA [21] gestattet es unter anderem Randwertprobleme bei elliptischen Differentialgleichungen zu behandeln. Für die Darstellung nach S. BERGMAN [10] wurden in [13] und [15] diejenigen Differentialgleichungen charakterisiert, für die Bergman-Operatoren mit Polynomerzeugenden existieren. Die Möglichkeit, für eine Lösung, die mittels eines Bergman-Operators mit Polynomerzeugender dargestellt wird, eine integralfreie Form zu finden, wird in [14] untersucht. Der bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannte Begriff des Fundamentalsystems konnte in [24] auf gewisse lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt werden, falls deren Lösungen unter Ver-

---

(*) Entrata in Redazione il 17 luglio 1984.
Indirizzo dell'A.: Technische Universität Graz, Institut für Mathematik, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, Austria.

wendung bestimmter Differentialoperatoren angegeben werden können. In [25] werden Beziehungen zwischen verallgemeinerten Fundamentalsystemen, der Riemann-Funktion und Bergman-Operatoren untersucht. Die Darstellungen mit Hilfe von Differentialoperatoren erlauben es unter anderem auch, die funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen zu untersuchen. Eine Zusammenfassung von K. W. BAUER und St. RUSCHEWEYH der in dieser Richtung gewonnenen Resultate findet man in [7].

Es erhebt sich daher die Frage, für welche Differentialgleichungen solche Differentialoperatoren existieren. J. PÜNGEL konnte in [17] eine gewisse Charakterisierung treffen. In der vorliegenden Arbeit wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angegeben, unter dem es möglich ist, für eine formal hyperbolische Differentialgleichung eine Lösungsdarstellung mittels Differentialoperatoren zu finden. Der Beweis dazu eröffnet gleichzeitig ein Verfahren, das es erlaubt, beliebig viele Differentialgleichungen zu konstruieren, die Lösungsdarstellungen mit Hilfe von Differentialoperatoren besitzen, die dabei simultan bestimmt werden können. Auch kann der interessante Zusammenhang zwischen einer Lösung, dargestellt durch einen auf eine holomorphe Funktion wirkenden Differentialoperator, und dieser Erzeugenden angegeben werden. Daneben wird die Existenz solcher Differentialoperatoren bei adjungierten Differentialgleichungen untersucht und es werden diejenigen Differentialgleichungen charakterisiert, für die alle Lösungen mit Hilfe von Differentialoperatoren angegeben werden können. Schließlich wird die Möglichkeit der Darstellung pseudoanalytischer Funktionen unter Verwendung von Differentialoperatoren diskutiert.

Im zweiten Abschnitt werden zu den davor ausgezeichneten Gleichungen die Riemann-Funktionen bestimmt. Zugehörige Bergman-Operatoren mit Polynomerzeugenden können durch das von W. WATZLAWEK in [26] erzielte Resultat bestimmt werden. Daneben sei noch auf entsprechende Konstruktionsverfahren hingewiesen, die man in [23] und [19] findet. Auch werden die bei der Darstellung pseudoanalytischer Funktionen durch Integraloperatoren nach I. N. VEKUA [21] verwendeten Resolventen für bestimmte, zuvor ausgezeichnete Klassen angegeben.

Im dritten Abschnitt wird gezeigt, wie sich einerseits gewisse, schon untersuchte Differentialgleichungen als Spezialfälle der hier betrachteten Klassen ergeben und sich andererseits die gewonnenen Resultate auf bisher noch nicht behandelte Differentialgleichungen anwenden lassen.

1. – Lösungsdarstellungen durch Differentialoperatoren.

$\mathfrak{G}$ bezeichne im folgenden ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene, $\overline{\mathfrak{G}}$ das durch Spiegelung von $\mathfrak{G}$ an der reellen Achse entstehende Gebiet. Die formal hyperbolische Differentialgleichung

$$U_{z\zeta} + \tilde{a}_1(z, \zeta)\, U_z + \tilde{a}_2(z, \zeta)\, U_\zeta + \tilde{a}_3(z, \zeta)\, U = 0$$

mit $(z, \zeta) \in \mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ und den in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ analytischen Koeffizienten $\tilde{a}_j$, $j = 1, 2, 3$, reduziert sich durch

$$V_1 = U \exp \int_0^\zeta \tilde{a}_1(z, \xi)\, d\xi$$

auf die verkürzte Form

$$V_{1,z\zeta} + \tilde{b}_1(z, \zeta) V_{1,\zeta} + \tilde{c}_1(z, \zeta) V_1 = 0$$

mit

$$\tilde{b}_1 = \tilde{a}_2 - \int_0^\zeta \tilde{a}_{1,z}(z, \xi)\, d\xi\,, \qquad \tilde{c}_1 = \tilde{a}_3 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_{1,z}$$

bzw. durch

$$V_2 = U \exp \int_0^z \tilde{a}_2(\xi, \zeta)\, d\xi$$

auf

$$V_{2,z\zeta} + \tilde{b}_2(z, \zeta) V_{2,z} + \tilde{c}_2(z, \zeta) V_2 = 0$$

mit

$$\tilde{b}_2 = \tilde{a}_1 - \int_0^z \tilde{a}_{2,\zeta}(\xi, \zeta)\, d\xi\,, \qquad \tilde{c}_2 = \tilde{a}_3 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_{2,\zeta}\,.$$

Aus Gründen der Zweckmäßigkeit wählen wir für die folgenden Überlegungen

$$\tilde{b}_1(z, \zeta) = (\log A_n(z, \zeta))_z\,, \quad A_n \neq 0 \quad \text{in } \mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}\,, \quad \tilde{c}_1(z, \zeta) = B_n(z, \zeta)\,,$$
$$\tilde{b}_2(z, \zeta) = (\log \tilde{A}_m(z, \zeta))_\zeta\,, \quad \tilde{A}_m \neq 0 \quad \text{in } \mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}\,, \quad \tilde{c}_2(z, \zeta) = \tilde{B}_m(z, \zeta)\,,$$

das heißt, die betrachteten Differentialgleichungen haben die Gestalt

$$Lw := w_{z\zeta} + (\log A_n)_z w_\zeta + B_n w = 0\,, \tag{1.1}$$

$$\tilde{L}\tilde{w} := \tilde{w}_{z\zeta} + (\log \tilde{A}_m)_\zeta \tilde{w}_z + \tilde{B}_m \tilde{w} = 0\,, \tag{1.2}$$

mit in $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ analytischen Funktionen $A_n, \tilde{A}_m, B_n, \tilde{B}_m$, wobei $A_n \tilde{A}_m \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$. Ist in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ $\tilde{b}_1 \equiv 0$ oder $\tilde{b}_2 \equiv 0$, so gelte $A_n \equiv 1$ bzw. $\tilde{A}_m \equiv 1$.

Funktionen w bzw. $\tilde{w}$, die in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ analytisch sind und dort die Differentialgleichung (1.1) bzw. (1.2) erfüllen, nennt man Lösungen von (1.1) bzw. (1.2). Da die Differentialgleichungen der Gestalt (1.2) formal denen der Gestalt (1.1) gleichen, beschränke ich mich bei den folgenden Untersuchungen vorwiegend auf Gleichungen des ersten Typs. Alle hier angestellten Überlegungen lassen sich ohne Schwierigkeiten sofort auf Gleichungen der Form (1.2) übertragen.

DEFINITION. – Zwei Differentialoperatoren K_n, $\tilde{K}_m$ seien in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$ definiert durch

$$K_n := \sum_{k=0}^{n} a_k(z,\zeta)\frac{\partial^k}{\partial z^k}, \qquad \tilde{K}_m := \sum_{k=0}^{m} b_k(z,\zeta)\frac{\partial^k}{\partial \zeta^k}, \qquad n, m \in \boldsymbol{N},$$

wobei die Funktionen a_k, $k = 0, 1, \dots, n$, und b_k, $k = 0, 1, \dots, m$, in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$ analytisch seien mit $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$. Ist $K_n g$ bzw. $\tilde{K}_m h$ für $g(z)$ holomorph in $\mathcal{G}$, $h(\zeta)$ holomorph in $\bar{\mathcal{G}}$, Lösung der Differentialgleichung (1.1) oder der Differentialgleichung (1.2), so nennt man K_n $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^{n}$-Operator bzw. $\tilde{K}_m$ $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^{m}$-Operator von (1.1) bzw. (1.2) in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$.

Die Zahlen n und m geben dabei die Ordnung des Operators an.

Im folgenden gelte: Für $k \in \boldsymbol{N}_0$ seien die Funktionen $A_k(z,\zeta)$, $\tilde{A}_k(z,\zeta)$, $B_k(z,\zeta)$, $\tilde{B}_k(z,\zeta)$ in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$ analytisch mit $A_k\tilde{A}_k \neq 0$ in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$.

Zunächst werden drei Hilfssätze angegeben, die wir im folgenden benötigen werden. Die ersten beiden übernehmen wir von J. PÜNGEL [16].

HILFSSATZ 1.1. – *a*) Bezeichnet $v(z,\zeta)$ eine Lösung von

$$v_{z\zeta} + (\log A_{k-1})_z v_\zeta + B_{k-1} v = 0 \tag{1.3}$$

mit $(\log A_{k-1})_{z\zeta} - B_{k-1} \neq 0$ in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$, $k \in \boldsymbol{N}$, k fest, so erhält man durch

$$w = F_{k-1} v \tag{1.4}$$

mit

$$F_{k-1} := \frac{\partial}{\partial z} + (\log A_{k-1})_z \tag{1.5}$$

eine Lösung von

$$w_{z\zeta} + (\log A_k)_z w_\zeta + B_k w = 0\,, \tag{1.6}$$

wobei gilt

$$A_k = \frac{A_{k-1}}{B_{k-1} - (\log A_{k-1})_{z\zeta}}, \qquad B_k = B_{k-1} - (\log A_{k-1})_{z\zeta}\,. \tag{1.7}$$

b) Bezeichnet $\tilde{v}(z,\zeta)$ eine Lösung von

$$\tilde{v}_{z\zeta} + (\log \tilde{A}_{k-1})_\zeta \tilde{v}_z + \tilde{B}_{k-1}\tilde{v} = 0 \tag{1.8}$$

mit $(\log \tilde{A}_{k-1})_{z\zeta} - \tilde{B}_{k-1} \neq 0$ in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$, $k \in \boldsymbol{N}$, k fest, so wird durch

$$\tilde{w} = \tilde{F}_{k-1}\tilde{v}$$

mit

$$\tilde{F}_{k-1} := \frac{\partial}{\partial \zeta} + (\log \tilde{A}_{k-1})_\zeta \tag{1.9}$$

auf eine Lösung $\tilde{w}$ von

$$\tilde{w}_{z\zeta} + (\log \tilde{A}_k)_\zeta \tilde{w}_z + \tilde{B}_k \tilde{w} = 0 \tag{1.10}$$

abgebildet. Dabei gilt:

$$\tilde{A}_k = \frac{\tilde{A}_{k-1}}{\tilde{B}_{k-1} - (\log \tilde{A}_{k-1})_{z\zeta}}, \qquad \tilde{B}_k = \tilde{B}_{k-1} - (\log \tilde{A}_{k-1})_{z\zeta}\,.$$

HILFSSATZ 1.2. – *a*) Bezeichnet w eine Lösung von (1.6) mit $B_k \neq 0$ in $\mathcal{G} \times \bar{\mathcal{G}}$, so erhält man durch

$$v = -\frac{1}{B_k} w_\zeta \tag{1.11}$$

eine Lösung v von (1.3).

b) Ist $\tilde{w}$ eine Lösung von (1.10) und $\tilde{B}_k \neq 0$ in $\mathcal{G} \times \bar{\mathcal{G}}$, so ist

$$\tilde{v} = -\frac{1}{\tilde{B}_k} \tilde{w}_z \tag{1.12}$$

eine Lösung von (1.8).

HILFSSATZ 1.3. – *a*) Jeder $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^k$-Operator K_k, $k \in \boldsymbol{N}$, von Gleichung (1.6) kann dargestellt werden in der Form

$$K_k = F_{k-1} K_{k-1}$$

mit F_{k-1} gemäß (1.5) und dem $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^{k-1}$-Operator K_{k-1} zu (1.3).

b) Jeder $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^k$-Operator $\tilde{K}_k$, $k \in \boldsymbol{N}$, von (1.10) besitzt die Darstellung

$$\tilde{K}_k = \tilde{F}_{k-1} \tilde{K}_{k-1}$$

mit $\tilde{F}_{k-1}$ gemäß (1.9) und dem $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^{k-1}$-Operator $\tilde{K}_{k-1}$ von (1.8).

BEWEIS. – Der Beweis sei hier nur für Teil *a*) geführt, die zweite Aussage ergibt sich analog.

Der Operator $K_k = \sum_{j=0}^{k} a_j^k(z, \zeta)(\partial^j/\partial z^j)$, $k \in \boldsymbol{N}$, ist $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^k$-Operator zu (1.6), falls die

Koeffizienten a_j^k mit $a_{-1}^k \equiv 0$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_{j,z\zeta}^k + (\log A_k)_z a_{j,\zeta}^k + B_k a_j^k + a_{j-1,\zeta}^k = 0\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1\,,$$
$$a_{k-1,\zeta}^k = -B_k\,,$$
$$a_k^k \equiv 1\,.$$

Dieses System geht durch

$$(1.13)\qquad \begin{cases} a_{j-1}^{k-1} := a_j^k - a_{j,z}^{k-1} - (\log A_{k-1})_z a_j^{k-1}\,, & j = k-1, k-2, \ldots, 0\,, \\ a_{k-1}^{k-1} :\equiv 1 \end{cases}$$

über in

$$(1.14)\qquad \begin{cases} a_{j,z\zeta}^{k-1} + (\log A_{k-1})_z a_{j,\zeta}^{k-1} + B_{k-1} a_j^{k-1} + a_{j-1,\zeta}^{k-1} = 0\,, & j = 0, 1, \ldots, k-2\,, \\ a_{k-2,\zeta}^{k-1} = -B_{k-1}\,, \\ a_{-1}^{k-1} \equiv 0\,. \end{cases}$$

Die Funktionen A_{k-1} und B_{k-1} sind dabei gegeben durch

$$A_{k-1} = A_k B_k\,, \qquad B_{k-1} = B_k + (\log A_k B_k)_{z\zeta}\,.$$

Unter Verwendung von (1.13) kann der Operator K_k jetzt in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$K_k = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j^{k-1} \frac{\partial^j}{\partial z^j}\right) + (\log A_{k-1})_z \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{k-1} \frac{\partial^j}{\partial z^j}\,.$$

Da die Funktionen a_j^{k-1}, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, dem System (1.14) genügen, stellt $K_{k-1} = \sum\limits_{j=0}^{k-1} a_j^{k-1}(\partial^j/\partial z^j)$ einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^{k-1}$-Operator zu (1.3) dar und es gilt $K_k = F_{k-1} K_{k-1}$.

Damit gelingt es jetzt, folgende notwendige und hinreichende Bedingung für diejenigen Differentialgleichungen anzugeben, die Lösungsdarstellungen mittels Differentialoperatoren erlauben.

SATZ 1.4. – Zur Differentialgleichung (1.1)

$$w_{z\zeta} + (\log A_n)_z w_\zeta + B_n w = 0$$

gibt es in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ genau dann einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator K_n, $n \in \boldsymbol{N}$, falls mit

$$(1.15)\qquad A_{k-1} = A_k B_k\,, \quad B_{k-1} = B_k + (\log A_k B_k)_{z\zeta}\,, \quad k = n, n-1, \ldots, 1\,,$$
$$B_0 \equiv 0 \quad \text{in } \mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$$

erfüllt ist. Der Operator K_n ist gegeben durch

$$K_n = F_{n-1}F_{n-2} \dots F_0 \tag{1.16}$$

mit

$$F_k = \frac{\partial}{\partial z} + (\log A_k)_z\,, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

BEWEIS. – *a*) Die Differentialgleichung

$$v_{z\zeta} + (\log A_0)_z v_\zeta + B_0 v = 0 \tag{1.17}$$

besitzt für den Fall, daß in $\mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$ $B_0 \equiv 0$ ist, dort die Lösung $v = g$, $g(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$. Mittels

$$w = F_{n-1}F_{n-2} \dots F_0 v = K_n g$$

erhält man nach Hilfssatz 1.1.*a* in $\mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) mit Hilfe des $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operators K_n.

b) Durch sukzessive Zerlegung des $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operators K_n gemäß Hilfssatz 1.3.*a* ergibt sich

$$K_n = F_{n-1} \dots F_{n-l} K_{n-l} = F_{n-1} \dots F_0\,, \qquad l \in \boldsymbol{N},\ l \leqslant n\,.$$

Soll nun $v = g$, $g(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$, Lösung von (1.17) sein, so muß mit (1.15) $B_0 \equiv 0$ in $\mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$ erfüllt sein.

Durch die Transformation $\tilde{w} = A_n w$ geht die Differentialgleichung (1.1) über in

$$\tilde{w}_{z\zeta} + (\log \tilde{A}_m)_\zeta \tilde{w}_z + \tilde{B}_m \tilde{w} = 0$$

mit

$$\tilde{A}_m = \frac{1}{A_n}\,, \qquad \tilde{B}_m = B_n - (\log A_n)_{z\zeta}\,, \qquad m \in \boldsymbol{N},\ m \text{ fest}\,. \tag{1.18}$$

Die Aussagen der Hilfssätze 1.1.*b* und 1.3.*b* gestatten es nun in entsprechender Weise folgenden Satz zu beweisen:

SATZ 1.5. – Die Differentialgleichung (1.1) besitzt in $\mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$ genau dann einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator $\tilde{K}_m$, $m \in \boldsymbol{N}$, falls mit (1.18) und

$$\tilde{A}_{k-1} = \tilde{A}_k \tilde{B}_k\,, \qquad \tilde{B}_{k-1} = \tilde{B}_k + (\log \tilde{A}_k \tilde{B}_k)_{z\zeta}\,, \qquad k = m, m-1, \dots, 1\,, \tag{1.19}$$
$$\tilde{B}_0 \equiv 0 \quad \text{in } \mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$$

ist. $\tilde{K}_m$ ist dabei gegeben durch

$$\tilde{K}_m = \frac{1}{A_n} \tilde{F}_{m-1} \ldots \tilde{F}_0 \tag{1.20}$$

mit

$$\tilde{F}_k = \frac{\partial}{\partial \zeta} + (\log \tilde{A}_k)_\zeta , \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 .$$

BEMERKUNG. – Damit erhalten wir ein Konstruktionsprinzip für Differentialgleichungen, zu denen es einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator bzw. einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator gibt, wobei diese Operatoren simultan bestimmt werden. Man startet von einer Differentialgleichung der Form

$$w_{0,z\zeta} + (\log A_0)_z w_{0,\zeta} = 0 .$$

Die in $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}$ analytische Funktion $A_0(z, \zeta)$ kann dabei bis auf die Bedingung $A_0 \neq 0$ in $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}$ beliebig vorgegeben werden. $w_0 = g$, $g(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$, ist eine Lösung davon. Durch wiederholte Abbildungen der Form

$$w_k = F_{k-1} w_{k-1} , \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \ n \in \boldsymbol{N} ,$$

gelangt man zur Differentialgleichung

$$w_{n,z\zeta} + (\log A_n)_z w_{n,\zeta} + B_n w_n = 0 ,$$

wobei die Funktionen A_n und B_n mittels

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{B_k - (\log A_k)_{z\zeta}} , \qquad B_{k+1} = B_k - (\log A_k)_{z\zeta} , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 ,$$

berechnet werden. Der zugehörige $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator lautet

$$K_n = F_{n-1} \ldots F_0 .$$

Entsprechend kann man auch Differentialgleichungen mit $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operatoren bilden. Somit ist man in der Lage, beliebig viele Differentialgleichungen zu konstruieren, deren Lösungen mit Hilfe von Differentialoperatoren dargestellt werden können.

Unter Verwendung eines Satzes von R. HEERSINK [12] ergibt sich aus den Sätzen 1.4 und 1.5 unmittelbar das folgende

KOROLLAR 1.6. – Ist mit (1.15), (1.18) und (1.19) sowohl $B_0 \equiv 0$ als auch $\tilde{B}_0 \equiv 0$ in $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}$, so gibt es zu (1.1) einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator K_n gemäß (1.16), $n \in \boldsymbol{N}$, und einen

$\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator $\tilde{K}_m$ gemäß (1.20), $m \in \boldsymbol{N}$. Für $g(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$, $h(\zeta)$ holomorph in $\overline{\mathfrak{G}}$, ist

$$w = K_n g + \tilde{K}_m h$$

Lösung von (1.1) in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$. Umgekehrt gibt es dann zu jeder in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ definierten Lösung von (1.1) zwei in $\mathfrak{G}$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}$ holomorphe Funktionen $g(z)$ und $h(\zeta)$, so daß

$$w = K_n g + \tilde{K}_m h \,.$$

Ist $m = n$, so besitzen beide Operatoren dieselbe Ordnung.

Wegen (1.15) und (1.19) gilt mit (1.18) für $k \in \boldsymbol{Z}$ generell

$$A_{n+k} \tilde{A}_{m-k} = 1 \,,$$

$$B_{n+k} - \tilde{B}_{m+1-k} = 0 \,.$$

Setzt man in der zweiten Gleichung einmal $k = -n$, dann $k = m + 1$, so erkennt man, daß die Bedingungen $B_0 \equiv 0$ bzw. $\tilde{B}_0 \equiv 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ äquivalent sind zu $\tilde{B}_{m+n+1} \equiv 0$ und $B_{n+m+1} \equiv 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$. Damit gilt neben den Aussagen der Sätze 1.4 und 1.5 und des Korollars 1.6 über die Charakterisierung von Differentialgleichungen mit $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operatoren bzw. $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operatoren noch der folgende

SATZ 1.7. – *a*) Die Gleichung (1.1) besitzt in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ genau dann einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator, $n \in \boldsymbol{N}$, falls mit (1.18) und $\tilde{A}_{k+1} = \tilde{A}_k / (\tilde{B}_k - (\log \tilde{A}_k)_{z\zeta})$, $\tilde{B}_{k+1} = \tilde{B}_k - (\log \tilde{A}_k)_{z\zeta} \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$, $k = m, \ldots, m + n$, $\tilde{B}_{m+n+1} \equiv 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ erfüllt ist.

b) Zur Gleichung (1.1) gibt es in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ genau dann einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator, $m \in \boldsymbol{N}$, falls mit $A_{k+1} = A_k / (B_k - (\log A_k)_{z\zeta})$, $B_{k+1} = B_k - (\log A_k)_{z\zeta} \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$, $k = n, \ldots, \ldots, n + m$, $B_{n+m+1} \equiv 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ gilt.

c) Ist sowohl $B_{m+n+1} \equiv 0$ als auch $\tilde{B}_{m+n+1} \equiv 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$, so gibt es dort zu (1.1) einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator und einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator. Desgleichen falls in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ $B_0 \equiv 0$ und $B_{m+n+1} \equiv 0$ bzw. $\tilde{B}_0 \equiv 0$ und $\tilde{B}_{m+n+1} \equiv 0$ gilt.

Der folgende Satz gibt den Zusammenhang zwischen einer Lösung der Differentialgleichung (1.1), die sich mit Hilfe eines $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operators bzw. eines $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operators darstellen läßt, und der Erzeugenden $g(z)$ bzw. $h(\zeta)$ an:

SATZ 1.8. – Ist mit (1.15), (1.18) und (1.19) $B_k \tilde{B}_l \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ für $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$, $n, m \in \boldsymbol{N}$, so gilt:

Für jede in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ definierte Lösung w_j, $j = 1, 2$, von (1.1), die sich darstellen läßt in der Form

$$w_1 = K_n g \,, \qquad g(z) \text{ holomorph in } \mathfrak{G} \,,$$

$$w_2 = \tilde{K}_m h \,, \qquad h(\zeta) \text{ holomorph in } \overline{\mathfrak{G}} \,,$$

mit K_n und $\tilde{K}_m$ gemäß (1.16) bzw. (1.20), ist die Erzeugende $g(z)$ bzw. $h(\zeta)$ eindeutig bestimmt durch

$$g(z) = D_n w_1 , \tag{1.21}$$

$$h(\zeta) = \tilde{D}_m w_2 . \tag{1.22}$$

Dabei gilt

$$D_k = -\frac{1}{B_{n-k+1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} D_{k-1} , \qquad k = 1, \ldots, n , \qquad D_0 w_1 = w_1 , \tag{1.23}$$

$$\tilde{D}_k = -\frac{1}{\tilde{B}_{m-k+1}} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{D}_{k-1} , \qquad k = 1, \ldots, m , \qquad \tilde{D}_0 w_2 = A_n w_2 . \tag{1.24}$$

BEWEIS. – Die n-fache sukzessive Anwendung von Hilfssatz 1.2.a liefert zunächst Gleichung (1.21). Berücksichtigt man, daß $A_n w_2 = \tilde{w}_2$ Lösung von

$$\tilde{w}_{2,z\zeta} - (\log A_n)_\zeta \tilde{w}_{2,z} + \big(B_n - (\log A_n)_{z\zeta}\big) \tilde{w}_2 = 0$$

ist, so erhält man analog unter Verwendung von Hilfssatz 1.2.b die Relation (1.22).

Die Frage der Existenz von Differentialoperatoren bei adjungierten Differentialgleichungen behandelt der folgende

SATZ 1.9. – Die zu (1.1)

$$Lw = w_{z\zeta} + (\log A_n)_z w_\zeta + B_n w = 0$$

adjungierte Differentialgleichung

$$L^* u := u_{z\zeta} - (\log A_n)_z u_\zeta + \big(B_n - (\log A_n)_{z\zeta}\big) u = 0$$

besitzt in $\mathfrak{G} \times \bar{\mathfrak{G}}$ genau dann einen $\mathcal{B}^n_{\mathrm{II}}$-Operator, $n \in N$, falls es in $\mathfrak{G} \times \bar{\mathfrak{G}}$ zu $Lw = 0$ einen $\mathcal{B}^n_{\mathrm{I}}$-Operator gibt. Dann gilt

$$w = K_n g = F_{n-1} \ldots F_0 g , \quad g(z) \text{ holomorph in } \mathfrak{G} ,$$

ist Lösung von $Lw = 0$,

$$u = \hat{K}_n h = A_n \hat{F}_{n-1} \ldots \hat{F}_0 h , \quad h(\zeta) \text{ holomorph in } \bar{\mathfrak{G}} ,$$

ist Lösung von $L^* u = 0$ mit

$$F_k = \frac{\partial}{\partial z} + (\log A_k)_z , \qquad \hat{F}_k = \frac{\partial}{\partial \zeta} + (\log A_k)_\zeta ,$$

für $k = 0, \ldots, n-1$, und A_k, $k = 0, \ldots, n-1$, gemäß (1.15).

BEWEIS. – Nach Satz 1.4 gibt es zu $Lw = 0$ genau dann einen $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^{n}$-Operator, falls mit (1.15) $B_0 \equiv 0$ in $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$. Die zu $Lw = 0$ adjungierte Differentialgleichung $L^*u = 0$ geht durch $u = A_n v$ über in

$$v_{z\zeta} + (\log A_n)_\zeta v_z + B_n v = 0 .$$

Nach Satz 1.5 besitzt diese Gleichung genau dann einen $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^{n}$-Operator, falls auch hier $B_0 \equiv 0$ in $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ erfüllt ist. Die Lösungsdarstellungen folgen aus den entsprechenden Aussagen der Sätze 1.4 und 1.5.

KOROLLAR 1.10. – Besitzt die Differentialgleichung (1.1) $Lw = 0$ eine zweigliedrige Lösungsdarstellung, das heißt für w gilt in $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$

$$w = K_n g + \tilde{K}_m h ,$$

$g(z)$ holomorph in $\mathcal{G}$, $h(\zeta)$ holomorph in $\overline{\mathcal{G}}$, mit K_n gemäß (1.16) und $\tilde{K}_m$ gemäß (1.20), $m, n \in \boldsymbol{N}$, wobei die Funktionen $\tilde{A}_k$, $\tilde{B}_k$, $k = 0, \ldots, m-1$, sich unter Verwendung von (1.18) nach (1.19) berechnen, so können auch die Lösungen der zu (1.1) adjungierten Differentialgleichung $L^*u = 0$ durch einen $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^{m}$-Operator und einen $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^{n}$-Operator dargestellt werden. Es gilt in $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$

$$u = K_m^0 g + \hat{K}_n^0 h ,$$

$g(z)$ und $h(\zeta)$ holomorph in $\mathcal{G}$ bzw. $\overline{\mathcal{G}}$,

$$K_m^0 = F_{m-1}^0 \ldots F_0^0 , \qquad F_k^0 := \frac{\partial}{\partial z} + (\log \tilde{A}_k)_z , \qquad k = 0, \ldots, m-1 ,$$

$$\hat{K}_n^0 = \frac{1}{A_n} \hat{F}_{n-1}^0 \ldots \hat{F}_0^0 , \qquad \hat{F}_k^0 = \frac{\partial}{\partial \zeta} + (\log A_k)_\zeta , \qquad k = 0, \ldots, n-1 .$$

Nach [12] kann damit in $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ die gesamte Lösungsmannigfaltigkeit der Differentialgleichung (1.1) $Lw = 0$ und der dazu adjungierten Differentialgleichung $L^*u = 0$ angegeben werden.

Daran schließt jetzt unmittelbar folgende Aussage an:

SATZ 1.11. – Zu selbstadjungierten Differentialgleichungen, d.h. zu

$$w_{z\zeta} + B_n w = 0 ,$$

existiert in $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ genau dann eine zweigliedrige Lösungsdarstellung

$$w = K_n g + \tilde{K}_n h ,$$

$g(z)$ holomorph in $\mathcal{G}$, $h(\zeta)$ holomorph in $\overline{\mathcal{G}}$, falls mit (1.15) $B_0 \equiv 0$ in $\mathcal{G}\times\overline{\mathcal{G}}$ erfüllt ist. Die Operatoren K_n, $\tilde{K}_n$, $n \in \boldsymbol{N}$, werden mit (1.16) bzw. (1.20) berechnet.

Unter den Differentialgleichungen (1.1) mit $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^n$- und $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operatoren sind unter anderem diejenigen besonders interessant, deren Differentialoperatoren sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen: Der $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator K_n, $n \in \boldsymbol{N}$, zu (1.1) besitze die Gestalt $K_n = F_{n-1} \dots F_0$ (vgl. (1.16)). Der $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator $\tilde{K}_m$ dazu, $m \in \boldsymbol{N}$, sei derart beschaffen, daß der zweite Lösungsanteil w_2 von (1.1) mit der in $\overline{\mathcal{G}}$ holomorphen Funktion $h(\zeta)$ und $j \in \boldsymbol{N}_0$, $j \leqslant n$, geschrieben werden kann als

$$w_2 = \tilde{K}_m h(\zeta) = \frac{1}{A_n} \tilde{F}_{m-1} \dots \tilde{F}_0 h(\zeta) = \frac{1}{A_n}[F_{n-j-1} \dots F_0 h(z)]^* = \frac{1}{A_n}[K_{n-j}h(z)]^* \qquad \text{für } j \leqslant n-1\,,$$

$$w_2 = \tilde{K}_m h(\zeta) = \frac{1}{A_n} h(\zeta) \qquad \text{für } j = n\,.$$

f^* bezeichnet dabei die zu f im Sinne von I. N. VEKUA [21] konjugierte Funktion, K_{n-j} den $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^{n-j}$-Operator zu

$$w_{z\zeta} + (\log A_{n-j})_z w_\zeta + B_{n-j} w = 0\,,$$

wobei die A_{n-j} und B_{n-j} mit (1.15) berechnet werden. Die Ordnung des $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operators ist demnach also $m = n - j$. Dann gilt:

SATZ 1.12. – Eine Differentialgleichung der Form (1.1) besitzt dann und nur dann in $\mathcal{G}\times\overline{\mathcal{G}}$ eine Lösung der Form

$$w = K_n g(z) + \frac{1}{A_n}[K_{n-j}h(z)]^*\,, \tag{1.25}$$

$n \in \boldsymbol{N}$, $j \in \boldsymbol{N}$, $j \leqslant n$, $g(z)$, $h(z)$ holomorph in $\mathcal{G}$, falls $B_0 \equiv 0$ und

$$\left\{\begin{aligned} &(\log A_n A^*_{n-j})_\zeta \equiv 0 \\ &B_n - B^*_{n-j+1} \equiv 0 \end{aligned}\right. \tag{1.26}$$

in $\mathcal{G}\times\overline{\mathcal{G}}$ erfüllt ist. Dabei gilt $K_0 g(z) = g(z)$ für $g(z)$ holomorph in $\mathcal{G}$.

Neben der Darstellung (1.25) gilt auch

$$w = K_n g(z) + \frac{1}{A_n}\frac{1}{B^*_{n-j+1}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B^*_{n-j+2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\dots\frac{1}{B^*_n}\frac{\partial}{\partial z}(K_n h(z))^* \dots\right)\right). \tag{1.27}$$

Ist $j = 2l$, $l \in \boldsymbol{N}_0$, $l \leqslant [n/2]$, so ist (1.26) äquivalent zu

$$\left\{\begin{aligned} &(\log A_{n-l} A^*_{n-l})_\zeta \equiv 0 \\ &B_{n-l} - B^*_{n-l} - (\log A_{n-l})_{z\zeta} \equiv 0 \end{aligned}\right. \tag{1.28}$$

in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$. Die Lösung w besitzt dann die Form

$$w = F_{n-1} \ldots F_{n-l} u_1 \quad \text{mit} \quad u_1 = K_{n-l} g(z) + \frac{1}{A_{n-l}} [K_{n-l} h(z)]^* . \tag{1.29}$$

Für $j = 2l + 1$, $l \in N_0$, $l \leqslant [(n-1)/2]$, lauten die Bedingungen (1.26) auch

$$\begin{cases} B_{n-l} - B^*_{n-l} \equiv 0 \\ (\log A_{n-l} A^*_{n-l} B_{n-l})_\zeta \equiv 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$. Man erhält die Lösung w durch

$$w = F_{n-1} \ldots F_{n-l} u_2 \quad \text{mit} \quad u_2 = K_{n-l} g(z) + \frac{1}{A_{n-l}} [K_{n-l-1} h(z)]^* . \tag{1.31}$$

BEWEIS. – Durch $\tilde{w} = A_n w$ geht (1.1) über in $\tilde{w}_{z\zeta} + (\log \tilde{A}_m)_\zeta \tilde{w}_z + \tilde{B}_m \tilde{w} = 0$ mit $\tilde{A}_m$ und $\tilde{B}_m$ gemäß (1.18). Die Bedingungen für das Auftreten der oben angeführten $\mathcal{B}^n_{\mathrm{I}}$- und $\mathcal{B}^m_{\mathrm{II}}$-Operatoren lauten somit, neben $B_0 \equiv 0$,

$$(\log \tilde{A}_m)_\zeta - [(\log A_{n-j})_z]^* \equiv 0 ,$$

$$\tilde{B}_m - B^*_{n-j} \equiv 0 ,$$

bzw. unter Bedachtnahme auf (1.15)

$$(\log A_n A^*_{n-j})_\zeta \equiv 0 ,$$

$$B_n - B^*_{n-j+1} \equiv 0 ,$$

in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$.

Bezeichnet w_{k-1} eine Lösung von

$$L_{k-1} w_{k-1} = w_{k-1,z\zeta} + (\log A_{k-1})_z w_{k-1,\zeta} + B_{k-1} w_{k-1} = 0 ,$$

so gilt nach Hilfssatz 1.2.*a*

$$w_{k-1} = -\frac{1}{B_k} w_{k,\zeta} ,$$

wobei w_k Lösung von $L_k w_k = 0$ ist mit A_k und B_k gemäß (1.7), $B_k \neq 0$ in $\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}$. Unter wiederholter Verwendung dieser Relation gilt damit im vorliegenden Fall für die Lösungen von (1.1) neben der Darstellung (1.25) für $j \leqslant n$ auch Gleichung (1.27).

Ausgehend von (1.26) beweist man zunächst durch vollständige Induktion über

$k \in \boldsymbol{N}_0$ falls $j = 2l$, $l \in \boldsymbol{N}_0$,

$$(\log A_{n-k} A^*_{n-2l+k})_\zeta \equiv 0\,,$$

$$B_{n-k} - B^*_{n-2l+k+1} \equiv 0\,,$$

bzw. für $j = 2l + 1$, $l \in \boldsymbol{N}_0$,

$$(\log A_{n-k} A^*_{n-2l+k-1})_\zeta \equiv 0\,,$$

$$B_{n-k} - B^*_{n-2l+k} \equiv 0\,.$$

Setzt man dann jeweils $k = l$, so ergeben sich mit (1.15) die Gleichungen (1.28) und (1.30) und damit sofort die Darstellungen (1.29) und (1.31).

Die Spezialfälle $j = 0$ und $j = 1$ sollen nun genauer untersucht werden.

Im Fall $j = 0$ lauten die Bedingungen (1.26) unter Verwendung von (1.15)

$$(\log A_n A^*_n)_\zeta = 0\,, \tag{1.32}$$

$$B_n - B^*_n = (\log A_n)_{z\zeta}\,. \tag{1.33}$$

Verwendet man jetzt $\zeta = \bar{z}$, d.h. $A_n = A_n(z, \bar{z})$, $B_n = B_n(z, \bar{z})$, so kann die Funktion A_n wegen (1.32) stets in der Form

$$A_n(z, \bar{z}) = \frac{\alpha(z, \bar{z})}{\overline{\alpha(z, \bar{z})}}\,, \qquad \alpha \neq 0\,,\ \alpha \text{ analytisch in } \mathfrak{G}\,, \tag{1.34}$$

geschrieben werden. Unter Verwendung der Transformation $w = \alpha^{-1} u$ geht die Differentialgleichung

$$w_{z\bar{z}} + \left(\log \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)_z w_{\bar{z}} + B_n w = 0$$

über in

$$u_{z\bar{z}} - \frac{\alpha_{\bar{z}}}{\alpha}\, u_z - \overline{\left(\frac{\alpha_{\bar{z}}}{\alpha}\right)} u_{\bar{z}} + a_3 u = 0 \tag{1.35}$$

mit $a_3 = (\log \bar{\alpha})_z (\log \alpha)_{\bar{z}} - (\log \alpha)_{z\bar{z}} + B_n$. Wegen (1.33) und (1.34) gilt $a_3 = \overline{a_3}$.

Die Lösung u von (1.35) kann jetzt in $\mathfrak{G}$ angegeben werden mit

$$u(z, \bar{z}) = \alpha K^1_n g + \overline{\alpha K^1_n h}\,, \qquad g(z)\,,\ h(z) \text{ holomorph in } \mathfrak{G}\,.$$

Dabei ist $K^1_n = F^1_{n-1} \ldots F^1_0$, $F^1_k = \partial/\partial z + (\log A_k(z, \bar{z}))_z$, $k = 0, \ldots, n-1$. Die Größen $A_k(z, \bar{z})$ und $B_k(z, \bar{z})$, $k = n, \ldots, 0$, werden mit (1.15) bestimmt, wobei $\zeta = \bar{z}$ gesetzt wird. Die Differentialgleichung (1.35) besitzt wegen $a_1 = -(\log \alpha)_{\bar{z}}$, $a_2 = -(\log \bar{\alpha})_z$, das heißt $a_1 = \overline{a_2}$, und $a_3 = \overline{a_3}$ in $\mathfrak{G}$ reellwertige Lösungen. Sie lauten

$$u = \alpha K_n^1 f + \overline{\alpha K_n^1 f}\,, \qquad f(z) \text{ holomorph in } \mathfrak{G}\,.$$

Für $j = 1$ lauten die Bedingungen (1.26)

$$(\log A_n A_{n-1}^*)_\zeta = 0\,,$$
$$B_n - B_n^* = 0\,.$$

Da $A_{n-1} = A_n B_n$ (vgl. (1.55)), folgt $A_n A_n^* B_n = \lambda$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda > 0$.

Damit erhält die Differentialgleichung (1.1) die Form

$$\hat{w}_{z\zeta} + (\log A_n)_z \hat{w}_\zeta + \frac{\lambda}{A_n A_n^*}\hat{w} = 0\,.$$

Geht man hier von ζ auf $-\zeta$ über, so lautet diese Differentialgleichung mit $c(z,\zeta) = \lambda^{\frac{1}{2}} A_n^{-1}(z, -\zeta)$, $w(z,\zeta) = \hat{w}(z, -\zeta)$

$$w_{z\zeta} - \frac{c_z}{c} w_\zeta - cc^* w = 0\,. \tag{1.36}$$

Unter der Bedingung, daß mit c analytisch, $c \neq 0$ in $\mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$, $B_n = -cc^*$, $A_n = c^{-1}$ und (1.15) $B_0 \equiv 0$ in $\mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$ erfüllt ist, kann somit für die Lösungen dieser Gleichung folgende Darstellung angegeben werden:

$$w = K_n g(z) + \frac{1}{c^*}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(K_n h(z)\right)^*\right],$$

$g(z)$, $h(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$, K_n gemäß (1.16) (vgl. auch [6]).

Die Lösungen der Differentialgleichung $w_{z\bar{z}} - (\log c)_z w_{\bar{z}} - c\bar{c}w = 0$ werden nach I. N. VEKUA [20] komplexe Potentiale der Differentialgleichung $v_{\bar{z}} = c\bar{v}$ genannt. Letztere charakterisiert wiederum die pseudoanalytischen Funktionen im Sinne von L. BERS [11].

Die Frage der Darstellung pseudoanalytischer Funktionen durch Differentialoperatoren, die sich auf Grund gewisser Zusammenhänge auf die Frage nach $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operatoren zu (1.36) zurückführen läßt, soll nun untersucht werden. Spezielle Ergebnisse findet man in der Zusammenfassung [7], aber auch in [2] und [8].

Die pseudoanalytischen Funktionen werden, wie erwähnt, durch die Differentialgleichung

$$v_{\bar{z}} = c(z, \bar{z})\bar{v} \tag{1.37}$$

beschrieben. Jede Lösung von (1.37) genügt nach [20] auch der elliptischen Differentialgleichung

$$w_{z\bar{z}} - \frac{c_z}{c} w_{\bar{z}} - c\bar{c}\, w = 0\,, \tag{1.38}$$

falls $c \neq 0$ und c differenzierbar in $\mathfrak{G}$. Umgekehrt kann jede Lösung von (1.37) durch einen der beiden folgenden Ausdrücke dargestellt werden, wobei w eine Lösung von (1.38) bezeichnet:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{\bar{c}}\,\overline{w}_z\right), \tag{1.39}$$

$$v_2 = \frac{1}{2i}\left(w - \frac{1}{\bar{c}}\,\overline{w}_z\right). \tag{1.40}$$

Interessiert man sich nun für eine Darstellung der pseudoanalytischen Funktionen und damit der Lösungen von (1.37) durch Differentialoperatoren, so muß man sich angesichts der Relationen (1.39) und (1.40) die Frage stellen, unter welchen Bedingungen zunächst für die Differentialgleichung (1.38) solche Operatoren existieren.

Ist $c(z, \bar{z})$ analytisch in $\mathfrak{G}$ und gilt dort $c \neq 0$, so wurde gerade gezeigt, daß falls mit

$$A_n(z, \bar{z}) = \frac{1}{c(z, \bar{z})}\,, \qquad B_n(z, \bar{z}) = -\, c(z, \bar{z})\,\overline{c(z, \bar{z})} \tag{1.41}$$

$$A_{k-1} = A_k B_k\,, \qquad B_{k-1} = B_k + (\log A_k B_k)_{z\bar{z}} \neq 0 \quad \text{in } \mathfrak{G}\,, \qquad k = n, n-1, \ldots, 1\,, \tag{1.42}$$

$$B_0 \equiv 0 \quad \text{in } \mathfrak{G}$$

erfüllt ist, die Lösungen von (1.38) in $\mathfrak{G}$ dargestellt werden können durch

$$w = K_n^1 g + \frac{1}{\bar{c}}\,[\overline{K_n^1 h}]_z\,,$$

$g(z)$, $h(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$, $K_n^1 = F_{n-1}^1 \ldots F_0^1$, $F_k^1 = \partial/\partial z + (\log A_k(z, \bar{z}))_z$, $k = 0, 1, \ldots, \ldots, n-1$.

Um jetzt zu einer Darstellung für pseudoanalytische Funktionen unter Verwendung von Differentialoperatoren zu gelangen, verwendet man z.B. Gleichung (1.39) und die Funktion w in der Gestalt $w = K_n^1 g(z)$. Damit folgt für die pseudoanalytische Funktion

$$v = \frac{1}{2}\left(K_n^1 g + \frac{1}{\bar{c}}\,\overline{(K_n^1 g)_z}\right). \tag{1.43}$$

Unter Verwendung des in Hilfssatz 1.2.a angeführten Resultats gilt mit $K_n^1 = F_{n-1}^1 K_{n-1}^1$

$$(K_n^1 g)_{\bar{z}} = c\bar{c} K_{n-1}^1 g\,.$$

Setzt man jetzt noch $f(z) = g(z)/2$, so erhält man für v die Darstellung

$$v = K_n^1 f + c\overline{K_{n-1}^1 f}\,. \tag{1.44}$$

Zusammen mit dem in [8] bewiesenen Satz folgt nunmehr:

SATZ 1.13. – Die Differentialgleichung

$$v_{\bar z} = c\bar v$$

besitzt in $\mathcal{G}$ eine Lösungsdarstellung mit Hilfe von Differentialoperatoren, falls mit $c(z, \bar z)$ analytisch, $c \neq 0$ in $\mathcal{G}$ und den Relationen (1.41) und (1.42) in $\mathcal{G}$ die Bedingung $B_0 \equiv 0$ erfüllt ist.

Für $g(z)$ bzw. $f(z)$ holomorph in $\mathcal{G}$ stellen dann die Funktionen (1.43) und (1.44) Lösungen von (1.37) in $\mathcal{G}$ dar.

Andererseits kann in diesem Fall jede in $\mathcal{G}$ definierte Lösung v von (1.37) durch (1.43) bzw. (1.44) mit einer in $\mathcal{G}$ holomorphen Funktion $g(z)$ bzw. $f(z)$ dargestellt werden.

2. – Differentialoperatoren und Integraldarstellungen.

Die Frage der Darstellung von Riemann-Funktionen durch Differentialoperatoren wurde in jüngster Zeit in mehreren Arbeiten untersucht (vgl. z.B. [3], [5] und [9]). Dabei wird in [5] gezeigt, daß für den Fall, daß die Differentialgleichung (1.1) einen $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^n$- bzw. einen $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator besitzt, die Riemann-Funktion durch eben diese Operatoren dargestellt werden kann, wobei die erzeugende Funktion durch ein Anfangswertproblem eindeutig festgelegt ist. Gibt es zu (1.1) sowohl einen $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}^n$- als auch einen $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator, so lassen sich diese Erzeugenden durch Anwendung algebraischer Methoden bestimmen.

In [18] wurden zusammenhänge zwischen Riemann-Funktionen untersucht, die zu verschiedenen Differentialgleichungen gehören, deren Lösungen durch gewisse Differentialoperatoren aufeinander abgebildet werden können.

Hier wird nun unter Verwendung der im vorigen Abschnitt gewonnenen Resultate das in [5] hergeleitete Anfangswertproblem in anderer Gestalt formuliert und anschließend gelöst. Besitzen die zur Lösungsdarstellung verwendeten Operatoren die Ordnung 1 bzw. 2, so kann die Riemann-Funktion in diesen Fällen explizit in integralfreier Form angegeben werden.

Bei der Darstellung pseudoanalytischer Funktionen durch Integraloperatoren spielen die Vekua-Resolventen eine der Riemann-Funktion bei formal-hyperbolischen Differentialgleichungen vergleichbare Rolle (vgl. [21]). Hier wird gezeigt, daß die Vekua-Resolventen in bestimmten Fällen durch Differentialoperatoren dargestellt werden können, wobei die Erzeugenden, die auch hier einem Anfangswertproblem genügen müssen (vgl. [6]), angegeben werden.

Unter Verwendung dieser Resultate ergeben sich interessante Zusammenhänge zwischen Riemann-Funktionen und Vekua-Resolventen.

Betrachten wir zunächst eine Differentialgleichung der Form (1.1)

$$Lw = w_{z\zeta} + (\log A_n)_z w_\zeta + B_n w = 0 .$$

Sie besitze in $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}$ einen $\mathcal{B}_1^n$-Operator, $n \in \boldsymbol{N}$, d.h. mit (1.15) gelte $B_0 \equiv 0$ in $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}$. Die Riemann-Funktion $R(z, \zeta; t, \tau)$ zu $Lw = 0$ ist nach [21] durch folgende Bedingungen eindeutig festgelegt:

$$\tag{2.1} \begin{cases} R \text{ ist bezüglich } t \text{ und } \tau \text{ Lösung von } Lw = 0 \\ R(z, \zeta; z, \tau) = 1 \\ R(z, \zeta; t, \zeta) = A_n(z, \zeta)/A_n(t, \zeta) . \end{cases}$$

Man wählt für R den Ansatz

$$R(z, \zeta; t, \tau) = {}_tK_n g(t)$$

mit

$$\tag{2.2} \begin{aligned} {}_tK_n &= {}_tF_{n-1} \dots {}_tF_0 , \\ {}_tF_k &= \frac{\partial}{\partial t} + \big(\log A_k(t, \tau)\big)_t , \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 , \end{aligned}$$

und einer noch zu bestimmenden in $\mathfrak{G}$ holomorphen Funktion $g(t)$.

Damit lauten die Bedingungen (2.1)

$$\tag{2.3} R(z, \zeta; z, \tau) = {}_tK_n g(t)|_{t=z} = 1 ,$$

$$\tag{2.4} R(z, \zeta; t, \zeta) = {}_tK_n g(t)|_{\tau=\zeta} = A_n(z, \zeta)/A_n(t, \zeta) .$$

Die Differentialgleichung n-ter Ordnung (2.4) für $g(t)$ besitzt mit den n Anfangswerten $g^{(k)}(z) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, eine eindeutig festgelegte Lösung. Mit diesen Anfangswerten und der Forderung $g^{(n)}(z) = 1$ ist auch (2.3) erfüllt (siehe [5]).

Unter Verwendung von

$$S_k(t, \tau) = {}_tF_{k-1} S_{k-1}(t, \tau) , \qquad k = 1, 2, \dots, n ,$$

mit

$$S_0(t, \tau) = g(t)$$

gilt

$$R(z, \zeta; t, \tau) = S_n(t, \tau) .$$

Damit ist das Problem (2.3), (2.4) äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{n-1}(t,\zeta) + \big(\log A_{n-1}(t,\zeta)\big)_t S_{n-1}(t,\zeta) = A_n(z,\zeta)/A_n(t,\zeta)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_k(t,\zeta) + \big(\log A_k(t,\zeta)\big)_t S_k(t,\zeta) = S_{k+1}(t,\zeta)\,, \qquad k = n-2, \ldots, 0\,,$$

$$S_k(z,\zeta) = 0 \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Dieses System kann nun, beginnend bei der Differentialgleichung für die Funktion S_{n-1}, sukzessive gelöst werden. Man erhält unter Berücksichtigung der Anfangswerte und der Relationen (1.15)

$$g(t) = \frac{A_n(z,\zeta)}{A_0(t,\zeta)} J_n(t,z,\zeta) \tag{2.5}$$

mit

$$J_{k+1}(t,z,\zeta) = \int_{\sigma=z}^{t} B_{n-k}(\sigma,\zeta) J_k(\sigma,z,\zeta)\, d\sigma\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

$$J_0(t,z,\zeta) = 1\,.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ können die auftretenden Integrale ausgewertet werden. Es ergibt sich

$$g(t) = \frac{A_1(z,\zeta)}{A_1(t,\zeta)B_1(t,\zeta)} \left(\log \frac{A_1(z,\zeta)B_1(z,\zeta)}{A_1(t,\zeta)B_1(t,\zeta)}\right)_\zeta \qquad \text{für } n = 1\,,$$

$$g(t) = \frac{A_2(z,\zeta)}{A_0(t,\zeta)} \Bigg[\big(\log A_1(z,\zeta)\, A_0(z,\zeta)\big)_\zeta \left(\log \frac{A_0(z,\zeta)}{A_0(t,\zeta)}\right)_\zeta + \\ + \big[\big(\log A_0(t,\zeta)\big)_\zeta\big]^2 - \big[\big(\log A_0(z,\zeta)\big)_\zeta\big]^2 + \left(\log \frac{A_0(z,\zeta)}{A_0(t,\zeta)}\right)_{\zeta\zeta} \Bigg] \tag{2.6}$$

für $n = 2$, wobei A_0 und A_1 nach (1.15) zu bestimmen sind.

Damit gilt für $n \in \boldsymbol{N}$ der

SATZ 2.1. – Zur Differentialgleichung (1.1) gebe es einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator. Dann kann die zugehörige Riemann-Funktion R angegeben werden durch

$$R(z,\zeta;t,\tau) = {}_tF_{n-1} \ldots {}_tF_0\, g(t)$$

mit ${}_tF_k$, $k = 0, \ldots, n-1$, gemäß (2.2) und der Erzeugenden $g(t)$ gemäß (2.5).

Ist $n = 1$, so gilt

$$R(z,\zeta;t,\tau) = \frac{A_1(z,\zeta)}{A_1(t,\zeta)} + \frac{A_1(z,\zeta)}{A_1(t,\zeta)B_1(t,\zeta)} \left(\log \frac{A_1(z,\zeta)B_1(z,\zeta)}{A_1(t,\zeta)B_1(t,\zeta)}\right)_\zeta \times \\ \times \left(\log \frac{A_1(t,\tau)B_1(t,\tau)}{A_1(t,\zeta)B_1(t,\zeta)}\right)_t . \tag{2.7}$$

Falls $n = 2$ ist, lautet die Riemann-Funktion

$$R(z, \zeta; t, \tau) = {}_tF_1\, {}_tF_0 g$$

mit $g(t)$ gemäß Gleichung (2.6).

Gleichung (2.7) wurde schon in [5] hergeleitet.

Für den Fall, daß Gleichung (1.1) einen $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator, $m \in N$, besitzt, beweist man analog folgende Aussage:

SATZ 2.2. – Gibt es zur Differentialgleichung (1.1) einen $\mathcal{B}_{\mathrm{II}}^m$-Operator, so kann die dazugehörige Riemann-Funktion R angegeben werden durch

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{A_n(z, \zeta)}{A_n(t, \tau)}\, {}_\tau\tilde{K}_m h$$

mit

$$\begin{gathered}
{}_\tau\tilde{K}_m = {}_\tau\tilde{F}_{m-1} \ldots {}_\tau\tilde{F}_0 \,, \\
{}_\tau\tilde{F}_k = \frac{\partial}{\partial\tau} + \big(\log \tilde{A}_k(t, \tau)\big)_\tau \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 \,, \\
h(\tau) = \frac{\tilde{A}_m(z, \zeta)}{\tilde{A}_0(z, \tau)} \tilde{J}_m(\tau, z, \zeta) \,, \\
\tilde{J}_{k+1}(\tau, z, \zeta) = \int\limits_{\sigma=\zeta}^{\tau} \tilde{B}_{m-k}(z, \sigma) \tilde{J}_k(\sigma, z, \zeta)\, d\sigma \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 \,, \\
\tilde{J}_0(\tau, z, \zeta) = 1 \,.
\end{gathered}$$

Ist $n = 1$, so gilt

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{A_1(z, \tau)}{A_1(t, \tau)} + \frac{1}{A_1(t, \tau)\tilde{A}_0(z, \tau)} \left(\log \frac{\tilde{A}_0(z, \zeta)}{\tilde{A}_0(z, \tau)}\right)_z \left(\log \frac{\tilde{A}_0(t, \tau)}{\tilde{A}_0(z, \tau)}\right)_\tau$$

mit

$$\tilde{A}_0(z, \zeta) = \frac{B_1(z, \zeta) - \big(\log A_1(z, \zeta)\big)_{z\zeta}}{A_1(z, \zeta)} \,,$$

für $n = 2$ erhält man

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{A_2(z, \zeta)}{A_2(t, \tau)}\, {}_\tau\tilde{F}_1\, {}_\tau\tilde{F}_0\, h$$

mit

$$\begin{aligned}
h(\tau) = \frac{1}{A_2(z, \zeta)\tilde{A}_0(z, \tau)} \Bigg[& \left[\log \frac{\tilde{A}_0(z, \zeta)}{A_2(z, \zeta)} [B_2(z, \zeta) - \big(\log A_2(z, \zeta)\big)_{z\zeta}]\right]_z \times \\
& \times \left(\log \frac{\tilde{A}_0(z, \zeta)}{\tilde{A}_0(z, \tau)}\right)_z + [(\log \tilde{A}_0(z, \tau))_z]^2 - [(\log \tilde{A}_0(z, \zeta))_z]^2 + \left(\log \frac{\tilde{A}_0(z, \zeta)}{\tilde{A}_0(z, \tau)}\right)_{zz} \Bigg]
\end{aligned}$$

und $\tilde{A}_0$ gemäß (1.19) unter Verwendung von (1.18).

Zur Darstellung pseudoanalytischer Funktionen, d.h. von Lösungen $w(z, \bar{z})$ der Differentialgleichung

$$w_{\bar{z}} = c(z, \bar{z})\overline{w} \tag{2.8}$$

wurden von I. N. Vekua in [21] Integraloperatoren angegeben, deren Kerne $\Gamma_1(z, \bar{z}; t, \tau)$ und $\Gamma_2(z, \bar{z}; t, \tau)$ allgemein als Vekua-Resolventen bezeichnet werden.

Kennt man eine zweiparametrige Lösungsschar $w(z, \zeta; t, \tau)$ von

$$w_{z\zeta} - \frac{c_z}{c} w_\zeta - cc^* w = 0 \tag{2.9}$$

mit $c(z, \zeta) \neq 0$, c differenzierbar in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$, die den Bedingungen

$$\begin{cases} w(z, \tau; t, \tau) = c(z, \tau) \\ w(t, \zeta; t, \tau) = c(t, \tau) \end{cases} \tag{2.10}$$

genügt, so gilt für die Vekua-Resolventen zu (2.8) (vgl. K. W. Bauer [1]):

$$\begin{aligned} \Gamma_2(z, \zeta; t, \tau) &= w(z, \zeta; t, \tau) \\ \Gamma_1(z, \zeta; t, \tau) &= \frac{1}{c^*(\zeta, z)} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \Gamma_2(z, \zeta; t, \tau)\right]^* . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Für den Fall, daß es zu (2.9) einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator gibt, gelingt es nunmehr, die Vekua-Resolventen Γ_1 und Γ_2 durch diese Differentialoperatoren darzustellen. Die entsprechende Erzeugende genügt nach [6] wiederum einem Anfangswertproblem. Unter Verwendung der hier gewonnenen Resultate kann diese erzeugende Funktion bestimmt werden.

Wir wählen für den Fall, daß (2.9) den $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator K_n besitzt, für w den Ansatz

$$w(z, \zeta; t, \tau) = K_n g$$

mit

$$K_n = F_{n-1} \dots F_0\,, \qquad F_k = \frac{\partial}{\partial z} + (\log A_k)_z\,, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1\,, \tag{2.12}$$

$g(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$. Dabei gilt

$$A_n = c^{-1}\,, \qquad B_n = -cc^*\,, \tag{2.13}$$

A_k, B_k, $k = n-1, \dots, 0$, sind nach (1.15) zu berechnen.

Verwendet man $T_k(z, \zeta) = F_{k-1}T_{k-1}(z, \zeta)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $T_0(z, \zeta) = g(z)$ und $w(z, \zeta; t, \tau) = T_n(z, \zeta)$, so ist wegen (2.10) zu fordern:

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{n-1}(z, \tau) + \big(\log A_{n-1}(z, \tau)\big)_z T_{n-1}(z, \tau) = c(z, \tau)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{k-1}(z, \tau) + \big(\log A_{k-1}(z, \tau)\big)_z T_{k-1}(z, \tau) = T_k(z, \tau)\,, \qquad k = n-1, \ldots, 1\,,$$

$$T_k(t, \tau) = 0\,, \qquad k = n-1, \ldots, 0\,.$$

Dieses System kann sukzessive gelöst werden und man erhält für die Erzeugende $g(z)$:

$$g(z) = \frac{1}{A_0(z, \tau)} \hat{J}_n(z, t, \tau) \tag{2.14}$$

mit

$$\hat{J}_{k+1}(z, t, \tau) = \int_{\sigma=t}^{z} B_{n-k}(\sigma, \tau)\hat{J}_k(\sigma, t, \tau)\, d\sigma\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

$$\hat{J}_0(z, t, \tau) = 1\,.$$

Damit erhalten wir folgendes Resultat:

SATZ 2.3. – Die Vekua-Resolventen Γ_1 und Γ_2 zur Differentialgleichung

$$v_{\zeta} = cv^* \tag{2.15}$$

$c(z, \zeta)$ analytisch, $c \neq 0$ in $\mathcal{G} \times \bar{\mathcal{G}}$, können für den Fall, daß die Differentialgleichung (2.9) einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator K_n besitzt, durch diesen angegeben werden. Man erhält

$$\Gamma_2(z, \zeta; t, \tau) = K_n g$$

mit K_n gemäß (2.12) in Verbindung mit (2.13). Die Funktion $g(z)$ wird nach (2.14) berechnet. $\Gamma_1(z, \zeta; t, \tau)$ folgt dann aus (2.11).

BEMERKUNG. – Vergleicht man die Resultate von Satz 2.1 und Satz 2.3, so erkennt man, daß zwischen den Erzeugenden $g_R(z)$ der Riemann-Funktion R_{L^*} zur zu (2.9) adjungierten Differentialgleichung $L^*u = 0$ und der Erzeugenden $g_V(z)$ der Vekua-Resolvente Γ_2 zu (2.15) folgender Zusammenhang besteht:

$$g_R(z) = A_n(t, \tau)\, g_V(z) = \frac{1}{c(t, \tau)}\, g_V(z)\,.$$

Damit gilt aber auch

$$R_{L^*} = \frac{1}{c(t, \tau)}\, \Gamma_2\,,$$

ein Resultat, das schon von K. W. BAUER [1] allgemein, d.h. ohne Einschränkung auf Differentialgleichungen mit $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operatoren, bewiesen worden ist.

3. – Anwendungen.

Die in den vorhergehenden Abschnitten gewonnenen Resultate erlauben es nunmehr, gewisse Spezialfälle der Gleichung (1.1) eingehender zu untersuchen. Durch gewisse zusätzliche Forderungen an die Koeffizienten von (1.1) ergeben sich zum Teil neue Klassen von Gleichungen, für die Lösungsdarstellungen mit Hilfe von Differentialoperatoren angegeben werden können.

a) Betrachten wir zunächst die Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \lambda p w_\zeta + \nu p_\zeta w = 0 \,, \tag{3.1}$$

$\lambda, \nu \in \boldsymbol{C}$. Für den Fall, daß die zweimal differenzierbare Funktion $p(z, \zeta)$, $p_\zeta \neq 0$ in $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}$, die Relation

$$(\log p_\zeta)_z = 2\sigma p \,, \qquad \sigma \in \boldsymbol{C} \,, \tag{3.2}$$

erfüllt und die Größen λ, ν und σ für $n \in \boldsymbol{N}$ der Gleichung

$$\nu + n\lambda + n(n+1)\sigma = 0 \tag{3.3}$$

genügen, besitzt die Differentialgleichung (3.1) einen $\mathfrak{B}_\mathrm{I}^n$-Operator.

Verwendet man hier nämlich

$$(\log A_n)_z = \lambda p \,, \qquad B_n = \nu p_\zeta \,,$$

so ergibt sich mit (1.15) für $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$(\log A_{n-k})_z = (\lambda + 2k\sigma) p$$

$$B_{n-k} = \big(\nu + k\lambda + k(k+1)\sigma\big) p_\zeta \,.$$

Die Forderung $B_0 \equiv 0$ liefert sofort (3.3). Wir werden nun zeigen, daß die Differentialgleichungen vom Typ (3.1) mit (3.2) in zwei Klassen von Gleichungen zerfallen, die bereits näher untersucht worden sind.

Ist $\sigma = 0$, so kann die Gleichung (3.1) wegen (3.2) in der Form

$$w_{z\zeta} + \lambda\psi(\zeta) w_\zeta - n\lambda\psi'(\zeta) w = 0 \,, \tag{3.4}$$

$\psi(\zeta)$ holomorph in $\bar{\mathfrak{G}}$, geschrieben werden. Diese Differentialgleichung wurde in [7] und [22] eingehend behandelt.

Für $\sigma \neq 0$ lassen sich die Integrale von (3.2) in der Form

$$p(z, \zeta) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \beta}{\alpha_3 + \alpha_4 \beta}$$

mit $\alpha_j(z)$, $j = 1, 2, 3, 4$, holomorph in $\mathfrak{G}$, $\beta(\zeta)$ holomorph in $\overline{\mathfrak{G}}$, $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \neq 0$ in $\mathfrak{G}$, darstellen. Dabei müssen die Funktionen α_j noch gewisse Bedingungen erfüllen, die schließlich zu folgendem Resultat führen: Für $\alpha_3\alpha_4 \neq 0$ in $\mathfrak{G}$ erhält (3.1) die Form

$$w_{z\zeta} + \frac{\lambda\varphi'}{\varphi + \psi} w_\zeta - n(n + 1 - \lambda) \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi + \psi)^2} w = 0 \,, \tag{3.5}$$

$\varphi(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$, $\psi(\zeta)$ holomorph in $\overline{\mathfrak{G}}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Eine ausführliche Diskussion dieser Differentialgleichung findet man in [7].

Ist $\alpha_3 \equiv 0$ oder $\alpha_4 \equiv 0$ in $\mathfrak{G}$, so ist Gleichung (3.1) wieder von der Form (3.4).

b) Die in [7] und [22] behandelte Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} - \Phi'(z)\Psi(\zeta) w_\zeta + n\Phi'(z)\Psi'(\zeta) w = 0 \,, \tag{3.6}$$

$\Phi(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$, $\Psi(\zeta)$ holomorph in $\overline{\mathfrak{G}}$, $n \in \boldsymbol{N}$, ist in (3.4) in ihrer allgemeinsten Form nicht enthalten. Sie gewinnt man durch folgende Überlegungen. Fordert man für die Funktionen A_n und B_n in (1.1)

$$(\log A_n)_{z\zeta} = \varrho B_n \,, \qquad \varrho \in \boldsymbol{C} \,,$$
$$(\log B_n)_{z\zeta} = 0 \,,$$

so ergibt sich für $n \in \boldsymbol{N}$ unter Verwendung von (1.15)

$$A_{n-k} = \prod_{j=0}^{k-2} (1 + (1 + j)\varrho) A_n B_n^k \,,$$
$$B_{n-k} = (k\varrho + 1) B_n \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \,.$$

Die Bedingung $B_0 \equiv 0$ liefert $\varrho = -n^{-1}$ und damit nach einer geeigneten Transformation die Gleichung (3.6). Die Differentialgleichung (3.4) ist darin mit $\Phi'(z) \equiv -\lambda$ als Spezialfall enthalten.

c) Jetzt werden wir zwei Klassen von Differentialgleichungen betrachten, wovon die eine einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^k$-Operator, die andere einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^l$-Operator, $k, l \in \boldsymbol{N}_0$, besitzt. Ist $k = n + 1$ und $l = n$, $n \in \boldsymbol{N}$, so fallen beide bis auf eine geeignete Transformation zusammen. Damit liegt dann eine Differentialgleichung vor, die sowohl einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^{n+1}$- als auch einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^{n}$-Operator besitzt. Letztere wurde von K. W. BAUER in [2] angegeben.

Ausgehend von der Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \left(\log \frac{Q^{n+1} Y}{\eta^{2n+2} Q^n Y}\right)_z w_\zeta = 0 ,$$

$n \in \boldsymbol{N}$, $\eta = z + \zeta$, $\eta \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$, $Q = \eta^2(\partial/\partial\zeta)$, Y partikuläre Lösung von

$$Y_{z\zeta} - \frac{n(n+1)}{\eta^2} Y = 0$$

mit $Q^j Y \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ für $j = 0, 1, \ldots, n+1$, erhält man mit Hilfssatz 1.1.*a* eine Kette von Gleichungen der Form

$$w_{z\zeta} + (\log A_k)_z w_\zeta + B_k w = 0 ,$$

die einen $\mathcal{B}^k_{\mathrm{I}}$-Operator, $k \in \boldsymbol{N}$, besitzen. Dabei ist

$$A_k = \eta^{2(k-n-1)} \prod_{j=1}^{n-k} [j(j-1) - n(n+1)] \frac{Q^{n-k+1} Y}{Q^{n-k} Y} , \qquad k \leqslant n , \tag{3.7}$$

$$B_k = \frac{(n-k)(n-k+1) - n(n+1)}{\eta^2} \frac{(Q^{n-k} Y)(Q^{n-k+2} Y)}{(Q^{n-k+1} Y)^2} .$$

Bildet man schließlich von $(k = n)$

$$w_{z\zeta} + \left(\log \frac{QY}{\eta^2 Y}\right)_z w_\zeta - \frac{n(n+1)\, Y Q^2 Y}{(\eta Q Y)^2} w = 0$$

nochmals gemäß Hilfssatz 1.1.*a* ab, so gelangt man, falls $Y_z \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$, zur Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \left(\log \frac{Y}{Y_z}\right)_z w_\zeta - \frac{Y_z Y_\zeta}{Y^2} w = 0 . \tag{3.8}$$

Wählt man als Ausgangspunkt die Gleichung

$$v_{z\zeta} + \left(\log \frac{P^{n+1} Y}{\eta^{2n+2} P^n Y}\right)_\zeta v_z = 0 ,$$

Y wie vorhin mit $P^j Y \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ für $j = 0, 1, \ldots, n+1$, $P = \eta^2(\partial/\partial z)$, so erhält man nach l-facher Anwendung von Hilfssatz 1.1.*b*, $l \in \boldsymbol{N}_0$, eine Differentialgleichung der Form

$$v_{z\zeta} + (\log \tilde{A}_l)_\zeta v_z + \tilde{B}_l v = 0$$

mit

$$\tilde{A}_l = \eta^{2(l-n-1)} \prod_{j=1}^{n-l} [j(j-1) - n(n+1)] \frac{P^{n-l+1}\,Y}{P^{n-l}\,Y}, \qquad l \leqslant n, \tag{3.9}$$

$$\tilde{B}_l = \frac{(n-l)(n-l+1) - n(n+1)}{\eta^2} \frac{(P^{n-l}\,Y)(P^{n-l+2}\,Y)}{(P^{n-l+1}\,Y)^2},$$

die einen $\mathfrak{B}^l_{\mathrm{II}}$-Operator besitzt. Für $l = n$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$v_{z\zeta} + \left(\log \frac{Y_z}{Y}\right)_\zeta v_z - \frac{n(n+1)\,YP^2\,Y}{(\eta P Y)^2}\, v = 0\,. \tag{3.10}$$

Durch die Transformation $v = (Y/Y_z)w$ geht sie über in (3.8). Damit besitzt jetzt (3.8) bzw. (3.10) sowohl einen $\mathfrak{B}^{n+1}_{\mathrm{I}}$- als auch einen $\mathfrak{B}^n_{\mathrm{II}}$-Operator. Sie können berechnet werden durch

$$K_{n+1} = F_n \dots F_0\,, \qquad F_k = \frac{\partial}{\partial z} + (\log A_k)_z\,, \qquad k = 0, 1, \dots, n\,,$$

$$\tilde{K}_n = A_n^{-1} \tilde{F}_{n-1} \dots \tilde{F}_0\,, \qquad \tilde{F}_k = \frac{\partial}{\partial \zeta} + (\log \tilde{A}_k)_\zeta\,, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1\,,$$

wobei die Funktionen A_k und $\tilde{A}_k$ durch (3.7) und (3.9) gegeben sind.

Sie können auch, vgl. [2], Satz 3, angegeben werden durch

$$K_{n+1} = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{Y_z}{Y}\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!\,\eta^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial z^k},$$

$$\tilde{K}_n = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{Y_z}{Y}\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!\,\eta^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial \zeta^k}.$$

d) Nun werden, ausgehend von einem in [7] erzielten Resultat, zwei neue Klassen von Differentialgleichungen angegeben, die einen $\mathfrak{B}^n_{\mathrm{I}}$-Operator, $n \in \boldsymbol{N}$, besitzen. Sie enthalten als Spezialfall die Gleichung (3.5) und damit die Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \frac{n-m}{\eta} w_\zeta - \frac{n(m+1)}{\eta^2} w = 0\,,$$

$m, n \in \boldsymbol{N}$, $\eta = z + \zeta$, $\eta \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \bar{\mathfrak{G}}$. Entsprechende allgemeine Darstellungssätze für die Lösungen dieser Differentialgleichung findet man in [7].

Neben einer Lösungsdarstellung durch Differentialoperatoren für die erwähnten Gleichungen und der Angabe gewisser Operatoren, die einen Zusammenhang zwischen Lösungen dieser Differentialgleichungen mit unterschiedlichem Parametern angeben, werden auch die zugehörigen Riemann-Funktionen berechnet und Zusammenhänge zwischen Riemann-Funktionen für Differentialgleichungen mit verschiedenem Parameter hergeleitet.

Die Funktionen $A_1(z, \zeta)$ und $B_1(z, \zeta)$ in

$$w_{z\zeta} + (\log A_1)_z w_\zeta + B_1 w = 0 \tag{3.11}$$

seien verknüpft durch

$$(\log A_1)_{z\zeta} = [\alpha(z)\beta(\zeta) - 1]B_1 , \tag{3.12}$$

$\alpha(z)$ holomorph, $\alpha \neq 0$ in $\mathfrak{G}$, $\beta(\zeta)$ holomorph, $\beta \neq 0$ in $\bar{\mathfrak{G}}$. Dann führt die Forderung, (3.11) soll einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^1$-Operator besitzen, nach Satz 1.4 auf

$$B_1 = \frac{-2\varphi'(z)\psi'(\zeta)}{\alpha(z)\beta(\zeta)[\varphi(z) + \psi(\zeta)]^2} , \tag{3.13}$$

$\varphi(z)$ und $\psi(\zeta)$ holomorph in $\mathfrak{G}$ bzw. $\bar{\mathfrak{G}}$ mit $(\varphi + \psi)\varphi'\psi' \neq 0$ in $\mathfrak{G} \times \bar{\mathfrak{G}}$ (vgl. [7], Satz 2*c*).

Wählt man zunächst $\beta(\zeta) \equiv 1$ in $\bar{\mathfrak{G}}$, so kann unter Verwendung von Hilfssatz 1.1.*a* eine Differentialgleichung mit einem $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator, $n \in \boldsymbol{N}$, gebildet werden. Mit Rücksicht auf (3.12) und (3.13) erhält man

$$\tilde{w}_{z\zeta} + (\log A_n)_z \tilde{w}_\zeta + B_n \tilde{w} = 0$$

mit

$$(\log A_n)_z = \frac{2(n\alpha - 1)\varphi'}{\alpha(\varphi + \psi)} - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\log \frac{j\alpha - 2}{\alpha} \varphi'\right)_z , \qquad B_n = \frac{n[\alpha(n-1) - 2]}{\alpha} \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi + \psi)^2} .$$

Durch die Transformation $\tilde{w} = \chi w$ mit

$$\chi = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j\alpha - 2}{\alpha} \varphi' \tag{3.14}$$

und anschließender Verwendung von

$$\gamma(z) := \frac{2(n\alpha - 1)}{\alpha}$$

ergibt sich schließlich

$$w_{z\zeta} + \gamma(z) \frac{\varphi'}{\varphi + \psi} w_\zeta - n\big(n + 1 - \gamma(z)\big) \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi + \psi)^2} w = 0 , \tag{3.15}$$

$\gamma(z)$ holomorph, $\gamma(z) - l \neq 0$ in $\mathfrak{G}$ für $l = n + 1, \dots, 2n$.

Für $\alpha(z) \equiv 1$ in $\mathfrak{G}$ ergibt sich andererseits aus (3.12) und (3.13) eine Differentialgleichung der Form (1.1) mit

$$(\log A_n)_{z\zeta} = \frac{2(1 - n\beta)}{\beta} \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi + \psi)^2} , \qquad B_n = \frac{n[\beta(n-1) - 2]}{\beta} \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi + \psi)^2} .$$

Setzt man noch

$$\delta(\zeta) := \frac{2(n\beta - 1)}{\beta},$$

so lautet die Differentialgleichung:

$$\hat{w}_{z\zeta} - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \delta(\sigma) \frac{\varphi'(z)\psi'(\sigma)}{[\varphi(z) + \psi(\sigma)]^2} d\sigma\, \hat{w}_\zeta - n[n + 1 - \delta(\zeta)] \frac{\varphi'(z)\psi'(\zeta)}{[\varphi(z) + \psi(\zeta)]^2} \hat{w} = 0 . \tag{3.16}$$

Dabei ist $\zeta_0 \in \bar{\mathfrak{G}}$, $\delta(\zeta)$ holomorph mit $\delta(\zeta) - l \neq 0$ in $\bar{\mathfrak{G}}$ für $l = n + 1, \ldots, 2n$. Sie besitzt nun ebenfalls einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator, der nach Satz 1.4 bestimmt ist.

Damit gilt der folgende

SATZ 3.1. – Die Differentialgleichungen (3.15) und (3.16) besitzen in $\mathfrak{G} \times \bar{\mathfrak{G}}$ jeweils einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^n$-Operator. Lösungen w der Differentialgleichung (3.15) können in $\mathfrak{G} \times \bar{\mathfrak{G}}$ angegeben werden durch

$$w = \chi^{-1} F_{n-1} \ldots F_0 g ,$$

$$F_k = \frac{\partial}{\partial z} + \left[\frac{2(k\alpha - 1)}{\alpha} \frac{\varphi'}{\varphi + \psi} - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\log \frac{j\alpha - 2}{\alpha} \varphi'\right)_z\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1 ,$$

χ gemäß (3.14), $g(z)$ holomorph in $\mathfrak{G}$.

Lösungen $\hat{w}$ von (3.16) erhält man durch

$$\hat{w} = \hat{F}_{n-1} \ldots \hat{F}_0 g ,$$

$$\hat{F}_k = \frac{\partial}{\partial z} - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \delta(\sigma) \frac{\varphi'(z)\psi'(\sigma)}{[\varphi(z) + \psi(\sigma)]^2} d\sigma , \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1 ,$$

$g(z)$ holomorph in $\bar{\mathfrak{G}}$.

Verwendet man in (3.15) und (3.16) $\varphi(z) = z$, $\psi(\zeta) = \zeta$, so ergibt sich mit $\eta = z + \zeta$ daraus

$$L_n w := w_{z\zeta} + \frac{\gamma(z)}{\eta} w_\zeta - \frac{n(n + 1 - \gamma(z))}{\eta^2} w = 0 , \tag{3.17}$$

$n \in \boldsymbol{N}$, $\gamma(z)$ holomorph mit $\gamma(z) - l \neq 0$ in $\mathfrak{G}$ für $l = n + 1, \ldots, 2n$, bzw.

$$\hat{L}_n \hat{w} := \hat{w}_{z\zeta} - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\delta(\sigma)}{(z + \sigma)^2} d\sigma\, \hat{w}_\zeta - \frac{n(n + 1 - \delta(\zeta))}{\eta^2} \hat{w} = 0 , \tag{3.18}$$

$n \in \boldsymbol{N}$, $\delta(\zeta)$ holomorph in $\bar{\mathfrak{G}}$, $\delta(\zeta) - l \neq 0$ in $\bar{\mathfrak{G}}$ für $l = n + 1, \ldots, 2n$.

Die Lösungen u der zu (3.17) adjungierten Differentialgleichung

$$L_n^* u = u_{z\zeta} - \frac{\gamma(z)}{\eta} u_\zeta + \frac{(n+1)\big(\gamma(z)-n\big)}{\eta^2} u = 0$$

werden mittels

$$(3.19)\qquad v = \frac{(z-t)(z+\tau)}{(n+1-\gamma)(t+\tau)} u_z + \frac{(\zeta-\tau)(\zeta+t)}{(n+1)(t+\tau)} u_\zeta + \\ + \left[1 + 2\frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z+\zeta)(t+\tau)} + \frac{\gamma}{\gamma-n-1}\,\frac{(z-t)(z+\tau)}{(z+\zeta)(t+\tau)}\right] u$$

$t \in \mathfrak{G}$, $\tau \in \bar{\mathfrak{G}}$, abgebildet auf Lösungen v von $L_{n+1}^* v = 0$.

Lösungen $\hat{w}$ von $\hat{L}_n \hat{w} = 0$ gehen durch

$$(3.20)\qquad \hat{v} = \frac{(z-t)(z+\tau)}{(n+1)(t+\tau)} \hat{w}_z + \frac{(\zeta-\tau)(\zeta+t)}{(n+1-\delta)(t+\tau)} \hat{w}_\zeta + \\ + \left[1 + 2\frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z+\zeta)(t+\tau)} - \frac{(z+\tau)(z-t)}{(n+1)(t+\tau)} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\delta(\sigma)}{(z+\sigma)^2} d\sigma\right] \hat{w}$$

über in Lösungen $\hat{v}$ von $\hat{L}_{n+1}\hat{v} = 0$.

Die Riemann-Funktionen zu (3.17) und (3.18) können nach Satz 2.1 bestimmt werden. Die Erzeugenden $g(t)$ bzw. $\hat{g}(t)$ ergeben sich damit zu

$$g(t) = \eta^{n+1}\left[n!\prod_{k=1}^{n}[\gamma(t)-n-k]\right]^{-1} \frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left[\frac{(t+\zeta)^{2n}}{(z+\zeta)^{n+1}} e^{\varkappa}\right]$$

mit

$$(3.21)\qquad \varkappa = \int_t^z \frac{\gamma(\sigma)}{\sigma+\zeta} d\sigma\,,$$

$$\hat{g}(t) = \frac{(t+\zeta)^n (t-z)^n}{n!\,(z+\zeta)^n} \exp\int_{\zeta_0}^{\zeta} \delta(\sigma)\left(\frac{1}{z+\sigma} - \frac{1}{t+\sigma}\right) d\sigma\,.$$

Schließlich können auch die zugehörigen Riemann-Funktionen selbst explizit berechnet werden.

Unter Verwendung der Beziehungen (3.19) und (3.20) ist es darüber hinaus möglich, Zusammenhänge zwischen den Riemann-Funktionen zu $L_n w = 0$ und $L_{n+1} w = 0$ bzw. $\hat{L}_n \hat{w} = 0$ und $\hat{L}_{n+1}\hat{w} = 0$ anzugeben.

Die Ergebnisse werden im folgenden Satz zusammengefaßt:

SATZ 3.2. – *a*) Die Riemann-Funktion R_n zu (3.17) lautet

$$R_n(z, \zeta; t, \tau) = \frac{(-1)^n (z+\zeta)^{n+1} (t+\tau)^{n+1}}{(2n)!} \frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left[e^{\varkappa} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{(t+\zeta)^{2n}}{(z+\zeta)^{n+1}(t+\tau)^{n+1}}\right]$$

mit $\varkappa$ gemäß (3.21). Die Riemann-Funktion R_{n+1} zu $L_{n+1}w = 0$ erhält man aus R_n durch

$$R_{n+1}(z, \zeta; t, \tau) = \frac{(z-t)(z+\tau)}{(n+1-\gamma(z))(t+\tau)} R_{n,z} + \frac{(\zeta-\tau)(\zeta+t)}{(n+1)(t+\tau)} R_{n,\zeta} + \left[1 + 2\frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z+\zeta)(t+\tau)} + \frac{\gamma(z)}{\gamma(z)-n-1}\,\frac{(z-t)(z+\tau)}{(z+\zeta)(t+\tau)}\right] R_n . \tag{3.22}$$

b) Die Riemann-Funktion $\hat{R}_n$ zu (3.18) ist gegeben durch

$$\hat{R}_n(z, \zeta; t, \tau) = \frac{(-1)^n (z+\zeta)^{n+1}(t+\tau)^{n+1}}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\exp\int_\tau^\zeta \delta(\sigma)\left(\frac{1}{z+\sigma} - \frac{1}{t+\sigma}\right)d\sigma \times \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n}\frac{(t+\zeta)^{2n}}{(t+\tau)^{n+1}(z+\zeta)^{n+1}}\right]\exp\int_{\zeta_0}^\tau \delta(\sigma)\left(\frac{1}{z+\sigma} - \frac{1}{t+\sigma}\right)d\sigma .$$

$\hat{R}_n$ geht durch

$$\hat{R}_{n+1}(z, \zeta; t, \tau) = \frac{(t-z)(t+\zeta)}{(n+1)(z+\zeta)}\hat{R}_{n,t} + \frac{(\tau-\zeta)(\tau+z)}{(n+1-\delta(\tau))(z+\zeta)}\hat{R}_{n,\tau} + \left[1 + 2\frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z+\zeta)(t+\tau)} - \frac{(t-z)(t+\zeta)}{(n+1)(z+\zeta)}\int_{\zeta_0}^\tau \frac{\delta(\sigma)}{(t+\sigma)^2}d\sigma\right]\hat{R}_n \tag{3.23}$$

über in die Riemann-Funktion $\hat{R}_{n+1}$ von $\hat{L}_{n+1}\hat{w} = 0$.

BEMERKUNG. – Für $\gamma(z) \equiv n - m$ bzw. $\delta(\zeta) \equiv n - m$, $m \in \mathbf{N}$, gehen die Differentialgleichungen (3.17) und (3.18) über in

$$w_{z\zeta} + \frac{n-m}{\eta} w_\zeta - \frac{n(m+1)}{\eta^2} w = 0 .$$

Für diese Spezialfälle wurde in [4] die den Gleichungen (3.22) und (3.23) entsprechende Relation unter Verwendung gewisser Eigenschaften der hypergeometrischen Reihe hergeleitet.

LITERATUR

[1] K. W. BAUER, *Riemannfunktionen und Vekua-Resolventen*, Seminarbericht, Graz, 1977 (unveröffentlicht).

[2] K. W. BAUER, *Differentialoperatoren bei verallgemeinerten Euler-Gleichungen*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz, **121** (1979), pp. 1-17.

[3] K. W. BAUER, *On a Class of Riemann Functions*, Applicable Anal., **13** (1982), pp. 109-126.

[4] K. W. BAUER, *Differentialoperatoren bei adjungierten Differentialgleichungen*, Seminarbericht, Graz, 1982 (unveröffentlicht).

[5] K. W. BAUER, *Riemannfunktionen und Differentialoperatoren*, Z. Anal. Anwendungen, **3** (1984), pp. 7-17.

[6] K. W. BAUER, *Formalhyperbolische Differentialgleichungen und pseudoanalytische Funktionen*, Seminarbericht, Graz, 1984 (unveröffentlicht).

[7] K. W. BAUER - St. RUSCHEWEYH, *Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications*, Lecture Notes in Math., **791** (1980).

[8] P. BERGLEZ, *Characterization of Certain Differential Operators in the Representation of Pseudo-Analytic Functions*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **14** (1982), pp. 27-31.

[9] P. BERGLEZ, *On the Representation of the Riemann Function by Differential Operators*, Glasnik Mat. Ser. III, **18** (1983), pp. 295-303.

[10] St. BERGMAN, *Integral Operators in the Theory of Partial Differential Equations*, Erg. Math. Grenzgeb., Bd. 23, Springer, 1961.

[11] L. BERS, *Theory of Pseudo-Analytic Functions*, New York University, 1953.

[12] R. HEERSINK, *Characterization of certain differential operators in the solution of linear partial differential equations*, Glasgow Math. J., **17** (1976), pp. 83-88.

[13] M. KRACHT, *Über Bergman Operatoren für lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Habilitationsschrift, Düsseldorf, 1974.

[14] M. KRACHT - E. KREYSZIG, *Bergman Operatoren mit Polynomen als Erzeugende*, Manuscripta Math., **1** (1969), pp. 369-376.

[15] E. KREYSZIG, *Über zwei Klassen Bergman'scher Operatoren*, Math. Nachr., **37** (1968), pp. 197-202.

[16] J. PÜNGEL, *Zur Darstellung von Lösungsmengen partieller Differentialgleichungen*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz, **72** (1977), pp. 1-10.

[17] J. PÜNGEL, *Lineare Abbildungen zwischen Lösungsmengen partieller Differentialgleichungen im Komplexen*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz, **91** (1978), pp. 1-81.

[18] J. PÜNGEL, *Riemann Functions for Associated Operators*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz, **158** (1981), pp. 1-10.

[19] K. W. TOMANTSCHGER, *On the Transformation of Bergman Kernels*, Complex Variables Theory Appl., **4** (1985), pp. 163-171.

[20] I. N. VEKUA, *Verallgemeinerte analytische Funktionen*, Akademie Verlag, Berlin, 1963.

[21] I. N. VEKUA, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967.

[22] H. WALLNER, *Bergman-Operatoren und Riemann-Funktionen bei einer Klasse formalhyperbolischer Differentialgleichungen*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz, **139** (1980), pp. 1-25.

[23] H. WALLNER, *Associated Differential Equations and their Bergman Kernels*, Complex Variables Theory Appl., **1** (1983), pp. 395-403.

[24] W. WATZLAWEK, *Über lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Fundamentalsystemen*, J. Reine Angew. Math., **247** (1971), pp. 69-74.

[25] W. WATZLAWEK, *Über Zusammenhänge zwischen Fundamentalsystemen, Riemann Funktion und Bergman Operatoren*, J. Reine Angew. Math. **251** (1971) pp. 200-211.

[26] W. WATZLAWEK, *Über lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Bergman-Operatoren der Klasse P*, Monatsh. Math., **76** (1972), pp. 356-369.