

# 선형 다변수 입출력 시스템에서 좌 고유벡터의 방향 지정

## Direction Assignment of Left Eigenvector in Linear MIMO System

김 성 현\*, 양 현 석  
(Sung-Hyun Kim and Hyun-Seok Yang)

**Abstract :** In this paper, we propose novel eigenstructure assignment method in full-state feedback for linear time-invariant MIMO system such that directions of some left eigenvectors are exactly assigned to the desired directions. It is required to consider the direction of left eigenvector in designing eigenstructure of closed-loop system, because the direction of left eigenvector has influence over excitation by associated input variables in time-domain response. Exact direction of a left eigenvector can be achieved by assigning proper right eigenvector set satisfying the conditions of the presented theorem based on Moore's theorem and the orthogonality of left and right eigenvector. The right eigenvector should reside in the subspace given by the desired eigenvalue, which restrict a number of designable left eigenvector. For the two cases in which desired eigenvalues are all real and contain complex number, design freedom of designable left eigenvector are given.

**Keywords :** eigenstructure assignment, left eigenvector direction, state feedback

### I. 서론

선형 시불변 다변수 제어 시스템에서 페루프 시스템의 고유값(eigenvalue)은 시간영역에서 시스템 응답의 속도에 관여하고 고유벡터(eigenvector)는 응답의 모양을 결정한다. 잘 알려진 고유구조지정(eigenstructure assignment)은 다변수 시스템의 고유값뿐만 아니라 고유벡터도 설계하는 제어 기법이다. Wonham[1]에 의해서 가제어성인 시스템의 페루프 고유값을 임의의 서로 다른 자기 공액 복소수가 되도록 할 수 있다는 것이 밝혀졌고, Moore[2]에 의해서 페루프 시스템의 고유값뿐만 아니라 고유벡터가 지정될 수 있는 자유도가 확인된 이후, MIMO시스템에서 고유벡터를 설계하는 연구가 여러 분야와 응용 분야에 걸쳐 이루어졌다.

기존 연구에서 응용분야, 제시된 방법과 알고리즘은 다르더라도 고유벡터를 설계하는 기본적인 목적은 크게 세가지로 분류할 수 있다. 저감도(low sensitivity) 혹은 강건(robust) 설계, 우 고유벡터 지정, 좌 고유벡터 지정이다. 저감도 고유구조 지정은 외란이나 모델 변수의 변화에 페루프 고유값의 변화가 작도록 설계하는 것이다[4,9,10]. 우 고유벡터와 좌 고유벡터 지정은 페루프 좌/우 고유벡터를 목표 벡터가 되도록 설계하는 방법이다. 일반적으로 설계 자유도가 부족하여 목표 벡터에 정확히 일치시키지 못하므로 최소 자승법에 의하여 허용된 부분공간에서 목표 벡터에 가장 근접한 벡터를 지정하는 방법이 주를 이룬다[3,5-8].

본 논문에서는 좌 고유벡터의 지정 목표를 목표 벡터의 근사값에 두지 않고 벡터 방향을 정확히 지정하는 새로운 고유구조지정 방법을 제시한다. 페루프 시스템의 시간응답에서 좌 고유벡터는 요소보다는 방향이 중요한 역할을 한다. 이러한 목표가 실현될 수 있는 기본개념과 우 고유벡터가 가져야 할 조건을 정리와 증명을 통하여 정의한다. 또, 설계 가능한

좌 고유벡터의 자유도를 고유값의 복소수 여부에 따라 해석하고 제안된 방법을 예제를 통하여 검증한다.

### II. 좌 고유벡터의 역할

일반적인 페루프 선형 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \sum_{k=1}^q \mathbf{e}_k d_k(t) \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{A}_c$  는 페루프 시스템으로 상태 피드백 제어일 경우  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  이고,  $d_k$  는 외란, 레퍼런스 등의 외부 입력 변수,  $\mathbf{e}_k$  는 그에 대한 벡터이다. 이 페루프 시스템의 시간 응답은 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \left[ \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0) + \sum_{k=1}^q (\mathbf{w}_i^T \mathbf{e}_k) \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} d_k(\tau) d\tau \right] \quad (2)$$

이 시간 응답에서 좌 고유벡터의 역할은  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0)$  과  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{e}_k$  의 항에서 나타나는데 이 항들은 각각 초기값과 기타 입력이  $i$  번째 모드의 응답에 영향을 미치는 정도를 나타낸다. 이 항들은 내적 형태로서 벡터의 크기가 같다면 입력 벡터 방향과 좌 고유벡터의 방향이 크기의 중요 변수가 된다. 우 고유벡터는 벡터의 각 요소가 각 모드의 응답에 작용하는 반면 좌 고유벡터는 벡터의 크기와 '방향'에 의해서 각 모드의 응답 크기가 결정된다. 기존 좌 고유벡터의 지정에 관한 연구에서는 우 고유벡터 지정과 같은 방법으로 주어진 목표 좌 고유벡터에 가장 근접한 벡터를 직접 구하거나[7,12], 직교성을 이용하여 목표 좌 고유벡터에 근접하도록 우 고유벡터를 부분공간 내에 지정하였다[5,6]. 전자의 방법은 좌 고유벡터의 부분공간이 우 고유벡터와 독립적으로 정의되지 않으므로 해가 없는 경우도 존재한다. 이를 보완한 후자의 방법에서는 모든 모드에 대한 좌 고유벡터의 목표 값을 정해야 하고 이 목표 값에 근접하도록 구해진 좌 고유벡터가 벡터의 '방향'과 '크기' 개념에서 가장 좋은 해라는 점을 보장하지

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 6. 21., 채택확정 : 2008. 1. 23.

김성현, 양현석 : 연세대학교 기계공학부

(charlie@yonsei.ac.kr/hsyang@yonsei.ac.kr)

※ 본 연구는 산업자원부 로봇 최적설계 지원시스템 개발 과제의 지원에 의하여 연구되었음.

않는다. 따라서, 좌 고유벡터를 고려한 설계에서 벡터의 방향을 고려한 방법이 필요하다.

**III. 기본 개념**

본 논문에서 소개하는 고유구조지정 방법의 목적은 일부의 좌 고유벡터의 방향을 목표 방향에 정확히 지정하는 것이다. 이 방법의 기본 개념은 다음의 보조정리 1과 보조정리 2로부터 도출된다.

보조정리 1 ([2]의 정리):  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  를 서로 다른 복소수로 이루어진 자기 공액 집합이라고 하고 다음 식을 고려한다.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \text{ for } i=1,2,\dots,n \quad (3)$$

(3)을 만족하는 실수의  $(m \times n)$  행렬  $\mathbf{K}$  가 존재할 필요충분 조건은 각  $i$  에 대하여 다음을 만족하는 벡터 집합  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$  가 존재하는 것이다.

- (i)  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$  은 복소수  $n$ -벡터 공간  $\mathbb{C}^n$  의 선형 독립 집합
- (ii)  $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}}_j$ , when  $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$
- (iii)  $\mathbf{v}_i \in \text{span}\{\mathbf{N}_i\}$ , 여기서  $\mathbf{N}_i$  는  $\lambda_i$  에 의한 부분공간, 또한  $\mathbf{K}$  가 존재하고  $\text{rank } \mathbf{B} = m$  이면  $\mathbf{K}$  는 유일하다.

보조정리 2 ([12]의 p.187):  $\mathbf{A}_c (= \mathbf{A} + \mathbf{BK})$  의 고유값  $\lambda_j$  에 대하여 주어진 좌 고유벡터  $\mathbf{w}_1^T$  는  $\mathbf{A}_c$  의 나머지  $(n-1)$   $\lambda_i \neq \lambda_j$  인 고유값  $\lambda_j$  에 대한 우 고유벡터  $\mathbf{v}_j$  에 대하여 항상 수직이다.

좌 고유벡터, 엄밀히 말해서 우 고유벡터의 역행렬은 직접 계산될 수 없다. 보조정리 2에 의하여 목표 좌 고유벡터에 수직인 나머지 모드들의 우 고유벡터를 보조정리 1의 조건을 만족하도록 구한다. 우 고유벡터는 서로 독립이므로 제외된 모드에 관계없이 (3)을 만족하는 행렬  $\mathbf{K}$  를 구할 수 있다. 또, 우 고유벡터의 설계 자유도에 의해서 방향을 지정할 수 있는 좌 고유벡터의 수가 결정된다.

보조정리 1의 조건을 만족하는 우 고유벡터는 고유값에 의해 주어지는 부분공간  $\mathbf{N}_i$  에 위치한다. 즉, 우 고유벡터는

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{f}_i \quad (4)$$

이고, 매개변수 벡터  $\mathbf{f}_i$  에 의해서 선택된다. 부분공간의 정의는 시스템의 특성에 따라 다르고 해법도 다양하게 연구되었다. 가장 일반적으로 전 상태 피드백이고  $\text{rank } \mathbf{B} = m$  이고  $\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$  일 경우 부분 공간은

$$\mathbf{N}_i = (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (5)$$

이고, 매개변수 벡터  $\mathbf{f}_i$  의 차원(dimension)은  $m$  이다. 고유값이 실수일 경우 피드백 계인 행렬은

$$\mathbf{K} = [\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \dots \ \mathbf{f}_n][\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]^{-1} \quad (6)$$

로 계산되고 고유값에 복소수가 포함된 경우는 이식의 변형이다[2].

그림 1은 시스템의 차수가 3이고 각 고유벡터의 차원

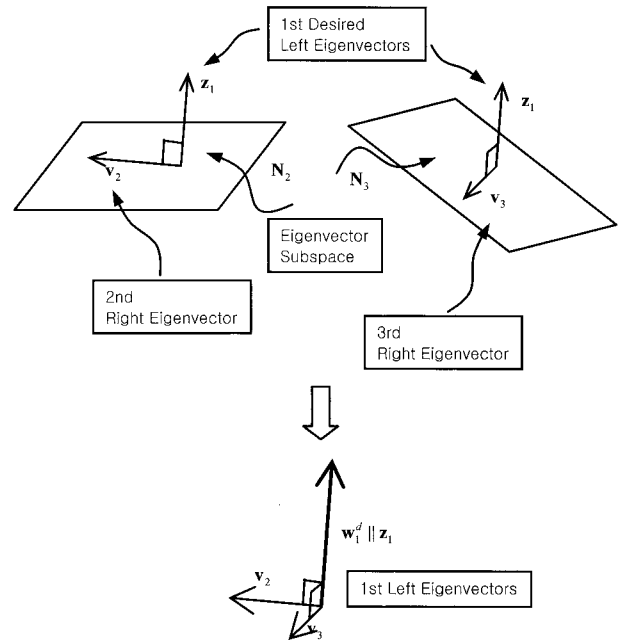


그림 1.  $n=3, m=2$  인 경우 좌 고유벡터 방향 지정.  
Fig. 1. Direction assignment of left eigenvector in case of  $n=3, m=2$ .

(dimension)이 2인 경우에 대하여 기본 개념을 나타낸 그림이다. 모드 1의 좌 고유벡터의 방향이  $\mathbf{z}_1$  으로 주어지면 모드 2, 모드 3의 우 고유벡터는 각각의 허용 부분공간에서  $\mathbf{z}_1$  에 수직하도록 정한다. 그로부터 페루프 시스템을 구성하면 결과적인 모드 1의 좌 고유벡터의 방향은  $\mathbf{z}_1$  와 같게 된다.

**IV. 우 고유벡터의 조건**

목표 좌 고유벡터의 방향을 실현하는 페루프 시스템은 조건에 맞는 합당한 우 고유벡터의 계산으로 이루어진다. 그러한 우 고유벡터의 조건을 다음의 정리에 정의하였다.

정리 1:  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  는 서로 다른 자기 공액 복소수 집합,  $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^p$  는 선형 독립인  $p$  개의 임의의 복소수 벡터 집합이고  $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$  이면  $\mathbf{z}_i = \bar{\mathbf{z}}_j$  의 조건을 갖는다고 가정하면,

$$\mathbf{z}_i^T (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \lambda_i \mathbf{z}_i^T, \text{ for } i=1,2,\dots,p \ (p < n) \quad (7)$$

(7)를 만족하는  $(m \times n)$  의 실수 행렬  $\mathbf{K}$  가 존재하기 위한 필요충분 조건은 다음을 만족하는 벡터 집합  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$  가 존재하는 것이다.

- (i)  $i=1,2,\dots,p \ (p < n)$  와  $j=1,2,\dots,n$  에 대하여
 
$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i^T \mathbf{v}_j &= 0, \text{ for } i \neq j \\ \mathbf{z}_i^T \mathbf{v}_i &= 1/\alpha_i \neq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(ii)  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$  는 복소수  $n$ -벡터 공간의 선형 독립인 집합

(iii)  $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$  이면  $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}}_j$

(iv)  $\mathbf{v}_i \in \text{span}\{\mathbf{N}_{\lambda_i}\}$

증명:

필요조건: 고유치  $\lambda_j$  에 대한 페루프 시스템  $(A + BK)$  의 우 고유벡터의 집합을  $\{v_j\}_{j=1}^n$  라고 가정하면 다음 식이 성립한다.

$$(A + BK)v_j = \lambda_j v_j \quad (9)$$

(7)의 양변의 우측에  $v_j (i \neq j)$  를 곱하고 (9)의 양변의 좌측에  $z_i^T$  를 곱하면

$$z_i^T (A + BK)v_j = \lambda_j z_i^T v_j \quad (10)$$

$$z_i^T (A + BK)v_j = \lambda_i z_i^T v_j \quad (11)$$

이고 (10)에서 (11)을 빼면 다음과 같다.

$$(\lambda_i - \lambda_j)z_i^T v_j = 0 \quad (12)$$

따라서,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  이면 (12)를 만족하는 유일한 해는

$$z_i^T v_j = 0, \text{ for } i \neq j \quad (13)$$

이고,  $\lambda_i = \lambda_j$  이면 (12)의 해는 임의로 정할 수 있으나 벡터 집합  $\{v_j\}_{j=1}^n$  이 선형 독립이므로 0은 될 수 없다.

$$z_i^T v_i = 1/\alpha_i \neq 0 \quad (14)$$

(13), (14)는 조건(i)의 (8)과 같다. 조건 (ii), (iii), (iv)는 보조정리 1에 의해서 증명된다.

충분조건: 보조정리 1로부터 조건 (ii),(iii),(iv)를 만족하는 벡터 집합  $V = \{v_j\}_{j=1}^n$  는 고유값이  $\lambda_i (i=1,2,\dots,n)$  인 페루프 시스템  $(A + BK)$  의 우 고유벡터이고 이를 성립시키는 게인 행렬  $K$  가 존재한다. 우 고유벡터와 좌 고유벡터는 다음식을 만족한다.

$$W^T V = I \quad (15)$$

(15)은  $j=1,2,\dots,n$  에 대하여 다음과 같이 요소 별 식으로 표현할 수 있고 보조정리 2와 같다.

$$w_i^T v_i = 1 \text{ and } w_i^T v_j = 0, \text{ for } i \neq j \quad (16)$$

조건 (i)의 (8)에 스칼라  $\alpha_i$  를 곱하면 다음과 같고

$$\alpha_i z_i^T v_i = 1 \text{ and } \alpha_i z_i^T v_j = 0, \text{ for } i \neq j \quad (17)$$

$i=1,2,\dots,p$  과  $j=1,2,\dots,n$  인 경우에 대해서 (16)에서 (17)를 빼면

$$(w_i^T - \alpha_i z_i^T)v_j = 0 \quad (18)$$

우 고유벡터  $v_j$  는 영벡터가 아니기 때문에 (18)의 유일한 해는

$$w_i = \alpha_i z_i, \text{ for } i=1,2,\dots,p \quad (19)$$

이다. 따라서,  $i=1,2,\dots,p$  인 경우에 대해서 임의의 벡터  $z_i$  의 방향은 좌 고유벡터  $w_i$  의 방향과 일치하고 이로부터 (7)

는 쉽게 유도된다. ■

정리 1에 의하면, 조건 (i), (ii), (iii), (iv)를 만족하는 우 고유벡터 집합이 존재하면 페루프 시스템  $(A + BK)$  의  $p$  개의 좌 고유벡터의 방향을 임의로 지정할 수 있다는 것을 나타낸다.

**V. 설계 자유도**

방향을 정확히 지정할 수 있도록 설계가 가능한 좌 고유벡터의 수  $p$  는 각 우 고유벡터의 설계 자유도 즉, 입력행렬  $B$  의 계수(rank)와 페루프 고유값  $\lambda_i (i=1,2,\dots,n)$   $\lambda_i$  에 복소수가 포함되었는지 여부에 의해 결정된다. 다음의 절에서 고유값이 모두 실수인 경우와 복소수가 포함된 경우에 대하여 설계 자유도를 구하였다.

**1. 고유값이 모두 실수인 경우**

페루프 고유값이 모두 실수이면 그에 따른 고유벡터도 실수이다. 이 경우 방향을 지정할 수 있는 좌 고유벡터의 수는 다음의 따름정리에 의해서 설명된다.

따름정리 1: 목표 페루프 고유값이 서로 다르고 모두 실수인 경우, 정리 1의 필요 충분 조건을 만족하는 우 고유벡터의 집합은  $p < m$  일 때 존재한다.

증명:  $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$  를 각 열이 서로 독립인  $p$  개의 목표 좌 고유벡터 방향인 행렬이라 하고  $Z_i$  는  $Z$  에서  $i$  번째 열벡터를 제외한 행렬로 다음과 같이 정의한다.

$$Z_i = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_{i-1} \quad z_{i+1} \quad \dots \quad z_p] \quad (20)$$

정리 1의 조건 (i)에 (4)와 (20)을 대입하면 (23)이 성립한다.

$$Z_i^T v_i = Z_i^T N_i f_i = 0, \text{ for } i=1,2,\dots,p \quad (21)$$

$$Z^T v_i = Z^T N_i f_i = 0, \text{ for } i=p+1,p+2,\dots,n$$

(21)에서 모든 모드에 대하여 매개변수 벡터  $f_i$  의 0이 아닌 해가 존재해야 정리 1의 조건 (i)를 만족하는 우 고유벡터가 존재한다. (21)에서 0이 아닌 자명한 해  $f_i$  가 존재하기 위해서는 행렬  $Z_i^T N_i$  혹은  $Z^T N_i$  의 영공간의 차원(nullity)이 0보다 커야 하고 그 때 해는 각 행렬의 영공간(null space)에 위치한다.

먼저,  $i=1,2,\dots,p$  인 경우에 대하여, 매개변수 벡터  $f_i$  가 0이 아닌 해를 갖기 위한 조건은  $p-1 \times m$  행렬  $Z_i^T N_i$  의 영공간의 차원이 0이 아니어야 한다. Sylvester 부등식에 의하면

$$\begin{aligned} \text{rank}(Z_i^T N_i) &\leq \\ \min(\text{rank}(Z_i^T), \text{rank}(N_i)) &= \min(p, m) \end{aligned} \quad (22)$$

이고, 계수-영공간의 차원 정리(rank-nullity theorem)에 의하면 행렬  $Z_i^T N_i$  의 영공간의 차원이 0이 되지 않기 위한 조건은

$$\max \text{row rank}(Z_i^T N_i) < \text{column of } Z_i^T N_i \quad (23)$$

이다. 즉,

$$p-1 < m \quad (24)$$

다음으로,  $i=p+1,p+2,\dots,n$  인 경우에 대해서는 같은 방

법으로 행렬  $\mathbf{Z}^T \mathbf{N}_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$  에 대하여 해석하면 충분조건은

$$p < m \tag{25}$$

이다. 위의 두 조건 (24), (25)를 모두 만족하는, 즉 모든 우 고유벡터에 대하여 만족하는 조건은  $p < m$  이다.  $i = j$  인 경우는 조건식  $\mathbf{z}_i^T \mathbf{v}_i = 1/\alpha_i \neq 0$  를 만족하는 우 고유벡터는 임의로 정할 수 있으나 우 고유벡터 집합이 선형 독립이므로 0은 될 수 없다. ■

2. 고유값에 복소수가 포함된 경우

목표 고유값에 복소수가 있는 경우, 제어 게인 행렬이 실수가 되기 위해서는 고유값과 그에 해당되는 고유벡터가 자기 공액이어야 하기 때문에 정리 1을 만족하는 우 고유벡터를 구하는 방법이 일반적이지 않고 경우에 따라 다르다. 목표 좌 고유벡터와 그에 직교하는 지정될 우 고유벡터의 곱셈 형태는 복소수 여부에 따라 5가지 경우가 존재한다. 5가지의 경우는 표 1과 같다. 여기서,  $\mathbf{z}, \mathbf{v}$  는 각각 목표로 하는 좌 고유벡터, 우 고유벡터이고 침자  $co$ 와  $re$ 는 각각 복소수와 실수를 나타낸다. 정리 1의 조건 (i)이 성립하기 위해서는 이 5가지 경우의 곱셈이 0이 되어 직교성이 성립해야 한다.

$i$  번째 좌 고유벡터의 목표 방향과 우 고유벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i &= \mathbf{z}_i^{Re} + i\mathbf{z}_i^{Im} \\ \mathbf{v}_i &= (\mathbf{N}_i^{Re} + i\mathbf{N}_i^{Im}) (\mathbf{f}_i^{Re} + i\mathbf{f}_i^{Im}) \end{aligned} \tag{26}$$

여기서  $Re$ 와  $Im$ 은 각각 실수와 허수 부분을 나타낸다. 복소공액 조건 ( $\mathbf{v}_j = \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{z}_j = \bar{\mathbf{z}}_i$  for  $\lambda_j = \bar{\lambda}_i$ ) 으로부터  $i$  번째 좌 고유벡터 방향과 우 고유벡터의 복소공액은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_j &= \bar{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i^{Re} - i\mathbf{z}_i^{Im} \\ \mathbf{v}_j &= \bar{\mathbf{v}}_i = (\mathbf{N}_i^{Re} - i\mathbf{N}_i^{Im}) (\mathbf{f}_i^{Re} - i\mathbf{f}_i^{Im}) \end{aligned} \tag{27}$$

복소수 계산을 피하고 실수 계산만을 위하여 (26), (27)를 표 1의 5가지 경우의 곱셈에 대입하면 다음과 같이 변형된 행렬의 형태가 된다.  $[\bullet]$  는 매개변수 벡터  $\mathbf{f}_i$  의 앞에 곱해지는 행렬을 나타낸다.

Case 0:  $\mathbf{z}_{re}^T \mathbf{v}_{re} = 0$

따름정리 1과 동일

Case 1:  $\mathbf{z}_{co}^T \bar{\mathbf{v}}_{co} = 0: [\bullet] \in \mathbb{R}^{2p \times 2m}$

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{z}_i^{ReT} & \mathbf{z}_i^{ImT} \\ -\mathbf{z}_i^{ImT} & \mathbf{z}_i^{ReT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_i^{Re} & -\mathbf{N}_i^{Im} \\ \mathbf{N}_i^{Im} & \mathbf{N}_i^{Re} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{Re} \\ \mathbf{f}_i^{Im} \end{pmatrix} = 0$$

표 1. 고유벡터 직교 계산의 경우 분류.

Table 1. Cases for arithmetic of orthogonality of eigenvector.

	$\mathbf{v}_{re}$	$\mathbf{v}_{co}$	$\bar{\mathbf{v}}_{co}$	$\mathbf{v}_{co}$	$\bar{\mathbf{v}}_{co}$	$\mathbf{v}_{re}$
$\mathbf{z}_{re}$		Case 4	Case 4	Case 4	Case 4	Case 0
$\mathbf{z}_{co}$	Case 3		Case 1	Case 2	Case 2	Case 3
$\bar{\mathbf{z}}_{co}$	Case 3	Case 1		Case 2	Case 2	Case 3

표 2. 각 경우에 대한  $p$  의 범위.

Table 2. Range of  $p$  according to cases.

Case	Condition
Case 0	$p < m$
Case 1	$p < m$
Case 2	$2p < m$
Case 3	$2p < m$
Case 4	$p < m$

Case 2:  $\mathbf{z}_{co}^T \mathbf{v}_{co} = 0$  and  $\mathbf{z}_{re}^T \bar{\mathbf{v}}_{co} = 0: [\bullet] \in \mathbb{R}^{4p \times 2m}$

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{z}_i^{ReT} & \mathbf{z}_i^{ImT} \\ -\mathbf{z}_i^{ImT} & \mathbf{z}_i^{ReT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_i^{Re} & -\mathbf{N}_i^{Im} \\ \mathbf{N}_i^{Im} & \mathbf{N}_i^{Re} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{Re} \\ \mathbf{f}_i^{Im} \end{pmatrix} = 0$$

Case 3:  $\mathbf{z}_{co}^T \mathbf{v}_{re} = 0: [\bullet] \in \mathbb{R}^{2p \times m}$

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{z}_i^{ReT} \\ \mathbf{z}_i^{ImT} \end{pmatrix} \mathbf{N}_i \right] \mathbf{f}_i = 0$$

Case 4:  $\mathbf{z}_{re}^T \mathbf{v}_{co} = 0$  and  $\mathbf{z}_{re}^T \bar{\mathbf{v}}_{co} = 0: [\bullet] \in \mathbb{R}^{2p \times 2m}$

$$\left[ \mathbf{z}_i^T \begin{pmatrix} \mathbf{N}_i^{Re} & -\mathbf{N}_i^{Im} \\ \mathbf{N}_i^{Im} & \mathbf{N}_i^{Re} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{Re} \\ \mathbf{f}_i^{Im} \end{pmatrix} = 0$$

각 경우에 대하여 매개변수 벡터  $\mathbf{f}_i$  가 존재하기 위한 조건을 앞의 따름정리 1의 증명과 같은 방법으로 구하였다. 각 경우의 행렬  $[\bullet]$  의 계수(rank)에 대한 분석이 행하여졌고 그 결과는 위의 표 2와 같다.

목표 고유값에 복소수가 있는 경우 방향을 정확히 지정할 수 있는 좌 고유벡터의 수가 실수인 경우보다 제한적이다. 어떤 경우는 좌 고유벡터의 방향에 대한 설계 자유도가 존재하지 않을 수도 있으나, 고유값의 실수/복소수 여부 또한 설계자의 설계 대상이므로 조정 가능하다.

VI. 설계 과정

본 논문에서 제안한 좌 고유벡터의 방향을 정확히 지정하는 고유구조지정 방법의 단계별 계산 방법은 다음과 같다.

단계 1: 목표 고유값 결정.

폐루프 시스템의 성능을 고려한 실현 가능한 목표 고유값을 결정한다.

단계 2: 설계 가능한 좌 고유벡터의 수 계산.

따름정리 1과 표 1, 표 2에 소개된 대로 고유값의 복소수 여부와 제어입력의 수에 따른  $p$  를 계산한다.

단계 3:  $p$  개의 좌 고유벡터의 방향 결정

좌 고유벡터의 방향을 정확히 하고자 하는  $p$  개의 모드를 임의로 선택하고 선택된 모드의 좌 고유벡터의 방향을 설계 목적에 따라 지정한다.

단계 4:  $p$  개의 설계된 좌 고유벡터를 구현하는 우 고유

벡터 집합 계산.

좌와 우 고유벡터의 직교성을 이용하여 설계한 좌 고유벡터를 실현할 수 있는 우 고유벡터들을 매개변수 벡터  $\mathbf{f}_i$  를 구함으로써 계산한다. 고유값이 실수인 경우 따름정리 1로부터 조건을 만족하는 매개변수 벡터는 다음 식으로 주어지는 공간에 위치한다.

$$\mathbf{f}_i \in \begin{cases} N(\mathbf{Z}_i^T \mathbf{N}_i), & \text{for } i=1,2,\dots,p \\ N(\mathbf{Z}^T \mathbf{N}_i), & \text{for } i=p+1,p+2,\dots,n \end{cases} \quad (28)$$

(여기서,  $N(\cdot)$  는 영공간(null space))

앞에서 설계 자유도  $p$  는 (28)의 영공간이 존재하도록 정해졌으므로 매개변수 벡터  $\mathbf{f}_i$  는 영공간의 기저(basis)에 의한 생성 공간(span)에서 구할 수 있다. 고유값에 복소수가 포함된 경우도 같은 방법으로 계산 가능하다.

단계 5: 제어 게인 행렬  $\mathbf{K}$  계산

우 고유벡터로 이루어진 모달 행렬로부터 제어 게인 행렬은 쉽게 구할 수 있다(수식 (6)).

**VII. 예제**

제안한 방법을 검증하기 위하여 다음과 같은 Sobel의 FPCC 모델[3]에 적용해보았다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.34 & 0.0517 & 0.001 & -0.997 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.69 & 0 & -1.15 & 0.738 & 0 \\ 5.91 & 0 & 0.138 & -0.506 & 0 \\ -0.34 & 0.0517 & 0.001 & 0.0031 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.0755 & 0 & 0.0246 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.48 & 5.22 & -0.742 \\ -5.03 & 0.0998 & 0.984 \\ 0.0755 & 0 & 0.0246 \end{bmatrix}$$

고유값의 실수/복소수 여부에 따라 좌 고유벡터를 설계 가능한 자유도가 다르므로 두 경우에 대하여 해석하였다.

예제 1: 고유값이 모두 실수인 경우

목표 페루프 고유값을

$$\lambda_d = -0.5, -1, -1.5, -2, -2.5$$

로 설정한다. 제어 입력의 수가 3이므로 ( $m=3$ ) 최대 2개 ( $p=2$ )의 좌 고유벡터의 방향을 지정할 수 있다. 두 고유값  $\lambda = -0.5, -1$  에 관계된 좌 고유벡터의 방향을 다음과 같이 설계한다고 하고 페루프 시스템을 설계하였다.

$$\mathbf{z}_{\lambda=-0.5} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

$$\mathbf{z}_{\lambda=-1} = [1 \ 2 \ -1 \ 3 \ -2]^T$$

결과: 계산된 제어 게인 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 43.0142 & 20.1022 & 20.5179 & -39.4026 & -46.1505 \\ -9.5294 & -4.4284 & -4.3697 & 8.5360 & 9.8861 \\ 211.5837 & 101.1551 & 103.2922 & -199.4392 & -233.2815 \end{bmatrix}$$

이 제어 게인 행렬에 의한 페루프 시스템의 고유값은

$$\lambda_i = -0.500, -1.000, -1.500, -2.000, -2.500$$

로 목표치와 일치하고, 페루프 좌 고유벡터는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.8765 & -0.4197 & -80.0953 & -194.5745 & 116.0489 \\ 0.0000 & -0.8394 & -17.3171 & -52.8264 & 36.0582 \\ 0.8765 & 0.4197 & -20.8184 & -56.4239 & 36.8656 \\ 0.0000 & -1.2590 & 69.4059 & 179.7663 & -109.8292 \\ 0.8765 & 0.8394 & 79.3980 & 197.2197 & -119.1866 \end{bmatrix}$$

밀줄 친  $\lambda = -0.5, -1$  에 관계된 좌 고유벡터의 방향이 설계 목표와 일치한다.

예제 2: 고유값에 복소수가 포함된 경우

표 2에서  $m=3$  인 경우 최대 설계 자유도는  $p=1$  이므로 1개의 좌 고유벡터 방향을 지정할 수 있다.

목표 페루프 고유값은

$$\lambda_d = -0.5, -1 \pm i, -2 \pm 2i$$

라 하고  $\lambda = -1 + i$  에 관계된 좌 고유벡터의 방향을

$$\mathbf{z}_{\lambda=-1+i} = [1+i \ -1+i \ 1-i \ -1+2i \ 1+i]^H$$

$$(\text{여기서, } [\ ]^H = [\ ]^T)$$

로 지정하고자 한다면, 곱셈 형태는 표 1에서 Case 1, Case 2, Case 3에 해당된다.

결과: 계산된 제어 게인 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.5796 & 8.1002 & 9.3272 & -6.2248 & -9.7068 \\ -2.1292 & -4.2559 & -3.1527 & 2.0781 & 3.3334 \\ 9.7811 & 33.7360 & 42.7490 & -28.7736 & -44.5552 \end{bmatrix}$$

이 제어 게인 행렬에 의한 페루프 시스템의 고유값은

$$\lambda_i = -0.500 - 0.000i, -1.000 \pm 1.000i, -2.000 \pm 2.000i$$

로 목표치와 일치하고,  $\lambda = -1 + i$  에 관계된 페루프 좌 고유벡터는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{w}_{\lambda=-1+i} = \begin{bmatrix} 0.4722 - 0.4305i \\ 0.4305 + 0.4722i \\ -0.4305 - 0.4722i \\ 0.8818 + 0.4930i \\ 0.4722 - 0.4305i \end{bmatrix}$$

목표 벡터와 계산된 좌 고유벡터의 방향 비교를 위하여 벡터의 크기를 변화시키면

$$\frac{\mathbf{w}_{-1+i}}{\mathbf{w}_{-1+i}(1)/\mathbf{z}(1)} = \begin{bmatrix} 1.00 + 1.00i \\ -1.00 + 1.00i \\ 1.00 - 1.00i \\ -1.00 + 2.00i \\ 1.00 + 1.00i \end{bmatrix}$$

으로 원하는 모드의 좌 고유벡터의 방향이 원하는 값과 정확히 일치한다.

### VIII. 결론

본 논문에서는 목표 고유값과 더불어 일부 좌 고유벡터의 방향을 정확히 지정하는 것을 목표로 하는 새로운 고유구조 지정 방법을 소개하였다. 목표 좌 고유벡터의 방향을 정확히 구현하는 방법의 기본 개념과 이를 만족하는 우 고유벡터의 조건을 정리 1에 정의하고 증명하였다. 지정할 수 있는 좌 고유벡터의 설계 자유도는 고유값이 모두 실수인 경우와 복소수가 포함된 경우로 나누어 분석하였다. 또한, 예제를 통하여 소개한 방법을 검증하였다. 제안된 방법은 일부의 좌 고유벡터의 방향만 지정할 수 있지만 시간응답에서 우세한 모드의 입력에 관계된 좌 고유벡터만을 설계한다면 전체 시스템의 성능에 영향을 줄 수 있다.

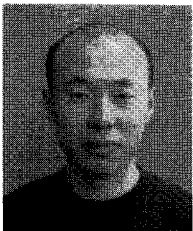
일반적으로 입력벡터에 좌 고유벡터가 수직이 되면 입력에 의한 영향이 0이 되므로 목표 벡터 방향을 입력에 수직이 되도록 한다면 더 많은 설계 자유도를 얻을 수 있다. 또, 본 논문에서는 가장 기본적인 상태 피드백의 선형 시불변 다변수 시스템에 대한 경우만 고려하였지만, 좌 고유벡터의 방향을 지정할 수 있다는 개념은 고유구조지정 방법이 적용되는 수많은 응용 분야에서 활용될 수 있으리라 기대된다.

### 참고문헌

- [1] W. M. Wonham, "On pole assignment in multi-input controllable linear systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 12, 6, 1967.
- [2] B. C. Moore, "On the flexibility offered by state feedback in

multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21, 689-692, 1976.

- [3] K. M. Sobel, E. Y. Shapiro, and A. N. Andry, "Eigenstructure assignment," *Int. J. Contr.*, 59, 1, 13-37, 1994.
- [4] J. Kautsky, N. K. Nichols, and P. Van Dooren, "Robust pole assignment in linear state feedback," *Int. J. Contr.*, 41, 5, 1129-1155, 1985.
- [5] J. W. Choi, "A simultaneous assignment methodology of right/left eigenstructures," *IEEE Trans. On Aerospace and Electronic systems*, 34, 2, 625-634, 1998.
- [6] J. W. Choi, J. G. Lee, and Y. Kim, "Design of an effective controller via disturbance accommodating left eigenstructure assignment," *J. of Guidance Control and Dynamics*, 18, 2, 347-354, 1995.
- [7] G. Duan, "Eigenstructure assignment in descriptor systems via output feedback: a new complete parametric approach," *Int. J. Contr.*, 72, 4, 345-364, 1999.
- [8] G. Duan, "On the solution to the Sylvester matrix equation  $AV+BW=EVF$ ," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 41, 4, 612-614, 1996.
- [9] S. P. Burrows and R. J. Patton, "Design of a low-sensitivity, minimum norm and structurally constrained control law using eigenstructure assignment," *Optimal Contr. App. Methods*, 12, 131-140, 1991.
- [10] J. E. Ensor, "Analysis on eigenmode sensitivity to structured uncertainty," *Prec. of the American Contr. Conf.*, 2002.
- [11] Q. Zhang, G. L. Slater, and R. J. Allemang, "Suppression of undesired inputs of linear systems by eigenspace assignment," *J. Guidance Control and Dynamics*, 13, 3, 1990.
- [12] G. P. Liu and R. J. Patton, *Eigenstructure Assignment for Control System Design*, John Wiley & Sons, 1998.



김 성 현

1997년 연세대학교 기계공학과(공학사). 1999년 연세대학교 기계공학과(공학석사). 2007년 연세대학교 기계공학과(공학박사). 관심분야는 선형제어, 비선형제어, 로봇공학.



양 현 식

1961년 10월 29일생. 1984년 연세대학교 기계공학과(공학사). 1988년 MIT M.S. in mechanical engineering. 1993년 MIT Ph.D. in mechanical engineering. 1994년~현재 연세대학교 기계공학부 교수. 관심분야는 선형제어, 비선형 제어, 정보저장기기

제어, 로봇 공학.