

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Дискровые одинарные числа Гурвица, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 44–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2977>

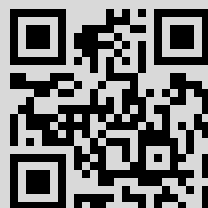
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 106.51.226.7

16 августа 2022 г., 16:36:48



## Дисковые одинарные числа Гурвица\*

© 2010. С. М. НАТАНЗОН

Памяти Израиля Моисеевича Гельфанда

Исследованы числа Гурвица, отвечающие накрытиям диска с единственным непустым критическим значением, расположенным на границе. Найдены дифференциальные уравнения, описывающие производящую функцию этих чисел.

### §1. Введение

Классическое число Гурвица — это взвешенное число накрытий компактной поверхности  $S$  рода  $g$  с предписанным типом критических значений [6]. Точное определение состоит в следующем. Рассмотрим разветвленное накрытие  $\varphi: \Omega \rightarrow S$  поверхности  $S$  компактной поверхностью  $\Omega$ . Накрытия  $\varphi$  и  $\varphi': \Omega' \rightarrow S$  считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ , такой, что  $\varphi'f = \varphi$ . Обозначим через  $\text{Aut}(\varphi)$  группу автоэквивалентностей накрытия  $\varphi$  и через  $|\text{Aut}(\varphi)|$  ее порядок.

В окрестности каждой точки  $y \in \Omega$  накрытие  $\varphi$  эквивалентно факторизации по группе вращений порядка  $n(y)$  с неподвижной точкой  $y$ . Типом значения  $x \in S$  называется моном  $a_{n(y_1)} \cdots a_{n(y_k)}$ , где  $\varphi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$ . Значения всех типов, кроме типа  $a_1^k$ , называются *критическими*. Значения типа  $a_1^{k-1}a_2$  называются *простыми критическими значениями*.

Зафиксируем на поверхности  $S$  конечное число точек  $x_1, \dots, x_v$ . Зафиксируем мономы  $a^1, \dots, a^v$  от переменных  $a_i$ . *Классическим числом Гурвица* называется величина  $\langle a^1, \dots, a^v \rangle_g = \sum |\text{Aut}(\varphi)|^{-1}$ , где сумма берется по всем классам эквивалентности накрытий, имеющих значения типов  $a^1, \dots, a^v$  в точках  $x_1, \dots, x_v$  и не имеющих других критических значений. Число Гурвица вида  $\langle a \rangle^m = \langle a, a_1^{k-1}a_2, \dots, a_1^{k-1}a_2 \rangle_0$ , где  $a$  — произвольный моном от переменных  $a_i$ , а  $m$  — число мономов вида  $a_1^{k-1}a_2$  в скобке, называется *классическим одинарным числом Гурвица*. Классические одинарные числа Гурвица тесно связаны с теорией пересечений на пространстве модулей компактных римановых поверхностей с проколами [7].

Сопоставим переменным  $a_i$  переменные  $p_i$  и мономам  $a = a_{i_1} \cdots a_{i_r}$  мономы  $p_a = p_{i_1} \cdots p_{i_r}$ . Производящая функция для одинарных чисел Гурвица равна  $\Phi(\lambda, p_1, p_2, \dots) = \sum_{m \geq 0} \frac{\lambda^m}{m!} \sum_a \langle a \rangle^m p_a$ , где вторая сумма берется по всем мономам. Согласно [5], производящая функция  $\Phi(\lambda, p_1, p_2, \dots)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое часто называют «cut-and-join»:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = L_\lambda \Phi, \quad L_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{ij} (i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + \sum_{ij} i j p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}.$$

\*Исследование частично поддержано грантами НШ-709.2008.1 и РФФИ 08-01-00110-а.

Доказательство фактически основано на том, что классические числа Гурвица являются корреляторами некоторой замкнутой двумерной топологической теории поля [3]. Это дифференциальное уравнение обладает рядом замечательных свойств. Ему удовлетворяет, например, производящая функция ходжевых интегралов [12].

Определение чисел Гурвица можно распространить на случай накрытий произвольных поверхностей с границей с помощью произвольных поверхностей с границей [1]. В настоящей статье определяются и исследуются *дисковые одинарные числа Гурвица*. Они отвечают накрытиям диска с единственным непростым критическим значением, расположенным на границе. Найдены, в частности, рекуррентные соотношения, позволяющие найти все дисковые одинарные числа Гурвица.

Производящие функции дисковых одинарных чисел Гурвица определяются как функции, зависящие от комплексных параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  (аналог параметра  $\lambda$  в классической ситуации) и четырех бесконечных серий переменных  $\acute{p}_i, \grave{p}_i, \bar{p}_i, \dot{p}_i$ , описывающих топологический тип непростого критического значения (аналог переменных  $p_i$  в классической ситуации). Аналогом уравнения  $\partial\Phi/\partial\lambda = L_\lambda\Phi$  являются три дифференциальных уравнения.

Числа Гурвица для поверхностей с границей являются корреляторами некоторой открыто-замкнутой (некоммутативной) двумерной топологической теории поля [1]. Именно этот факт и является причиной существования дифференциальных уравнений на производящие функции дисковых одинарных чисел Гурвица.

Автор благодарит В. М. Бухштабера за полезное обсуждение топологических свойств накрытий.

## §2. Числа Гурвица

Обозначим через  $D$  замкнутый диск  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  с ориентированной границей. Пусть  $\Omega$  — компактная поверхность с границей. В этой статье мы будем называть *накрытиями* накрытия степени  $k$  в смысле Смита–Дольда, причем такие, что функция, сопоставляющая точке диска число ее прообразов, имеет не более чем конечное число разрывов на  $D^\circ = D \setminus \partial D$  и не более чем конечное число разрывов на  $\partial D$ . Несложное рассуждение показывает, что это тот же класс накрытий, что и в статье [1]. Напомним, что непрерывная функция  $\varphi: \Omega \rightarrow D$  называется накрытием Смита–Дольда ([11], [4]) степени  $k$ , если существует непрерывная функция  $t: D \rightarrow \text{Sym}^k(\Omega)$ , такая, что: 1)  $x \in t\varphi(x)$  для всех  $x \in \Omega$ , 2)  $\text{Sym}^k(\varphi)(ty) = ky$  для всех  $y \in D$ .

Накрытиями (в нашем смысле) являются, в частности, дианалитические морфизмы клейновых поверхностей ([2], [8]). Более того, для каждого топологического накрытия  $\varphi: \Omega \rightarrow D$  существует дианалитическая структура на  $\Omega$ , превращающая  $\varphi$  в морфизм клейновых поверхностей [9]. Морфизмы клейновых поверхностей взаимно однозначно соответствуют вещественным мероморфным функциям в смысле [10]. А именно, каждый дианалитический морфизм получается из вещественной мероморфной функции  $f$  на вещественной алгебраической кривой  $(P, \tau)$  композицией  $h_2 f h_1^{-1}$ , где  $h_1: P \rightarrow P/\langle \tau \rangle$  — естественная проекция и  $h_2(z) = \text{Re } z + i|\text{Im } z|$ .

Прообраз  $\varphi^{-1}(x)$  внутренней точки  $x \in D \setminus \partial D$  состоит из  $n = n(x) \leq k$  точек. Рассмотрим простой контур  $r \in D^\circ$ , ограничивающий малую окрестность точки  $x$ . Его прообраз  $\varphi^{-1}(r)$  распадается на простые контуры  $C_1, \dots, C_n \in \Omega^\circ = \Omega \setminus \partial\Omega$ . Неупорядоченный набор степеней ограничений  $(\deg(\varphi|_{C_1}), \dots, \deg(\varphi|_{C_n}))$  называется (*топологическим*) *типом внутреннего значения*  $x \in D^\circ$ . Топологический тип внутреннего значения будет обозначаться мономом  $a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k}$  от коммутирующих формальных переменных  $a_j$ . В этом обозначении  $t_i$  равно числу индексов  $j$ , таких, что  $\deg(\varphi|_{C_j}) = i$ , и  $a_i^0 = 1$ .

Если ограничение отображения  $\varphi$  на любую компоненту связности прообраза малой окрестности точки  $x \in D^\circ$  является гомеоморфизмом, то значение  $x$  считается *некритическим*. Остальные значения  $x \in D^\circ$  называются *внутренними критическими значениями*. Другими словами, внутренние критические значения — это все внутренние значения топологического типа, отличного от  $a_1^k$ . У любого накрытия существует лишь конечное число внутренних критических значений. Внутренние критические значения типа  $a_1^{k-1} a_2$  называются *простыми*.

Прообраз  $\varphi^{-1}(y)$  граничной точки  $y \in \partial D$  также состоит из  $n = n(y) \leq k$  точек. Рассмотрим простой интервал  $l \subset D$  с концами на  $\partial D$ , ограничивающий малую окрестность точки  $y$ . Его прообраз  $\varphi^{-1}(l) \subset \Omega$  образует граф с  $k$  ребрами. Вершины графа делятся на две группы, отвечающие прообразам концов интервала  $l$ . Концы интервала  $l$  и отвечающие им две группы вершин графа  $\varphi^{-1}(l) \subset \Omega$  считаются упорядоченными согласно ориентации границы диска  $\partial D$ . Для удобства мы будем называть один из концов интервала левым, а другой правым, считая, что ориентация границы диска внутри окрестности отвечает движению слева направо между концами интервала. В соответствии с этим вершины графа  $\varphi^{-1}(l)$  также делятся на *левые* и *правые*.

Итак, граф  $\varphi^{-1}(l)$  является двудольным. Он называется (*топологическим*) *типом граничного значения*  $y \in \partial D$  [1]. Валентность каждой вершины получившегося графа не превосходит 2. Таким образом, связные компоненты графа  $\varphi^{-1}(l)$  относятся к одному из следующих типов:

- $\acute{b}_i$  — это граф с  $i$  левыми и  $i + 1$  правыми вершинами;
- $\grave{b}_i$  — это граф с  $i + 1$  левыми и  $i$  правыми вершинами;
- $\bar{b}_i$  — это незамкнутый граф с  $i$  левыми и  $i$  правыми вершинами;
- $\check{b}_i$  — это замкнутый граф с  $i$  левыми и  $i$  правыми вершинами.

Соответствующие графы для  $i = 2$  приведены на рис. 1.

Поясним геометрический смысл этих инвариантов. На сфере Римана  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$  действует диэдральная группа  $G$ , порожденная отражением  $z \mapsto \bar{z}$  и поворотом  $z \mapsto e^{2\pi i/k} z$ . Она порождает накрытие  $\varphi: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}/G$  с критическими точками  $0$  и  $\infty$ . Соответствующие этим точкам граничные значения имеют тип  $\acute{b}_k$ . Рассмотрим ограничение  $\tilde{\varphi}$  отображения  $\varphi$  на диск  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\} \cup \infty$ . Топологические типы значений  $\tilde{\varphi}(0)$  и  $\tilde{\varphi}(\infty)$  совпадают и равны  $\bar{b}_{(k+1)/2}$  при нечетном  $k$ . При четном  $k$  топологический тип одного из них равен  $\acute{b}_{k/2}$ , а другого  $\check{b}_{k/2}$ .

Сопоставим связным двудольным графам  $\acute{b}_i$ ,  $\grave{b}_i$ ,  $\bar{b}_i$ ,  $\check{b}_i$  коммутирующие формальные переменные  $\acute{b}_i$ ,  $\grave{b}_i$ ,  $\bar{b}_i$ ,  $\check{b}_i$ . Объединению графов сопоставим произведение мономов. Таким образом, топологический тип произвольного граничного

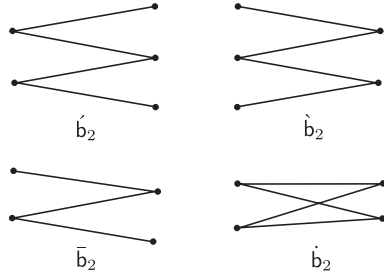


Рис. 1

значения определяется мономом  $b = \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \dots \acute{b}_n^{\acute{s}_n} \grave{b}_1^{\grave{s}_1} \dots \grave{b}_n^{\grave{s}_n} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dots \bar{b}_n^{\bar{s}_n} \dot{b}_1^{\dot{s}_1} \dots \dot{b}_n^{\dot{s}_n}$ , где  $k = \sum_{i=1}^n 2\acute{s}_i + \sum_{i=1}^n (2\bar{s}_i - 1) + \sum_{i=1}^n 2\grave{s}_i + \sum_{i=1}^n 2\dot{s}_i$ . Через  $\text{Aut}(b)$  будет обозначаться группа автоморфизмов графа, отвечающего моному  $b$ , и через  $|\text{Aut}(b)|$  — порядок группы.

Изменение упорядочения групп вершин графа порождает инволюцию  $b \mapsto b^*$  на множестве всех мономов. В частности,  $\acute{b}_i^* = \grave{b}_i$ ,  $\grave{b}_i^* = \acute{b}_i$ ,  $\bar{b}_i^* = \bar{b}_i$ ,  $\dot{b}_i^* = \dot{b}_i$ .

Значение  $x \in \partial D$  считается *некритическим*, если ограничение отображения  $\varphi$  на любую компоненту связности прообраза малого отрезка границы, содержащего  $x$ , является гомеоморфизмом. Остальные граничные значения называются *граничными критическими значениями*. Другими словами, граничные критические значения — это все граничные значения топологического типа, отличного от  $\bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dot{b}_1^{\dot{s}_1}$ . У любого накрытия существует лишь конечное число граничных критических значений. Граничные критические значения типов  $\acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dot{b}_1^{\dot{s}_1}$  и  $\grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dot{b}_1^{\dot{s}_1}$  называются *простыми граничными критическими значениями*. Мы будем называть критические значения типов  $\acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dot{b}_1^{\dot{s}_1}$  и  $\grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dot{b}_1^{\dot{s}_1}$  *эго-значениями* и *грав-значениями* соответственно.

Накрытия  $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow D$  и  $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow D$  назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $\phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , такой, что  $\varphi_1 = \varphi_2 \phi$ . Группы автоморфизмов  $\text{Aut}(\varphi_i)$  эквивалентных накрытий  $\varphi_i$  изоморфны. Их порядок обозначим через  $|\text{Aut}(\varphi_i)|$ .

**Пример 2.1.** Накрытие  $\varphi : \Omega \rightarrow D$  диска  $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\} \cup \infty$  не имеет критических значений, если и только если его ограничение на каждую компоненту связности либо является гомеоморфизмом, либо эквивалентно двулистному накрытию  $h : \mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\} \cup \infty$ , где  $h(z) = \text{Re } z + i|\text{Im } z|$ . Его группа автоморфизмов  $\text{Aut}(\varphi)$  изоморфна  $S_n \times S_m \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ , где  $n$  (соответственно  $m$ ) — число компонент связности поверхности  $\Omega$ , на которых  $\varphi$  является гомеоморфизмом (соответственно двулистным накрытием).

Зафиксируем на диске  $D$  конечное число внутренних точек  $x_1, \dots, x_v \in D^\circ$  и конечное число граничных точек  $y_1, \dots, y_w \in \partial D$ , нумерация которых согласована с ориентацией границы диска. Зафиксируем мономы  $a^1, \dots, a^v$  от переменных  $a_i$  и мономы  $b^1, \dots, b^w$  от переменных  $\acute{b}_i, \grave{b}_i, \bar{b}_i, \dot{b}_i$ .

*Числом Гурвица* называется величина  $\langle a^1, \dots, a^v, (b^1, \dots, b^w) \rangle = \sum |\text{Aut}(\varphi)|^{-1}$ , где сумма берется по всем классам эквивалентности накрытий, имеющих значения  $x_1, \dots, x_v, y_1, \dots, y_w$  типов  $a^1, \dots, a^v, b^1, \dots, b^w$  и не имеющих других критических значений.

**Пример 2.2.**  $\langle (\bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dot{b}_1^{\dot{s}_1}) \rangle = (\bar{s}_1!)^{-1} (2^{\dot{s}_1} \dot{s}_1!)^{-1}$ .

Нетрудно видеть, что число Гурвица не зависит от положения критических точек. Оно не меняется при любой перестановке мономов  $a^i$  и циклической перестановке мономов  $b^i$ . Описанное выше соответствие между накрытиями и вещественными мероморфными функциями позволяет интерпретировать эти числа Гурвица как аналог классических чисел Гурвица для вещественных алгебраических кривых [1].

Свяжем с множеством всех двудольных графов  $\{\beta_p\}$  матрицу с элементами  $F^{pq}$ , обратную к матрице с элементами  $\langle(\beta_p, \beta_q)\rangle$ .

**Лемма 2.1.** *Число Гурвица вида  $\langle(c, b)\rangle$  не равно 0 лишь в случае, когда  $c = b^*$ . При этом  $\langle(b^*, b)\rangle = |\text{Aut}(b)|^{-1}$ .*

*Число Гурвица вида  $\langle(c, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, b)\rangle$  не равно 0 лишь в следующих случаях:*

- $\langle(\acute{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \acute{b}_i d)\rangle = \frac{1}{2} |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle(\bar{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \bar{b}_i \bar{b}_j d)\rangle = |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle(\bar{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \bar{b}_i \bar{b}_j d)\rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}) |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle(\bar{b}_{i+j-1} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \bar{b}_i \bar{b}_j d)\rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}) |\text{Aut}(d)|^{-1}$ .

*Число Гурвица вида  $\langle(c, \grave{b}_1 \bar{b}_1^m \grave{b}_1^m, b)\rangle$  не равно 0 лишь в следующих случаях:*

- $\langle(\grave{b}_i d, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \grave{b}_i d^*)\rangle = \frac{1}{2} |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle(\bar{b}_i \bar{b}_j d, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \bar{b}_{i+j} d^*)\rangle = |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle(\bar{b}_i \bar{b}_j d, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \bar{b}_{i+j} d^*)\rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}) |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle(\bar{b}_i \bar{b}_j d, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \bar{b}_{i+j-1} d^*)\rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}) |\text{Aut}(d)|^{-1}$ .

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Пусть  $\langle(c, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, b)\rangle \neq 0$ . По определению это означает, что существует накрытие  $\varphi: \Omega \rightarrow D$  с граничными критическими значениями  $y_1, y_2, y_3 \in \partial D$  типов  $c, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, b$  (соответственно) и без других критических значений. Рассмотрим точки  $z_1 \in (y_1, y_2)$  и  $z_2 \in (y_2, y_3)$ . Прообраз точки  $z_1$  состоит из  $\acute{m}$  точек, в окрестности которых накрытие  $\varphi$  взаимно однозначно (простые точки), и  $\acute{m} + 1$  точек, в окрестности которых накрытие  $\varphi$  двулистно (двойные точки). Прообраз точки  $z_2$  состоит из  $\acute{m} + 2$  простых точек и  $\acute{m}$  двойных точек.

Пусть  $p_1, p_2 \in \varphi^{-1}(z_2)$  — простые точки, отвечающие графу  $\acute{b}_1$ . Им соответствуют простые точки  $q_1, q_2$  графа  $b$ . Тогда имеет место один из следующих случаев:

- $q_1$  и  $q_2$  принадлежат одной из компонент связности типа  $\acute{b}_i$ ;
- $q_1$  и  $q_2$  принадлежат компонентам связности типов  $\bar{b}_i$  и  $\acute{b}_j$ ;
- $q_1$  и  $q_2$  принадлежат различным компонентам связности типов  $\bar{b}_i$  и  $\bar{b}_j$ ;
- $q_1$  и  $q_2$  принадлежат различным компонентам связности типов  $\acute{b}_i$  и  $\acute{b}_j$ .

В первом случае  $b = \acute{b}_i d$ . Рассмотрим ограничение  $\varphi': \Omega' \rightarrow D$  накрытия  $\varphi$  на связную компоненту, содержащую точки  $q_1, q_2$ , и ограничение  $\varphi'': \Omega'' \rightarrow D$  накрытия  $\varphi$  на дополнение  $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$ . Накрытие  $\varphi''$  имеет критические значения  $y_1, y_3 \in \partial D$  типов  $d^*, d$ . Следовательно, накрытие  $\varphi'$  имеет критические значения  $y_1, y_2, y_3 \in \partial D$  типов  $\acute{b}_i, \acute{b}_1 e, \acute{b}_i$ . Таким образом, накрытие  $\varphi$  имеет критические значения  $y_1, y_2, y_3 \in \partial D$  типов  $\acute{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^m \acute{b}_1^m, \acute{b}_i d$ .

Класс эквивалентности накрытия  $\varphi'$  (соответственно  $\varphi''$ ) содержит все накрытия, типы критических значений которых совпадают с типами критических значений накрытия  $\varphi'$  (соответственно  $\varphi''$ ). Кроме того,  $\text{Aut}(\varphi) = \text{Aut}(\varphi') \times$

$\text{Aut}(\varphi'')$ . Таким образом,

$$\langle (\dot{b}_i d^*, \dot{b}_1 \bar{b}_1^m \dot{b}_1^m, \dot{b}_i d) \rangle = \frac{1}{|\text{Aut}(\varphi)|} = \frac{1}{|\text{Aut}(\varphi')|} \frac{1}{|\text{Aut}(\varphi'')|} = \frac{1}{|\text{Aut}(\varphi')|} \frac{1}{|\text{Aut}(d)|}.$$

Группа  $\text{Aut}(\varphi')$  порождается инволюцией, переставляющей точки  $p_1$  и  $p_2$ . Таким образом,  $\langle (\dot{b}_i d^*, \dot{b}_1 \bar{b}_1^m \dot{b}_1^m, \dot{b}_i d) \rangle = \frac{1}{2} |\text{Aut}(d)|^{-1}$ .

Остальные случаи разбираются аналогично. Главное отличие состоит в свойствах группы  $\text{Aut}(\varphi')$ . Она нетривиальна лишь при  $i = j$  в последних двух случаях.

Меняя ориентацию границы диска, находим, что  $\langle (a, b, c) \rangle = \langle (c^*, b^*, a^*) \rangle$ . Поэтому третье утверждение леммы следует из второго.  $\square$

В случаях, когда различия между графами вида  $\dot{b}_i$  и  $\dot{b}_i$  не существенны, мы будем обозначать эти графы также символом  $\dot{b}_i$ . Число ребер  $|b|$  в связанном графе  $b$  назовем длиной графа. В частности,  $|\bar{b}_i| = 2i - 1$ ,  $|\hat{b}_i| = |\dot{b}_i| = |\bar{b}_i| = 2i$ . Для произвольного графа  $b$  обозначим через  $|b|$  минимум длин его компонент связности.

**Лемма 2.2.** *Число Гурвица вида  $\langle a_1^m a_2, (c, b) \rangle$  не равно 0 лишь в следующих случаях:*

- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \dot{b}_j d^*, \dot{b}_{i+j} d) \rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}) |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \bar{b}_j d^*, \bar{b}_{i+j} d) \rangle = |\bar{b}_j| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \dot{b}_j d^*, \dot{b}_{i+j} d) \rangle = |\dot{b}_j| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \dot{b}_j d^*, \dot{b}_{i+j} d) \rangle = |\dot{b}_j| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle a_1^m a_2, (\bar{b}_i \dot{b}_j d^*, \bar{b}_k \dot{b}_l d) \rangle = \delta_{(i+j)(k+l)} |\bar{b}_i \dot{b}_j \bar{b}_k \dot{b}_l| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \dot{b}_j d^*, \bar{b}_k \bar{b}_l d) \rangle = \delta_{(i+j+1)(k+l)} |\dot{b}_i \dot{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \dot{b}_j d^*, \dot{b}_k \dot{b}_l d) \rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl}) \delta_{(i+j)(k+l)} |\dot{b}_i \dot{b}_j \dot{b}_k \dot{b}_l| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ ;
- $\langle a_1^m a_2, (\bar{b}_i \bar{b}_j d^*, \bar{b}_k \bar{b}_l d) \rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl}) \delta_{(i+j)(k+l)} |\bar{b}_i \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\langle a_1^m a_2, (c, b) \rangle \neq 0$ . По определению это означает, что существует накрытие  $\varphi: \Omega \rightarrow D$  с критическими значениями  $x, y_1, y_2$  типов  $a_1^m a_2, c, b$  (соответственно) и без других критических значений. Рассмотрим окружающий точку  $y_i$  простой интервал  $l_i \subset D$  с концами на  $\partial D$ , ограничивающий малую окрестность точки  $y_i$ . Рассмотрим графы  $c = \varphi^{-1}(l_1)$ ,  $b = \varphi^{-1}(l_2)$ , описывающие топологические типы точек  $y_i$ . Рассмотрим отрезок  $l \subset D$ , соединяющий интервалы  $l_1$  и  $l_2$  и проходящий через точку  $x$ .

Прообраз  $\varphi^{-1}(l)$  состоит из  $\deg \varphi$  отрезков, ровно два из которых пересекаются. Пересечение состоит из критической точки отображения  $\varphi$ . Отрезки соединяют ребра графов  $b$  и  $c$ . Таким образом, граф  $c^*$  получается из графа  $b$  в результате следующей перестройки. Надо разрезать два ребра графа  $b$  и склеить по-другому получившиеся полуредра.

Для того чтобы перестройка двудольных графов такого типа реализовывалась некоторым накрытием  $\varphi: \Omega \rightarrow D$ , необходимо и достаточно, чтобы ориентации ребер, индуцированные упорядочением групп вершин графов, порождались одной из ориентаций границы  $\partial \Omega$ . Все пары графов  $(b, c)$ , удовлетворяющие этим условиям, приводятся в формулировке леммы 2.2.

Число накрытий, отвечающих паре графов  $(b, c)$ , совпадает с числом пар ребер графа  $b$ , которые после разрезов и переклейки дают граф  $c^*$ . Эти числа

зависят, в свою очередь, от числа ребер в переклеиваемых связных компонентах графов  $b$  и  $c$ .

При  $b = \bar{b}_{i+j}d$  и  $c = \hat{b}_i\bar{b}_jd^*$  соответствующее число накрытий совпадает с числом участков, состоящих из  $i$  последовательных ребер графа  $\bar{b}_{i+j}$ . Таких участков ровно  $|\bar{b}_j|$ . Таким образом,  $\langle a_1^m a_2, (\hat{b}_i\bar{b}_jd^*, \bar{b}_{i+j}d) \rangle = |\bar{b}_j| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ .

При  $b = \bar{b}_k\hat{b}_ld$  и  $c = \bar{b}_i\hat{b}_jd^*$  число накрытий совпадает с числом пар ребер, одно из которых принадлежит  $\bar{b}_k$ , а другое  $\hat{b}_l$ , таких, что после переклейки по этим ребрам возникает граф  $\bar{b}_i\hat{b}_j$ . Таким образом,  $\langle a_1^m a_2, (\bar{b}_i\hat{b}_jd^*, \bar{b}_k\hat{b}_ld) \rangle = \delta_{(i+j)(k+l)} |\bar{b}_i\hat{b}_j\bar{b}_k\hat{b}_l| |\text{Aut}(d)|^{-1}$ .

Аналогично вычисляются и остальные числа Гурвица.  $\square$

### §3. Дискковые одинарные числа Гурвица

Будем говорить, что граничное критическое значение  $p'$  накрытия  $\varphi$  предшествует граничному критическому значению  $p''$  того же накрытия, если ориентация границы диска задает ориентацию интервала  $(p', p'')$  от  $p'$  к  $p''$  и интервал  $(p', p'')$  не содержит критических значений.

Рассмотрим множество  $\mathcal{H}(m, \hat{m}, b)$  классов эквивалентности накрытий с  $m$  внутренними простыми критическими значениями, с  $\hat{m}$  граничными простыми критическими значениями и единственным не обязательно простым критическим значением типа  $b$  (называемым *специальным*). Множество  $\mathcal{H}(m, \hat{m}, b)$  распадается на подмножества  $\mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ , состоящие из накрытий с  $\acute{m}$  эгю-значениями и  $\grave{m}$  грав-значениями. Множество  $\mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$  распадается на два подмножества,  $\mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$  и  $\mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ . Первое (соответственно второе) из них состоит из накрытий, где специальному критическому значению предшествует эгю-значение (соответственно грав-значение).

Обозначим через  $\mathbf{H}(m, \hat{m}, b)$  (соответственно  $\mathbf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ,  $\mathbf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ,  $\mathbf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ) сумму чисел Гурвица накрытий из множества  $\mathcal{H}(m, \hat{m}, b)$  (соответственно  $\mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ,  $\mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ,  $\mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ). Продолжим определения чисел  $\mathbf{H}(m, \hat{m}, b)$ ,  $\mathbf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ,  $\mathbf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$  и  $\mathbf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$  на отношения мономов  $b = b^1/b^2$ , считая, что эти числа равны 0, если  $b$  не является мономом. Все эти числа назовем *дискковыми одинарными числами Гурвица*.

**Пример 3.1.** Нетрудно доказать, что накрытие не может иметь ровно одно критическое значение [1]. Сопоставляя с предыдущими примерами, находим, что если  $\mathbf{H}(0, 0, b) > 0$ , то  $b = \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \hat{b}_1^{\hat{s}_1}$  и  $\mathbf{H}(0, 0, \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \hat{b}_1^{\hat{s}_1}) = (\bar{s}_1!)^{-1} (2^{\hat{s}_1} \hat{s}_1!)^{-1}$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $b = \hat{b}_1^{\hat{s}_1} \dots \hat{b}_n^{\hat{s}_n} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dots \bar{b}_n^{\bar{s}_n} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dots \bar{b}_n^{\bar{s}_n} \hat{b}_1^{\hat{s}_1} \dots \hat{b}_n^{\hat{s}_n}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(m, \acute{m} + 1, \grave{m}, b) &= \sum_i i(\hat{s}_i + 1) \mathbf{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_i}{\bar{b}_i}\right) \\ &+ \sum_{ij} \left( (\bar{s}_{i+j} + 1) \mathbf{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j}\right) + (\hat{s}_{i+j} + 1) \mathbf{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_{i+j}}{\hat{b}_i \hat{b}_j}\right) \right. \\ &\quad \left. + (\hat{s}_{i+j-1} + 1) \mathbf{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_{i+j-1}}{\bar{b}_i \bar{b}_j}\right) \right). \end{aligned}$$



**Доказательство.** Рассмотрим накрытие  $\varphi: \Omega \rightarrow D$  из множества  $\mathcal{H}(m, \acute{m} + 1, \grave{m}, b)$ . Обозначим через  $y$  и  $y'$  соответственно специальное критическое значение накрытия и предшествующее ему граничное критическое значение. Рассмотрим и стянем в точку  $y_l$  отрезок  $l \in D$  с концами на  $\partial D$ , отделяющий точки  $y, y'$  от остальных критических значений накрытия. В результате этого диск распадается на два диска,  $D'$  и  $D''$ , а накрытие  $\varphi$  — на два накрытия,  $\varphi': \Omega' \rightarrow D'$  и  $\varphi'': \Omega'' \rightarrow D''$ . Критические значения накрытия  $\varphi'$  — это  $y_l, y', y$ . Отождествляя диски  $D$  и  $D''$ , мы видим, что  $\varphi'' \in \mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c)$  для некоторого монома  $c$ . Согласно [1], отсюда следует, что  $\acute{H}(m, \acute{m} + 1, \grave{m}, b) = \sum_{pq} H(m, \acute{m}, \grave{m}, \beta_p) F^{pq} \langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, b) \rangle$ , где  $\{\beta_p\}$  — множество всех двудольных графов,  $\{F^{pq}\}$  — матрица, обратная к  $\langle (\beta_p, \beta_q) \rangle$ , и сумма берется по всем парам двудольных графов. Согласно лемме 2.1,  $F^{pq} = \delta_{\beta_p, \beta_q^*} = |\text{Aut}(\beta_p)|$ . Кроме того, согласно лемме 2.1, сумма в правой части равенства распадается на четыре подсуммы. Каждая из эти подсумм определяется видом мономов  $b$  и  $\beta_q = \beta_p^*$ .

Пусть  $b = \grave{b}_i d$  и  $\beta_q = \acute{b}_i d^*$ . Тогда

$$|\text{Aut}(\beta_p)| = |\text{Aut}(\acute{b}_i d)| = \frac{|\text{Aut}(d)|}{(2i)^{\acute{s}_i} \acute{s}_i!} (2i)^{\acute{s}_i+1} (\acute{s}_i + 1)! = 2i |\text{Aut}(d)| (\acute{s}_i + 1).$$

Кроме того,  $\langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, b) \rangle = \langle (\acute{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, \acute{b}_i d) \rangle = \frac{1}{2} |\text{Aut}(d)|^{-1}$  согласно лемме 2.1. Таким образом, рассматриваемая подсумма равна  $\sum_i i (\acute{s}_i + 1) \text{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i}{\acute{b}_i})$ .

Пусть  $b = \bar{b}_i \grave{b}_j d$  и  $\beta_q = \bar{b}_{i+j} d^*$ . Тогда

$$|\text{Aut}(\beta_p)| = |\text{Aut}(\bar{b}_{i+j} d)| = \frac{|\text{Aut}(d)|}{\bar{s}_{i+j}!} (\bar{s}_{i+j} + 1)! = |\text{Aut}(d)| (\bar{s}_{i+j} + 1).$$

Кроме того,  $\langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, b) \rangle = \langle (\bar{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, \bar{b}_i \grave{b}_j d) \rangle = |\text{Aut}(d)|^{-1}$ . Таким образом, рассматриваемая подсумма равна  $\sum_{ij} (\bar{s}_{i+j} + 1) \text{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j})$ .

Пусть  $b = \grave{b}_i \grave{b}_j d$  и  $\beta_q = \acute{b}_{i+j} d^*$ . Тогда

$$|\text{Aut}(\beta_p)| = |\text{Aut}(\acute{b}_{i+j} d)| = \frac{|\text{Aut}(d)|}{2^{\acute{s}_{i+j}} \acute{s}_{i+j}!} 2^{(\acute{s}_{i+j}+1)} (\acute{s}_{i+j} + 1)! = 2 |\text{Aut}(d)| (\acute{s}_{i+j} + 1).$$

Кроме того,  $\langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, b) \rangle = \langle (\acute{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, \grave{b}_i \grave{b}_j d) \rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}) |\text{Aut}(d)|^{-1}$ . Таким образом, рассматриваемая подсумма равна  $\sum_{ij} (\acute{s}_{i+j} + 1) \text{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j})$ .

Пусть  $b = \bar{b}_i \bar{b}_j d$  и  $\beta_q = \grave{b}_{i+j-1} d^*$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\text{Aut}(\beta_p)| &= |\text{Aut}(\grave{b}_{i+j-1} d)| = \frac{|\text{Aut}(d)|}{2^{(\acute{s}_{i+j-1})} \acute{s}_{i+j-1}!} 2^{(\acute{s}_{i+j-1}+1)} (\acute{s}_{i+j-1} + 1)! \\ &= 2 |\text{Aut}(d)| (\acute{s}_{i+j-1} + 1). \end{aligned}$$

Кроме того,  $\langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, b) \rangle = \langle (\grave{b}_{i+j-1} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^n \acute{b}_1^n, \bar{b}_i \bar{b}_j d) \rangle = (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}) |\text{Aut}(d)|^{-1}$ . Таким образом, рассматриваемая подсумма равна

$$\sum_{ij} (\acute{s}_{i+j-1} + 1) \text{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_{i+j-1}}{\bar{b}_i \bar{b}_j}\right).$$

□

**Лемма 3.2.** Пусть  $b = \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \dots \acute{b}_n^{\acute{s}_n} \grave{b}_1^{\grave{s}_1} \dots \grave{b}_n^{\grave{s}_n} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dots \bar{b}_n^{\bar{s}_n} \dot{b}_1^{\dot{s}_1} \dots \dot{b}_n^{\dot{s}_n}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbb{H}(m, \acute{m}, \grave{m} + 1, b) \\ &= \sum_i (\acute{s}_i + 1) \mathbb{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i}{\acute{b}_i}\right) + \sum_{ij} \left(2(\bar{s}_i + 1)(\grave{s}_j + 1) \mathbb{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \grave{b}_j}{\bar{b}_{i+j}}\right)\right. \\ & \quad + 2((\acute{s}_i + 1)(\grave{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\acute{s}_i + 1)) \mathbb{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i \grave{b}_j}{\acute{b}_{i+j}}\right) \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}((\bar{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\bar{s}_i + 1)) \mathbb{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\bar{b}_{i+j-1}}\right)\right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущей, с использованием второй части леммы 2.1.

Если  $(\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \acute{b}_1^{\acute{n}}, b) = (\acute{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \acute{b}_1^{\acute{m}}, \acute{b}_i d)$ , то

$$|\text{Aut}(\beta_p)| = |\text{Aut}(\acute{b}_i d)| = 2|\text{Aut}(d)|(\acute{s}_i + 1)$$

и

$$\langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \acute{b}_1^{\acute{n}}, b) \rangle = \langle (\acute{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \acute{b}_1^{\acute{m}}, \acute{b}_i d) \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{|\text{Aut}(d)|}.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна  $\sum_i (\acute{s}_i + 1) \mathbb{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i}{\acute{b}_i})$ .

Если  $(\beta_q, \grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \grave{b}_1^{\grave{n}}, b) = (\bar{b}_i \acute{b}_j d^*, \grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \grave{b}_1^{\grave{m}}, \bar{b}_{i+j} d)$ , то

$$|\text{Aut}(\beta_p)| = |\text{Aut}(\bar{b}_i \acute{b}_j d)| = 2|\text{Aut}(d)|(\bar{s}_i + 1)(\grave{s}_j + 1)$$

и

$$\langle (\beta_q, \grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \grave{b}_1^{\grave{n}}, b) \rangle = \langle (\bar{b}_i \acute{b}_j d^*, \grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \grave{b}_1^{\grave{m}}, \bar{b}_{i+j} d) \rangle = |\text{Aut}(d)|^{-1}.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна

$$2 \sum_{ij} (\bar{s}_i + 1)(\grave{s}_j + 1) \mathbb{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \acute{b}_j}{\bar{b}_{i+j}}\right).$$

Если  $(\beta_q, \dot{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b) = (\acute{b}_i \acute{b}_j d^*, \dot{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \dot{b}_1^{\dot{m}}, \dot{b}_{i+j} d)$ , то

$$|\text{Aut}(\beta_p)| = |\text{Aut}(\acute{b}_i \acute{b}_j d)| = 4|\text{Aut}(d)|((\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\acute{s}_i + 1))$$

и

$$\langle (\beta_q, \dot{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b) \rangle = \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{ij}\right) \frac{1}{|\text{Aut}(d)|}.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна

$$2 \sum_{ij} ((\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\acute{s}_i + 1)) \mathbb{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i \acute{b}_j}{\acute{b}_{i+j}}\right).$$

Если  $(\beta_q, \bar{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \bar{b}_1^{\bar{n}}, b) = (\bar{b}_i \bar{b}_j d^*, \bar{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \bar{b}_1^{\bar{m}}, \bar{b}_{i+j-1} d)$ , то

$$|\text{Aut}(\beta_p)| = |\text{Aut}(\bar{b}_i \bar{b}_j d)| = |\text{Aut}(d)|((\bar{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\bar{s}_i + 1))$$

и

$$\langle (\beta_q, \bar{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \bar{b}_1^{\bar{n}}, b) \rangle = \langle (\bar{b}_i \bar{b}_j d, \bar{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \bar{b}_1^{\bar{m}}, \bar{b}_{i+j-1} d^*) \rangle = \left(1 - \frac{\delta_{ij}}{2}\right) \frac{1}{|\text{Aut}(d)|}.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} ((\bar{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\bar{s}_i + 1)) \mathbb{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\bar{b}_{i+j-1}} \right). \quad \square$$

Аналогичный результат для внутренних простых критических значений имеет следующий вид:

**Лемма 3.3.** Пусть  $b = \acute{b}_1^{s_1} \dots \acute{b}_n^{s_n} \grave{b}_1^{s_1} \dots \grave{b}_n^{s_n} \bar{b}_1^{s_1} \dots \bar{b}_n^{s_n} \hat{b}_1^{s_1} \dots \hat{b}_n^{s_n}$ . Тогда при  $\tilde{\mathbb{H}} = \acute{\mathbb{H}}$  и при  $\tilde{\mathbb{H}} = \grave{\mathbb{H}}$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{H}}(m + 1, \acute{m}, \grave{m}, b) \\ &= \sum_{ij} (i + j)(\acute{s}_{i+j} + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_{i+j}}{\acute{b}_i \acute{b}_j} \right) + 2ij((\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) \\ &+ \delta_{ij}(\acute{s}_i + 1)) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i \acute{b}_j}{\acute{b}_{i+j}} \right) + |\bar{b}_j|(\bar{s}_{i+j} + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j} \right) \\ &+ 2i|\bar{b}_j|(\acute{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\bar{b}_{i+j}} \right) + 2|\hat{b}_j|(\acute{s}_{i+j} + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\hat{b}_{i+j}}{\hat{b}_i \hat{b}_j} \right) \\ &+ 4i|\hat{b}_j|(\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\hat{b}_i \hat{b}_j}{\hat{b}_{i+j}} \right) + 2|\hat{b}_j|(\acute{s}_{i+j} + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_{i+j}}{\hat{b}_i \hat{b}_j} \right) \\ &+ 4i|\hat{b}_j|(\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_i \hat{b}_j}{\hat{b}_{i+j}} \right) \\ &+ \sum_{i+j=k+l} \left( 2|\bar{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \hat{b}_l|(\bar{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \hat{b}_j}{\bar{b}_k \hat{b}_l} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2|\bar{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \hat{b}_l|(\bar{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \hat{b}_j}{\bar{b}_k \hat{b}_l} \right) \right) \\ &+ \sum_{i+j+1=k+l} 2(1 + \delta_{kl})|\hat{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l|(\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_i \hat{b}_j}{\bar{b}_k \bar{b}_l} \right) \\ &+ \sum_{i+j=k+l+1} \frac{1 + \delta_{ij}}{2} |\bar{b}_i \bar{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l|((\bar{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\bar{s}_i + 1)) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\bar{b}_k \hat{b}_l} \right) \\ &+ \sum_{i+j=k+l} (1 + \delta_{ij})(1 + \delta_{kl}) \left( \frac{1}{4} |\bar{b}_i \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l|((\bar{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{ij}(\bar{s}_i + 1)) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\bar{b}_k \bar{b}_l} \right) \right. \\ &+ |\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l|((\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\acute{s}_i + 1)) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_i \hat{b}_j}{\hat{b}_k \hat{b}_l} \right) \\ &\left. + |\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l|((\acute{s}_i + 1)(\acute{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\acute{s}_i + 1)) \tilde{\mathbb{H}} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\hat{b}_i \hat{b}_j}{\hat{b}_k \hat{b}_l} \right) \right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Рассмотрим накрытие  $\varphi: \Omega \rightarrow D$  из множества  $\mathcal{H}(m+1, \acute{m}, \grave{m}, b)$ . Обозначим через  $y$  специальное критическое значение накрытия  $\varphi$  и через  $x$  внутреннее критическое значение накрытия  $\varphi$ . Рассмотрим и стянем в точку  $y_l$  отрезок  $l \in D$  с концами на диске, отделяющий точки  $y, x$  от остальных критических значений накрытия. В результате этого диск распадается на два диска,  $D'$  и  $D''$ , а накрытие  $\varphi$  — на два накрытия,  $\varphi': \Omega' \rightarrow D'$  и  $\varphi'': \Omega'' \rightarrow D''$ . Критические значения накрытия  $\varphi'$  — это  $y_l, y$  и  $x$ . отождествляя диски  $D$  и  $D''$ , мы видим, что  $\varphi'' \in \mathcal{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c)$  для некоторого монома  $c$ . Согласно [1], отсюда следует, что  $\acute{H}(m+1, \acute{m}, \grave{m}, b) = \sum_{pq} \acute{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, \beta_p) F^{pq} \langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\acute{n}} \acute{b}_1^{\acute{n}}, b) \rangle$ . Согласно лемме 2.2, сумма в правой части равенства распадается на 15 подсумм (каждому случаю в этой лемме, кроме последнего, отвечают две подсуммы). Каждая из подсумм вычисляется по схеме, использованной при доказательстве лемм 3.1, 3.2.  $\square$

Леммы 3.1, 3.2, 3.3 позволяют найти все числа  $\acute{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ ,  $\grave{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$ , начиная с чисел  $\acute{H}(0, 0, b)$ .

#### §4. Дифференциальные уравнения на производящие функции

Рассмотрим алгебру формальных степенных рядов, порожденную коммутующими переменными  $\acute{p}_i, \grave{p}_i, \bar{p}_i, \dot{p}_i$ . Сопоставим моному  $b = \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \dots \acute{b}_n^{\acute{s}_n} \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \dots \dot{b}_n^{\dot{s}_n} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dots \bar{b}_n^{\bar{s}_n} \dot{b}_1^{\dot{s}_1} \dots \dot{b}_n^{\dot{s}_n}$  мономом  $p_b = \acute{p}_1^{\acute{s}_1} \dots \acute{p}_n^{\acute{s}_n} \acute{p}_1^{\acute{s}_1} \dots \dot{p}_n^{\dot{s}_n} \bar{p}_1^{\bar{s}_1} \dots \bar{p}_n^{\bar{s}_n} \dot{p}_1^{\dot{s}_1} \dots \dot{p}_n^{\dot{s}_n}$ .

Рассмотрим производящие функции

$$\begin{aligned} \acute{H}(\alpha, \beta, \gamma \mid \acute{p}_1, \grave{p}_1, \bar{p}_1, \dot{p}_1, \acute{p}_2, \dots) &= \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\grave{m}}}{m! \acute{m}! \grave{m}!} \sum_b \acute{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b) p_b, \\ \grave{H}(\alpha, \beta, \gamma \mid \acute{p}_1, \grave{p}_1, \bar{p}_1, \dot{p}_1, \acute{p}_2, \dots) &= \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\grave{m}}}{m! \acute{m}! \grave{m}!} \sum_b \grave{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b) p_b, \end{aligned}$$

где вторые суммы берутся по всем мономам  $b$ . В частности,  $\acute{H}(0, 0 \mid \dots) = \acute{H}(0, 0 \mid \dots) = \exp(\bar{p}_1 + \dot{p}_1/2)$ , согласно примеру 3.1.

**Теорема 4.1.** *Имеет место уравнение*

$$\frac{\partial \acute{H}}{\partial \beta} = L_\beta \acute{H},$$

где

$$L_\beta = \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial \dot{p}_i} + \sum_{ij} \left( \bar{p}_i \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{i+j}} + \dot{p}_i \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial \dot{p}_{i+j}} + \bar{p}_i \bar{p}_j \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{i+j-1}} \right).$$

**Доказательство.** Будем считать, что  $b = \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \dots \acute{b}_n^{\acute{s}_n} \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \dots \dot{b}_n^{\dot{s}_n} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \dots \bar{b}_n^{\bar{s}_n} \dot{b}_1^{\dot{s}_1} \dots \dot{b}_n^{\dot{s}_n}$ , где  $\acute{n} = \acute{n}(b)$ ,  $\acute{s}_i = \acute{s}_i(b)$ ,  $\grave{n} = \grave{n}(b)$ ,  $\dot{s}_i = \dot{s}_i(b)$ ,  $\bar{n} = \bar{n}(b)$ ,  $\bar{s}_i = \bar{s}_i(b)$ ,  $\dot{n} = \dot{n}(b)$ ,  $\dot{s}_i = \dot{s}_i(b)$ .

Согласно лемме 3.1,

$$\frac{\partial \acute{H}}{\partial \beta} = \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\grave{m}}}{m! \acute{m}! \grave{m}!} \sum_b \acute{H}(m, \acute{m} + 1, \grave{m}, b) p_b$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\grave{m}}}{m! \acute{m}! \grave{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} i(\acute{s}_i + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i}{\bar{b}_i} \right) p_b \\
 &+ \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\grave{m}}}{m! \acute{m}! \grave{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{s}_{i+j} + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j} \right) p_b \\
 &+ \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\grave{m}}}{m! \acute{m}! \grave{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\acute{s}_{i+j} + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j} \right) p_b \\
 &+ \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\grave{m}}}{m! \acute{m}! \grave{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\acute{s}_{i+j-1} + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_{i+j-1}}{\bar{b}_i \bar{b}_j} \right) p_b.
 \end{aligned}$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменных  $c = b \frac{\acute{b}_i}{\bar{b}_i}$ . Тогда  $p_c = p_b \frac{\acute{p}_i}{\bar{p}_i}$  и  $p_b = p_c \frac{\bar{p}_i}{\acute{p}_i} = \acute{p}_i \frac{\partial p_c}{\partial \acute{p}_i} (\acute{s}_i + 1)^{-1}$ . Таким образом,

$$\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} i(\acute{s}_i + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_i}{\bar{b}_i} \right) p_b = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} i \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \acute{p}_i \frac{\partial p_c}{\partial \acute{p}_i},$$

где сумма берется по всем мономам  $c$ .

Сделаем во втором слагаемом замену переменных  $c = b \frac{\bar{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j}$ . Тогда  $p_c = p_b \frac{\bar{p}_{i+j}}{\bar{p}_i \bar{p}_j}$  и  $p_b = p_c \frac{\bar{p}_i \bar{p}_j}{\bar{p}_{i+j}} = \bar{p}_i \bar{p}_j \frac{\partial p_c}{\partial \bar{p}_{i+j}} (\bar{s}_{i+j} + 1)^{-1}$ . Таким образом,

$$\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{s}_{i+j} + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j} \right) p_b = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \bar{p}_i \bar{p}_j \frac{\partial p_c}{\partial \bar{p}_{i+j}}.$$

Аналогично,

$$\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\acute{s}_{i+j} + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \bar{b}_j} \right) p_b = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \acute{p}_i \acute{p}_j \frac{\partial p_c}{\partial \acute{p}_{i+j}}$$

и

$$\begin{aligned}
 &\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\acute{s}_{i+j-1} + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\acute{b}_{i+j-1}}{\bar{b}_i \bar{b}_j} \right) p_b \\
 &= \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \bar{p}_i \bar{p}_j \frac{\partial p_c}{\partial \acute{p}_{i+j-1}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \beta} = L_{\beta} \mathsf{H}$ . □

**Теорема 4.2.** *Имеет место уравнение*

$$\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \gamma} = L_{\gamma} \mathsf{H},$$

где

$$L_{\gamma} = \sum_{i=1}^{\infty} \acute{p}_i \frac{\partial}{\partial \acute{p}_i} + \sum_{ij} \left( 2\bar{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} + 2\acute{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \acute{p}_i \partial \acute{p}_j} + \frac{1}{2} \acute{p}_{i+j-1} \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} \right).$$

**Доказательство.** Согласно лемме 3.2,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{H}}{\partial \gamma} &= \sum_{\acute{m}, \acute{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\acute{m}}}{m! \acute{m}! \acute{m}!} \sum_b \dot{H}(m, \acute{m}, \acute{m} + 1, b) p_b \\
&= \sum_{m, \acute{m}, \acute{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\acute{m}}}{m! \acute{m}! \acute{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} (\dot{s}_i + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\dot{b}_i}{b_i} \right) p_b \\
&= 2 \sum_{m, \acute{m}, \acute{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\acute{m}}}{m! \acute{m}! \acute{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{s}_i + 1) (\dot{s}_j + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\bar{b}_i \dot{b}_j}{\bar{b}_{i+j}} \right) p_b \\
&\quad + 2 \sum_{m, \acute{m}, \acute{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\acute{m}}}{m! \acute{m}! \acute{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} ((\dot{s}_i + 1) (\dot{s}_j + 1) \\
&\quad \quad \quad + \delta_{ij} (\dot{s}_i + 1)) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\dot{b}_i \dot{b}_j}{b_{i+j}} \right) p_b \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m, \acute{m}, \acute{m} \geq 0} \frac{\alpha^m \beta^{\acute{m}} \gamma^{\acute{m}}}{m! \acute{m}! \acute{m}!} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} ((\bar{s}_i + 1) (\bar{s}_j + 1) \\
&\quad \quad \quad + \delta_{ij} (\bar{s}_i + 1)) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\bar{b}_{i+j-1}} \right) p_b.
\end{aligned}$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменных  $c = b \frac{\dot{b}_i}{b_i}$ . Тогда

$$p_c = p_b \frac{\dot{p}_i}{\dot{p}_i} \quad \text{и} \quad p_b = p_c \frac{\dot{p}_i}{\dot{p}_i} = \dot{p}_i \frac{\partial p_c}{\partial \dot{p}_i} (\dot{s}_i + 1)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} (\dot{s}_i + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\dot{b}_i}{b_i} \right) p_b = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \acute{m}, c) \dot{p}_i \frac{\partial p_c}{\partial \dot{p}_i},$$

где сумма берется по всем мономам  $c$ . Аналогично

$$\begin{aligned}
&\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{s}_i + 1) (\dot{s}_j + 1) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \acute{m}, b \frac{\bar{b}_i \dot{b}_j}{\bar{b}_{i+j}} \right) p_b \\
&= \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \acute{m}, c) \bar{p}_{i+j} \frac{\partial^2 p_c}{\partial \bar{p}_i \partial \dot{p}_j}.
\end{aligned}$$

Сделаем в третьем слагаемом замену переменных  $c = b \frac{\dot{b}_i \dot{b}_j}{\bar{b}_{i+j-1}}$ . Тогда  $p_c = p_b \frac{\dot{p}_i \dot{p}_j}{\dot{p}_{i+j-1}}$  и

$$p_b = p_c \frac{\dot{p}_{i+j-1}}{\dot{p}_i \dot{p}_j} = \dot{p}_{i+j-1} \frac{\partial^2 p_c}{\partial \bar{p}_i \partial \dot{p}_j} ((\dot{s}_i + 1) (\dot{s}_j + 1) + \delta_{ij} (\dot{s}_i + 1))^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ((\dot{s}_i + 1)(\dot{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\dot{s}_i + 1)) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\dot{b}_i \dot{b}_j}{\dot{b}_{i+j-1}} \right) p_b \\ = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \dot{p}_{i+j-1} \frac{\partial^2 p_c}{\partial \dot{p}_i \partial \dot{p}_j}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ((\bar{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\bar{s}_i + 1)) \mathsf{H} \left( m, \acute{m}, \grave{m}, b \frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\bar{b}_{i+j-1}} \right) p_b \\ = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \bar{p}_{i+j-1} \frac{\partial^2 p_c}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{\partial \dot{H}}{\partial \gamma} = L_\gamma H$ . □

**Теорема 4.3.** *Имеет место уравнение*

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial \alpha} = L_\alpha \dot{H}, \quad \frac{\partial \dot{H}}{\partial \alpha} = L_\alpha \dot{H},$$

где

$$\begin{aligned} L_\alpha = \sum_{ij} \left( (i+j) \dot{p}_i \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial \dot{p}_{i+j}} + 2ij \dot{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \dot{p}_j} + |\bar{b}_j| \dot{p}_i \bar{p}_j \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{i+j}} + i |\bar{b}_j| \bar{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \bar{p}_j} \right. \\ \left. + 2|\hat{b}_j| \dot{p}_i \hat{p}_j \frac{\partial}{\partial \hat{p}_{i+j}} + 4i|\hat{b}_j| \dot{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \hat{p}_j} + 2|\hat{b}_j| \dot{p}_i \hat{p}_j \frac{\partial}{\partial \hat{p}_{i+j}} + 4i|\hat{b}_j| \hat{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \hat{p}_j} \right) \\ \left. + \sum_{i+j=k+l} 2 \left( |\bar{b}_i \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l| \bar{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \hat{p}_j} + |\bar{b}_i \bar{b}_j \bar{b}_k \hat{b}_l| \bar{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \hat{p}_j} \right) \right. \\ \left. + \sum_{i+j+1=k+l} 2(1 + \delta_{kl}) |\hat{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l| \bar{p}_k \bar{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \hat{p}_i \partial \bar{p}_j} \right. \\ \left. + \sum_{i+j=k+l+1} \frac{1}{2} (1 + \delta_{ij}) |\bar{b}_i \bar{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l| \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} \right. \\ \left. + \sum_{i+j=k+l} (1 + \delta_{ij})(1 + \delta_{kl}) \left( \frac{1}{4} |\bar{b}_i \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l| \bar{p}_k \bar{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} \right. \right. \\ \left. \left. + |\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l| \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \hat{p}_i \partial \hat{p}_j} + |\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \bar{b}_l| \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \hat{p}_i \partial \bar{p}_j} \right) \right). \end{aligned}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теорем 4.1 и 4.2, но с использованием леммы 3.3.

В заключении приведем следующее наблюдение рецензента. Как и классическое уравнение «cut-and-join», уравнения из теорем 4.1–4.3 являются квазиоднородными, если считать число  $|b|$  весом переменной  $p_b$ . Начальные условия для них указаны в примере 3.1. Таким образом, уравнения из теорем 4.1–4.3

в принципе позволяют найти производящую функцию  $H$  по схеме, использованной в [7] для классических одинарных чисел Гурвица. Для этого надо ограничить операторы на конечномерные подпространства квазиоднородных многочленов данной степени и найти собственные числа и функции ограничений на эти подпространства. Впрочем, как уже отмечалось, используя леммы 3.1–3.3, легко написать компьютерную программу, непосредственно вычисляющую каждое дисковое число Гурвица.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Alexeevski, S. Natanzon, *Noncommutative two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves*, *Selecta Math. (New Ser.)*, **12:3** (2006), 307–377; <http://arxiv.org/abs/math/0202164>.
- [2] N. L. Allin, N. Greenlef, *Foundations of the Theory of Klein Surfaces*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 219, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [3] R. Dijkgraaf, *Mirror symmetry and elliptic curves*, *The moduli spaces of curves*, in: *Progress in Math.*, vol. 129, Birkhäuser, 1995, 149–163.
- [4] A. Dold, *Ramified coverings, orbit projections and symmetric powers*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **99:1** (1986), 65–72.
- [5] D. Goulden, D. M. Jackson, A. Vainshtein, *The number of ramified coverings of the sphere by torus and surfaces of higher genera*, *Ann. Comb.*, **4:1** (2000), 27–46.
- [6] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, *Math. Ann.*, **39:1** (1891), 1–61.
- [7] M. Kazarian, S. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten's conjecture*, <http://arxiv.org/abs/math/0601760>.
- [8] С. М. Натанзон, *Клейновы поверхности*, *УМН*, **45:6** (1990), 47–90.
- [9] S. M. Natanzon, *Topology of 2-dimensional coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves*, *Selecta Math. Soviet.*, **12:3** (1993), 251–291.
- [10] С. М. Натанзон, *Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги*, МЦНМО, М., 2003.
- [11] L. Smith, *Transfer and ramified coverings*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **93:3** (1983), 485–493.
- [12] J. Zhou, *Hodge integrals, Hurwitz numbers and symmetric groups*, <http://arxiv.org/abs/math/0308024>.

НИИ физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского, Поступило в редакцию  
Московский государственный университет, 31 марта 2008 г.  
Московский независимый университет,  
Институт теоретической и экспериментальной физики  
e-mail: natanzon@mccme.ru