

# 基于尖特征度的边折叠简化算法\*

刘晓利<sup>1</sup>, 刘则毅<sup>2+</sup>, 高鹏东<sup>1</sup>, 彭翔<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>(天津大学 精密测试技术及仪器国家重点实验室,天津 300072)

<sup>2</sup>(深圳大学 理学院,广东 深圳 518060)

<sup>3</sup>(深圳大学 光电子学研究所,广东 深圳 518060)

## Edge Collapse Simplification Based on Sharp Degree

LIU Xiao-Li<sup>1</sup>, LIU Ze-Yi<sup>2+</sup>, GAO Peng-Dong<sup>1</sup>, PENG Xiang<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>(National Laboratory of Precision Measurement Technology and Instrumentation, Tianjin 300072, China)

<sup>2</sup>(Science College, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

<sup>3</sup>(Institute of Optoelectronics, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-013798444645, E-mail: zeyiliu@szu.edu.cn

Received 2003-11-19; Accepted 2004-07-27

Liu XL, Liu ZY, Gao PD, Peng X. Edge collapse simplification based on sharp degree. *Journal of Software*, 2005,16(5):669–675. DOI: 10.1360/jos160669

**Abstract:** The existing automatic mesh simplification algorithms at present always ignore some important shape features of the original model, such as the corners and high-curvature regions, in the low-level model, and this will lead to the degeneration in the sense of sight. On the base of Garland's simplification algorithm, a method of changing the order of edge collapses in the simplification is presented by introducing the concept of sharp degree into the error metrics. The results can not only preserve the important features of the model but also distribute meshes reasonably. Finally a better simplified model is obtained which has dense meshes in the high-curvature regions and sparse meshes in the flat regions.

**Key words:** surface simplification; sharp degree; edge collapse; quadric error metrics

**摘要:** 目前存在的自动曲面简化算法在低分辨率的状态下往往忽略模型的重要几何特征,如尖角或者曲率大的区域,从而导致视觉上的退化。在 Garland 简化算法的基础上,引入尖特征度的概念,并将其加入到误差测度中,从而改变了边折叠顺序。简化模型不仅保留了模型的重要几何特征,而且合理分配三角网格,在曲率大的区域稠密,在平坦区域稀疏,简化效果更好。

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60275012 (国家自然科学基金); the Natural Science Foundation of Guangdong Province of China under Grant No.031804 (广东省自然科学基金); the Research Project of Science and Technology from Shenzhen Government of China under Grant No.200341 (深圳市科技计划); the Liuhui Center for Applied Mathematics, Nankai University and Tianjin University (南开大学-天津大学刘徽应用数学中心资金资助项目)

**作者简介:** 刘晓利(1980—),男,河北衡水人,硕士生,主要研究领域为三维造型,计算机图形学;刘则毅(1958—),男,博士,教授,主要研究领域为智能计算方法,计算机图形学;高鹏东(1979—),男,博士,主要研究领域为三维造型,计算机图形学;彭翔(1955—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为现代光学测试理论与技术,三维数字成像及造型理论与技术,光学信息安全理论与技术,生物光学检测理论与技术。

关键词: 曲面简化;尖特征度;边折叠;二次误差测度

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

在计算机图形学和几何造型中,物体表面常用多边形网格,尤其是三角网格模型来描述.但当描述复杂外形的物体时,往往需要成千上万、乃至上百万的三角面才能刻画出物体的细节特征,从而导致庞大物体模型的出现.这给计算机分析、显示与存储带来了很大的不便,因此有必要对此类模型进行简化.

三角网格简化的实质是减少三角面及其顶点的数目,同时尽量保持原来模型的形状.迄今已经有很多网格的简化算法.如:顶点删除的简化算法<sup>[1]</sup>、重新划分网格的简化算法<sup>[2,3]</sup>、区域合并的简化算法<sup>[4]</sup>、小波分解的简化算法<sup>[5]</sup>、顶点聚类的简化算法<sup>[6]</sup>、包络网格的简化算法<sup>[7,8]</sup>、边折叠的简化算法<sup>[9-12]</sup>等等.其中,边折叠已经成为非常重要的一类简化算法,并且,最近两年对网格简化算法的研究也多是基于边折叠展开的.

边折叠算法是 Hoppe 在 1993 年<sup>[9]</sup>首先提出来的,它是一种适用于任意二维流形的三角网格模型的优化方法.由于 Hoppe 是对一个全局能量函数进行优化,并且几何优化是非线性的,因此,计算量很大,运行速度很慢.为此,Garland 在 1997 年<sup>[10]</sup>用局部二次误差测度来衡量边折叠的代价,以新顶点到被折叠边的两个顶点相关联平面的距离平方和作为误差测度,计算简单并且运行速度快;李现民在 2002 年<sup>[11]</sup>基于 Garland 的算法,引进蝶形子分模式来计算新顶点的位置,进一步减小了简化网格和原始模型之间的误差;但是这两种算法所产生的简化网格都是均匀的,在低分辨率的状态下仍然不能有效地表示模型的一些重要几何特征,未能满足更广泛的应用需求.为了解决此类问题,Youngihn Kho 在 2003 年<sup>[12]</sup>提出一种交互的简化算法,方便用户可以在最终的简化网格中有选择地保留模型的重要几何特征;相比较于 Youngihn Kho 的交互设计,本文在 Garland 简化算法的基础上,通过对曲率变化较大区域的点加上一个惩罚项,增大它的误差测度值,从而改变边折叠的次序,使得原始模型的尖锐特征在最终简化结果中得以保留.实验结果亦表明,本文的算法作为一种自动的网格简化算法,不仅继承了 Garland 简化算法计算速度快、简化质量好的优点,而且克服了网格分布过于均匀、不能突出模型重要特征的缺点.

## 1 边折叠操作

对边  $(v_i, v_j)$  进行折叠操作可简记为  $(v_i, v_j) \rightarrow \bar{v}$ , 如图 1 所示.首先,将顶点  $v_i, v_j$  移到新位置  $\bar{v}$ . 然后,用  $v_i$  代替所有与  $v_j$  相关的三角网格表示.最后,将  $v_j$  及其相关的退化三角面删除.

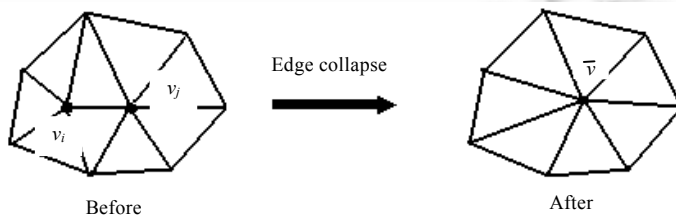


Fig.1 Edge collapse

图 1 边折叠操作

## 2 误差测度的确定

一条边能否被折叠是由其代价的大小来决定的,而代价值则是由边的周边信息通过误差测度得到的,Garland<sup>[10]</sup>用二次误差测度(QEM)来衡量边折叠的代价,具体做法如下:

对于顶点  $v$  与其相对应的三角形平面的集合  $planes(v)$ , Garland 定义顶点  $v$  的二次误差测度为  $v$  到这些三角面的距离平方和:

$$\Delta(v) = \sum_{p \in planes(v)} d_p^2(v) = \sum_{p \in planes(v)} v^T (K_p) v = v^T \left( \sum_{p \in planes(v)} K_p \right) v \quad (1)$$

其中,  $v=[v_x \ v_y \ v_z \ 1]^T$ ;  $p$  表示三维空间中的一个平面  $ax+by+cz+d=0$  ( $a^2+b^2+c^2=1$ ).

$$K_p = pp^T = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix}$$

令  $Q'(v) = \sum_{p \in \text{planes}(v)} K_p$  为顶点  $v$  的二次误差测度矩阵,这是一个  $4 \times 4$  的对称矩阵,用来衡量边折叠的代价.边  $(v_i, v_j)$  折叠到新点  $\bar{v}$  的代价为  $\Delta'(\bar{v}) = \bar{v}^T(Q'_i + Q'_j)\bar{v}$ ,并用  $Q'_i + Q'_j$  来表示新顶点  $\bar{v}$  的二次误差测度矩阵.显然,点  $\bar{v}$  越远离边  $(v_i, v_j)$  所关联的三角面,其代价越大.

QEM 算法取得了很好的简化效果,但是为了能够在简化后的网格中依旧保持重要的细节特征,在此,我们提出顶点的尖特征度(sharp degree)这一概念.

**尖特征边** 给定阈值  $\theta$ ,对于某一边,如果与该边相连的两个面的二面角(定义二面角为两个面的外法线夹角)大于  $\theta$ ,记该边为尖特征边.并规定在有边界的模型中,边界边为尖特征边.

**顶点的尖特征度** 与顶点相邻的所有尖特征边的个数称为顶点的尖特征度.尖特征度是一个整数,最小值为 0,最大值为该顶点的度.

因此网格中顶点的数据结构为:

```
structure Vertex
{ float pos[3];
  int sharp; };
```

其中,  $\text{pos}[3]$  表示顶点的位置坐标;  $\text{sharp}$  表示顶点的尖特征度.在此,我们将尖特征度加入到二次误差测度内,在式(1)的基础上加入一个惩罚项  $c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp}$ :

$$\Delta(v) = \Delta'(v) + c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp} = v^T \left( \sum_{p \in \text{planes}(v)} K_p \right) v + c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp} \quad (2)$$

其中,  $c_{\text{sharp}}$  为一个惩罚系数,它的值根据经验设定(大概取 Garland 误差均值的十分之一).这样,模型中尖特征度不为 0 的顶点误差测度值变大,并且尖特征度越大,误差测度值变得也越大.由于边折叠是按误差测度值由小到大的顺序来进行的,因此尖特征度大的点进行边折叠的次序就越靠后.此外,我们加入该惩罚项的另一个优点是,保持计算新顶点依旧是一个线性问题,这样便可以将我们所作的改进和 QEM 算法统一起来.

另外,考虑到  $\sum_{p \in \text{planes}(v)} K_p$  是一个  $4 \times 4$  的对称矩阵;而  $c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp}$  为一个常数,我们也将它统一为一个  $4 \times 4$  矩阵,

$$\text{则式(2)可化为 } \Delta(v) = v^T \left( \sum_{p \in \text{planes}(v)} K_p + K_{\text{sharp}} \right) v; K_{\text{sharp}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp}} \end{bmatrix}, v = [v_x \ v_y \ v_z \ 1]^T.$$

因此定义  $Q(v) = \sum_{p \in \text{planes}(v)} K_p + K_{\text{sharp}}$  为顶点  $v$  新的误差测度矩阵,它仍然是一个  $4 \times 4$  的对称矩阵,作为衡量边折叠代价的标准.

随着网格简化的进行,  $\Delta'(v)$  也在不断地变大,因此,为了达到尖特征度惩罚的目的,也需要不断增大惩罚系数  $c_{\text{sharp}}$ .但是,如果每次折叠后都改变  $c_{\text{sharp}}$  和  $c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp}$  的值,不但计算过于繁琐,而且要求额外的存储空间.因此,在实现时,将边折叠中两顶点的惩罚项( $c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp}$ )之和作为新顶点的惩罚项,达到了很好的实验效果,并且与 Garland 的计算新顶点误差测度的方法统一了起来.对于边  $(v_i, v_j)$  折叠到新点  $\bar{v}$  的代价为  $\Delta'(\bar{v}) = \bar{v}^T(Q_i + Q_j)\bar{v}$ ,依然用  $Q_i + Q_j$  表示新顶点  $\bar{v}$  的二次误差测度,这样不但省去了计算  $\bar{v}$  的相关平面集  $\text{planes}(\bar{v})$  和  $c_{\text{sharp}} \cdot \text{sharp}$  的值,而且也节省了一定的存储开销.

### 3 新顶点的计算

在边折叠  $(v_i, v_j) \rightarrow \bar{v}$  中,要计算新顶点  $\bar{v}$  的位置.这里,通过解决一个线性优化问题,即令  $\Delta(v)$  的偏导数为 0,  $\partial\Delta/\partial x = \partial\Delta/\partial y = \partial\Delta/\partial z = 0$ ,找到最优的  $\bar{v}$ .由于上一节所加入的惩罚是一个常数项,故其偏导数为 0,因此,  $\bar{v}$

的确定可以统一于 Garland 的方法<sup>[10]</sup>:  $\bar{v} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 其中  $\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix} = Q$ .

### 4 算法总结

图 2 为算法流程示意图.

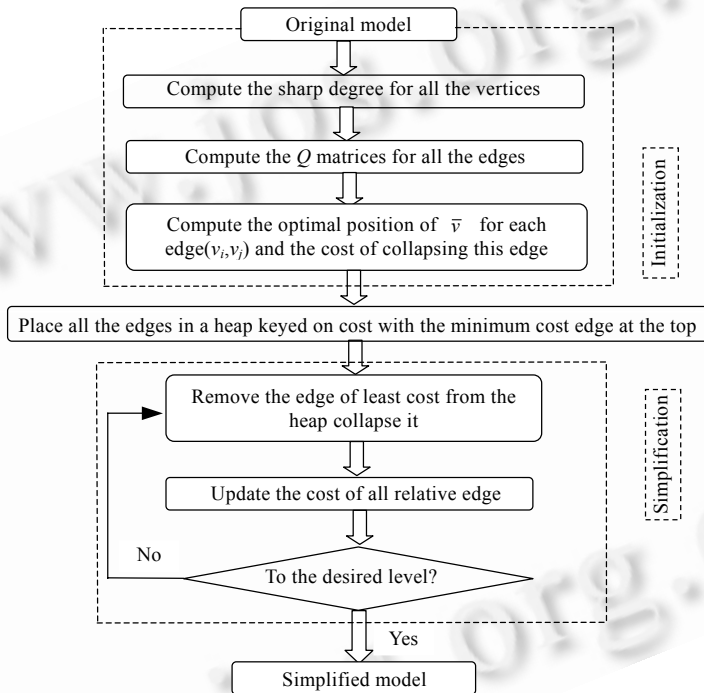


Fig.2 Flow chart of the algorithm

图 2 算法的流程示意

### 5 相关问题

#### 5.1 一致性检验

在进行边折叠操作时,不可避免地会出现网格不一致的情况.比如在边折叠时,可能导致与该边相关联的三角面相互重叠或者三角面方向翻转的现象.解决该问题仿照文献<sup>[13]</sup>中的方法:当考虑一个边折叠时,比较与此边相关联三角面的法向在折叠前后的变化情况,如果变化过大,则不对该边进行折叠.

#### 5.2 边界的处理

很多三维几何模型都具有边界,模型简化时应该保持它们的边界.对一个边界边,前面已经规定其为尖特征边,从而使得其两端点的尖特征度增加 1,加大了惩罚.这里,再定义两个通过此边并相互垂直的平面,将这两个面计入到两个端点的相关矩阵  $Q$  中.由于计算结果与这两个垂直平面的选取无关,因此取边界边所在三角片的平

面为第 1 个平面,过边界边垂直于第 1 个平面的平面为第 2 个平面.这样做就将点到边界边的距离加入到了误差测度之中,从而,保证新顶点的位置不会偏离边界,保持了模型的边界.

## 6 结果与讨论

为了验证算法的效果,我们用 Visual C++6.0 实现了该算法,并将本文算法与 Garland 以及 Hoppe 的算法进行了比较.如图 3 所示.



Fig.3 Comparison of the simplified models

图 3 简化的模型比较

很显然,应用 Garland 算法得到的简化模型网格十分均匀,这样往往使得较为平坦的区域占用过密的网格,从而造成网格浪费.本文的方法在一定程度上能够恢复模型的尖锐特征,能够按模型表面的曲率变化合理地分配网格,使得平坦区域网格稀疏,而曲率变化大的区域网格稠密,如图 3(c)中所展示的牛眼和牛角的部分.这样,本文算法的应用保证了简化后的模型在较低分辨率的情况下依旧能够保持一些比较重要的几何特征,如图 4(c)所示,比图 4(b)更加尖锐的牛角和炯炯有神的双眼,进一步减少了简化后的模型在视觉上的退化,也更加符合网格简化的实质,即在减少顶点和三角面片的时候尽量保持原模型的特征.

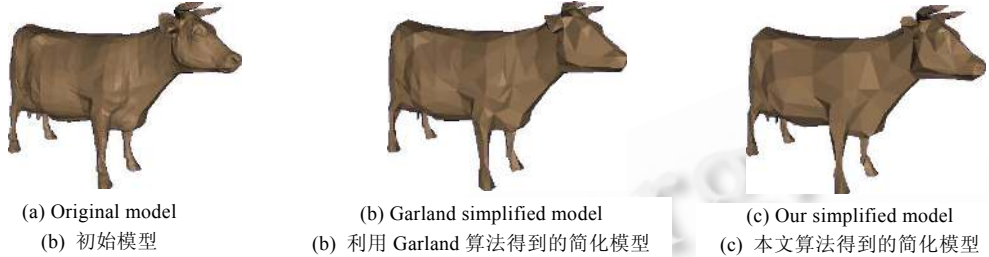


Fig.4 Comparison of the cow's shading models

图 4 牛模型的阴影图比较

图 3(d)~图 3(g)分别是一个石膏头像的初始模型(11 212 个三角面),利用 Garland 算法得到的简化模型(2 130 个三角面)、Hoppe 算法得到的简化模型(2 130 个三角面)和本文算法得到的简化模型(2 130 个三角面).从这 4 幅图的比较中可以清楚地看到,利用本文的算法得到的简化模型在人鼻、眼、嘴等表面梯度变化大的区域网格较为稠密,能够更好地反映初始模型的大部分几何特征,这在图像的识别和电影动画行业将有广泛的应用前景.

表 1 给出了实验中各个模型所用的阈值  $\theta$  和惩罚参数  $c_{sharp}$ .

Table 1 The threshold  $\theta$  and penalty coefficient  $c_{sharp}$  of the models

表 1 模型的阈值  $\theta$  和惩罚参数  $c_{sharp}$

Model	$\theta$ (radian)	$c_{sharp}$
Cow	0.5	2e-4
Head statue	0.4	6e-4
Bunny	0.4	1e-5

Garland 算法得到的简化模型整体误差非常小,但是会导致模型一些重要几何特征的退化.而本文追求的是合理分配网格,突出模型的重要几何特征,但对大部分模型来说,表面梯度变化大的区域往往只占整个模型的很小一部分,模型的大部分区域都比较平坦,因此应用本文的算法,简化模型的整体误差会有所增大,但从视觉效果上来看,这种增大的误差并不妨碍我们对物体的辨别,甚至还优于应用 Garland 算法得到的简化模型.如图 3(h)~图 3(l)所展示的兔子的简化模型,我们采用 Cignoni 在 1998 年提出的方法<sup>[14]</sup>对其进行误差估计,令两个模型的最大误差(max error)为  $E(S_1, S_2) = \max_{p \in S_1} e(p, S_2)$ ; 平均误差(mean error)为  $E_m(S_1, S_2) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_1} e(p, S_2) ds$ . 其中  $e(p, S)$  为点  $p$  到网格模型  $S$  的距离,  $e(p, S) = \min_{p' \in S} d(p, p')$ ,  $d(p, p')$  为空间两点的欧式距离.误差对比的结果见表 2.

Table 2 Comparison of the error of the results

表 2 模型的误差结果对照

Models Algorithm	Bunny (10000 faces)		Bunny (2000 faces)		Head statue (2130 faces)	
	Max error	Mean error	Max error	Mean error	Max error	Mean error
Garland	0.672e-3	0.55e-4	1.751e-3	0.28e-4	0.961e-2	0.70e-3
This paper	0.942e-3	0.71e-4	2.172e-3	0.34e-4	1.10e-2	0.91e-3

Garland 的 QEM 算法的初始化过程及其简化过程的时间复杂度均为  $O(n \log_2 n)$ , 但通常呈现线性的时间复杂度,即使在处理大型网格模型时,仍然表现为很好的线性时间复杂度特性.本文算法较 QEM 算法仅在初始化

过程中加入了计算顶点的尖特征度的步骤,该步骤的时间复杂度是线性的,即  $O(n)$ ;故对整体算法的时间复杂度没有影响,仍为  $O(n \log_2 n)$ 。

## 7 结 论

本文基于 Garland 二次误差测度简化算法,在提出尖特征度概念的基础上,通过为顶点加入尖特征惩罚项  $c_{sharp} \cdot sharp$ ,改变边折叠顺序,克服了 Garland 算法简化模型中网格过于均匀的不足,并且保持了模型的尖锐特征,使得最终的简化网格中三角面的分布随曲率的变化而不同,进一步减少了简化模型在视觉上的退化,同时实验结果也验证了算法的有效性。但是,考虑到模型的多样性,算法仍需要进一步的改进和完善,如自适应地选取阈值  $\theta$  和惩罚系数  $c_{sharp}$  等。

## References:

- [1] Schroeder WJ, Zarge JA, Lorensen WE. Decimation of triangle meshes. Proc. of the Computer Graphics, 1992,26(2):65-70.
- [2] Turk G. Re-Tiling polygonal surface. Proc. of the Computer Graphics, 1992,26(2):55-64.
- [3] Zhou K, Ma XH, Pan ZG, Shi JY. An improved algorithm of triangle mesh based on re-tiling. Journal of Software, 1998,9(6): 405-408 (in Chinese with English abstract).
- [4] Kalvin A, Taylor R. Superfaces: Ploygonal mesh simplification with bounded error. IEEE Computer Graphics and Applications, 1996,16(3):64-77.
- [5] Lounsbery M, DeRose T, Warren J. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. ACM Trans. on Graphics, 1997,16(1):34-73.
- [6] Rossignac J, Borrel P. Multi-Resolution 3D approximation for rendering complex scenes. In: Falcidieno B, Kunii T, eds. Modeling in Computer Graphics: Methods and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 455-465.
- [7] Cohen J, Varshney A, Manocha D, Turk G, Weber H, Agarwal P, Brooks F, Wright W. Simplification envelopes. Proc. of the Computer Graphics, 1996,30:119-128. <http://www.cs.unc.edu/~geom/envelope.html>
- [8] Zhang MM, Zhou K, Pan ZG. Triangle mesh simplification algorithm based on super-envelopes. Journal of Software, 1999,10(6): 584-588 (in Chinese with English abstract).
- [9] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, McDonald J, Stuetzle W. Mesh optimization. Proc. of the Computer Graphics, 1993,27:19-26.
- [10] Garland M, Heckbert PS. Surface simplification using quadric error metrics. Proc. of the Computer Graphics, 1997,31: 209-216.
- [11] Li XM, Li GG, Zhang XL, Li H. Edge collapse simplification based on subdivision. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2002,14(1):8-13 (in Chinese with English abstract).
- [12] Kho Y, Garland M. User-Guided simplification. Computer Graphics. In: Proc. of the ACM Symp. on Interactive 3D Graphics. Monterey: ACM Press, 2003. 123-126. <http://graphics.cs.uiuc.edu/~garland/papers.html>
- [13] Ronfard R, Rossignac J. Full-Range approximation of triangulated polyhedra. Computer Graphics Forum, 1996,15(3):67-76.
- [14] Cignoni P, Rocchini C, Scopigno R. Metro: Measuring error on simplified surfaces. Computer Graphics Forum, 1998,17(2): 167-174.

## 附中文参考文献:

- [3] 周昆,马小虎,潘志庚,石教英.基于重新划分的三角形网格简化的一种改进算法.软件学报,1998,9(6):405-408.
- [8] 张明敏,周昆,潘志庚.基于超包的三角形网格简化算法.软件学报,1999,10(6):584-588.
- [11] 李现民,李桂清,张小玲,李华.基于子分规则的边折叠简化方法.计算机辅助设计与图形学学报,2002,14(1):8-13.