EINE ERWEITERTE ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER LOSUNG EINES SYSTEMS VON HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHE VON ZWEI PARAMETERN ABHÄNGEN.

KEN-ICHI TAKAHASHI

(Received August 24, 1958)

Einleitung. In dieser Abhandlung möchte ich die Abhandlung des Herrn Prof. Hukuhara[1] erweitern.

Andererseits erörterte C. C. Hurd die asymptotische Entwicklung der Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung, welche von einem Parameter abhing.[2] Ferner erörterte er die asymptotische Entwicklung der Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung, welche von zwei Parametern abhing.[3] Dabei betrachtete er nur den Fall dass die charakteristische Gleichung verschiedene Wurzeln hatte. Es genügte ihm keine Voraussetzung zu betrachten, welche der charakteristischen Hilfsgleichung[4] der Differentialgleichung entsprach, die auf einen Parameter abhing.

In meiner früheren Abhandlung[5] betrachtete ich die asymptotische Entwicklung der Lösung eines Systems von homogenen linearen Differentialgleichungen, welche auf zwei Parametern λ und μ abhingen:

$$dy_j/dx = \lambda^2\mu \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(x, \lambda, \mu)y_k, \quad (j = 1, 2),$$

deren charakteristische Gleichung eine zweifache Wurzel hatte. Dabei betrachtete ich es unter der strengen Bedingun für Koeffizienten a_{jk} (x, λ, μ). Ferner erweiterte ich allgemein den Sinn der asymptotischen Entwicklung, und betrachtete die asymptotische Entwicklung der Lösung eines Systems von homogenen linearen Differntialgleichungen

$$dy_j/dx = \lambda^m\mu^{m'} \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(x, \lambda, \mu)y_k, \quad (m \text{ und } m' \text{ sind natürliche Zahlen}; \ j = 1, 2),$$

welche von zwei Parametern abhingen.[6]

---

1) Vgl. [1].
2) Vgl. [2].
3) Vgl. [3].
4) Vgl. [2], §3, (27b).
5) Vgl. [4].
6) Vgl. [5].

In dieser Abhandlung möchte ich die asymptotische Lösung des Systems von homogenen linearen Differentialgleichungen

$$(1)\qquad dy_j/dx = \lambda^m \mu^{m'} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k, \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

welche auf zwei Parametern λ und μ abhängen, erledigen.

Wenn die charakteristische Gleichung von (1) $|\underset{00}{A}(x) - \rho E| = 0$ voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, so reduziert sich die Gleichung (1) wie bei [1]. Ferner kann man die asymptotische Lösung von (1) leicht erledigen, wenn die charakteristische Gleichung der reduzierten Differentialgleichung wieder voneinander verschiedene Wurzeln besitzt. Wenn die charakteristische Gleichung von (1) eine mehrfache Wurzel besitzt, so kann man im allgemeinen solche Reduktion ausführen.

Um also die asymptotische Lösung von (1) in allen Fällen zu erfinden, erweitern wir die bisherige asympotische Entwicklung und wenden wir die Theorie von [1] auf (1) an.

Im §1 erfinden wir die asymptotische Lösung von (1), wo m und m' nicht positive ganze Zahlen sind. Im §2 erklären wir die Erweiterung der bisherigen asymptotischen Entwicklung. Im §3 erfinden wir für

$$K|\lambda|^{\sigma} \quad |\mu| \leqq K|\lambda|^{\sigma'}, \ (\sigma < \sigma')$$

die asymptotische Lösung von (1).

Von jetzt an benutzt man oft die folgenden Zeichen:

I: $\quad \alpha \leqq x \leqq \beta$,

Δ_0: $\quad |\arg \lambda, \mu| < \theta_0, \quad R_0 < |\lambda|, \ |\mu| < \infty, \ (\theta_0, R_0 > 0)$,

Δ: $\quad |\arg \lambda, \mu| < \theta_0, \quad R < |\lambda|, \ |\mu| < \infty.$

Durchaus bezeichen wir stets mit R eine hinreichend grosse positive Zahl.

$$I\Delta_0: \ \alpha \leqq x \leqq \beta, \ |\arg \lambda, \mu| < \theta_0, \quad R_0 < |\lambda|, \ |\mu| < \infty,$$
$$I\Delta: \ \alpha \leqq x \leqq \beta, \ |\arg \lambda, \mu| < \theta_0, \quad R < |\lambda|, \ |\mu| < \infty.$$

Das Zeichen $f(x, \lambda, \mu) \in R$ bedeutet, dass $f(x, \lambda, \mu)$ für $I\Delta_0$ in Bezug auf x genügend oft differentierbar, und dass in Bezug auf λ und μ regulär ist. Das Zeichen $f(x, \lambda, \mu) \in \bar{R}$ bedeutet, dass $f(x, \lambda, \mu) \in R$, und dass für $I\Delta_0$ beschränkt ist. Das Zeichen $f(x, \lambda, \mu) \in C$ bedeutet, dass $f(x, \lambda, \mu)$ für $I\Delta_0$ in Bezug auf x stetig, und dass in Bezug auf λ und μ regulär ist. Wir stellen $F(x, \lambda, \mu)$ mit den Elementen $f_{jk}(x, \lambda, \mu) \in R$, $f_{jk}(x, \lambda, \mu) \in \bar{R}$ und $f_{jk}(x, \lambda, \mu) \in C$ bzw. mit $F(x, \lambda, \mu) \in R$, $F(x, \lambda, \mu) \in \bar{R}$ und $F(x, \lambda, \mu) \in C$ dar.

§1. Asymptotische Lösung.

1. Formale Lösung. Wir denken uns ein System von homogenen linearen Differentialgleichungen

$$(1.\ 1)\qquad dy_j/dx = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x,\ \lambda,\ \mu)\, y_k, \qquad (j = 1 \ldots\ldots, n),$$

welche von zwei Parametern λ und μ abhängen. Mit Benutzung einer Matrize lässt sich (1. 1) folgenderweise umschreiben:

$$(1.\ 2)\qquad dY/dx = A(x,\ \lambda,\ \mu)Y,$$

wobei

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x,\ \lambda,\ \mu) = \begin{pmatrix} a_{11}(x,\ \lambda,\ \mu) \ldots\ldots a_{1n}(x,\ \lambda,\ \mu) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}(x,\ \lambda,\ \mu) \cdots\cdots a_{nn}(x,\ \lambda,\ \mu) \end{pmatrix}$$

ist.

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) Es ist $A(x,\ \lambda,\ \mu) \in C$.

(ii) $A(x,\ \lambda,\ \mu)$ lässt sich folgenderweise formell entwickeln:

$$A(x,\ \lambda,\ \mu) \approx \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{A}(x)\, \lambda^{-r}\mu^{-s}.$$

worin $\underset{rs}{A}(x)$, $(r,\ s = 0,\ 1, \ldots\ldots)$ für I stetig sind.

Wendet man die Transformation

$$Y = \Phi(x)\hat{Y}$$

auf (1. 2) an, wo

$$Y = \Phi(x),\ \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \ldots\ldots \varphi_{1n}(x) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \ldots\ldots \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

ein Paar von fundamentalen Lösungen von

$$dY/dx = \underset{00}{A}(x)Y$$

ist, so geht (1. 2) in

$$d\hat{Y}/dx = \hat{A}(x,\ \lambda,\ \mu)\hat{Y}$$

über, wo es $\hat{A}(x,\ \lambda,\ \mu) = \Phi(x)^{-1}(A(x,\ \lambda,\ \mu)\Phi(x) - \Phi'(x)) \in C$ ist, und $\hat{A}(x,\ \lambda,\ \mu)$ sich folgendermassen formell entwickeln lässt:

$$\hat{A}(x,\ \lambda,\ \mu) \approx \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{\hat{A}}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s},$$

woraus folgt:

$$\hat{A}_{00}(x) = \Phi(x)^{-1}(A_{00}(x)\Phi(x) - \Phi'(x)) = 0,$$
$$\hat{A}_{rs}(x) = \Phi(x)^{-1} A_{rs}(x)\Phi(x) \in C^0, \ (r, \ s = 0, \ldots\ldots; \ r + s \neq 0).$$

Daher dürfen wir vom Anfang an ohne die Erlöschung der Allgemeinheit $A_{00}(x) = 0$ voraussetzen.

Wendet man die formale Transformation

$$\text{(1. 3)} \qquad Y = P(x, \lambda, \mu)Z$$

auf (1. 2) an, worin $P(x, \lambda, \mu)$ sich folgenderweise formell in die Potenzreihe von λ und μ entwickeln lässt:

$$P(x, \lambda, \mu) \approx \sum_{r,s=0}^{\infty} P_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}, \ P_{00}(x) = E,$$

so geht (1. 2) in

$$\text{(1. 4)} \qquad dZ/dx = B(x, \lambda, \mu)Z$$

über, worin $B(x, \lambda, \mu)$ sich folgendermassen formell entwickeln lässt:

$$B(x, \lambda, \mu) = P(x, \lambda, \mu)^{-1}(A(x, \lambda, \mu)P(x, \lambda, \mu) - P'(x, \lambda, \mu))$$
$$\approx \sum_{r,s=1}^{\infty} B_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}.$$

Setzt man

$$P(x, \lambda, \mu)^{-1} \approx \sum_{r,s-1}^{\infty} Q_{sr}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}, \ Q_{00}(x) = E,$$

so gilt die folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten:

$$Q_{rs}(x) = -P_{rs}(x) + \mathrm{Pol}(P_{rs}(x)), \ (r, \ s = 0, \ldots\ldots),$$

wo $\mathrm{Pol}(P_{rs}(x))$ ein Polynom von $P_{jk}(x)$, $(j = 1, \ldots\ldots, r; \ k = 1, \ldots\ldots, s; j + k \neq r + s)$ ist.

Wie eine kurze Berechnung sofort zeigt, gilt die folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten $B_{rs}(x)$, $P_{rs}(x)$ und $A_{rs}(x)$:

$$\text{(1. 5)} \qquad B_{rs}(x) = -P'_{rs}(x) + \mathrm{Pol}(A_{rs}(x), P_{rs}(x), P'_{rs}(x)), \ (r, \ s = 0, \ldots\ldots),$$

worin $\mathrm{Pol}(A_{rs}(x), P_{rs}(x), P'_{rs}(x))$ ein Polynom von $A_{mn}(x)$, $(m = 0, \ldots\ldots, r; n = 0, \ldots\ldots, s)$, $P_{mn}(x)$, $(m = 0, \ldots\ldots, r; \ n = 0, \ldots\ldots, s; \ m + n < r + s)$ und $P'_{mn}(x)$, $(m = 0, \ldots\ldots, r; \ n = 0, \ldots\ldots, s; \ m + n < r + s)$ ist, d. h.

$$\mathrm{Pol}(A_{rs}(x), P_{rs}(x), P'_{rs}(x))$$

$$= \sum_{\substack{m=0,\ldots,r\\ n=0,\ldots,s}} \sum_{\substack{m'=0,\ldots,r-m\\ n'=0,\ldots,s-n}} \underset{mn}{Q(x)} \underset{m'n'}{A(x)} \underset{r-m-m',s-n-n'}{P(x)} - \sum_{\substack{m=0,\ldots,r\\ n=0,\ldots,s\\ (m+n>0)}} \underset{mn}{Q(x)} \underset{rm,s-n}{P'(x)}.$$

Aus (1. 5) folgen $\underset{00}{B(x)} = \underset{00}{A(x)} = 0$ und

$$\underset{01}{B(x)} = \underset{01}{A(x)} - \underset{01}{P'(x)},\ \underset{10}{B(x)} = \underset{10}{A(x)} - \underset{10}{P'(x)}, \tag{1. 6}$$

woraus es $\underset{01}{B(x)} = \underset{10}{B}(x) = 0$ folgt, wenn wir $\underset{01}{P(x)}$ und $\underset{10}{P(x)}$ durch

$$\underset{01}{P(x)} = \int_{x_0}^{x} \underset{01}{A(x)}dx,\ \underset{10}{P(x)} = \int_{x_0}^{x} \underset{10}{A(x)}\,dx,\ (\alpha \leqq x_0 \leqq \beta)$$

bestimmen, Ferner ist es klar, dass $\underset{01}{P(x)}$ und $\underset{10}{P(x)}$ stetig differentierbar sind, und dass $\underset{01}{P(x_0)} = \underset{10}{P(x_0)} = 0$ ist.

Im allgemeinen lasse sich $\underset{mn}{P(x)}$, $(m = 0, \ldots\ldots, r;\ n = 0, \ldots\ldots, s;\ m + n < r + s)$, welche alle für I stetig differentierbar sind, und an x_0 0 haben, nach (1. 5) so bestimmen, dass $\underset{mn}{B(x)} = 0$, $(m = 0, \ldots\ldots, r;\ n = 0, \ldots\ldots, s;\ m + n < r + s)$ ist.

Wenn man also $\underset{rs}{P(x)}$ durch

$$\underset{rs}{P(x)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{Pol}(\underset{rs}{A(x)},\ \underset{rs}{P(x)},\ \underset{rs}{P'(x)})\,dx$$

bestimmt, dann erhält man nach (1. 5) $\underset{rs}{B(x)} = 0$, wobei $\underset{rs}{P(x)}$ für I stetig differentierbar und $\underset{rs}{P(x_0)}$ gleich 0 ist, weil $\mathrm{Pol}(\underset{rs}{A(x)},\ \underset{rs}{P(x)},\ \underset{rs}{P'(x)})$ für I stetig ist. Durch vollständige Induktion kann man also nach (1. 5) $\underset{rs}{P(x)}$, $(\underset{rs}{P(x)} \in C^1,\ P(x_0) = 0)$, $(r,\ s = 0, \ldots\ldots)$ so bestimmen, dass $\underset{rs}{B(x)} = 0$, $(r,\ s = 0, \ldots\ldots)$ ist.

Daher besitzt (1. 1) eine formale Lösung von der Gestalt

$$y_j \approx \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{p_j(x)}\, \lambda^{-r} \mu^{-s}, \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n), \tag{1. 7}$$

wo

$$\begin{cases} \underset{rs}{p_j(x_0)} = \begin{cases} c_j,\ (j = 1, \ldots\ldots, n;\ r,\ s = 0), \\ 0,\ (j = 1, \ldots\ldots, n;\ r,\ s = 0, \ldots\ldots;\ r + s > 0), \end{cases} \\ \underset{rs}{p_j(x)} \in C^1(I),\ (j = 1, \ldots\ldots, n;\ r,\ s = 0, \ldots\ldots) \end{cases} \tag{1. 8}$$

ist, weil

$$\underset{rs}{p_j(x)} = \sum_{m=1}^{n} \underset{rs}{p_{jm}(x)} c_m,\ (j = 1, \ldots\ldots, n;\ r,\ s = 0, \ldots\ldots)$$

ist, wo c_m, $(m = 1, \ldots\ldots, n)$ willkürliche Konstanten sind.

Daher erhält man folgenden

HILFSSATZ 1. *Die* (1. 1) *besitzt unter den Voraussetzungen* (i), (ii) *und* $\underset{00}{A}(x) = 0$ *die formale Lösung von der Gestalt* (1. 7), *wo* $\underset{rs}{p_j}(x)$ *die Eigenschaft* (1. 8) *besitzt.*

2. Existenzsatz. Nochmals denken wir uns (1. 2), d. h.

$$dY/dx = A(x, \lambda, \mu)Y. \tag{2. 1}$$

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) Es gilt die Voraussetzung des Artikels 1.

(ii) $A(x, \lambda, \mu)$ lässt sich folgenderweise asymptotisch entwickeln:

$$A(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{A}(x)\, \lambda^{-r} \mu^{-s},$$

wo $\underset{rs}{A}(x)$, $(r, s = 0, \ldots\ldots)$ für I stetig sind.

(iii) Es ist $\underset{00}{A}(x) = 0$.

Die (2. 1) besitzt also nach Hilfssatz 1 die formale Lösung von der Gestalt

$$y_j \approx \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{p_j}(x)\, \lambda^{-r} \mu^{-s}, \quad (j = 1, \ldots\ldots, n), \tag{2. 2}$$

wo

$$\begin{cases} \underset{rs}{p_j}(x_0) = \begin{cases} c_j, \ (\alpha \leqq x_0 \leqq \beta,\ c_j: \text{willkürlich};\ j = 1, \ldots\ldots, n;\ r, s = 0), \\ 0, \ (j = 1, \ldots\ldots, n;\ r, s = 0, \ldots\ldots;\ r + s > 0), \end{cases} \\ \underset{rs}{p_j}(x) \in C^1(I), \ (j = 1, \ldots\ldots, n;\ r, s = 0, \ldots\ldots) \end{cases} \tag{2. 3}$$

ist.

Setzt man

$$y_j = \sum_{r+s<N} \underset{rs}{p_j}(x)\, \lambda^{-r} \mu^{-s} + u_j, \quad (j = 1, \ldots\ldots, n), \tag{2. 4}$$

so geht (2. 1) in

$$du_j/dx = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x, \lambda, \mu)\, u_k + b_j(x, \lambda, \mu) \equiv f(x, \lambda, \mu, u_1, \ldots\ldots, u_n), \tag{2. 5}$$
$$(j = 1, \ldots\ldots, n)$$

über, worin

$$b_j(x, \lambda, \mu) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x, \lambda, \mu) \Big(\sum_{r+s<N} \underset{rs}{p_k}(x) \lambda^{-r} \mu^{-s} \Big) - \sum_{r+s<N} \underset{rs}{p_j'}(x) \lambda^{-r} \mu^{-s},$$

$$(j=1,\ldots\ldots,n)$$

ist. Daher lassen sich $b_j\,(x, \lambda, \pi)$, $(j=1,\ldots\ldots,n)$ nach Voraussetzung (ii) folgendermassen asymtotisch entwickeln:

$$b_j(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{\hat{b}_j}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}, \quad (j=1,\ldots\ldots,n), \tag{2. 6}$$

wo $\underset{rs}{\hat{b}_j}(x)$, $(j=1,\ldots\ldots,n\,;\ r.\ s=0,\ldots\ldots)$ für I stetig sind.

Da andererseits

$$u_j \approx \sum_{r+s\geqq N} \underset{rs}{p_j}(x)\lambda^{-r}\mu^{-r}, \quad (j=1,\ldots\ldots,n)$$

die formale Lösung von (2. 5) ist, so müssen $b_j(x, \lambda, \mu)$, $(j=1,\ldots\ldots,n)$ sich folgendermassen formell entwickeln lassen:

$$\begin{aligned} b_j(x, \lambda, \mu) &\approx \sum_{r+s\geqq N} \underset{rs}{\hat{p}_j}(x)\,\lambda^{-r}\mu^{-r} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{a_{jk}}(x)\,\lambda^{-r}\mu^{-s} \sum_{r+s\geqq N}^{\infty} \underset{rs}{p_k}(x)\,\lambda^{-r}\mu^{-s}\right) \\ &\approx \sum_{r+s\geqq N} \underset{rs}{\hat{b}_j}(x)\,\lambda^{-r}\mu^{-s}, \quad (j=1,\ldots\ldots,n), \end{aligned}$$

wo $\underset{rs}{\hat{b}_j}(x)$, $(j=1,\ldots\ldots,n)$ für I stetig sind, und daher müssen sie sich nach (2. 6) folgendermassen asymptotisch entwickeln lassen:

$$b_j(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r+s\geqq N} \underset{rs}{b_j}(x)\,\lambda^{-r}\mu^{-s}, \quad (j=1,\ldots\ldots,n), \tag{2. 7}$$

worin $\underset{rs}{b_j}(x)$, $(j=1,\ldots\ldots,n)$ für I stetig sind.

Es gelten nach Voraussetzungen (ii), (iii) und (2. 7) die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{cases} |a_{jk}(x, \lambda, \mu)| \leqq K(|\lambda|^{-1} + |\mu|^{-1}) \text{ für } I\,\varDelta, & (j,\ k=1,\ldots\ldots,n), \\ |b_j(x, \lambda, \mu)| \leqq H(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N}) \text{ für } I\,\varDelta, & (j=1,\ \ldots..,n). \end{cases} \tag{2. 8}$$

Nimmt man als Kamkesche S-Funktion $S(y) = \mathrm{Max}\,(|y_1|,\ldots\ldots,|y_n|)$ an, dann folgt sofort

$$S(f(x, \lambda, \mu, u)) < nKS(u) + H(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N}) \text{ für } I\,\varDelta.$$

Denn es gilt nach (2. 8) und $|\lambda|^{-1} + |\mu|^{-1} \leqq 1/2$ für $\varDelta$ die Abschätzung

$$|f_j\,(x, \lambda, \mu)| < nKS(u) + H(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N}) \text{ für } I\,\varDelta,\ (j=1,\ldots\ldots,n).$$

Es ist klar, dass es nur eine Lösung von

$$dU/dx = nKU + H(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N}),$$

d. h. die Lösung

$$U = \frac{H}{nK}(\exp(nK|x - x_0|) - 1)(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N})$$

gibt, welche die Anfangsbedingung $U(x_0) = 0$ erfüllt.

Daher durch die bekannten Existenzsatz erhalt man

(2, 9) $|u_j| \leqq \frac{H}{nK}(\exp(nK|x - x_0|) - 1)(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N})$ für $I\Delta$, $(j = 1, \ldots\ldots, n)$,

wo u_j, $(j = 1, \ldots\ldots, n)$ die Lösung von (2. 5) ist, welche die Anfangsbedingung

(2. 10) $$u_j(x_0) = 0, \ (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

erfüllt.

Nach (2. 3) und (2. 4) entspricht die Lösung von (2. 1), die die Anfangsbedingung

(2. 11) $$y_j(x_0) = c_j, \ (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

erfüllt, der Lösung von (2. 5), die die Anfangsbedingung (2. 10) erfüllt, und ferner gilt nach (2. 4) und (2. 9)

$$|y_j - \sum_{r+s<N} p_{rs}^j(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}| \leqq \frac{H}{nK}(\exp(nK|x - x_0|) - 1)(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N})$$

für $I\Delta$, $(j = 1, \ldots\ldots, n)$,

woraus für alle naürlichen Zahlen N folgt:

$$|y_j - \sum_{r+s<N} p_{rs}^j(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}| \leqq K'(|\lambda|^{-N} + |\mu|^{-N}) \text{ für } I\Delta, \ (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

wenn man die Zahl K' von der Art annimmt, dass

$$\frac{H}{nk}\{\exp(nK(\beta - \alpha)) - 1\} \leqq K'$$

ist.

Daher erhält man folgenden

SATZ 1. *Die* (2. 1) *mit den Voraussetzungen* (i), (ii) *und* (iii) *besitzt nach Hilfssatz* 1 *die formale Lösung von der Gestalt* (2.2), *wo* (2. 3) *gilt. Denn lässt sich die Lösung von* (2. 1) y_j. $(j = 1, n)$, *die die Anfangsbedingung* (2. 11) *erfüllt, in der rechten Seite von* (2. 2) *asymptotisch entwickeln, d. h.*

$$y_j \simeq \sum_{r,s=0}^{\infty} p_{rs}^j(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}, \quad (j = 1, \ldots\ldots, n).$$

§2. Erweiterung der asymptotischen Entwicklung.

3. Definition des Zeichens K_r. In meiner früheren Abhandlung erklärte ich die Erweiterung der asymptotischen Entwicklung.[7] Daher schreibe ich hier nur das Wesen.

Von jetzt an setzt man n, n' ; n_0, n_0' voraus, dass sie sämtlich natürliche Zahlen sind, dass n und n usw. voneinander prim sind, und dass die folgende Ungleichung gilt:

$$N_0 \equiv nn_0' - n' n_0 > 0.$$

Es seien L und L_0 zwei Halbstrahlen, welche bzw. durch den Koordinaten-anfangspunkt und durch die Punkte $P(n_0, -n_0')$ und $Q(-n, n)$ hindurchgehen. Es sei nämlich:

$$(3.\ 1) \qquad L: y = -\frac{n_0'}{n_0} x, \ (x \geqq 0),$$

$$L: y = -\frac{n'}{n} x, \ (x \leqq 0).$$

Man ordnet einem Punkte $A(x,y)$ die Zahl $\lambda^y \mu^x$ zu, und bestimmt die Zahlen δ_1 und δ_2 von der Art, dass

$$(3.\ 2) \qquad \delta_1 = n_0'/N_0, \quad \delta_2 = n_0/N_0$$

ist. Es sei L_r ein Halbstrahl, welcher durch einen Punkt $P_r(r\delta_2, -r\,\delta_1)$ hindurchgeht und zu L_0 parallel ist, wo r eine natürliche Zahl ist. Es ist nämlich:

$$(3.\ 3) \qquad L_r: y = -\frac{n'}{n} x - \frac{r}{n}, \ (x \leqq r\,\delta_2).$$

Man kann den folgenden Hilfssatz leicht versichern:

HILFSSATZ 2. *Auf L_r gibt es unendlich viele Gitterpunkte, d. h. es gibt unendlich viele Wurzeln. welche* (3. 3) *erfüllen. Jeder auf den Geraden*

$$y = -\frac{n'}{n} x - \frac{r}{n}, \quad (r = 0, \pm 1, \ldots\ldots)$$

nicht liegender Punkt ist kein Gitterpunkt.

DEFINITION 1. Wir definieren das Zeichen K_r folgendermassen. Man bestimme x_r und y_r durch

$$x_r = r\,\delta_2, \ y_r = -r\,\delta_1,$$

wenn $P_r(r\,\delta_2, -r\,\delta_1)$ ein Gitterpunkt ist, sonst nimmt man x_r und y_r als Koordinaten des Gitterpunktes $P_r^*(x_r, y_r)$ an, der zum Punkte $P_r(r\,\delta_2, -r\,\delta_1)$ nähest liegt und auf der Geraden L_r liegt. Dann definiert man für solche x_r

7) Vgl. 5.

und y_r das Zeichen $K_r(n, n' ; n_0, n_0' ; \lambda, \mu)$ durch $K_r(n, n' ; n_0, n_0' ; \lambda, \mu) = \lambda^{y_r} \mu^{x_r}$.

Nach (3. 3) darf man auch x_r und y_r folgendermassen bestimmen:

$$\begin{cases} x_r = \mathrm{Max}\,(\textit{Ganze Zahlen } x \textit{ dafür, dass } x \leqq r\,\delta_2 \textit{ gilt, und } (n'x + r)/n \\ \qquad \textit{eine ganze Zahl wird.}) \\ y_r = -(n\ x_r + r)/n. \end{cases}$$

Von hier an schreibt man der Einfachheit halber an Stelle von $K_r(n,n ; n_0, n_0' ; \lambda, \mu)$ nur K_r.

Ohne Schwierigkeit kann man die folgenden Hilfssätze versichern:

HILFSSATZ 3. *Sei es $P(x, y)$ ein auf L_r liegender Gitterpunkt, so gilt $\lambda^y \mu^x = K_r \nu^k$, wo k entweder eine natürliche Zahl oder* 0 *ist, und $\nu = \lambda^{n'} \mu^{-n}$ ist.*

Von jetzt an schreibt man ν an Stelle von $\lambda^{n'} \mu^{-n}$ der Einfachheit halber.

HILFSSATZ 4. *Es gilt $K_r K_s = K_{r+s} \nu^k$, wo k entweder eine natürliche Zahl oder* 0 *ist. Wenn insbesondere eine von den Zahlen r und s ein Multiplum von N_0 ist, dann wird $k = 0$.*

HILFSSATZ 5. *Es seien n_1 und n_1' natürliche und zueinander prime Zahlen, welche die Ungleichung*

$$n/n < n_1'/n_1 \leqq n_0'/n_0$$

erfüllen. Dann gilt $K_r = K_r(n, n ; n_1, n_1' ; \lambda, \mu)\,\nu^k$, wo k entweder eine natürliche Zahl oder 0 *ist.*

Von jetzt an schreiben wir der Einfachheit halber an Stelle von $K_r(n, n ; n_1, n_1' ; \lambda, \mu)$ kurz $K_{r,1}$.

4. Erweiterung der asymptotischen Entwicklung. Wir wollen die bisherige asymptotische Entwicklung folgendermassen erweitern.

DEFINITION 2. Es gelte die folgende Ungleichung zwischen den Ordnungen von λ und μ:

(U) $$K|\lambda|^{\sigma} \leqq |\mu| \leqq K|\lambda|^{\sigma'} \text{ für } \Delta,$$

wo k eine hinreichend grosse positive Zahl ist, und σ und σ durch $\sigma = n/n$ und $\sigma < \sigma' < n_0'/n_0 = \sigma_0$ gegeben sind.

In dieser Abhandlung möchten wir bis auf weiteres nur den Fall betrachten, dass die Ungleichung (U) immer besteht. Von hier an zeigen wir mit K stets eine hinreichend grosse positive Zahl.

Es seien $f(x, \lambda, \mu) \in R$ und $f_r(x, \nu) \in \overline{R}$, $(r = 0, \ldots\ldots)$, und die Funktionen $f(x, \lambda, \mu)$ und $f_r(x, \nu)$, $(r = 0, \ldots\ldots)$ lassen sich folgendermassen entwickeln :

$$(4.\ 1)\qquad \begin{cases} f(x,\ \lambda,\ \mu) \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\ \nu), \\ f_r(x,\ \nu) \simeq \sum_{s=0}^{\infty} f_{rs}(x)^s, \end{cases}$$

wo $f_{rs}(x)$ für I genügend oft differentierbar sind.

Wenn es die folgende Ungleichung für alle natürlichen Zahlen N gilt :

$$\left| f(x,\ \lambda,\ \mu) - \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x,\ \nu) \right| \leqq K(|\lambda|^{-\delta_1}|\mu|^{\delta_2})^N \text{ für } I\,\Delta,$$

dann sagen wir dass $f(x,\ \lambda,\ \mu)$ sich in Bezug auf (U) für $I\,\Delta_0,\ \lambda,\ \mu \to \infty$ in der Gestalt rechter Seite von (4. 1) asymptotisch entwickeln lässt, und schreibt man der Einfachheit halber kurz

$$f(x,\ \lambda,\ \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\ \nu).$$

Ferner bezeichnen wir $|\lambda|^{-\delta_1}|\mu|^{\delta_2}$ mit δ.

DEFINITION 3. Wenn $f(x,\ \lambda,\ \mu)$, $g(x,\ \lambda,\ \mu)$ und $h(x,\ \lambda,\ \mu) \in R, f_r(x,\ \nu) \in \overline{R}$, $(r = 0, \ldots\ldots)$ sind, und $f(x,\ \lambda,\ \mu)$ sich folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt :

$$f(x,\ \lambda,\ \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\ \nu),$$

dann nennen wir $g(x,\ \lambda,\ \mu) + h(x,\ \lambda,\ \mu) \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\ \nu)$ eine asymptotische Entwicklung von $g(x,\ \lambda,\ \mu) + h(x,\ \lambda,\ \mu) f(x,\ \lambda,\ \mu)$ in Bezug auf (U) für $I\Delta_0$, $\lambda,\ \mu \to \infty$, und der Einfachheit halber schreibt man kurz

$$g(x,\ \lambda,\ \mu) + h(x,\ \lambda,\ \mu) f(x,\ \lambda,\ \mu) \simeq g(x,\ \lambda,\ \mu) + h(x,\ \lambda,\ \mu) \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\ \nu).$$

Von jetzt an lässt man „in Bezug auf (U) für $I\Delta_0,\ \lambda,\ \mu \to \infty$" fallen. Man kann die folgenden Hilfssätze leicht versichern.

HILFSSATZ 6. *Es gilt die folgende Ungleichung* :

$$\delta^r \leqq K\delta^s \quad \textit{für } \Delta,$$

wenn r und s, $(r > s)$ entweder natürliche Zahlen oder 0 *sind.*

HILFSSATZ 7. *Es ist* $|K_r| \leqq K\,\delta^r$ für Δ, $(r = 0, \ldots\ldots)$.

HILFSSATZ 8. *Es ist $\nu^k \in \overline{R}$, wo $k\,(\geqq 0)$ eine ganze Zahl ist.*

HILFSSATZ 9. *Wenn $f_r(x,\ \nu) \in \overline{R}$ ist, so gilt*

$$\sum_{r=k}^{N} |K_r f_r(x, \nu)| \leqq K\delta^k \text{ für } I\Delta.$$

HILFSSATZ 10. *Es ist* $\delta \leqq K\bar{\delta}$ für Δ, *wo* $\bar{\delta} = |\lambda|^{-\bar{\delta_1}}|\mu|^{\bar{\delta_2}}$ *ist. Man kann* $K=1$ *annehmen.*

HILFSSATZ 11. *Es seien* $f(x, \lambda, \mu)$ *und* $g(x, \lambda, \mu) \in R$, $f_r(x, \nu)$ *und* $g_r(x, \nu) \in \bar{R}$, $(r = 0, \ldots\ldots)$, *und die Funktionen* $f(x, \lambda, \mu)$ *und* $g(x, \lambda, \mu)$ *lassen sich ferner folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \nu), \quad g(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r g_r(x, \nu).$$

(i) *Die Funktion* $f(x, \lambda, \mu) + g(x, \lambda, \mu)$ *lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) + g(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r h_r(x, \nu),$$

wo $h_r(x, \nu) = f_r(x, \nu) + g_r(x, \nu)$ *ist.*

(ii) *Es gilt mit Hilfe von Hilfssatz* 4

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=r} (K_i f_i(x, \nu))(K_j g_j(x, \nu)) &= K_r \sum_{i+j=r} f_i(x, \nu) g_j(x, \nu) \nu^{k_{ij}} \\ &= K_r h_r(x, \nu),\end{aligned}$$

wo k_{ij} *entweder eine natürliche Zahl oder* 0 *ist.*

Dann lässt sich die Funktion $f(x, \lambda, \mu)\, g(x, \lambda, \mu)$ *folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu)\, g(x, \lambda, \lambda) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r h_r(x, \nu).$$

(iii) *Sei es für* $I\Delta_0$ $|f_0(x, \nu)| \geqq c > 0$, *und lasse sich* $1/f(x, \lambda, \mu)$ *folgenderweise formell entwickeln*:

$$1/f(x, \lambda, \mu) \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_r h_r(x, \nu), \tag{4. 2}$$

so lässt sich $1/f(x, \lambda, \mu)$ *in der rechten Seite von* (4. 2) *asymptotisch entwickeln.*

HILFSSATZ 12. *Es sei* $f(x, \lambda, \mu) \in R$, *und* $f(x, \lambda, \mu)$ *lasse sich im bisherigen Sinne folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r,s=0}^{\infty} f_{rs}(x) \lambda^{-r} \mu^{-s}, \tag{4. 3}$$

wo $f_{rs}(x)$ *für* I *genügend oft differentierbar sind. D. h. es gelte für alle* *natürlichen Zahlen N folgende Ungleichung*:

$$\Big| f(x, \lambda, \mu) - \sum_{r+s<N} f_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}\Big| \leqq K(|\lambda|^{-N}+|\mu|^{-N}) \text{ für } I\Delta.$$

(i) *Man bestimme* $K_r f_r(x, \nu)$, $(r = 0, \ldots\ldots)$ *folgendermassen. Man setze*

$$K_r f_r(x, \nu) = \sum_{\substack{s=0\\(s_0 \leqq r/nn')}}^{s_0} f_{\frac{r}{n}-sn', sn}(x)\lambda^{-\frac{r}{n}}\nu^s,$$

wenn r/n *eine ganze Zahl ist, und nimmt ein Gitterpunkt* $P(x_r, y_r)$ *an, der zum Punkte* $A(0, -r/n)$ *nähest liegt und auf dem Halbstrahle*

(4. 4) $$y = -\frac{n'}{n}x - \frac{r}{h}, \ (x \leqq 0)$$

liegt, wenn r/n *keine ganze Zahl ist, und ferner setze man*

$$K_r f_r(x, \nu) = \sum_{\substack{s=0\\(s_0 \leqq -y_r/n')}}^{s_0} f_{y_r - sn', -x_r+sn}(x)\lambda^{y_r}\mu^{x_r}\nu^s.$$

wenn $y_r \leqq 0$ *ist, und* $f_r(x, \nu) = 0$, *wenn* $y_r > 0$ *ist. Da solche* $f_r(x, \nu)$ *ein Polynom von* ν *ist, dessen Koeffizienten für* I *genügend oft differentierbar sind, so wird offenbar* $f_r(x, \nu) \in \bar{R}$ *nach Hilfssatz* 8.

Mit anderen Worten ist $K_r f_r(x, \nu)$ *die Summe der Glieder der rechten Seite von* (4. 3), *welche den auf dem Halbstrahle* (2. 9) *liegenden Gitterpunkten entsprechen. In diesem Falle lässt sich* $f(x, \lambda, \mu)$ *folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

(4. 5) $$f(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \nu).$$

(ii) *Für alle ganzen Zahlen* X *und* Y, $(\leqq 0)$, *welche mindestens eine von*

$$Y + r_0 > -\frac{n'}{n}(X + s_0), \ Y + r_0 > -\frac{n_0'}{n_0}(X + s_0)$$

erfüllen, wo r_0 *und* s_0 *entweder natürliche Zahlen oder* 0 *sind, gilt es die folgende Beziehung*:

$$f_{-Y,-X}(x) = 0.$$

Sei es $\lambda^{-r_0}\mu^{-s_0}K_r f_r(x, \nu)$ *die Summe der Glieder der rechten Seite von* (4. 3), *welche den auf dem Halbstrahle*

$$y = -\frac{n'}{n}(x + s_0) - \frac{r}{n} - r_0, \ (x \leqq 0)$$

liegenden Gitterpunkten entsprechen. Da $f_r(x, \nu)$ *ein Polynom von* ν *ist, dessen Koeffizienten für* I *genügend oft differentierbar sind, so* $f_r(x, \nu) \in \bar{R}$. *Dann lässt sich* $f(x, \lambda, \mu)$ *folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x,\ \lambda,\ \mu) \simeq \lambda^{-r_0} \mu^{-s_0} \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\ \nu).$$

HILFSSATZ 13. *Es sei* $f(x,\ \lambda,\ \mu) \in R$, *und* $f(x,\ \lambda,\ \mu)$ *lasse folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x,\ \lambda,\ \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\ \nu).$$

Sind $\hat{n}$, $\hat{n}'$; $\hat{n}_0$, $\hat{n}_0'$ *natürliche und zueinander prime Zahlen, welche*

$$n'/n \leqq \hat{n}'/\hat{n} < \hat{n}_0'/\hat{n}_0 \leqq n_0'/n_0$$

erfüllen. Dann kann man

$$f(x,\ \lambda,\ \mu) \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_r(\hat{n}, \hat{n}' ; \hat{n}_0, \hat{n}_0' ;\ \lambda, \mu) \hat{f}_r(x,\ \hat{\nu}) \tag{4. 6}$$

schreiben, wo

$$\hat{f}_r(x,\ \hat{\nu}) \approx \sum_{s=0}^{\infty} \hat{f}_{rs}(x) \hat{\nu}^s,\ \ \nu = \lambda^{\hat{n}'} \mu^{-\hat{n}}$$

ist. Ferner lässt sich $f(x,\ \lambda.\ \mu)$ *für*

$$K|\lambda|^{\hat{\tau}} \leqq |\mu| \leqq K|\lambda|^{\hat{\tau}'},\ \ (\tau = \hat{n}'/\hat{n},\ \ \hat{\tau} < \hat{\tau} < \hat{n}_0'/\hat{n}_0) \tag{U}$$

in der rechten Seite von (4. 6) *asymptotisch entwickeln.*

HILFSSATZ 14. *Es gelten die drei folgenden Bedingungen*:

(i) *Es gilt* $mn_0 + m'n_0' \geqq 0$, *wo* m *und* m' *ganze Zahlen sind.*

(ii) *Die Zahl* $N + m_0$ *ist ein Multiplum von* N_0, *und* N *ist eine natürliche Zahl, d. h.* $N + m_0 = pN_0$, *wo* $m_0 = mn + m'n'$, *und* p *eine natürliche Zahl ist.*

(iii) *Die natürlichen Zahlen* n_1 *und* n_1' *sind zueinander prim, und sie werden durch*

$$\frac{n}{n} = \frac{\delta_1 (N + m_0) - m}{\delta_2 (N + m_0) + m'}$$

bestimmt. Fur solche Zahlen n_1 *und* n_1' *gilt stets*

$$\frac{n'}{n} < \frac{n_1'}{n_1} \leqq \frac{n_0'}{n_0}$$

nach (i).

Dann gilt die Beziehung

$$\lambda^m \mu^{m'} K_{N+m_0+r} = K_{N+r,1}\ \nu^k,$$

wo k *der* 0 *oder einer positiven ganzen Zahl gleich ist.*

HILFSSATZ 15. *Es gelten die zwei folgenden Bedingungen*:

(i) *Es gilt* $mn_0 + m\ n_0' \leqq 0$, *wo* m *und* m *ganze Zahlen sind.*

(ii) *Es gilt die Bedingung* (ii) *von Hilfssatz* 14.

Dann gilt

$$\lambda^m \mu^{m'} K_{N+m_0+r} = K_{N+r}\, \nu^k,$$

wo k *entweder* 0 *oder eine natürliche Zahl ist.*

HILFSSATZ 16. *Es seien* $f(x, \lambda, \mu) \in R$ *und* $f_r(x, \nu) \in \bar{R}, (r = 0, \ldots\ldots)$, *und* $f(x, \lambda, \mu)$ *lasse sich folgenderweise asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \simeq \lambda^m \mu^{m'} \sum_{s=0}^{\infty} K_r f_r(x, \nu),$$

wo m *und* m' *ganze Zahlen sind. Wir stellen die folgenden Voraussetzungen*:

(i) (i) *von Hilfssatz* 14.

(ii) (ii) *von Hilfssatz* 14.

(iii) (iii) *von Hilfssatz* 14. *Dabei nimmt man eine hinreichend grosse positive Zahl* N *von der Art an, dass* $\sigma' < n_1'/n_1$ *ist.*

(iv) *Es ist*

$$f_r(x, \nu) = 0, (r = 0, \ldots\ldots N + m_0 - 1).$$

Dann ist es klar, dass

$$\lambda^m \mu^{m'}\ K_{N+m_0+s}\, f_{N+m_0+r}\ (x, \nu) = K_{N+r,1}\, f^*_{N+r}(x, \nu) \tag{4. 7}$$

gemüss Hilfssatz 14 *gilt, wo* $f^*_{N+r}(x, \nu) \in \bar{R}$ *ist, und* $f^*_{N+r}\ (x, \nu)$ *sich folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt*:

$$f^*_{N+r}(x, \nu) \simeq \sum_{s=0}^{\infty} f^*_{N+r,s}\ (x)\, \nu^s.$$

wo $f^*_{N+r,s}\ (x)$ *für* I *genügend oft differentierbar ist. Ferner lässt sich* $f(x, \lambda, \mu)$ *folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=N}^{\infty} K_{r,1}\ f^*_r\,(x, \nu).$$

HILFSSATZ 17. *Es seien* $f(x, \lambda, \mu) \in$ *und* $f_r(x, \nu) \in \bar{R}, (r = 0, \ldots\ldots)$, *und* $f(x, \lambda, \mu)$ *lasse sich folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \simeq \lambda^m \mu^{m'} \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \nu),$$

wo m *und* m' *ganze Zahlen sind. Wir stellen die folgenden Voraussetzungen*:

(i) *Es gilt* (i) *von Hilfssatz* 15.

(ii) *Es gilt* (ii) *von Hilfssatz* 15.

(iii) *Es gilt* (iv) *von Hilfssatz* 16.

Dann ist es klar, dass mit Hilfe von Hilfssatz 15

$$\lambda^m \mu^{m'} K_{N+m_0+r} f_{N+m_0+r}(x, \nu) = K_{N+r} f^*_{N+r}(x, \nu) \tag{4. 8}$$

gilt, wo $f^*_{N+r}(x, \nu) \in \overline{R}$ *ist, und* $f^*_{N+r}(x, \nu)$ *sich folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt*:

$$f^*_{N+r}(x, \nu) \simeq \sum_{s=0}^{\infty} f^*_{N+r,s}(x)\, \nu^s,$$

wo $f^*_{N+r,s}(x)$ *für* I *genügend oft differentierbar ist. Ferner lässt sich* $f(x, \lambda, \mu)$ *folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=N}^{\infty} K_r f^*_r(x, \nu).$$

§3. Existenzsatz.

5. Reduktion. Von jetzt an benutzen wir oft die folgenden Zeichen:

(i) Das Zeichen $f(x, \nu) \in F$ bedeutet, dass $f(x, \nu)$ ein Polynom von ν ist, dessen Koeffizienten für I genügend oft differentierbar sind.

(ii) Das Zeichen $f(x, \nu) \in F_0$ bedeutet, dass $f(x, \nu) \in F$ ist, dessen von ν unabhängiger Koeffizient von Null verschieden ist. Wenn $f(x, \nu) \in F_0$ ist, so ist $f(x, \nu) \neq 0$. Denn es gilt $|f(x, \nu)| \geqq |f_0(x, \nu)| - \left|\sum_{r=1}^{N} f_r(x, \nu)\right| > 0$.

(iii) Sind $f(x, \nu) \in F_0$ und $g(x, \nu) \in F$, so schreibt man $h(x, \nu) = g(x, \nu)/f(x, \nu) \in F$. Ist $h(x, \nu) \in \overline{F}$, so muss offenbar $h(x, \nu) \in \overline{R}$ sein.

(iv) Ist $f(x, \nu) \in F$ usw., so schreibt man $f(x, \nu') \in F'$ usw., worin $\nu' = \lambda'^{n'} \mu'^{-n'}$ ist.

(v) Ist $f(x, \nu) \in \overline{R}$, so schreibt man $f(x, \nu') \in \overline{R}'$.

(vi) Für eine Matrize $F(x, \nu)$ bedeutet das Zeichen $F(x, \nu) \in F_0$ usw., dass jedes Element von $F(x, \nu)$ $f_{jk}(x, \nu) \in F_0$ usw. ist.

Wir denken uns ein System von homogenen linearen Differential gleichungen:

$$dy_j/dx = \lambda^m \mu^{m'} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k, \quad (j = 1, \ldots\ldots, n), \tag{5. 1}$$

wo m und m ganze Zahlen sind. Von jetzt an stellt man $\lambda^m \mu^{m'}$ der Einfachheit halber mit θ dar, und $\lambda'^m \mu'^{m'}$ mit θ'.

Mit Benutzung einer Matrize lässt sich (5. 1) folgenderweise umschreiben:

$$dY/dx = \theta\, A(x, \lambda, \mu) Y. \tag{5. 2}$$

Für m und m unterscheiden wir die drei Fälle:

(I) Es ist $m_0 = mn + m'n'$, $m_0' = mn_0 + m'n_0' \geqq 0$.

(II) Es ist m_0, $m_0' \leqq 0$.

(III) Es ist entweder $m_0 > 0$, $m_0' < 0$ oder $m_0 < 0, m_0' > 0$.

In diesem § behandeln wir nur den Fall (I), aber nehmen wir den Fall $m_0 = 0$ aus.

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) Es ist $A(x, \lambda, \mu) \in R$ und $A(x, \lambda, \mu)$ lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$A(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r \underset{r}{A}(x, \nu),$$

wo $\underset{r}{A}(x, \nu) \in \overline{R}$, $(r = 0, \ldots\ldots)$ ist.

(ii) Es ist $\underset{0}{A}(x, \nu)$ eine diagonale Matrize mit

$\underset{0}{a}_{jj}(x, \nu) - \underset{0}{a}_{kk}(x, \nu) \in F_0$, $\underset{0}{a}_{jj}(x, \nu) \in F$, $(j \neq k\,;\ j,\ k = 1, \ldots\ldots, n)$,

N. B. Von jetzt an benutzen wir oft die Schreibweise n, welche von „n von n System" nicht abhängt.

Setzt man $K_r = \lambda^{y_r} \mu^{x_r}$ und $K_r' = \lambda'^{y_r} \mu'^{x_r}$, so hat man nach $ny_r + n x_r = - r$ sofort $[K]_{\lambda = \lambda' t^n, \mu = \mu' t^{n'}} = K_r' \, t^{-r}$. Wendet man die Transformation

(5. 3) $$\lambda = \lambda' t^n,\ \mu = \mu' \ t^{n'},\ (\lambda',\ \mu' : \text{konst.})$$

auf (5. 2) an, so geht (5. 2) ins Folgende über:

(5. 4) $$dY/dx = t^{m_0} \ A(x, \lambda', \mu', t) \ Y,$$

wo

$$\begin{cases} A(x, \lambda', \mu', t) \simeq \theta' \sum_{r=0}^{\infty} K_r' \underset{r}{A}(x, \nu') t^{-r}, \\ \underset{r}{A}(x, \nu') \in \overline{R}', \ (r = 0, \ldots\ldots), \end{cases}$$

ist. Insbesondere ist $\underset{0}{A}(x, \nu')$ eine diagonale Matrize mit

$\underset{0}{a}_{jj}(x, \nu') - \underset{0}{a}_{kk}(x, \nu') \in F_0'$, $\underset{0}{a}_{jj}(x, \nu') \in F'$, $(j \neq k\,;\ j,\ k = 1, \ \ldots . n)$.

Da die charakteristische Gleichung von (5. 4) $|\theta \underset{0}{A}(x, \nu) - \rho \ E| = 0$ offenbar voneinander verschiedene Wurzeln $\theta' \ \underset{0}{a}_{jj}(x, \nu')$, $(j = 1, \ldots\ldots, n)$ besitzt, so kann man auf (5. 4) die Theorie der Differentialgleichung anwenden, welche von einem Parameter abhängt.[8)]

Wendet man die Transformation

(5. 5) $$Y = P(x, \lambda', \mu', t) Z$$

auf (5. 4) an, worin

8) Vgl. [1].

$$P(x,\lambda',\mu',t)=\sum_{r=0}^{N+m_0} K'_r \underset{r}{P}(x,\nu')t^{-r},\ (\underset{0}{P}(x,\nu')=E)$$

ist und N eine später zu bestimmende natürliche Zahl ist, so geht (5. 4) in

$$dZ/dx=t^{m_0}(F(x,\lambda',\mu',t)+B(x,\lambda',\mu',t))Z \tag{5. 6}$$

über, wo

$$F(x,\lambda',\mu',t)=\theta'\sum_{r=0}^{N+m_0} K'_r \underset{r}{B}(x,\nu)t^{-r},$$

$$B(x,\lambda',\mu',t)\simeq\theta'\sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K'_r \underset{r}{B}(x,\nu')t^{-r}$$

ist. Wie einfache Zeichnung sofort zeigt, gilt es zwischen den Koeffizienten die folgende Bezichung:

$$\begin{aligned}\theta' K'_r \underset{r}{B}(x,\nu') &= \theta' K'_r(\underset{0}{A}(x,\nu')\underset{r}{P}(x,\nu')-\underset{r}{P}(x,\nu)\underset{0}{A}(x,\nu'))\\ &\quad+\mathrm{Pol}\,(\underset{r-1}{P}(x,\nu'),\underset{r-m_0}{P}(x,\nu'),\underset{r}{A}(x,\nu')),\ (r=0,\ldots\ldots),\end{aligned} \tag{5. 7}$$

worin

$$\mathrm{Pol}\,(\underset{r-1}{P}(x,\nu'),\underset{r-m_0}{P}(x,\nu'),\underset{r}{A}(x,\nu'))=\sum_{s=0}^{r} K'_s\underset{s}{Q}(x,\nu')\Big(\sum_{m=0}^{r-s}\theta' K'_m\underset{m}{A}(x,\nu')\Big)$$

$$K'_{r-s-m}\underset{r-s-m}{P}(x,\nu'))-\sum_{r=0}^{r-m_0-1} K'_s\underset{s}{Q}(x,\nu')K'_{r-m_0-s}\underset{r-m_0-s}{P}(x,\nu')$$

$$-\theta' K'_r(\underset{0}{A}(x,\nu')\underset{r}{P}(x,\nu')-\underset{r}{P}(x,\nu')\underset{0}{A}(x,\nu'))$$

ist, indem man

$$P(x,\lambda',\mu',t)^{-1}\approx\sum_{r=0}^{\infty}K'_r\underset{r}{Q}(x,\nu')t^{-r},\ \underset{0}{Q}(x,\nu')=E,$$

setzt.

Man kann durch vollständige Induktion die folgende Beziehung folgendermassen beweisen:

$$K'_r\underset{r}{Q}(x,\nu')=-K'_r\underset{r}{P}(x,\nu')+K_r\alpha_r K'_{l_1}\underset{l_1}{P}(x,\nu')\ldots\ldots K_{l_r}\underset{l_r}{P}(x,\nu'), \tag{5. 8}$$

wo der Einfachheit halber man

$$\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_r=r\\(0\leqq l_1\ldots,l_r<r)}} \quad\text{und}\quad \alpha_{l_1l\ldots r},\ \text{(eine ganze Zahl)}$$

bzw. mit Σ_r und α_r darstellt.

Da die Beziehung

$$K'_r\underset{r}{Q}(x,\nu')=-K'_r\underset{r}{P}(x,\nu')-\sum_{m=1}^{r-1}K'_m\underset{m}{P}(x,\nu')K'_{r-m}\underset{r-m}{Q}(x,\nu'),\ (r=1,\ldots\ldots) \tag{5. 9}$$

gilt, so hat man $K_1' \underset{1}{Q}(x, \nu') = - K_1' \underset{1}{P}(x, \nu)$, welche bedeutet, dass (5. 8) für $r = 1$ besteht. Für $r = 1, \ldots\ldots, n$ gelte die Beziehung (5. 8). Da es aus (5. 9) folgt:

$$K'_{n+1} \underset{n+1}{Q}(x, \nu') = - K'_{n+1} \underset{n+1}{P}(x, \nu') - \sum_{m=1}^{n} K'_m \underset{m}{P}(x, \nu') K'_{n-m+1} \underset{n-m+1}{Q}(x, \nu')$$

$$= - K'_{n+1} \underset{n+1}{P}(x, \nu') - \sum_{m=1}^{n} K'_m \underset{m}{P}(x, \nu') (- K'_{n-m+1} \underset{n-m+1}{P}(x, \nu')$$

$$+ \Sigma_{n-m+1}\, \alpha_{n-m+1} K'_{l_1} \underset{l_1}{P}(x, \nu') \ldots\ldots K'_{l_{n-m+1}} \underset{l_{n-m+1}}{P}(x, \nu')))$$

und es klar ist, dass

$$\Sigma_{n-m+1}\, \alpha_{n-m+1} K'_1 \underset{l_1}{P}(x, \nu') \ldots\ldots K'_{l_{n-m+1}} \underset{l_{n-m+1}}{P}(x, \nu') K'_m \underset{m}{P}(x, \nu'),\ (1 \leqq m \leqq n)$$

und

$$K'_m \underset{m}{P}(x, \nu') \underset{n-m+1}{K}(x, \nu'),\ (1 \leqq m \leqq n)$$

bzw. in

$$\Sigma_{n+1}\ \alpha_{n+1}\ K'_{l_1} \underset{l_1}{P}(x, \nu') \ldots\ldots K'_{l_{n+1}} \underset{l_{n+1}}{P}(x, \nu'),$$
$$(l_{n+1} = m,\ l_n = l_{n+1} = \ldots\ldots = l_{n-m+2} = 0)$$

und

$$\Sigma_{n+1}\ \alpha_{n+1}\ K'_{l_1} \underset{l_1}{P}(x, \nu') \ldots\ldots K'_{l_{n-1}} \underset{l_{n+1}}{P}(x, \nu'),$$
$$(l_{n+1} = m,\ l_1 = n + 1 - m,\ l_2 = \ldots\ldots = l_n = 0),$$

d. h.

$$\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_{n-m+1}=n+1-m \\ (0 \leqq l_1, \ldots,\ l_{n-m+1}<n+1)}} \alpha_{l_1 \ldots l_{n-m+1} 0 \ldots 0}\ K'_{l_1} \underset{l_1}{P}(x, \nu') \ldots\ldots K'_{l_{n-m+1}}\ P_{l_{n-m+1}}(x, \nu')$$
$$\bullet\ K'_0 \underset{0}{P}(x, \nu') \ldots\ldots K'_0 \underset{0}{P}(x, \nu') K'_m \underset{m}{K}(x, \nu')$$

und

$$\alpha_{n-m+1, 0-0, m} K'_{n-m+1} \underset{n-m+1}{P}(x, \nu') K'_0 \underset{0}{P}(x, \nu') \ldots\ldots K'_0 \underset{0}{P}(x, \nu') K'_m \underset{m}{P}(x, \nu')$$

enthalten sind, so gilt die Beziehung (5. 8) für $r = n + 1$.

Ferner durch vollständige Induktion kann man folgendermassen beweisen, dass man nach (5. 7) $\underset{r}{P}(x, \nu'), (r = 1, \ldots\ldots, N + m_0)$ nacheinander so bestimmen kann, dass die Matrizen $\underset{r}{B}(x, \nu'), (r = 1, \ldots\ldots, N + m_0)$ diagonal werden, wobei

$$(5.\ 10) \begin{cases} \underset{r}{P}_{jk}(x, \nu'),\ \underset{r}{b}_{jj}(x, \nu') \in \bar{R}',\ (j \neq k;\ j, k = 1, \ldots\ldots, n;\ r=1, \ldots\ldots N + m_0), \\ \underset{r}{B}(x, \nu') \in \bar{R}',\ (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots) \end{cases}$$

gilt. Da man ferner die diagonalen Elemente von $\underset{r}{P}(x, \nu)$ willkürlich bestimmen darf, so nimmt man

$$\underset{r}{p}_{jj}(x, \nu') = 0, \ (j = 1, \ldots\ldots n; \ r = 1, \ldots\ldots, N + m_0)$$

an. Da aus (5. 7)

$$\underset{0}{B}(x, \nu') = \underset{0}{A}(x, \nu'),$$

d. h.

$$\underset{0}{b}_{jj}(x, \nu') - \underset{0}{b}_{kk}(x, \nu') \in F_0', \ \underset{0}{b}_{jj}(x, \nu') \in F', \ (j \neq k; \ j, \ k = 1, \ldots\ldots, n),$$
$$\underset{1}{B}(x, \nu') = \underset{0}{A}(x, \nu')\underset{1}{P}(x, \nu') - \underset{1}{P}(x, \nu')\underset{0}{A}(x, \nu') + \underset{1}{A}(x, \nu')$$

folgt, so hat man erstens $\underset{1}{b}_{jk}(x, \nu') = 0, (j \neq k)$, $\underset{1}{b}_{jj}(x, \nu') = \underset{1}{a}_{jj}(x, \nu')$, d. h.

$$\underset{1}{p}_{jk}(x, \nu') \in \overline{R}', \ \underset{1}{b}_{jj}(x, \nu') \in \overline{R}', (j \neq k; \ j, \ k = 1, \ldots\ldots, n),$$

wenn man $\underset{1}{p}_{jk}(x, \nu')$ und $\underset{1}{p}_{jj}(x, \nu')$ durch

$$\underset{1}{p}_{jk}(x, \nu') = -\underset{1}{a}_{jk}(x, \nu')/(\underset{0}{a}_{jj}(x, \nu) - \underset{0}{a}_{kk}(x, \nu)), \ (j \neq k; \ j, \ k = 1, \ldots\ldots, n),$$
$$\underset{1}{p}_{jj}(x, \nu') = 0, (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

bestimmt.

Man nehme zweitens an, dass man $\underset{k}{P}(x, \nu')$, $(r = 1, \ldots\ldots, n-1; \ n-1 < N + m_0)$ aufeinander so bestimmen kann, dass die Matrizen $\underset{k}{B}(x, \nu)$, $(r = 1, \ldots\ldots, n-1)$ diagonal werden, wo

$$\underset{r}{b}_{jj}(x, \nu'), \ \underset{r}{p}_{jk}(x, \nu') \in R', (j \neq k; \ j, \ k = 1, \ldots\ldots, n; \ r = 1),$$
$$\underset{r}{p}_{jj}(x, \nu') = 0, \ (j = 1, \ldots\ldots, n; \ r = 1, \ldots\ldots, n-1)$$

ist. Andererseits nach Betrachtung von Hilfssatz 4.8 und (5. 8) erhält man

$$\sum_{s=1}^{n-1} K_s' \underset{s}{Q}(x, \nu')\Big(\sum_{m=0}^{n-s} \theta' K_m' \underset{m}{A}(x, \nu') K'_{n-s-m} \underset{n-s-m}{P}(x, \nu')\Big)$$
$$= \theta' K_n' \sum_{s=1}^{n-1} \underset{s}{Q}(x, \nu)\Big(\sum_{m=0}^{n-s} \underset{m}{A}(x, \nu') \underset{n-s-m}{P}(x, \nu')\nu^k\Big) \equiv \theta' K_n' \hat{P}_1,$$

$$\theta' K_n' \underset{n}{Q}(x, \nu') \underset{0}{A}(x, \nu') + \theta' K_n' \underset{n}{P}(x, \nu') \underset{0}{A}(x, \nu')$$
$$= \theta' K_n' (\underset{n}{Q}(x, \nu') + \underset{n}{P}(x, \nu')) \underset{0}{A}(x, \nu') \equiv \theta' K_n' \hat{P}_2,$$

$$\sum_{m=1}^{n} \theta' K_m' \underset{m}{A}(x, \nu') P'_{n-m} \underset{n-m}{P}(x, \nu')$$
$$= \theta' K_n' \sum_{m=1}^{n} \underset{m}{A}(x, \nu') \underset{n-m}{P}(x, \nu') \nu'^k \equiv \theta' K_n' \hat{P}_3,$$

$$\sum_{s=0}^{n-m_0-1} K'_s \underset{s}{Q}(x, \nu') K'_{n-m_0-s} \underset{n-m_0-s}{P'}(x, \nu')$$

$$= K'_{n-m_0} \sum_{s=0}^{n-m_0-1} \underset{s}{Q}(x, \nu') \underset{n-m_0-s}{P'}(x, \nu') \equiv K'_{n-m_0} \hat{P}_4,$$

wo $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$, $\hat{P}_4 \in \overline{R}'$ ist.

Setzt man $K_{r-m_0} = \lambda^{y_{r-m_0}} \mu^{x_{r-m_0}}$, $(r \geqq m_0 + 1)$, so hat man

$$(5.\ 11) \qquad y_{r-m_0} = -\frac{n'}{n} x_{r-m_0} - \frac{r-m_0}{n},$$

$$(5.\ 12) \qquad x_{r-m_0} \leqq (r - m_0)\,\delta_2.$$

Aus (5. 11) folgt

$$(5.\ 13) \qquad y_{r-m_0} - m = -\frac{n'}{n}(x_{r-m_0} - m') - \frac{r}{n}.$$

Da die zwei Ungleichungen $n > 0$ und $mn_0 + m' n'_0 \geqq 0$ ohne weiteres $n(m\,n_0 + m'\,n'_0) \geqq 0$, d. h. $n_0\,(m\,n + m'\,n') \geqq -m'\,(nn'_0 - n'\,n_0)$ liefern, so hat man $-$ m$' \leqq m_0\,\delta_2$, d. h. mit Benutzung von (5. 12)

$$(5.\ 14) \qquad x_{r-m0} - m' \leqq r\,\delta_2.$$

Da (5. 13) und (5. 14) bedeuten, dass der Punkt $P(x_{r-m_0} - m', y_{r-m_0} - m)$ ein auf L_r liegender Gitterpunkt ist, so hat man nach Hilfssatz 3 $\lambda^{y_{r-m_0-m'}} \mu^{x_{r-m_0-m'}} = K_r\,\nu^k$, welche uns $K_{r-m_0} = \theta\ K_r\,\nu^k$, d. h. $\hat{K}'_{n-m_0}\ \hat{P}_4 = \theta'\ K'_n\ \hat{P}_5$ liefert, wo $\hat{P}_5 \in \overline{R}'$ ist.

Fassen wir die obigen Resultaten zusammen, so gilt

$$\mathrm{Pol}(\underset{n-1}{P}(x, \nu'), \underset{n-m_0}{P'}(x, \nu'), \underset{n}{A}(x, \nu')) = \theta'\ K'_n \underset{n}{\hat{P}},\ (\underset{n}{\hat{P}} \in \overline{R}').$$

Wenn man daher $\underset{n}{P}(x, \nu')$ durch

$$\underset{n}{p_{jk}}(x, \nu') = -\underset{n}{\hat{p}_{jk}}(x, \nu')/(\underset{0}{a_{jj}}(x, \nu') - \underset{0}{a_{kk}}(x, \nu')),\ (j \neq k\,;\ j, k = 1, \ldots\ldots, n)$$

bestimmen, so wird $\underset{n}{B}(x, \nu')$ eine diagonale Matrize. Dabei ist

$$\underset{n}{p_{jk}}(x, \nu'),\ \underset{n}{b_{jj}}(x, \nu') \in \overline{R}',\ (j \neq k\,;\ j, k = 1, \ldots\ldots, n),$$

und darf man $\underset{n}{p_{jj}}(x, \nu')$ durch $\underset{n}{p_{jj}}(x, \nu') = 0$, $(j = 1, \ldots\ldots, n)$ bestimmen. Da das erste Glied der rechten Seite von (5. 7) für $r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots$ verschwindet, und nur zweite Glied blied bleibt, so ist

$$\underset{r}{B}(x, \nu') \in \overline{R}',\ (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots).$$

Daher hat man (5. 10) bewiesen.

Wendet man (5. 3) auf (5. 5) an, so geht (5. 5) ins Folgende über:

$$(5.\ 15) \qquad Y = P(x, \lambda, \mu)Z,$$

wo

$$P(x, \lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r \underset{k}{P}(x, \nu), \quad \underset{0}{P}(x, \nu) = E$$

ist. Das Resultat, welches man durch die Anwendung von (5. 3) auf (5. 6) hat, stimmt mit dem Resultat überein, welches man durch die Anwendung von (5. 14) auf (5. 5) (5. 5) hat.

Wendet man (5. 3) auf (5. 6) an, so geht (5. 6) in

$$(5.\ 16) \qquad dZ/dx = \theta(F(x, \lambda, \mu) + B(x, \lambda, \mu))Z$$

über, wo

$$(5.\ 17) \qquad \begin{cases} F(x, \lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r \underset{r}{B}(x, \nu), \\ B(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r \underset{r}{B}(x, \nu), \end{cases} \qquad \underset{k}{B}(x, \nu) \in \overline{R}$$

ist.

Daher gilt folgender

HILFSSATZ 13. *Wenn* (5. 1) *die Voraussetzungen* (i) *und* (ii) *besitzt, dann geht* (5. 1) *durch die passende Transformation* (5. 15) *in* (5. 16) *über, wo* $F(x, \lambda, \mu)$ *und* $B(x, \lambda, \mu)$ *durch* (5. 17) *gegeben werden.*

N. B. Wir sagen, dass (5. 2) bzw. die Eigenschaften $[A]$ *und* $[A_0]$ besitzt, wenn es für (5. 2) bzw. die Voraussetzungen (i) und (ii) gelten.

6. Formale Lösung. In diesem Artikel denken wir uns eine formale Lösung der Differentialgleichung:

$$(6.\ 1) \qquad dZ/dx = \theta(F(x, \lambda, \mu) + B(x, \lambda, \mu))Z.$$

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) Es ist $F(x, \lambda, \mu)$ eine diagonale Matrize von der Art, dass

$$F(x, \lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r \underset{r}{B}(x, \nu),$$

wo

$$\underset{0}{b_{jj}}(x, \nu) - \underset{0}{b_{kk}}(x, \nu) \in F_0, \ \underset{0}{b_{jj}}(x, \nu) \in F, \ (j \neq k;\ j, k = 1, \ldots\ldots, n),$$

$$\underset{r}{B}(x, \nu) \in \overline{R}, \ (r = 1, \ldots\ldots, N + m_0)$$

ist.

(ii) Es ist $B(x, \lambda, \mu) \in R$, und $B(x, \lambda, \mu)$ lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$B(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r \underset{r}{B}(x, \nu), \quad (\underset{r}{B}(x, \nu) \in \bar{R},\ r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots,).$$

(iii) Wir nehmen eine hinreichend grosse natürliche Zahl N von der Art an, dass

(a) $N + m_0 + 1$ ein Multiplum von N_0 ist.

(b) n_1 und n_1' zueinander prime natürliche Zahlen sind, und sie durch

$$\frac{n_1'}{n^1} = \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}$$

bestimmt werden, wo

$$\bar{\delta}_1 = \frac{\delta_1(N + m_0 + 1) - m}{N + 1}, \qquad \bar{\delta}_2 = \frac{\delta_2(N + m_0 + 1) + m'}{N + 1}$$

ist. Man kann eine hinreichend grosse Zahl N, so dass $n_1'/n_1 > \sigma'$ gilt.

Wendet man die Transformation (5. 3) auf (6. 1) an, so geht (6. 1) in

(6. 2) $$dZ/dx = t^{m_0}(F(x, \lambda', \mu', t) + B(x, \lambda', \mu', t))Z$$

über, worin

$$F(x, \lambda', \mu', t) = \theta' \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r' \underset{r}{B}(x, \nu')\, t^{-r},$$

$$B(x, \lambda', \mu', t) \simeq \theta' \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r' \underset{r}{B}(x, \nu')\, t^{-r},$$

$$\underset{0}{b}_{jj}(x, \nu') - \underset{0}{b}_{kk}(x, \nu') \in F_0',\ \underset{0}{b}_{jj}(x, \nu') \in F',\ (j \neq k;\ j,\ k = 1, \ldots\ldots, n)$$

ist, wo $\underset{r}{B}(x, \nu') \in \bar{R}', (r = 1) \ldots\ldots$)ist. Wendet man ferner die Transformation

(6. 3) $$Z = \bar{P}(x, \lambda'\ \mu', t)\, \bar{Z}$$

auf (6. 2) an, wo

$$\bar{P}(x, \lambda, \mu', t) \approx E + \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r' \underset{r}{P}(x, \nu')\, t^{-r}$$

ist, so geht (6. 2) in

(6. 4) $$d\bar{Z}/dx = t^{m_0}(F(x, \lambda, \mu, t) + \bar{B}(x, \lambda, \mu, t))\bar{Z}$$

über. Setzt man hier

$$\bar{B}(x, \lambda', \mu', t) \approx \theta' \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r' \underset{r}{B}(x, \nu')\, t^{-r},$$

so gilt es genau wie bei Art. 1 zwischen den Koeffizienten die folgende Beziehung:

(6. 5) $$\theta' K_r' \underset{r}{B}(x, \nu') = \theta' K_r'(\underset{0}{B}(x, \nu')\ \underset{r}{\bar{P}}(x, \nu') - \underset{r}{\bar{P}}(x, \nu')\underset{0}{B}(x, \nu'))$$

$$+ \operatorname{Pol}(\underset{r-1}{\bar{P}}(x, \nu'), \underset{r-m_0}{P'}(x, \nu'), \underset{r}{B}(x, \nu',)), (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots).$$

Um $\operatorname{Pol}(\underset{r-1}{\bar{P}}(x, \nu'), \underset{r-m_0}{\bar{P}}(x, \nu'), \underset{r}{B}(x, \nu'))$ zu erkennen, dürfen wir für den Pol $(\underset{r-1}{P}(x, \nu'), \underset{r-m_0}{P}(x, \nu'), \underset{r}{A}(x, \nu'))$ des Art. 5 an Stelle von $\underset{r}{P}(x, (x', \nu'),$ $\underset{r}{Q}(x, \nu'), \underset{r}{A}(x, \nu')$ nur $\underset{r}{\bar{P}}(x, \nu'), \underset{r}{\bar{Q}}(x, \nu')$ und $\underset{r}{\bar{B}}(x, \nu')$ annehmen. Genau wie bei Art. 5 kann man nach (6. 5) $\underset{r}{\bar{P}}(x, \nu)$ aufeinander so bestimmen, dass $\underset{r}{\bar{B}}(x, \nu')$ alle diagonale Matrizen werden, wo

$$\underset{r}{\bar{p}_{jk}}(x, \nu') \in \bar{R} \quad (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots, j \neq k;\ j,\ k = 1, \ldots\ldots, n),$$

$$\underset{r}{\bar{b}_{jj}}(x, \nu') \in \bar{R}, \ (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots, j = 1, \ldots\ldots, n)$$

$$\underset{r}{\bar{p}_{jj}}(x, \nu) = 0, \ (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots; j = 1, \ldots\ldots, n)$$

ist.

Wendet man die Transformation

$$\bar{Z} = \bar{\bar{P}}(x, \lambda, \mu', t)\bar{\bar{Z}} \tag{6. 6}$$

auf (6. 4) an, wo

$$\bar{\bar{P}}(x, \lambda, \mu', t) \approx E + \sum_{r=N+1}^{\infty} \underset{r}{\bar{P}}(x, \nu')t^{-r}, \qquad (\underset{r}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu') : \text{diagonal})$$

ist, so geht (6. 4) in

$$d\bar{\bar{Z}}/dx = t^{m_0}(F(x, \lambda', \mu', t) + \bar{B}(x, \lambda', \mu', t))Z \tag{6. 7}$$

über. Setzt man

$$\bar{\bar{B}}(x, \lambda, \mu, t) \approx \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} \underset{r}{\bar{\bar{B}}}(x, \nu')t^{-r},$$

so gilt zwischen den Koeffizienten die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}\underset{r+m_0}{\bar{\bar{B}}}(x, \nu') = \theta' K'_{r+m_0} \underset{r+m_0}{\bar{B}}(x, \nu') - \underset{r}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu') \\ + \operatorname{Pol}(\underset{r-N-1}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu'), \underset{r-N-1}{\bar{P}'}(x, \nu')), \ (r = N + 1, \ldots\ldots)\end{aligned} \tag{6. 8}$$

wo

$$\operatorname{Pol}(\underset{r-N-1}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu'), \underset{r-N-1}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu')) = -\sum_{s=N+1}^{r-N-1} \underset{s}{\bar{\bar{Q}}}(x, \nu')\underset{r-s}{\bar{\bar{P}}'}(x, \nu'),$$

$$\bar{\bar{P}}(x, \lambda', \mu', t)^{-1} \approx E + \sum_{r=N+1}^{\infty} \underset{r}{Q}(x, \nu')t^{-r}$$

ist, woraus, genau wie bei Art, 5,

$$\underset{r}{\bar{\bar{Q}}}(x, \nu') = -\underset{1}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu') + \Sigma_r d_r \underset{l1}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu') \ldots\ldots \underset{l_r}{\bar{\bar{P}}}(x, \nu'), \ (r = N + 1, \ldots\ldots)$$

folgt. Bestimmt man also $\underset{N+1}{\overline{\overline{p}}}_{jj}(x, \nu')$ durch

$$\underset{N+1}{\overline{\overline{P}}}'(x, \nu') = \theta' \ K'_{N+m_0+1} \underset{N+m_0+1}{\overline{B}}(x, \nu'),$$

d. h. durch

$$\underset{N+1}{\overline{\overline{p}}}_{jj}(x, \nu) = \int_{x_j}^{x} \theta' \, K'_{N+m_0+1} \underset{N+m_0+1}{\overline{b}_{jj}}(x, \nu')\,dx, \tag{6. 9}$$

$$(j = 1, \ldots\ldots, n\,;\ \alpha \quad x_j \leqq \beta),$$

so muss aus (6. 8) $\underset{N+m_0+1}{\overline{\overline{b}}_{jj}}(x, \nu') = 0$ folgen. Da es nach Voraussetzung und Hilfssetz 14

$$\theta' \ K'_{N+m_0+1} \underset{N+m_0+1}{\overline{B}}(x, \nu') = K'_{N+1,1} \underset{N+1}{\hat{B}}(x, \nu')$$

ist, wo $\underset{N+1}{\hat{B}}(x, \nu') \in \overline{R}'$ ist, wo wird (6. 9) zu

$$\underset{N+1}{\overline{\overline{p}}}_{jj}(x, \nu') = K'_{N+1,1} \underset{N+1}{\hat{b}_{jj}}(x, \nu'),$$

wo

$$\underset{N+1}{\hat{b}_{jj}}(x, \nu') = \int_{x_j}^{x} \underset{N+m_0+1}{\overline{b}_{jj}}(x, \nu')\,dx \in \overline{R}', (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

ist.

Wir setzen nun voraus, dass man nach (6. 8) $\underset{r}{\overline{P}}(x, \nu), (r = N + 1, \ldots\ldots, n)$ aufeinander so bestimmen kann, dass $\underset{r}{\overline{B}}(x, \nu) = 0, (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots, n + m_0)$ ist, und dass es für $r = N + 1, \ldots\ldots, n$

$$\underset{r}{\overline{p}}_{jj}(x, \nu') = K'_{r,1} \underset{r}{\hat{b}_{jj}}(x, \nu), \ \underset{r}{\hat{b}_{jj}}(x, \nu') \in \overline{R}', \ (j = 1, \ldots\ldots n) \tag{6. 10}$$

ist. Da andererseits

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pol}\,(\underset{n-N}{\overline{\overline{P}}}(x, \nu'), \underset{n-N}{P'}(x, \nu'))\\
&= - \sum_{s=N+1}^{n-N} \underset{s}{\overline{Q}}(x, \nu) \underset{n-s+1}{\overline{\overline{P}}'}(x, \nu')\\
&= - \sum_{s=N+1}^{n-N-1} (- \underset{s}{\overline{\overline{P}}}(x, \nu') + \Sigma_s\, \alpha_s \underset{l_1}{\overline{\overline{P}}}(x, \nu') \ldots\ldots \underset{l_s}{\overline{P}}(x, \nu')) \underset{n-s+1}{\overline{\overline{P}}'}(x, \nu')\\
&= - \sum_{s=N+1}^{n-N-1} (- K'_{s,1} \underset{s}{\hat{B}}(x, \nu') + \Sigma_s\, \alpha_s K'_{l_1} \underset{l_1}{\hat{B}}(x, \nu') \ldots\ldots K'_{ls} \underset{ls}{\hat{\hat{B}}}(x, \nu'))K'_{n-s+1,1} \underset{n-s+1}{\dot{B}'}(x, \nu)\\
&= - \sum_{s=N+1}^{n-N-1} (- \underset{s}{\hat{B}}(x, \nu') + \Sigma_s\, \alpha_s \underset{l_1}{\hat{B}}(x, \nu'), \ldots\ldots \underset{ls}{B}(x, \nu)\, \nu^{k}) \underset{n-s}{\hat{\hat{B}}}(x, \nu')\, K'_{n+1,1}
\end{aligned}$$

$$= \underset{n+1}{\hat{\hat{P}}}(x, \nu) K'_{n+1,1}$$

ist, wo $\underset{n+1}{\hat{\hat{P}}}(x, \nu') \in \overline{R}'$ ist, und es nach Voraussetzung und Hilfssatz 14

$$\theta' K'_{n+m_0+1} \underset{n+m_0+1}{B}(x, \nu) = K'_{n+1,1} \underset{n+1}{\hat{B}}(x, \nu'),$$

wo $\underset{n+1}{\hat{B}}(x, \nu') \in \overline{R}'$ ist, gilt, so muss $\underset{n+m_0+1}{\overline{\overline{B}}}(x, \nu') = 0$ sein, wenn man $\underset{n+1}{\overline{\overline{p}}}_{jj}(x, \nu)$ durch

$$\underset{n+1}{\overline{\overline{p}}}_{jj}(x, \nu') = K'_{n+1,1} \int_{x_j}^{x} (\underset{n+1}{\hat{b}}_{jj}(x, \nu) + \underset{n+1}{\hat{\hat{p}}}_{jj}(x, \nu'))\, dx$$

$$= K'_{n+1,1} \underset{n+1}{\hat{\hat{b}}}_{jj}(x, \nu'), \ (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

bestimmt, wo

$$\underset{n+1}{\hat{\hat{b}}}_{jj}(x, \nu') \in \overline{R}', (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

ist. Daher kann man durch vollständige Induktion beweisen, dass man $\underset{r}{P}(x, \nu)$, $(r = N + 1, \ldots\ldots)$ aufeinander so bestimmen kann, dass

$$\underset{r}{B}(x, \nu') = 0, \ (r = N + m_0 + 1, \ldots\ldots)$$

ist, wobei (6. 10) für $r = N + 1, \ldots\ldots$ gilt.

Daher wird (6. 7) zu:

$$d\overline{\overline{Z}}/dx = t^{m_0} F(x, \lambda, \mu', t)\overline{\overline{Z}},$$

woraus durch die Transformation (6. 3)

$$d\overline{Z}/dx = \theta\ F(x, \lambda, \mu)\overline{\overline{Z}}$$

folgt. Die (6. 3) und (6. 6) nach (6. 2) werden bzw. zu:

$$Z = \overline{P}(x, \lambda, \mu)\overline{Z},\ \overline{P}(x, \lambda, \mu) \approx E + \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r \underset{r}{\overline{P}}(x, \nu),\ \underset{r}{\overline{P}}(x\ \nu) \in \overline{F},$$

$$\overline{Z} = \overline{\overline{P}}(x, \lambda, \mu)\overline{\overline{Z}},\ \overline{P}(x, \lambda\ \mu,) \approx E + \sum_{r=N+1}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{\overline{\overline{P}}}(x, \nu'), \underset{r}{\overline{\overline{P}}}(x, \nu) \in \overline{R},$$

woraus

$$Z = \overline{P}(x, \lambda, \mu)\overline{P}(x, \lambda, \mu)\overline{\overline{Z}},$$

$$\overline{P}(x, \lambda, \mu)\overline{\overline{P}}(x, \lambda, \mu) \approx E + \sum_{r=N+1}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{P^*}(x, \nu)$$

folgt, wo $\underset{r}{P^*}(x, \nu) \in \overline{\overline{R}}$ ist. Daher besitzt die (6. 1) die folgende formale Lösung:

$$(6.\ 11)\qquad z_j \approx \exp(F_k(x,\ \lambda,\ \mu))\left(1+\sum_{r=N+1}^{\infty} K_{r,1}\underset{r}{p^*_{jk}}(x,\ \nu)\right),\ (j=1,\ldots\ldots n)$$

wo

$$F_k(x,\ \lambda,\ \mu)=\theta\int f_k(x,\ \lambda,\ \mu)\,dx,$$

ist.

Daher erhält man folgenden

HILFSSATZ 19. *Wenn die Differentialgleichung* (6. 1) *die Voraussetzungen* (i), (ii) *und* (iii) *vergnügt, so besitzt* (6. 1) *eine formale Lösung von der Gestalt* (6. 11).

Wir sagen, dass (6. 1) bzw. die Eigenschaften $[F]$ und $[B]$ besitzt, wenn es für (6. 1) bzw. die Voraussetzungen (i) und (ii) gelten.

7. Existenzsatz I. Nochmals denken wir uns (6. 1), d. h.

$$(7.\ 1)\qquad dZ/dx=\theta(F(x,\ \lambda,\ \mu)+B(x,\ \lambda,\ \mu))Z,$$

welche die Eigenschaften $[F]$ und $[B]$ besitzt. Ferner stellt man die folgenden Voraussetzungen :

(i) Es gilt die Voraussetzung (iii) von Hilfssatz 19.

(ii) Es gilt

$$\Re_r f_j(x,\ \lambda,\ \mu)\begin{cases}\geqq 0,\ (\alpha\leqq x\leqq x_j,\ \Delta_0\ j=1,\ldots\ldots,n),\\ \leqq 0,\ (x_j\leqq x\leqq\beta,\ \Delta_0, j=1,\ldots\ldots n).\end{cases}$$

(iii) Die (7. 1) besitzt eine formale Lösung der Gestalt

$$(7.\ 2)\qquad z_j\approx\sum_{r=0}^{\infty}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots,n),$$

wo $\underset{r}{p_j}(x,\ \nu)\in\bar{R}$ ist.

Wendet man die Transformation

$$(7.\ 3)\qquad z_j=\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu)+u_j,(j=1,\ldots\ldots,n)$$

auf (7. 1) an, wo M eine später zu bestimmende natürliche Zahl ist, so geht (7. 1) in

$$(7.\ 4)\qquad du_j/dx=\theta f_j(x,\ \lambda,\ \mu)u_j+\sum_{k=1}^{n}\theta\, b_{jk}(x,\ \lambda,\ \mu)\,u_k + b_j(x,\ \lambda,\ \mu),\ (j=1,\ldots\ldots,n)$$

über, worin

$$(7.\ 5)\qquad b_j(x,\ \lambda,\ \mu)=\theta\ f_j(x,\ \lambda,\ \mu)\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\theta\, b_{jk}(x,\ \lambda,\ \mu)\Big(\sum_{r=0}^{M+N+1} K_{r,1}\, \underset{r}{p}_k(x,\ \nu)\Big)-\sum_{r=0}^{M+N+1} K_{r,1}\, \underset{r}{p}'_j(x,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots,n)$$

ist. Nach Hilfssatz 16 und der Eigenschaft $[B]$ gilt

$$\theta\, b_{jk}(x,\ \lambda,\ \mu)\simeq\sum_{r=N+1}^{\infty} K_{r,1}\, \underset{r}{b}^{*}_{jk}(x,\ \nu),\ (j,\ k=1,\ldots\ldots,n), \tag{7. 6}$$

wo $\underset{r}{b}^{*}_{jk}(x,\ \nu)\in\overline{R}$ ist, woraus nach (iv) von Hilfssatz 11 und (7. 5)

$$b_j(x,\ \lambda,\ \mu)\simeq\theta\sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1}\, \underset{r}{\hat{b}}_j(x,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots,n) \tag{7. 7}$$

folgt, wo $\hat{b}_j(x,\ \nu)\in\overline{R}$ ist. Es ist klar dass

$$u_j\approx\sum_{r=M+N+2}^{\infty} K_{r,1}\, \underset{r}{p}_j(x,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots n) \tag{7. 8}$$

eine formale Lösung von (7. 4) ist.

Man nimmt die Existenz einer hinreichend grossen positiven Zahl M_0 von der Art an, dass zwei folgende Bedingungen gelten.

(a) Es ist M_0+N+2 ein Multiplum von N_0, und $M_0+N+2>m_0$.

(b) n_2 und n'_2 sind voneinander prime und natürliche Zahlen, und sie werden durch $n'_2/n_2=\overline{\overline{\delta}}_1/\overline{\overline{\delta}}_2$ gegeben, wobei

$$\overline{\overline{\delta}}_1=\frac{\overline{\delta}_1(M_0+N+2)-m}{M_0+N+2-m_0},\ \overline{\overline{\delta}}_2=\frac{\overline{\delta}_2(M_0+N+2)+m'}{M_0+N+2-m_0}$$

ist. Wie bei Hilfssatz 13 kann man nach $\overline{\delta}_1(M_0+N+2)-m,\ \overline{\delta}_2(M_0+N+2)+m'>0$ und (a)

$$\frac{n}{n}<\frac{\overline{\delta}_1(M_0+N+2)-m}{\overline{\delta}_2(M_0+N+2)+m'}\leqq\frac{n'_1}{n_1}$$

beweisen.

Dann nach Hilfssatz 13 lässt sich $\theta\ u_j$ für eine natürliche Zahl M mit $M\geqq M_0$ folgendermassen formell entwickeln:

$$\theta\ u_j\approx\sum_{r=M+N+2-m_0}^{\infty} K_{r,2}\, \underset{r}{\hat{p}}_j(x,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots,n),$$

worin $\underset{r}{\hat{p}}_j(x,\ \nu)\in\overline{R},\ K_{r,2}=K_r(n,\ n\ ;\ n_2,\ n'_2;\ \lambda,\ \mu)$ ist, woraus

$$\theta f_j(x,\ \lambda,\ \mu)u_j(x,\ \lambda,\ \mu)\approx\sum_{r=M+N+2-m_0}^{\infty} K_{r,2}\, \underset{r}{\hat{\hat{p}}}_j(x,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots,n) \tag{7. 9}$$

folgt, wo $\underset{r}{\hat{\hat{p}}}_j(x,\ \nu)\in\overline{R}$ ist. Aus (7. 6) und (7. 8) folgen bzw.

$$\theta\, b_{jk}(x,\ \lambda,\ \mu)u_j(x,\ \lambda,\ \mu)\approx\sum_{r=M+2N+3}^{\infty} K_{i,2}\, \underset{r}{\hat{\hat{\hat{p}}}}_j(x,\ \nu),\ (j,k=1,\ldots\ldots,n) \tag{7. 10}$$

und

$$(7.\ 11)\qquad du_j/dx \approx \sum_{r=M+N+2}^{\infty} K_{r,2} \underset{r}{\hat{p}'_j}(x,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots,n),$$

wo $\underset{r}{p_{jk}}(x,\ \nu)$ und $\underset{r}{\hat{p}'_j}(x,\ \nu) \in \overline{R}$ ist, und daher aus (7. 7), (7. 9), (7. 10) und (7. 11) folgt sogleich

$$(7.\ 12)\qquad b_j(x,\ \lambda,\ \mu) \simeq \sum_{r=M+N+2-m_0}^{\infty} K_{r,2}\, \underset{r}{b_j}(x,\ \nu),\ \underset{r}{b_j}(x,\ \nu) \in \overline{R},\ (j=1,\ldots\ldots n).$$

Nach (7. 6) und (7. 12) erhält man die folgende Abschätzungen:

$$(7.\ 13)\qquad \begin{cases} |\theta\, b_{jk}(x,\ \lambda,\ \mu)| \leqq \overline{K}\, \delta^{N+1} & ,\ I\Delta,\ (j,k=1,\ldots\ldots,n), \\ |b_j(x,\ \lambda,\ \mu)| \leqq H\, \overline{\delta}^{M+N+2-m_0}, & I\Delta,\ (j=1,\ldots\ldots,n), \end{cases}$$

worin H eine hinreichend grosse positive Zahl ist.

Führt man die Transformation

$$(7.\ 14)\qquad u_j = v_j \exp(F_j(x,\ \lambda,\ \mu)),\ (j=1,\ldots\ldots,n)$$

in (7. 4) ein, so geht (7. 4) ins Folgende über:

$$(7.\ 15)\qquad dv_j/dx = \sum_{k=1}^{n} \theta\, b_{jk}(x,\ \lambda,\ \mu)\, e^{F_k-F_j}\, v_k + b_j(x,\ \lambda,\ \mu) e^{-F_j},$$
$$(j=1,\ldots\ldots n)$$

Setzt man nun

$$G_j(x,\ \lambda,\ \mu) = \overline{\overline{\delta}}^{M+N+2-m_0} \exp(-\Re F_j(x,\ \lambda,\ \mu) + |x-x_j|),\ (j=1,\ldots\ldots,n),$$

so kann man folgendermassen beweisen, dass es eine hinreichend grosse positive Zahl L die Ungleichung

$$(7.\ 16)\qquad L \operatorname{sgn}(x-x_j) \frac{\partial G_j}{\partial x} > \Big(\sum_{k=1}^{n} LK\, \overline{\delta}^{N+1} e^{|x-x_k|} + H\Big) e^{-\Re F_j}\, \overline{\overline{\delta}}^{M+N+2-m_0}\, I\Delta,$$
$$(j=1,\ldots\ldots,n)$$

gilt. Denn da es z. B. für $x > x_j$ die folgenden Ungleichungen gelten:

Die linke Seite von (7. 16) $\geqq L\, \overline{\overline{\delta}}^{M+N+2-m_0}\, e^{-\Re F_j}$, $(j=1,\ldots\ldots,n)$,

Die rechte Seite von (7. 16) $\leqq (nLK\, \overline{\delta}^{N+1}\, e^{\beta-\alpha} + H)\, e^{-\Re F_j}\, \overline{\overline{\delta}}^{M+N+2-m_0}$,
$(j=1,\ldots\ldots n)$,

so genügt es zu zeigen, dass $L(1-nK\, \overline{\delta}^{N+1}\, e^{\beta-\alpha}) > H$, d. h.

$$(7.\ 17)\qquad L > nLK\, \overline{\delta}^{N+1}\, e^{\beta-\alpha} + H$$

gilt. Es ist klar, dass (7. 17) für eine hinreichend grosse positive Zahl L gilt, wenn man R hinreichend gross annehmen, so dass $nK\, \overline{\delta}^{N+1}\, e^{\beta-\alpha} < 1$ ist.

Daher muss eine Lösung von (7. 15), welche die Anfangsbedingung

$$v_j(x_j) = v_j^0, \ (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

erfüllt, wo

$$|v_j^0| \leqq LG_j(x_j, \lambda, \mu), \ (j = 1, \ldots\ldots n)$$

ist, der folgenden Ungleichung genügen:

$$|v_j| \leqq LG_j(x, \lambda, \mu), \ (j = 1, \ldots\ldots, n). \tag{7. 18}$$

Ohne Schwierigkeit wird es folgendermassen gezeigt, dass solch eine Lösung von (7. 15), eindeutig ist.

Es seien v_j und $\hat{v}_j$ zwei derartige Lösungen von (7. 15), so muss es für $w_j = v_j - \hat{v}_j$

$$dw/dx = \sum_{k=1}^{n} \theta\, b_{jk}(x, \lambda, \mu)\, e^{F_k - F_j} w_k, \ w(x_j) = 0, \ (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

sein. Setzt man

$$\bar{L} = \mathrm{Max}\,(|w_j| G_j(x, \lambda, \mu)) \tag{7. 19}$$

und setzt man $\bar{L} > 0$ voraus, so gilt

$$L \,\mathrm{sgn}\,(x - x_j) \frac{\partial G_j}{\partial x} \tag{7. 20}$$

$$> \sum_{k=1}^{n} \bar{L} K \bar{\delta}^{N+1} \exp(\{|x - x_k| - \Re F_j(x, \lambda, \mu)\}) \bar{\bar{\delta}}^{M+N+2-m_0}, \ (j = 1, \ldots\ldots, n).$$

Da andererseits nach (7. 13), (7. 19) und (7. 20)

$$\begin{aligned} |dw_j/dx| &\leqq \sum_{k=1}^{n} |\theta\, b_{jk}(x, \lambda, \mu)\, e^{\Re(F_k - F_j)}\, |w_k| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n} K \bar{\delta}^{N+1} e^{\Re(F_k - F_j)} \bar{L}\, G_k(x, \lambda, \mu) \\ &= \sum_{k=1}^{n} K \bar{\delta}^{N+1} e^{\Re(F_k - F_j)} \bar{L} \bar{\bar{\delta}}^{M+N+2-m_0} e^{-\Re F_k + |x - x_k|} \\ &< \bar{L} \,\mathrm{sgn}\,(x - x_j) \frac{\partial G_j}{\partial x} \end{aligned}$$

gilt, so hat man leicht $\bar{L} G_j(x, \lambda, \mu) > |w_j|$, $(j = 1, \ldots\ldots n)$, welche mit der Voraussetzungvon $\bar{L}$ im Widerspruch steht, woraus $\bar{L} \equiv 0$, d. h. $w_j \equiv 0$, $(j = 1, \ldots\ldots, n)$ folgt.

Wir können die Existenz von Funktionen $\varphi_j(\lambda, \mu)$ von der Art beweisen, dass $\varphi_j(\lambda, \mu) \in R$, $(j = 1, \ldots\ldots, n)$ ist und es sich folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt:

$$\varphi_j(\lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x_j, \nu), \ (j = 1, \ldots\ldots n). \tag{7. 21}$$

Aus (7. 21) und Hilfssatz 10 folgt

$$\begin{aligned}
&\Big|\varphi_j(\lambda,\ \mu)-\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x_j,\ \nu))\exp(-F_j(x_j,\ \lambda,\ \mu))\Big|\\
&\leqq K\bar{\delta}^{M+N+2}\exp(-\Re F_j(x_j,\ \lambda,\ \mu))\\
&\leqq K\bar{\delta}^{M+N+2}\exp(-\Re F_j(x_j,\ \lambda,\ \mu))\\
&\leqq K\bar{\delta}^{M+N+2-m_0}\exp(-\Re F_j(x_j,\ \lambda,\ \mu)),\ (j=1,\ldots\ldots n),
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
&|\varphi_j(\lambda,\ \mu)-\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x_j,\ \nu))\exp(-F_j(x_j,\ \lambda,\ \mu))|\\
&\qquad\leqq LG_j(x_j,\ \nu),\ (j=1,\ldots\ldots,n)
\end{aligned}$$

folgt, wenn man die Grösse L hinreichend gross annimmt.

Da die Lösung v_j von (7. 15), welche die folgende Anfangsbedingung erfüllt :

$$v_j(x_j)=(\varphi_j(\lambda,\ \mu)-\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x_j,\ \nu))\ \exp(-F_j(x_j,\ \lambda,\ \mu)),\quad (j=1,\ldots\ldots n),$$

die Ungleichung (7. 18) erfüllt, so muss die Lösung von (7. 1), welche der Anfangsbedingung

$$z_j(x_j)=\varphi_j(\lambda,\ \mu),\ (j=1,\ldots\ldots,n) \tag{7. 22}$$

genügt, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|(z_j-\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu))e^{-F_j}|\\
&\qquad\leqq L\,G_j(x,\ \lambda,\ \mu),\ I\Delta,\ (j=1,\ldots\ldots,n)
\end{aligned}$$

erfüllen, woraus

$$|z_j-\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu)|\leqq K\bar{\delta}^{M+N+2-m_0},\ I\Delta,(j=1,\ldots\ldots,n) \tag{7. 23}$$

folgt. Da

$$\begin{aligned}
&\Big|z_j-\sum_{r=0}^{M'+N+1}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu)\Big|\\
&\leqq\Big|z_j-\sum_{r=0}^{M'+N+1+m_0}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu)\Big|+\Big|\sum_{r=M'+N+2}^{M'+N+1+m_0}K_{r,1}\underset{r}{p_j}(x,\ \nu)\Big|\\
&\qquad(j=1,\ \ldots\ldots,n)
\end{aligned}$$

ist, so hat man

$$\left| z_j - \sum_{r=0}^{M'+N+1} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x,\ \nu) \right| \leqq K \overline{\overline{\delta}}^{M'+N+2} \text{für } I\Delta,\ (j=1, \ldots\ldots n),$$

wenn $M' + m_0 \geqq M_0$ ist. Man kann also für alle natürlichen Zahlen $\hat{N}$ mit $\hat{N} \geqq M_0 + N + 1 - m_0$ die folgende Ungleichung beweisen:

$$\left| z_j - \sum_{r=0}^{\hat{N}} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x,\ \nu) \right| \leqq K \overline{\overline{\delta}}^{\hat{N}+1} \text{für } I\Delta,\ (j=1, \ldots\ldots, n). \tag{7. 24}$$

Für alle natürlichen Zahlen $\hat{N}$ mit $\hat{N} < M_0 + N + 1 - m_0$ gilt

$$\begin{aligned} &\left| z_j - \sum_{r=0}^{\hat{N}} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x,\ \nu) \right| \\ \leqq &\left| z_j - \sum_{r=0}^{M_0+N+1-m_0} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x,\ \nu) \right| + \left| \sum_{r=\hat{N}+1}^{M_0+N+1-m_0} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x,\ \nu) \right| \\ \leqq &\ K \overline{\overline{\delta}}^{M_0+N+2-m_0} + K \overline{\overline{\delta}}^{\hat{N}+1},\ I\Delta,\ (j=1, \ldots\ldots, n) \end{aligned}$$

nach (7. 24), woraus folgt sogleich

$$\left| z_j - \sum_{r=0}^{\hat{N}} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x,\ \nu) \right| \leqq K \overline{\overline{\delta}}^{\hat{N}+1},\ I\Delta,\ (j=1, \ldots\ldots, n)$$

mit Hilfe von Hilfssatz 6.

Daher für alle natürlichen Zahlen N gilt

$$\left| z_j - \sum_{r=0}^{\hat{N}} K_{r,2} \underset{r}{p_j^*}(x,\ \nu) \right| \leqq K \overline{\overline{\delta}}^{\hat{N}+1},\ I\Delta,\ (j=1, \ldots\ldots, n)$$

nach Hilfssatz 5, wenn man $K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x,\ \nu)$ von neuem $K_{r,2} \underset{r}{p_j^*}(x,\ \nu)$ schreibt. Also besitzt (7. 1) eine eindeutige Lösung, welche die Anfangsbedingung (7. 21) erfüllt, und sich folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt:

$$z_j \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,2} \underset{r}{p_j^*}(x,\ \nu),\ (j=1, \ldots\ldots, n) \tag{7. 25}$$

Daher hat man folgenden

SATZ 2. *Wenn* (7. 1) *die Eigenschaften* [F], [B], *und die formale Lösung der Gestalt* (7. 2) *besitzt, und die Voraussetzungen* (i) *und* (ii) *gelten, so besitzt* (7. 2) *eine eindeutige Lösung, welche die Anfangsbedingung* (7. 22) *erfüllt, und sich für* (U) *in der rechten Seite von* (7. 25) *asymptotisch entwickeln lässt, wo* n_2 *und* n_2' *durch* (b) *gegeben werden.*

N. B. Wir sagen, dass (7. 1) die Eigenschaft [RF] besitzt, wenn für

(7. 1) die Voraussetzung (ii) gilt.

Von jetzt an sagen wir, dass (7. 1) für (U) die asymptotische Lösung hat, wenn es die Eigenschaften [F], [B], [RF] und die formale Lösung (7. 2) besitzt.

8. Existenzastz II. Wenn eine Differentialgleichung

$$dZ/dx = \theta(F(x, \lambda, \mu) + B(x, \lambda, \mu))Z \tag{8. 1}$$

die Eigenschaften [F] und [B] besitzt, so besitzt (8. 1) nach Hilfssatz 19 die formale Lösung der folgenden Gestalt:

$$z_j \approx \exp(F_k(x, \lambda, \mu)) \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x, \nu), \ (j = 1, \ldots\ldots n), \tag{8. 2}$$

wobei $\underset{r}{p_j}(x, \nu) \in \bar{R}, (j = 1, \ldots\ldots, n\,;\ r = 0, \ldots\ldots)$ ist.

Wendet man die Transformation

$$z_j = \exp(F_k(x, \lambda, \mu))\hat{z}_j, \ (j = 1, \ldots\ldots, n) \tag{8. 3}$$

auf (8. 1) an, so geht (8. 1) in

$$d\hat{Z}/dx = \theta(\hat{F}(x, \lambda, \mu) + \hat{B}(x, \lambda, \mu))\hat{Z}, \tag{8. 4}$$

wobei

$$\hat{F}(x, \lambda, \mu) = F(x, \lambda, \mu) - f_k(x, \lambda, \mu)E, \ \hat{B}(x, \lambda, \mu) = B(x, \lambda, \mu)$$

ist, welche offenbar eine formale Lösung

$$z_j \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{p_j}(x, \nu), \ (j = 1, \ldots\ldots, n) \tag{8. 5}$$

besitzt, wo $\underset{r}{p_j}(x, \nu) \in \bar{R}$ ist.

Setzt man nun für $F(x, \lambda, \mu)$ voraus, dass

$$\Re\,\theta(f_j(x, \lambda, \mu) - f_k(x, \lambda, \mu)) \geqq 0, \ (\alpha \leqq x \leqq x_j, \ \Delta_0, i = 1, \ldots\ldots, n),$$

$$\Re\,\theta(f_j(x, \lambda, \mu) - f_k(x, \mu, \mu)) \leqq 0, (x_j \leqq x \leqq \beta, \ \Delta_0, j = 1, \ldots\ldots, n)$$

gilt, so besitzt (8. 4) die Eigenschaften [F], [B] und [RF]. Da man also Satz 2 auf (8. 4) anwenden kann, so besitzt (8. 4) für (U) eine asymptotische Lösung

$$\hat{z}_j \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,2} \underset{r}{p_j^*}(x, \nu), \ (j = 1, \ldots\ldots n),$$

woraus nach (8. 3) folgt, dass (8. 1) auch für (U) eine asymptotische Lösung

$$z_j \simeq \exp(F_k(x, \lambda, \mu)) \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,2} \underset{r}{p_j^*}(x, \nu), \ (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

besitzt.

Man sagt dass (8. 1) die Eigenschaft [RF] besitzt, wenn (8. 4) die Eigenschaft [RF] besitzt. Man nimmt n_2 und n_2' von der Art an, dass (b) gilt.

Daher erhält man folgenden

SATZ 3. *Besitzt* (8. 1) *die Eigenschaften* [F], [B] und [RF], *so gibt es eine eindeutige asymptotische Lösung, welche sich in rechten Seite von* (8. 3) *asymptotisch entwickeln lässt.*

Von jetzt an sagen wir, der Einfachheit halber, dass (8. 1) unter den Eigenschaften [F], [B] und [RF] für (U) eine asymptotische Lösung besitzt.

Wenn eine Differentialgleichung

$$dY/dx = \theta A(x, \lambda, \mu)Y \tag{8. 5}$$

die Eigenschaften [A] und [A_0] besitzt, dann geht (8. 5) nach Hilfssatz 18 durch die passende Transformation

$$Y = P(x, \lambda, \mu)Z, \tag{8. 6}$$

wo

$$P(x, \lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r \underset{r}{P}(x, \nu), \quad \underset{r}{P}(x, \nu) \in \overline{R}, \quad \underset{0}{P}(x, \nu) = E$$

ist, in

$$dZ/dx = \theta(F(x, \lambda, \mu) + B(x, \lambda, \mu))Z \tag{8. 7}$$

über. Da (8. 7) sicher die Eigenschaften [F] und [B] besitzt, wo besitzt (8. 7) nach Satz 3 für (U) eine asymptotische Lösung, wenn (8. 7) ferner die Eigenschaft [RF] besitzt, woraus nach (8. 6) für (U) eine asymptotische Lösung von (8. 5) folgt.

Wir sagen, dass (8. 5) die Eigenschaft [RF] besitzt, wenn (8. 7) die Eigenschaft [RF] besitzt.

Daher erhalt man folgenden

SATZ 4. *Die* (8. 5) *besitzt für* (U) *eine asymptotische Lösung der Gestalt*

$$y_j \simeq \exp(F_k(x, \lambda, \mu)) \sum_{r=0}^{\infty} K_{r\ 2}\underset{r}{p_j^*}(x, \nu), \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

wenn (8. 5) *die Eigenschaften* [A], [A_0] und [RF''] *besitzt.*

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. HUKUHARA, Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre, Memo. Fac. Eng. Kyûshû Imp. Univ. 8(1937), 249-280.

[2] C. C. HURD, A symptotic theory of linear differential equations singular in the variable of differentiation and in a parameter, Tôhoku Math. Journ. 44(1938), 243-274.

[3] C. C. HURD, Asymptotic theory of linear differential equations containing two parameters, Tôhoku Math. Journ. 45(1938), 58-68.

[4] K. TAKAHASHI, Ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche auf zwei Parametern abhängen, Tôhoku Math. Journ. 8(1956), 258–267.
[5] K. TAKAHASHI, Über die erweiterte asymptotische Darstellung der Lösung eines Systems von homogenen linearen Differentialgleichungen, welche auf zwei Parametern abhängen, Tôhoku Math. Journ. 10(1958), 172–193.

Universität der Landwirtschaft und Technologie zu Tokio.