

## **Bibliografische Information**

Witte, H.: Eine Produktionsfunktion für Logistikunternehmen, in: Zeszyty Naukowe (Wissenschaftliche Zeitschrift (der Universität Szczecin)), Nr. 628, Problemy Transportu I Logistyki (Transport- und Logistikprobleme), Nr. 13 (2010), S. 355 – 375 (ISBN 16406818)

# Eine Produktionsfunktion für Logistikunternehmen

Hermann Witte<sup>1</sup>

## 1. Einleitung

Die in Logistikunternehmen ablaufenden Produktionsprozesse können durch Produktionsfunktionen abgebildet werden. Die Produktionsfunktionen geben die Beziehung zwischen Input und Output bzw. Produktionsfaktoren und Endprodukt wieder. Entsprechend der Unterschiedlichkeit der vielen in der Praxis vorkommenden Produktionsprozesse ist in der ökonomischen Literatur auch eine Vielzahl von Produktionsfunktionen bekannt, die prinzipiell für die Abbildung der Produktionsprozesse in Logistikunternehmen herangezogen werden können. Um eine für Logistikunternehmen geeignete Produktionsfunktion zu finden, ist ein Überblick über die bekannten Produktionsfunktionen zu geben. Einige ausgewählte Produktionsfunktionen sind zudem intensiver zu erörtern.

Die Entwicklung der Produktionsfunktionen beginnt mit der Betrachtung landwirtschaftlicher Produktionsprozesse (Turgot 1727 - 1781, v. Thünen 1783 – 1859).<sup>2</sup> Später wurden dann Produktionsfunktionen für industrielle Produktionsprozesse<sup>3</sup> und die Produktion von Dienstleistungen<sup>4</sup> entwickelt.

Die bekannteste und wohl auch die meist diskutierte Produktionsfunktion dürfte die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion<sup>5</sup> sein. Aus der Diskussion dieser Produktionsfunktion entstand eine Vielzahl von ähnlichen Produktionsfunktionen.<sup>6</sup> Daher soll in diesem Rahmen vor allem auf die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion Bezug genommen werden.

---

1 Dr. Hermann Witte, Professor für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Logistik und Umweltökonomie, Department für Management und Technik, Lingen/Germany

2 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, Tübingen 1969, S. 16

3 Vgl. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Bd.: Die Produktion, 10. Aufl., Berlin u.a. 1965, S. 314 ff.

4 Vgl. Corsten, H.: Betriebswirtschaftslehre der Dienstleistungsunternehmen, 2. Aufl., München, Wien 1990, S. 118 – 170; Fandel, G./Blaga, S.: Aktivitätsanalytische Überlegungen zu einer Theorie der Dienstleistungsproduktion, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Ergänzungsheft 1/2004, S. 1 - 21

5 Vgl. Cobb, C.W./Douglas, P.H.: A Theory of Production, in: American Economic Review, Vol. XVIII (1928), Supplement, S. 139 – 165

6 Vgl. Scheper, W.: Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 117 (1965), S. 1 – 21

Die Vielzahl der in der Literatur bekannten Produktionsfunktionen wird nach unterschiedlichen Kriterien gegliedert. Man unterscheidet zwischen klassischen und nichtklassischen Produktionsfunktionen.<sup>7</sup> Man teilt die Produktionsfunktionen entsprechend dem Einsatz oder der Eigenschaften der Produktionsfaktoren in verschiedene Typen, A – F<sup>8</sup>, oder in limitationale und substitutionale Produktionsfunktionen ein.<sup>9</sup> Linde unterscheidet drei Klassen von Produktionsfunktionen.<sup>10</sup> Die Klasse a (a1 – a5) stellt den Zusammenhang zwischen Ergebnis und Einsatzmengen einzelner Produktionsfaktoren als Abgrenzungskriterium heraus. Die Klasse b (b1 – b3) geht bei der Abgrenzung vom Zusammenhang zwischen Ergebnis und Einsatzmengen aller Produktionsfaktoren aus. Die Klasse c (c1 – c3) zieht für die Abgrenzung den Zusammenhang von Einsatzmenge und Grenzproduktivität der Produktionsfaktoren heran.

In Anlehnung an die Betrachtungsebenen der Betriebswirtschaftslehre und die Gruppierung der Orientierungsgrößen der Betriebswirtschaft in mengenmäßige (z.B. die Produktivität), zeitliche (z.B. die Produktionsgeschwindigkeit) und wertmäßige Größen (z.B. die Wirtschaftlichkeit) kann auch eine Analyse der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge auf diesen Betrachtungsebenen erfolgen. Es ist dann zwischen mengenbezogenen,<sup>11</sup> zeitbezogenen<sup>12</sup> und wertbezogenen bzw. monetär ausgerichteten Produktionstheorien bzw. -funktionen zu unterscheiden.

In diesem Rahmen soll von der mengen-, zeit- und wertmäßigen Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge in Logistikunternehmen ausgegangen werden, um die Anwendbarkeit verschiedener Produktionsfunktionen für Logistikunternehmen zu prüfen.

---

7 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 22 f.

8 Vgl. Wöhe, G.: Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 19. Aufl., München 1996, S. 512 – 532; Jung, H.: Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, München, Wien, 2. Aufl. 1996, S. 424 - 431, 438 – 439

9 Vgl. Fandel, G.: Produktion I – Produktions- und Kostentheorie, 6. Aufl., Berlin u.a. 2005, S. 56; Förstner, K.: Betriebs- und volkswirtschaftliche Produktionsfunktionen, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 32 (1962), S. 264 – 282, hier S. 266

10 Vgl. Linde, R.: Produktion II: Produktionsfunktionen, in: HdWW, 6. Bd., Stuttgart u.a. 1981, S. 276 – 295, hier S. 278

11 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 33 f.

12 Vgl. Böhm-Bawerk, E.v.: Kapital und Kapitalzins, 2. Abt.: Positive Theorie des Kapitals, Innsbruck 1889 (Faksimile-Ausgabe 1991), S. 81 – 97

## 2. Die mengenbezogenen Produktionsfunktionen

Die mengenmäßige Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge ist in der ökonomischen Literatur dominant. Als Beispiel sei auf die Produktionstheorie von Krelle<sup>13</sup> verwiesen. Die mengenmäßige Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge bietet sich an, da die mengenmäßige Beziehung zwischen eingesetzten Produktionsfaktoren und erzieltm Endprodukt im primären Interessenfeld der Produktionsplanung steht:

$$(1) \quad x = f(r_1, \dots, r_n)$$

mit

$x$  = Endproduktmenge

$r_1, \dots, r_n$  = Produktionsfaktoren 1 bis  $n$

Ohne Kenntnis dieser mengenmäßigen Beziehung ist eine Produktionsplanung nicht denkbar.

Gutenberg<sup>14</sup> beschreibt den industriellen Produktionsprozess als Leistungserstellung, die auf der mengenmäßigen Beziehung Faktorertrag zu Faktoreinsatz beruht. Diese Beziehung nennt er eine Produktivitätsbeziehung, die durch eine Produktionsfunktion dargestellt werden kann. Diese Aussage verdeutlicht, dass eine mengenbezogene Produktionsfunktion aus der Produktivität, die formal als Beziehung von Output zu Input dargestellt wird, abgeleitet werden kann:

$$(2) \quad P = O / I \quad \rightarrow \quad O = P \bullet I \quad \rightarrow \quad x = f(r_1, \dots, r_n)$$

mit

$P$  = Produktivität

$O$  = Outputmenge

$I$  = Inputmenge

$x$  = Endproduktmenge

$r_1, \dots, r_n$  = Produktionsfaktoren 1 bis  $n$

Zu den mengenbezogenen Produktionsfunktionen zählen u.a. die klassischen (ertragsgesetzlichen) Produktionsfunktionen, die auch als Produktionsfunktionen vom Typ A bezeichnet werden, und die neoklassischen Produktionsfunktionen sowie die Walras-Leontief-Produktionsfunktionen.<sup>15</sup>

---

13 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie

14 Vgl. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, S. 290

15 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 23 ff.; Leontief, W.W.: The Structure of American Economy, 1919 – 1939, 2. Aufl., New York 1951, S. 34 – 41

Die rein mengenmäßige Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge wird bei komplexen Produkten, die aus der Kombination sehr vieler Produktionsfaktoren entstehen, sehr aufwendig und eventuell auch unübersichtlich. Aus diesem Grund wird häufig die „ceteris paribus-Kausel“ angewandt. Es wird lediglich die Beziehung zwischen dem Endprodukt und einem Produktionsfaktor betrachtet und die anderen Produktionsfaktoren konstant gehalten:

$$(3) \quad x = f(r_1) \quad r_2, \dots, r_n = \text{konstant}$$

mit

$x$  = Endproduktmenge

$r_1, \dots, r_n$  = Produktionsfaktoren 1 bis  $n$

Eine andere Möglichkeit zur Reduzierung der Komplexität der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge ist die Berücksichtigung von zwei Produktionsfaktoren, die als Integrationsfaktoren der anderen Produktionsfaktoren fungieren. Zwei Produktionsfaktoren, die als Integrationsfaktoren angesehen werden, sind die Arbeitsmenge und das eingesetzte reale Kapital:

$$(4) \quad x = f(A; K)$$

mit

$x$  = Endproduktmenge

$A$  = Arbeitsmenge

$K$  = eingesetztes (reales) Kapital

Eine Produktionsfunktion, die diese beiden Produktionsfaktoren berücksichtigt, ist die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion.<sup>16</sup> Der Nachteil dieser Möglichkeit der Reduzierung der Komplexität der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge ist, dass keine rein mengenmäßige Betrachtung der Zusammenhänge erfolgt. Es werden die mengen- und wertmäßige Betrachtung miteinander vermischt. Dies gilt, da Kapital stets eine wertmäßige Betrachtung impliziert. Um sich der Vermischung von mengen- und wertmäßiger Betrachtung zu entziehen, wird in empirischen Studien häufig auf Indexwerte zurückgegriffen.<sup>17</sup>

Als gutes Beispiel für neoklassische Produktionsfunktionen und die mengenbezogene Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge hebt Krelle<sup>18</sup> die landwirtschaftli-

---

16 Vgl. Cobb, C.W./Douglas, P.H.: A Theory of Production, S. 139 - 165; Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 156

17 Vgl. u.a. Cobb, C.W./Douglas, P.H.: A Theory of Production, S. 140

18 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 33 f.

che Produktion hervor und verweist dabei auf eine Studie von Laur.<sup>19</sup> Da auch Logistikunternehmen ihre Produktionsleistung mit den beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital erstellen, kann von einer Anwendbarkeit der mengenmäßigen Produktionsfunktion und insbesondere der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion für diese Unternehmensgruppe ausgegangen werden.

### 3. Die zeitbezogenen Produktionsfunktionen

Die zeitmäßige Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge führt u.a. zur zeitlichen Produktionstheorie von Böhm-Bawerk<sup>20</sup> und zur zeitbezogenen Produktionsfunktion.<sup>21</sup>

$$(5) \quad x = x(\tau|A, B)$$

mit

$x$  = Endproduktmenge

$A$  = Arbeitsmenge

$B$  = Bodenmenge

$\tau$  = in Zeiteinheiten gemessene Länge des Produktionsumweges

Ausgangspunkt dieser Theorie ist die Aussage, dass bei gegebener Menge der Produktionsfaktoren Arbeit und Boden<sup>22</sup> die Endproduktmenge vom Produktionsumweg abhängt.<sup>23</sup> Mit längerem Produktionsumweg steigt die Endproduktmenge an. Es gilt allerdings ein zeitliches Ertragsgesetz.<sup>24</sup> Der Zuwachs der Endproduktmenge sinkt ab einem bestimmten Punkt wieder mit steigender Länge des Produktionsumweges.<sup>25</sup> Dabei ist unter der Länge des Produktionsumweges die Dauer vom Einsatz der Produktionsfaktoren bis zur Fertigstellung des Endproduktes zu verstehen und als Maß für die Kapitalintensität der Produktion zu interpretieren.<sup>26</sup>

Die zeitliche Produktionstheorie von Böhm-Bawerk und die auf dieser Theorie basierende Produktionsfunktion können nicht als rein zeitliche Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge angesehen werden. Es handelt sich, wie aus der Produktionsfunktion

---

19 Vgl. Laur, E.: Wirtschaftslehre des Landbaus, 2. Aufl., Berlin 1930, S. 143

20 Vgl. Böhm-Bawerk, E.v.: Kapital und Kapitalzins, S. 81 – 97

21 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 63

22 Vgl. Böhm-Bawerk, E.v.: Kapital und Kapitalzins, S. 84 f.

23 Vgl. Böhm-Bawerk, E.v.: Kapital und Kapitalzins, S. 87, 89, 90 ff.

24 Vgl. Böhm-Bawerk, E.v.: Kapital und Kapitalzins, S. 97

25 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 63

26 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 64

zu ersehen ist, um eine Vermischung von mengenmäßiger und zeitlicher Betrachtung. Wendet man auf diese gemischte Betrachtungsweise die obige Aussage von Gutenberg an, so kommt man zu folgender Aussage: der industrielle Produktionsprozess ist eine Leistungserstellung, die auf der mengenmäßigen und zeitlichen Beziehung Faktorertrag zu Faktoreinsatz beruht. Diese Beziehung ist die um die zeitliche Betrachtung erweiterte Produktivitätsbeziehung, die durch eine mengen- und zeitbezogene Produktionsfunktion dargestellt werden kann. Diese Aussage verdeutlicht, dass eine mengen- und zeitbezogene Produktionsfunktion aus der Produktivität pro Zeit, die formal als Beziehung von Output pro Zeit zu Input pro Zeit dargestellt wird, abgeleitet werden kann:

$$(6) \quad P / t = (O / t) / (I / t) \quad \rightarrow \quad O / t = (P / t) \bullet (I / t) \quad \rightarrow \quad x / t = f(r_1, \dots, r_n) / t$$

mit

P = Produktivität

O = Outputmenge; mit  $O / t =$  Produktionsgeschwindigkeit

I = Inputmenge

x = Endproduktmenge

$r_1, \dots, r_n =$  Produktionsfaktoren 1 bis n

t = Zeit

Die Auflösung der Gleichung (6) nach dem Output pro Zeit ergibt die Produktionsgeschwindigkeit. Diese Interpretation geht konform mit der Andlerschen Formel für die Bestimmung der optimalen Losgröße.<sup>27</sup> In dieser Formel wird der Output pro Zeit als Produktionsgeschwindigkeit bezeichnet.<sup>28</sup> Wendet man diese Erkenntnis auf die zeitliche Produktionstheorie von Böhm-Bawerk an, so lässt sich die auf dem Produktionsumweg gewonnene Endproduktmenge als Output pro Zeit und damit als Produktionsgeschwindigkeit interpretieren. Diese Interpretation geht konform mit der oben dargestellten von Krelle gegebenen Definition des Produktionsumweges, als Dauer, sprich der Zeit, bis aus Produktionsfaktoren das Endprodukt hergestellt ist. Die Definition der Produktionsgeschwindigkeit geht wiederum konform mit der physikalischen Definition der Geschwindigkeit als zurückgelegter Weg pro Zeit oder Leistung pro Zeit.

---

<sup>27</sup> Vgl. Andler, K.: Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München 1929, S. 100 - 104, 116 - 118, 135 - 138, 148; Küpper, H.-K./Helber, S.: Ablauforganisation in Produktion und Logistik, 3. Aufl., Stuttgart 2004, S. 178 ff.

<sup>28</sup> Vgl. u.a. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, S. 199, 205

Auch die von Gutenberg entwickelte Produktionsfunktion vom Typ B,<sup>29</sup> die auf einer Vielzahl von Verbrauchsfunktionen fundiert ist, basiert auf der Verknüpfung von mengenmäßiger und zeitlicher Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge. Für die Verbrauchsfunktionen werden die technischen Eigenschaften der Aggregate und die Intensität der Nutzung der Aggregate als Variablen herangezogen:

$$(7) \quad r_i = f_i(z_1, \dots, z_v; d)$$

mit

$r_i$  = Verbrauchsmenge Produktionsfaktor  $i$

$z_1, \dots, z_v$  = technische Eigenschaften des betrachteten Aggregates

$d$  = vom Aggregat verlangte Intensität

$i$  = Index der Produktionsfaktoren,  $i = 1, \dots, n$

$k$  = Index der technischen Eigenschaften des betrachteten Aggregates,  $k = 1, \dots, v$

Gutenberg geht für die Erstellung der Produktionsfunktion vom Typ B von zwei unterschiedlichen Annahmen aus. Zunächst wird die Produktionszeit (Laufzeit) des Aggregates als konstant angesehen.<sup>30</sup> Dann wird die Intensität als konstant gesetzt und die Produktionszeit als variabel angesehen:<sup>31</sup>

$$(8) \quad r_{ij} = g_{ij}(t_j)$$

mit

$r_{ij}$  = Verbrauchsmenge Produktionsfaktor  $i$  am Aggregat  $j$

$g_{ij}$  = technische Eigenschaften der Aggregate

$t_j$  = Produktionszeit des Aggregates  $j$

$i$  = Index der Produktionsfaktoren,  $i = 1, \dots, n$

$j$  = Index der betrieblichen Teileinheiten (Aggregate),  $j = 1, \dots, m$

Auch die zeitbezogenen Produktionsfunktionen können durchaus für die Abbildung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge in Logistikunternehmen benutzt werden.

---

29 Vgl. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, S. 314 ff.

30 Vgl. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, S. 320 ff.

31 Vgl. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, S. 323 ff.



#### 4. Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion kann als Produktionsfunktion mit  $n$  Produktionsfaktoren aufgefasst werden.<sup>32</sup> Dann lautet die formale Beziehung zwischen Output und Input (Produktionsfaktoren) wie folgt:

$$(9) \quad x = a_0 \cdot r_1^{a_1} \cdot r_2^{a_2} \cdot \dots \cdot r_n^{a_n}$$

mit

$x$  = Endproduktmenge

$r_1, \dots, r_n$  = Menge der Produktionsfaktoren 1 bis  $n$

$a_0$  = Produktionskoeffizient

$a_1, \dots, a_n$  = Produktionselastizitäten der Produktionsfaktoren 1,  $\dots$ ,  $n$

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist in dieser Form als rein mengenbezogene Produktionsfunktion zu interpretieren.

In der Regel wird die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion für die beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital formuliert<sup>33</sup>:

$$(10) \quad x = f(A^\alpha \cdot K^\beta) \quad \alpha + \beta = 1$$

mit

$x$  = Endproduktmenge

$A$  = Menge des Produktionsfaktors Arbeit

$K$  = Mengen des Produktionsfaktors Kapital

$\alpha$  = Produktionselastizität des Produktionsfaktors Arbeit

$\beta$  = Produktionselastizität des Produktionsfaktors Kapital

$\alpha + \beta$  = Skalanelastizität

Da die Menge des Produktionsfaktors Arbeit in Arbeitsstunden und die Menge des Produktionsfaktors Kapital in Geld gemessen werden, ist die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in dieser Form als gemischte, mengen- und wertbezogene Produktionsfunktion aufzufassen. Um die Nachteile dieser gemischten Betrachtungsweise der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge zu überwinden, schlagen Cobb und Douglas („..., it is of course necessary to construct indexes of the relative amounts of labor and capital ...“<sup>34</sup>) vor, die Werte für Arbeit

---

32 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 142

33 Vgl. Cobb, C.W./Douglas, P.H.: A Theory of Production, S. 151

34 Cobb, C.W./Douglas, P.H.: A Theory of Production, S. 140

und Kapital in Indexwerte umzurechnen. Auf diese Weise wird ein relativer, aber einheitlicher Betrachterstandpunkt hinsichtlich der beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital erreicht.

Dieser von Cobb und Douglas vorgeschlagenen Vorgehensweise wird bei empirischen Studien in der Regel auch gefolgt. Als Beispiel sei auf die Studien von Gehrig/Kuhlo<sup>35</sup> und Felipe/Adams<sup>36</sup> verwiesen.

Allerdings ist die Kritik an dieser Form der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, trotz der häufig empirisch aufgezeigten guten Approximation der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge aus volks- und betriebswirtschaftlicher Sicht, nicht unerheblich.

Die Kritik an der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion bezieht sich im Wesentlichen auf die folgenden Punkte:<sup>37</sup>

(1) Es gibt Schwierigkeiten bei der Aggregation der einzelnen Produktionsfunktionen zu einer gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion.<sup>38</sup> Konsequenz ist eine ungenaue Abbildung der betriebs- und volkswirtschaftlichen Interdependenzen in einer Volkswirtschaft.

(2) Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist eine robuste Funktion, die sich bei empirischen Studien als so flexibel erwiesen hat, dass sie Tatbestände abbildet, die theoretisch nicht überzeugend sind, wie z.B. Skalanelastizitäten größer als eins.<sup>39</sup> Ott hat die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion daher als „eine Wunderfunktion“ bezeichnet, die es erlaubt, trotz „grauenhafter Annahmen ordentliche Ergebnisse“<sup>40</sup> zu generieren.

---

35 Vgl. Gehrig, G./Kuhlo, K.C.: Ökonometrische Analyse des Produktionsprozesses, in: Ifo-Studien, 7. Jg. (1961), S. 175 – 237, hier S. 177

36 Vgl. Felipe, J./Adams, F.G.: The Estimation of the Cobb-Douglas Function: A Retrospective View, in: Eastern Economic Journal, Vol. 31 (2005), S. 427 – 445, hier S. 430

37 Vgl. u.a. Cobb, C.W./Douglas, P.H.: A Theory of Production, S. 139; Meyer, P. A.: An Aggregate Homothetic Production Function, in: Southern Economic Journal, Vol. 36 (1969/70), S. 229 - 238, hier S. 237

38 Vgl. u.a. Nelson, R.R.: Aggregate Production Functions and Medium-Range Growth Projections, in: American Economic Review, Vol. LIV (1964), S. 575 - 606; Solow, R.M.: The Technical Change and the Aggregate Production Function, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. XXXIX (1957), S. 312 – 320; Fisher, F.M.: Aggregate Production Functions – A Pervasive, But Unpersuasive, Fairytale, in: Eastern Economic Journal, Vol. 31 (2005), S. 489 – 491; Felipe, J./Adams, F.G.: The Estimation of the Cobb-Douglas Function, S. 427 – 445, insbes. S. 429 f.

39 Vgl. Helmstädter, E.: Steigende Skalenerträge der deutschen Wirtschaft? In: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 175 (1963), S. 473 – 500, insbes. S. 474 f.; Gehrig, G./Kuhlo, K.C.: Ökonometrische Analyse des Produktionsprozesses, S. 175 – 237

40 Ott, A.E.: Diskussionsbeitrag, in: Giersch, H./Borchardt, K. (Hrsg.): Diagnose und Prognose als wirtschaftswissenschaftliche Methodenprobleme, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 25, Berlin 1962, S. 565

(3) Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion kann zu Ergebnissen führen (bzw. hat in empirischen Studien zu Ergebnissen geführt), die nicht mit der neoklassischen Wachstumstheorie<sup>41</sup> und nicht mit der neoklassischen Verteilungstheorie<sup>42</sup> kompatibel sind.

(4) Es bestehen Schwierigkeiten bei der Bestimmung bzw. Messung der Größen Arbeit und Kapital.<sup>43</sup> Letztendlich ist man aufgrund der Umweltdiskussion bemüht natürliches Kapital bzw. externe Effekte in der Produktionsfunktion zu berücksichtigen.<sup>44</sup>

Die Kritik an der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion hat zur Ableitung weiterer Produktionsfunktionen geführt. Zu nennen sind vor allem die CES-Produktionsfunktion mit konstanter Substitutionselastizität (constant elasticity of substitution)<sup>45</sup> und ihre Erweiterungen wie die Produktionsfunktion von Mukerji,<sup>46</sup> die Uzawa-Produktionsfunktion,<sup>47</sup> die McFadden-Produktionsfunktion,<sup>48</sup> die (asymmetrische) Scheper-Produktionsfunktion<sup>49</sup> und die Sato-

---

41 Vgl. u.a. Uzawa, H.: Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, in: Review of Economic Studies, Vol. XXVIII (1960/61), S. 117 - 124; Uzawa, H.: On a Two-Sector Model of Economic Growth, in: Review of Economic Studies, Vol. XXIX (1962), S. 40 - 47

42 Vgl. Houthakker, H.S.: The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis', in: Review of Economics Studies, Vol. 23 (1955/56), S. 27 - 31, hier S. 31; Giersch, H./Borchardt, K. (Hrsg.): Diagnose und Prognose als wirtschaftswissenschaftliche Methodenprobleme, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 25, Berlin 1962, S. 565; Helmstädter, E.: Steigende Skalenerträge der deutschen Wirtschaft? S. 475; vgl. auch Helmstädter, E.: Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Skalenelelastizität, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 176 (1964), S. 177 - 195, insbes. S. 184, 186, 187 f.

43 Vgl. Bombach, G.: Diskussionsbeitrag, in: Giersch, H./Borchardt, K. (Hrsg.): Diagnose und Prognose als wirtschaftswissenschaftliche Methodenprobleme, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 25, Berlin 1962, S. 566; Solow, R.M.: The Production Function and the Theory of Capital, in: Review of Economic Studies, Vol. 23 (1955/56), S. 101 - 108; Felipe, J./Adams, F.G.: The Estimation of the Cobb-Douglas Function, S. 427 - 445, insbes. S. 29

44 Vgl. u.a. Albach, H.: Theorie der Produktion - Theorie der Firma, in: Steven, M./Sonntag, S. (Hrsg.): Quantitative Unternehmensführung, Heidelberg 2005, S. 3 - 20, hier S. 5 f.; Bogaschewsky, R.: Natürliche Umwelt und Produktion, Wiesbaden 1995, S. 79 ff.; Steven, M.: Produktion und Umweltschutz, Wiesbaden 1994, S. 176 ff.

45 Vgl. Arrow, K.J./Chenery, H.B./Minhas, B.S./Solow, R.M.: Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. XLIII (1961), S. 225 - 250

46 Vgl. Mukerji, V.: A Generalized S.M.A.C. Function with Constant Ratios of Elasticity of Substitution, in: Review of Economic Studies, Vol. XXX (1963), S. 233 - 236

47 Vgl. Uzawa, H.: Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, S. 117 - 124; Uzawa, H.: On a Two-Sector Model of Economic Growth, S. 40 - 47

48 Vgl. McFadden, D.: Constant Elasticity of Substitution Production Functions, in: Review of Economic Studies, Vol. XXX (1963), S. 73 - 83

49 Vgl. Scheper, W.: Produktionsfunktionen, S. 1 - 21

Produktionsfunktion.<sup>50</sup> Ferner sind die VES-Produktionsfunktionen mit variable elasticity of substitution<sup>51</sup> und die HCES-Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität und variabler Skalenelastizität, so genannte homothetische CES-Produktionsfunktionen,<sup>52</sup> zu erwähnen. Es gibt aber auch Ansätze, die von Produktionsfunktionen Abstand nehmen und mit Verbrauchsfunktionen,<sup>53</sup> der Kombination von Verbrauchs- und Wiederholungsfunktion<sup>54</sup> oder mit Produktionskoeffizienten<sup>55</sup> arbeiten. Letztendlich sind nach Krelle die Möglichkeiten, neue Produktionsfunktionen zu finden, unbegrenzt.<sup>56</sup> Auf alle bekannten Produktionsfunktionen, wie z.B. die Engineering Production Functions, die Jahrgangsproduktionsfunktionen und das Putty-Clay-Modell, kann bei der Vielfalt der Ausgestaltung von Produktionsfunktionen nicht eingegangen werden.<sup>57</sup>

Doch trotz dieser Veränderungen bzw. Erweiterungen der ursprünglichen Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist die generelle Kritik an Produktionsfunktionen nicht verstummt.<sup>58</sup> Eine Anwendbarkeit der behandelten Produktionsfunktionen im Rahmen von Logistikunternehmen ist unter Beachtung bzw. Gültigkeit der erwähnten Kritik möglich.

## 5. Die wertbezogenen Produktionsfunktionen

Ein anderer Weg, um die gemischte Betrachtungsweise der zweiten, in Gleichung (10) veranschaulichten Form der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion zu überwinden, ist die rein mone-

---

50 Vgl. Sato, K.: A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function, in: Review of Economic Studies, Vol. XXXIV (1967), S. 201 – 218; Sato, R.: On the Stability of Growth Equilibrium, in: Econometrica, Vol. 32 (1964), S. 707 - 708, hier S. 707

51 Vgl. Lu, Y.C./Fletcher, L.B.: A Generalization of the CES Production Function, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. L (1968), S. 449 - 452; Roskamp, K.W.: Labor Productivity and the Elasticity of Factor Substitution in West German Industries 1950 - 1960, in: Review of Economics and Statistics, Vol. 59 (1977), S. 366 - 371

52 Vgl. Sato, R.: Homothetic and Non-Homothetic CES-Production Functions, in: The American Economic Review, Vol. 67 (1977), S. 559 - 569

53 Vgl. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, S. 314 – 325

54 Vgl. Heinen, E.: Industriebetriebslehre, 9. Aufl., Wiesbaden 1991 (1972), S. 411 – 415

55 Vgl. Krelle, W.: Ersetzung der Produktionsfunktion durch preis- und kapazitätsabhängige Produktionskoeffizienten, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 176 (1964), S. 289 - 318

56 Vgl. Krelle, W.: Produktionstheorie, S. 153

57 Vgl. zu weiteren Produktionsfunktionen Fandel, G.: Produktion I, S. 90 ff.; Steven (1994), S. 170 ff.

58 Vgl. Felipe, J./McCombie, J.S.L.: How Sound are the Foundations of the Aggregate Production Function? In: Eastern Economic Journal, Vol. 31 (2005), S. 467 – 488; Fisher, F.M.: Aggregate Production Functions, S. 489 – 491; Pressman, S.: What is Wrong with the Aggregate Production Function? In: Eastern Economic Journal, Vol. 31 (2005), S. 422 – 425

täre Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge. Der Produktionsfaktor Arbeit ist dann genau wie der Produktionsfaktor Kapital in Geldeinheit zu erfassen. Dies ist möglich, da für die in einem Produktionsprozess geleisteten Arbeitsstunden Lohn bzw. Gehalt gezahlt wird. Diese Beträge können aggregiert und in die Produktionsfunktion eingesetzt werden. Dazu muss allerdings die Produktionsfunktion formal abgeändert werden, da Geldbeträge nicht quadriert bzw. nicht mit einem Exponenten ungleich eins exponiert werden können. Die Produktionsfunktion ist formal wie folgt zu formulieren:

$$(11) Y = f(A + K)$$

mit

Y = Wert der Endproduktmenge

A = Wert der eingesetzten Menge des Produktionsfaktors Arbeit

K = Wert der eingesetzten Mengen des Produktionsfaktors Kapital

Diese Produktionsfunktion ist eine Weiterentwicklung der von Samuelson vorgeschlagenen Form der Produktionsfunktion:<sup>59</sup>

$$(12) Y = w \bullet A + r \bullet K$$

mit

Y = Wert der Endproduktmenge

A = Beschäftigung

K = Kapitalstock

w = durchschnittliche reale Lohnrate

r = beobachtete reale Profitrate

Diese von Samuelson vorgeschlagene Produktionsfunktion weist gegenüber der zweiten, in Gleichung (10) dargestellten Form der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion zwei Veränderungen auf. Die Produktionsfunktion ist erstens rein monetär ausgerichtet. Um die rein monetäre Ausrichtung zu erreichen, ist die Produktionsfunktion zweitens nicht mit Exponenten von ungleich eins für die beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital formuliert worden. Die für die in Gleichung (11) dargestellte Produktionsfunktion angestellten Überlegungen, dass es unlogisch ist, Geldwerte zu quadrieren bzw. Geldwerte mit Werten ungleich eins zu exponieren, müssen auch von Samuelson gemacht worden sein.

---

59 Vgl. Samuelson, P. A.: Paul Douglas's Measurement of Production Functions and Marginal Productivities, in: Journal of Political Economy, Vol. 87 (1979), S. 923 - 939, hier S. 927

Allerdings gehen die für eine rein monetär ausgerichtete Produktionsfunktion angestellten Überlegungen noch einen Schritt weiter. Geldwerte können zwar mit Werten ohne Maßeinheiten, aber nicht mit anderen Geldwerten multipliziert werden und die Gewichtung von Geldwerten einer Wirtschaftsperiode macht gemäß dem von Stützel vertretenen „Markgleich-Prinzip“ keinen Sinn.<sup>60</sup> Die Multiplikation von Geldwerten würde eben das oben erwähnte unlogische Quadrieren bedeuten, während die Gewichtung von Geldwerten einer Wirtschaftsperiode die Funktionen des Geldes<sup>61</sup> als Rechnungseinheit, Tauschmittel und Wertaufbewahrungsmittel verletzen würde. Diese Funktionen sind nur zu gewährleisten, wenn jede Geldeinheit den gleichen Wert hat. Diese Bedingung würde durch eine Gewichtung verletzt. Folglich hat die in Gleichung (11) vorgeschlagene Produktionsfunktion die logisch angemessene Form für eine rein monetäre Produktionsfunktion. Die Gewichtung von Geldwerten macht nur Sinn, wenn Geldwerte unterschiedlicher Wirtschaftsperioden, wie z.B. in Jahrgangsproduktionsfunktionen, betrachtet werden. Dann wird allerdings nicht von Gewichtung, sondern von Verzinsung (Auf- oder Abzinsung) gesprochen.

Die in Gleichung (11) dargestellte wertbezogene Produktionsfunktion lässt sich analog der mengenbezogenen Produktionsfunktion, die sich aus der Beziehung für die Produktivität ergibt, aus der Beziehung für die Wirtschaftlichkeit ableiten. Formal ergibt sich aus Gleichung (13) die Gleichung (14):

$$(13) \quad w = E / K$$

mit

$w$  = Wirtschaftlichkeit

$E$  = Erlös

$K$  = Kosten

$$(14) \quad E = w \bullet K$$

Setzt man in Gleichung (14) für den Erlös, den am Markt erzielten Wert des Endproduktes  $Y$  und für die Kosten, die Kosten für die eingesetzte Arbeit und die Kosten für das eingesetzte Kapital ein, so erhält man Gleichung (15):

$$(15) \quad Y = w (KA + KK) \qquad \text{(Witte-Produktionsfunktion)}$$

mit

---

<sup>60</sup> Vgl. Stützel, W.: Das Mark-gleich-Mark-Prinzip und unsere Wirtschaftsordnung, Baden-Baden 1979, S. 12, 21 ff.

<sup>61</sup> Vgl. Brunner, K./Meltzer, A.H.: The Use of Money: Money in the Theory of an Exchange Economy, in: American Economic Review, Vol. 61 (1971), S. 784 - 805

$Y$  = Wert des Endproduktes

$KA$  = Kosten für die eingesetzte Arbeit

$KK$  = Kosten für das eingesetzte Kapital

$w$  = Wirtschaftlichkeit bzw. Wertschöpfungsfaktor

Aus Gleichung (15) erhält man auch eine ökonomische Interpretation für das  $f$  aus Gleichung (11). Das  $f$  verdeutlicht nämlich die Wirtschaftlichkeit oder den im Produktionsprozess erzielten Wertschöpfungsfaktor. Zudem erkennt man, dass für die wertbezogene Produktionsfunktion die Kosten für die eingesetzten Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital heranzuziehen sind. Da nach allgemein akzeptierter betriebswirtschaftlicher Auffassung Produktionsprozesse Wertschöpfungsprozesse sein sollen, kann ferner für Gleichung (15) die Bedingung  $w > 1$  formuliert werden. Entsprechend gilt für Gleichung (11)  $f > 1$ .

Allgemein kann der Wertschöpfungsfaktor zwischen plus unendlich und null ( $+\infty \leq w \geq 0$  bzw.  $+\infty \leq f \geq 0$ ) liegen. Als kritischer Wert ist der Wert eins anzusehen. Ein Wertschöpfungsfaktor von eins bedeutet, dass der Wert des Endproduktes genau so groß ist wie der Wert bzw. die Kosten der eingesetzten Produktionsfaktoren. Eine Wertschöpfung liegt nicht vor.

Aus dem Wert eins für den Wertschöpfungsfaktor ( $w = 1$ ) kann man den Rückschluss ziehen, dass das Unternehmen im „Break-Even-Point“ operiert und zumindest eine Bedingung für das Vorliegen der vollkommenen Konkurrenz (des vollkommenen Wettbewerbs) erfüllt sein könnte. Wenn die Kosten für die eingesetzten Produktionsfaktoren genau so groß sind wie der Erlös für das Endprodukt ( $K = E$ ), dann ist der Gewinn des herstellenden und anbietenden Unternehmens gleich Null. Wenn auch die anderen Bedingungen für das Vorliegen der Marktform der vollkommenen Konkurrenz<sup>62</sup> erfüllt wären, könnte vollkommene Konkurrenz vorliegen. Bei Werten des Wertschöpfungsfaktors von größer eins ( $w > 1$ ) nimmt die Wettbewerbsintensität ab und der Gewinn des herstellenden und anbietenden Unternehmens steigt ( $K < E$ ). Mit abnehmender Wettbewerbsintensität ändert sich auch die Marktform. Die Marktform der vollkommenen Konkurrenz geht zunächst in die Marktform des Oligopols, dann in die des Dyopols und schließlich in die des Monopols über. Es können Marktformen der unvollkommenen, funktionsfähigen Konkurrenz vorliegen. Nimmt der Wertschöpfungsfaktor Werte kleiner eins aber größer null an ( $w < 1$  aber  $w > 0$ ), so macht das herstellende und anbietende Unternehmen Verlust, da die Kosten den Erlös übersteigen ( $K > E$ ). Es können Marktformen der unvollkommenen, funktionsunfähigen Konkurrenz vorliegen. Das herstel-

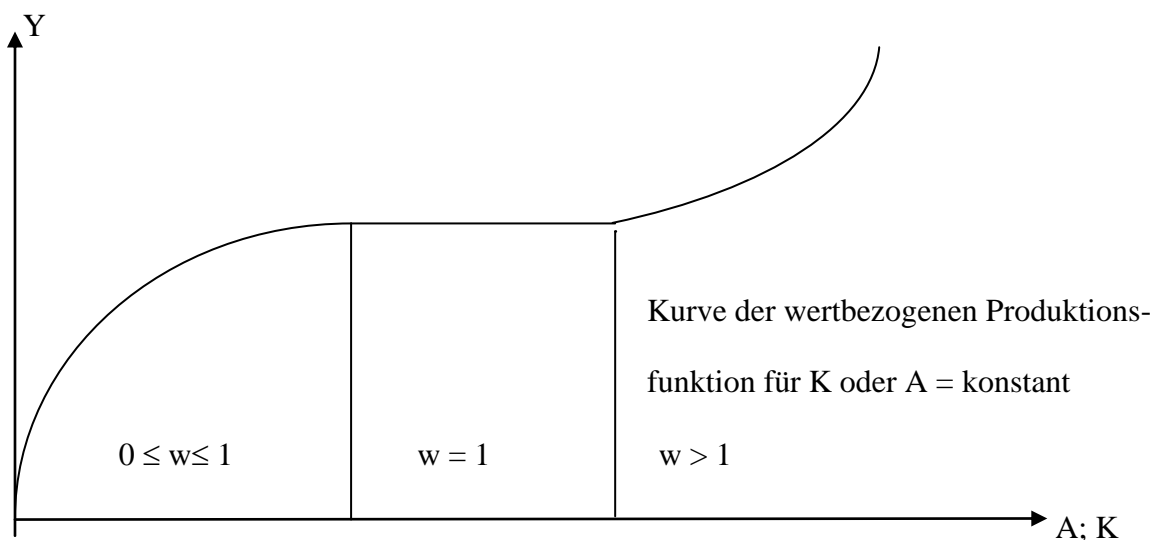
---

62 Vgl. Knight, F.: Risk, Uncertainty and Profit, New York 1921, S. 51 – 93

lende und anbietende Unternehmen muss aus dem Markt ausscheiden, also die Produktion und das Angebot einstellen.

Der Verlauf, der sich aus Gleichung (11) bzw. (15) ergebenden Produktionskurve bei Konstanz eines Produktionsfaktors, ist in Abb. 1 dargestellt. Es ergeben sich drei Bereiche für den Verlauf der Produktionskurve. Im ersten Bereich ist der Wertschöpfungsfaktor kleiner eins. Der Wert des Endprodukts steigt unterproportional zum steigenden Wert der eingesetzten Arbeit und/oder des eingesetzten Kapitals. Im zweiten Bereich ist der Wertschöpfungsfaktor gleich eins, d.h. der Wert des Endprodukts entspricht dem Wert der eingesetzten Arbeit und/oder des eingesetzten Kapitals. Im dritten Bereich ist der Wertschöpfungsfaktor größer als eins, d.h. der Wert des Endprodukts steigt überproportional zum Wert der eingesetzten Arbeit und/oder des eingesetzten Kapitals.

Abb. 1: Verlauf der wertbezogenen Produktionsfunktion



Quelle: eigene Darstellung

Die Vorteile der in Gleichung (15) dargestellten wertbezogenen, rein monetären Produktionsfunktion sind:

- (1) eine klare und eindeutige Betrachtung der produktionswirtschaftlichen Zusammenhänge auf einer Betrachtungsebene,
- (2) Behandlung von Geldbeträgen wie auf Konten, wo Geldbeträge addiert und saldiert werden,<sup>63</sup>

<sup>63</sup> Vgl. Schöttler, J./Spulak, R./Baur, W.: Technik des betrieblichen Rechnungswesens, 7. Aufl., München u.a. 1992; vgl. zum empirischen Vorgehen Witte, H.: Die wertbezogene Produktionsfunktion, in: Witte, H.: The Szczecin School of „simple“ Economics, Szczecin 2010, S. 17 – 24, hier S. 23 f.



- (3) direkt ableitbar aus und direkt einsetzbar in Rechenwerke des betrieblichen Rechnungswesens und der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung,<sup>64</sup>
- (4) die Kritik wie an gemischt ausgerichteten Produktionsfunktionen, insbesondere an der zweiten Form der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, dürfte nicht auftreten,
- (5) Berücksichtigung der Erkenntnisse der Fehlertheorie hinsichtlich der Vermeidung von Fehlerhäufigkeit bzw. –fortpflanzung,<sup>65</sup> da die additive Verknüpfung der Variablen bei fehlerhaften Daten zu einer geringeren Fehlerfortpflanzung führt als die multiplikative oder gar die Verwendung von Exponenten,
- (6) die Produktionsfunktion spiegelt den erzielten Wertschöpfungsfaktor wieder und lässt damit anders als andere Produktionsfunktionen Rückschlüsse auf die Marktform bzw. die Wettbewerbsintensität zu, und
- (7) die Kostenfunktion kann direkt aus der Produktionsfunktion abgeleitet werden ohne den Umweg über eine Umkehrfunktion wählen zu müssen.

Die Anwendung der wertbezogenen Produktionsfunktion im Rahmen von Logistikunternehmen erscheint unter Beachtung der Kritik an den vorher dargestellten Produktionsfunktionen und den erwähnten Vorteilen der wertbezogenen Produktionsfunktion logisch und sinnvoll.

## 6. Schlussbemerkungen

Die Klassifizierung von Produktionsfunktionen wird in der Literatur unterschiedlich vorgenommen. Hier erfolgte die Klassifizierung in Anlehnung an die betriebswirtschaftlichen Betrachtungsebenen und die betriebswirtschaftlichen Orientierungsgrößen in mengenbezogene, zeitbezogene und wertbezogene Produktionsfunktionen. Die mengenbezogene Produktionsfunktion lässt sich aus der Beziehung für die Produktivität, die zeitbezogene Produktionsfunktion aus der Beziehung für die zeitbezogene Produktivität und die wertbezogene Produktionsfunktion aus der Beziehung für die Wirtschaftlichkeit ableiten.

---

64 Vgl. Witte, H.: Die wertbezogene Produktionsfunktion, S. 23 f.

65 Vgl. Alonso, W.: Predicting Best with Imperfect Data, in: Journal of the American Institute of Planners, Vol. 34 (1968), S. 248 – 255; Parrett, L.G.: Probability and Experimental Errors in Science, New York 1961; Tukey, J.W.: The Propagation of Errors, Fluctuations and Tolerances: Basic Generalized Formulas, Technical Report No. 10, Statistical Techniques Research Group, Department of Mathematics, Princeton University, Princeton N.J. o.J.

Diese Klassifizierung der Produktionsfunktionen führte zu einer wertbezogenen, rein monetären Produktionsfunktion, die als Weiterentwicklung einer von Samuelson<sup>66</sup> als einfache, schnell aufgestellte und daher nicht weiterverfolgte Produktionsfunktion einzustufen ist. Die entwickelte, wertbezogene Produktionsfunktion verdeutlicht die Wertschöpfung, die im abgebildeten Produktionsprozess durch die Transformation der eingesetzten Produktionsfaktoren in ein marktfähiges Endprodukt erzielt werden kann bzw. konnte. Der Wertschöpfungsfaktor  $w$  bzw.  $f$  muss größer als eins sein, damit ein Produktionsprozess ein Wertschöpfungsprozess ist. Ist der Wertschöpfungsfaktor gleich eins kann für das hergestellte Endprodukt ein Markt vorliegen, auf dem vollkommener Wettbewerb herrscht. Der Wettbewerb auf dem Markt ist so intensiv, so dass das anbietende Unternehmen keine Wertschöpfung erzielen kann. Die durch die Produktion des Endproduktes entstandenen Kosten sind genau so groß wie der für das Endprodukt am Markt erzielte Erlös ( $K = E$ ). Das Unternehmen macht folglich keinen Gewinn.

Es wurde gezeigt, dass im Prinzip alle dargestellten Produktionsfunktionen auch im Rahmen von Logistikunternehmen angewandt werden können. Die Anwendung der wertbezogenen Produktionsfunktion erscheint allerdings am sinnvollsten.

---

66 Vgl. Samuelson, P. A.: Paul Douglas's Measurement of Production Functions, S. 927

## Summary

A great number of production functions are discussed in literature. These functions can be classified by different criteria in groups or types. The analysis of the production process in units of quantity is dominant. But it is also possible to make an analysis based on data in time or monetary units. Because of never ending critique of the famous Cobb-Douglas production function, here a production function only based on monetary data is propagated. This production function has the advantage, to operate with data, which are compatible with data from works cost accounting and macroeconomic accounting. Furthermore the production function gives information about the increase in value (value added, net product, efficiency) obtained by the analysed production process.

The pure monetary analysis of the production process has not to replace the analysis based on data in units of quantity, units of time or units of quantity mixed with data in units of time. It is only an additional approach to give more information from a different point of view.

Surely it is possible to use all mentioned production functions in the context of logistic enterprises, but it seems to be the best to use the monetary production function.

## Literatur

- Albach, H.: Theorie der Produktion – Theorie der Firma, in: Steven, M./Sonntag, S. (Hrsg.): Quantitative Unternehmensführung, Heidelberg 2005, S. 3 - 20
- Alonso, W.: Predicting Best with Imperfect Data, in: Journal of the American Institute of Planners, Vol. 34 (1968), S. 248 – 255
- Andler, K.: Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München 1929
- Arrow, K.J./Chenery, H.B./Minhas, B.S./Solow, R.M.: Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. XLIII (1961), S. 225 - 250
- Bogaschewsky, R.: Natürliche Umwelt und Produktion, Wiesbaden 1995
- Böhm-Bawerk, E.v.: Kapital und Kapitalzins, 2. Abt.: Positive Theorie des Kapitals, Innsbruck 1889 (Faksimile-Ausgabe 1991)
- Bombach, G.: Diskussionsbeitrag, in: Giersch, H./Borchardt, K. (Hrsg.): Diagnose und Prognose als wirtschaftswissenschaftliche Methodenprobleme, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 25, Berlin 1962, S. 566
- Bronfenbrenner, M.: The Cobb-Douglas Function and Trade-Union Policy, in: American Economic Review, Vol. 29 (1939), S. 793 - 796
- Brunner, K./Meltzer, A.H.: The Use of Money: Money in the Theory of an Exchange Economy, in: American Economic Review, Vol. 61 (1971), S. 784 - 805
- Cobb, C.W./Douglas, P.H.: A Theory of Production, in: American Economic Review, Vol. XVIII (1928), Supplement, S. 139 – 165
- Corsten, H.: Betriebswirtschaftslehre der Dienstleistungsunternehmen, 2. Aufl., München, Wien 1990
- Corsten, H.: Produktionswirtschaft, 6. Aufl., München, Wien 1996
- Douglas, P.H.: Are there Laws of Production, in: American Economic Review, Vol. 38 (1945), S. 1 - 41
- Douglas, P.H.: The Cobb-Douglas Production Function once again: Its History, its Testing and some new empirical Values, in: Journal of Political Economy, Vol. 84 (1976), S. 903 - 915
- Fandel, G.: Produktion I – Produktions- und Kostentheorie, 6. Aufl., Berlin u.a. 2005
- Fandel, G./Blaga, S.: Aktivitätsanalytische Überlegungen zu einer Theorie der Dienstleistungsproduktion, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Ergänzungsheft 1/2004, S. 1 - 21
- Felipe, J./Adams, F.G.: The Estimation of the Cobb-Douglas Function: A Retrospective View, in: Eastern Economic Journal, Vol. 31 (2005), S. 427 - 445
- Felipe, J./McCombie, J.S.L.: How Sound are the Foundations of the Aggregate Production Function? In: Eastern Economic Journal, Vol. 31 (2005), S. 467 - 488
- Fisher, F.M.: Aggregate Production Functions – A Pervasive, But Unpersuasive, Fairytale, in: Eastern Economic Journal, Vol. 31 (2005), S. 489 – 491
- Fleck, F.H./Finkbeiner, B./Casutt, R.: Die CES- und VES-Produktionsfunktion: Eine kritische Gegenüberstellung, in: Kyklos, Vol. 34 (1981), S. 63 - 76

- Fleck, F.H./Bortis, H./Casutt, R.: Die Kostenfunktion einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 107 (1971), S. 123 - 138
- Förstner, K.: Betriebs- und volkswirtschaftliche Produktionsfunktionen, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 32 (1962), S. 264 – 282
- Frisch, R.: Theory of Production, Dordrecht 1965
- Gehrig, G./Kuhlo, K.C.: Ökonometrische Analyse des Produktionsprozesses, in: Ifo-Studien, 7. Jg. (1961), S. 175 – 237
- Giersch, H./Borchardt, K. (Hrsg.): Diagnose und Prognose als wirtschaftswissenschaftliche Methodenprobleme, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 25, Berlin 1962
- Gunn, G.T./Douglas, P.H.: The Production Function for American Manufacturing in 1919, in: American Economic Review, Vol. 31 (1941), S. 67 - 80
- Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Bd.: Die Produktion, 10. Aufl., Berlin u.a. 1965
- Heinen, E.: Industriebetriebslehre, 9. Aufl., Wiesbaden 1991 (1972<sup>1</sup>)
- Helmstädter, E.: Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Skalanelastizität, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 176 (1964), S. 177 – 195
- Helmstädter, E.: Steigende Skalenerträge der deutschen Wirtschaft? In: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 175 (1963), S. 473 – 500
- Houthakker, H.S.: The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis, in: Review of Economics Studies, Vol. 23 (1955/56), S. 27 - 31
- Jacobsen, S.E.: Production Correspondences, in: Econometrica, Vol. 38 (1970), S. 754 – 774
- Jung, H.: Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, München, Wien, 2. Aufl. 1996
- Knight, F.: Risk, Uncertainty and Profit, New York 1921
- Krelle, W.: Ersetzung der Produktionsfunktion durch preis- und kapazitätsabhängige Produktionskoeffizienten, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 176 (1964), S. 289 - 318
- Krelle, W.: Produktionstheorie, Tübingen 1969
- Küpper, H.-K./Helber, S.: Ablauforganisation in Produktion und Logistik, 3. Aufl., Stuttgart 2004
- Laur, E.: Wirtschaftslehre des Landbaus, 2. Aufl., Berlin 1930
- Leontief, W.W.: The Structure of American Economy, 1919 – 1939, 2. Aufl., New York 1951
- Linde, R.: Produktion II: Produktionsfunktionen, in: HdWW, 6. Bd., Stuttgart u.a. 1981, S. 276 – 295
- Lu, Y.C./Fletcher, L.B.: A Generalization of the CES Production Function, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. L (1968), S. 449 - 452
- McCarthy, M.D.: Embodied and Disembodied Technical Progress in the Constant Elasticity of Substitution Production Function, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. XLVII (1965), S. 71 - 75
- McFadden, D.: Constant Elasticity of Substitution Production Functions, in: Review of Economic Studies, Vol. XXX (1963), S. 73 - 83

- Meyer, P. A.: An Aggregate Homothetic Production Function, in: *Southern Economic Journal*, Vol. 36 (1969/70), S. 229 - 238
- Mukerji, V.: A Generalized S.M.A.C. Function with Constant Ratios of Elasticity of Substitution, in: *Review of Economic Studies*, Vol. XXX (1963), S. 233 - 236
- Mundlak, Y.: Transcendental Multiproduct Production Functions, in: *International Economic Review*, Vol. 5 (1964), S. 273 - 284
- Nelson, R.R.: Aggregate Production Functions and Medium-Range Growth Projections, in: *American Economic Review*, Vol. LIV (1964), S. 575 - 606
- Ott, A.E.: Diskussionsbeitrag, in: Giersch, H./Borchardt, K. (Hrsg.): *Diagnose und Prognose als wirtschaftswissenschaftliche Methodenprobleme*, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 25, Berlin 1962, S. 565
- Parrett, L.G.: *Probability and Experimental Errors in Science*, New York 1961
- Pressman, S.: What is Wrong with the Aggregate Production Function? In: *Eastern Economic Journal*, Vol. 31 (2005), S. 422 - 425
- Reder, M.W.: An alternative Interpretation of the Cobb-Douglas Function, in: *Econometrica*, Vol. 11 (1943), S. 259 - 264
- Roskamp, K.W.: Labor Productivity and the Elasticity of Factor Substitution in West German Industries 1950 - 1960, in: *Review of Economics and Statistics*, Vol. 59 (1977), S. 366 - 371
- Samuelson, P. A.: Paul Douglas's Measurement of Production Functions and Marginal Productivities, in: *Journal of Political Economy*, Vol. 87 (1979), S. 923 - 939
- Sato, K.: A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function, in: *Review of Economic Studies*, Vol. XXXIV (1967), S. 201 - 218
- Sato, R.: On the Stability of Growth Equilibrium, in: *Econometrica*, Vol. 32 (1964), S. 707 - 708
- Sato, R.: Linear Elasticity of Substitution Production Function, in: *Metroeconomica*, Vol. 19 (1967), S. 33 - 41
- Sato, R./Beckmann, M.J.: Neutral Inventions and Production Functions, in: *Review of Economic Studies*, Vol. XXXV (1968), S. 57 - 66
- Sato, R./Beckmann, M.J.: Neutral Inventions and Production Functions: An Addendum, in: *Review of Economic Studies*, Vol. XXXV (1968), S. 366
- Sato, R.: Homothetic and Non-Homothetic CES-Production Functions, in: *The American Economic Review*, Vol. 67 (1977), S. 559 - 569
- Scheper, W.: Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten, in: *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Bd. 117 (1965), S. 1 - 21
- Schöttler, J./Spulak, R./Baur, W.: *Technik des betrieblichen Rechnungswesens*, 7. Aufl., München u.a. 1992
- Shaikh, A.: Nonlinear Dynamics and Pseudo-Production Functions, in: *Eastern Economic Journal*, Vol. 31 (2005), S. 447 - 466
- Shephard, R.W.: The Notion of a Production Function, in: *Unternehmensforschung*, Vol. 11 (1967), S. 209 - 232
- Shephard, R.W.: *Cost and Production Functions*, Berlin u.a. 1981 (Reprint of the First Edition, Princeton 1953)

- Solow, R.M.: The Production Function and the Theory of Capital, in: *Review of Economic Studies*, Vol. 23 (1955/56), S. 101 – 108
- Solow, R.M.: The Technical Change and the Aggregate Production Function, in: *The Review of Economics and Statistics*, Vol. XXXIX (1957), S. 312 – 320
- Steven, M.: *Produktion und Umweltschutz*, Wiesbaden 1994
- Stützel, W.: *Das Mark-gleich-Mark-Prinzip und unsere Wirtschaftsordnung*, Baden-Baden 1979
- Thünen, H. v.: *Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie*, Berlin 1990 (Rostock 1842<sup>1</sup>, Berlin 1875<sup>3</sup>)
- Turgot, A.R.J.: *Réflexions sur la formation et la distribution des richesses*, Paris 1769 - 1770 (Faksimile-Ausgabe, Nr. 224, Düsseldorf 1990)
- Tukey, J.W.: *The Propagation of Errors, Fluctuations and Tolerances: Basic Generalized Formulas*, Technical Report No. 10, Statistical Techniques Research Group, Department of Mathematics, Princeton University, Princeton N.J. o.J.
- Uzawa, H.: *Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium*, in: *Review of Economic Studies*, Vol. XXVIII (1960/61), S. 117 - 124
- Uzawa, H.: *On a Two-Sector Model of Economic Growth*, in: *Review of Economic Studies*, Vol. XXIX (1962), S. 40 - 47
- Witte, H.: *Die wertbezogene Produktionsfunktion*, in: Witte, H.: *The Szczecin School of „simple“ Economics*, Szczecin 2010, S. 17 - 24
- Wöhe, G.: *Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*, 19. Aufl., München 1996
- Zellner, A./Kmenta, J./Drèze, J.: *Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models*, in: *Econometrica*, Vol. 34 (1966), S. 784 – 795