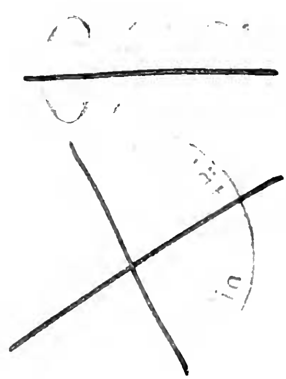
EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN

VON

HEINRICH W. E. JUNG

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Halle-Wittenberg

MIT 35 ABBILDUNGEN IM TEXT



VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG
J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG — GEORG
REIMER — KARL J. TRÜBNER — VEIT & COMP.

BERLIN W. 10 UND LEIPZIG

1923

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig
859322.

Inhaltsverzeichnis.

Dreizehntes Kapitel.

Einleitung.

Die Entdeckung der analytisch-geometrischen Methode durch Descartes gab den Anlaß, Kurven zu untersuchen, die durch eine algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten gegeben waren. Dabei betrachtete man dann auch die eine Koordinate als Funktion der andern und hatte so dem Wesen nach den Begriff der algebraischen Funktion. Newton war der erste, der Reihenentwicklungen benutzte, um die Ordinate als Funktion der Abszisse darzustellen. Zur Bestimmung der Exponenten und Koeffizienten benutzte er eine graphische Methode, das nach ihm oder auch nach Puiseux benannte Diagramm. Aber Newton lag nicht so sehr daran, die algebraische Funktion zu untersuchen als die Gestalt der algebraischen Kurve zu ermitteln. Auch beschränkte er sich auf reelle Werte. Ein weiterer Fortschritt konnte erst kommen, als die Funktionentheorie durch Cauchy eine Entwicklung erlangt hatte, die eine Anwendung auf die algebraischen Funktionen gestattete und als durch Gauß und Cauchy die imaginären Zahlen Bürgerrecht in der Mathematik erlangt hatten. Cauchy zeigte, in welcher Art sich algebraische Funktionen in der Umgebung einer regulären oder singulären Stelle in Reihen entwickeln ließen. Puiseux (1850) zeigte im Anschluß an das Newtonsche Verfahren, wie diese Reihen praktisch berechnet werden konnten, und ging über Cauchy hinaus, indem er die algebraische Funktion nicht nur in der Umgebung einer Stelle betrachtete, sondern den Verlauf der ganzen mehrwertigen Funktion untersuchte. Auch die Integrale algebraischer Funktionen und ihre Perioden zog er in den Kreis seiner Betrachtungen, ohne aber zu voller Klarheit über die vorliegenden Verhältnisse gelangen zu können.

Erst Riemann brachte das Verhalten der mehrdeutigen algebraischen Funktion zu voller Anschaulichkeit, indem er sie als eindeutige Funktion auf einer mehrblättrigen Fläche, die nach ihm benannt wurde, auffaßte (1857). Riemann ging bei der Untersuchung der algebraischen Funktionen von ihren Integralen aus, benutzte also transzendente Hilfsmittel. Integrale von algebraischen Funktionen waren schon früh betrachtet, zunächst die elliptischen Integrale, dann hyperelliptische. Erst als Abel (1826—1829) in seinem berühmten Theorem zeigte, daß nicht nur für diese Integrale, sondern allgemein für Integrale beliebiger algebraischer

Funktionen ein Additionstheorem bestand, begann man sich auch mit solchen Integralen zu beschäftigen. Das Ziel dieser Untersuchungen war die Lösung des von Jacobi (1832) formulierten Umkehrproblems von Integralen algebraischer Funktionen, das zu einer Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen auf periodische Funktionen mehrerer Veränderlicher führte. Riemann stützte sich auf die Ergebnisse dieser Untersuchungen und der von Cauchy und Puiseux, und es gelang ihm, die Haupteigenschaften der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale zu enthüllen. So einfach die Beweise von Riemann auch sind, so hat seine Methode doch wesentliche Mängel. Riemann definierte die Integrale und Funktionen durch ihre charakteristischen Eigenschaften und bewies ihre Existenz mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips. Aber der Beweis dieses Prinzips erfordert Hilfsmittel, die gar nichts mit den algebraischen Funktionen zu tun haben. Ferner ist zwar die Existenz der Integrale gesichert, aber man hat keine Methode, sie wirklich aufzustellen. Und zu den Sätzen über die algebraischen Funktionen kommt Riemann erst auf dem Umwege über die Integrale. So ist auch der Beweis des Riemann-Rochschen Satzes zuerst auf diesem Wege geführt.

Es lag nahe zu versuchen, die schönen Ergebnisse Riemanns unmittelbar durch Ausgang von der die algebraische Funktion definierenden Gleichung zu erhalten. Im wesentlichen sind es drei Wege, die zu diesem Ziel geführt haben.

1. Die algebraisch-geometrische Methode. Begonnen von Clebsch und Jordan, wurde sie von Brill und Noether ganz ohne Benutzung transzendenter Hilfsmittel ausgebildet. Die Grundlage dieser Theorie bildet der Noethersche Satz. Es wird eine algebraische Kurve f zugrunde gelegt. Irgendeine andere Kurve g schneidet auf f eine Punktgruppe aus. Wenn aber umgekehrt irgendeine Punktgruppe auf f gegeben ist, so gibt es im allgemeinen keine Kurve g, die diese ausschneidet. Es werden dann lineare Kurvenscharen betrachtet. Eine solche Schar kann mit f feste und bewegliche Schnittpunkte haben. Zwei Punktgruppen, G_1 und G_2, die aus beweglichen Schnittpunkten bestehen und von zwei Kurven der Schar ausgeschnitten werden, heißen äquivalent. Sind $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ die Gleichungen der Kurven, die f außer in den festen Punkten in den Gruppen G_1 und G_2 schneiden, so ist der Quotient von g_1 und g_2 eine rationale Funktion der Koordinaten, die an den Stellen G_1 Null und an den Stellen G_2 unendlich wird. Sind umgekehrt G_1 und G_2 irgend zwei Punktgruppen auf f, so gibt es im allgemeinen keine rationale Funktion der Koordinaten, die nur an den Stellen G_1 Null und nur an den Stellen G_2 unendlich wird. Zunächst muß die Anzahl der Null- und Unendlichkeitsstellen dieselbe sein. Aber diese Bedingung ist im allgemeinen keineswegs hinreichend, sondern man kann nur einen Teil der Null und Un-

endlichkeitsstellen vorschreiben. Eine bestimmte Anzahl p ist durch die andern mitbestimmt. Diese Zahl p ist das Geschlecht der Kurve. Über diese Verhältnisse gibt der Riemann-Rochsche Satz Aufschluß, und er wird bei der geometrischen Methode durch die Untersuchung äquivalenter Punktgruppen bewiesen. Diese Untersuchung wird durch den Noetherschen Satz wesentlich vereinfacht, indem mit ihm gezeigt wird, daß man sich auf solche Punktgruppen beschränken kann, die durch die sogenannten adjungierten Kurven ausgeschnitten werden. Die Hauptschwierigkeit bestand in der Bestimmung der Zahl der Schnittpunkte, die zwei Kurven f und g in einem Punkte haben, wo sie beide singulär sind. Es gelang aber Noether, diese Schwierigkeit vollkommen zu überwinden, indem er zeigte, wie man eine noch so komplizierte Singularität sich aus einfachen Singularitäten zusammengesetzt denken kann.

2. Die funktionentheoretische Methode. Es ist die Methode von Weierstraß. Er zeigt zunächst, wie sich eine algebraische Funktion y einer unabhängigen Veränderlichen x in der Umgebung einer Stelle der unabhängigen Veränderlichen verhält. Dann betrachtet er die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von x, y, also den Körper (xy) und geht zu der Aufgabe über, Funktionen mit ϱ gegebenen Unendlichkeitsstellen herzustellen. Es zeigt sich, daß bei beliebiger Wahl der ϱ Stellen die Aufgabe nur möglich ist, wenn ϱ mindestens gleich $p+1$ ist, wo p das Geschlecht der algebraischen Funktion ist. Weierstraß definiert das Geschlecht geradezu durch diese Eigenschaft. Sind dann p Stellen beliebig aber fest gewählt und ist $\mathfrak{p}$ irgendeine andere Stelle, so zeigt Weierstraß, daß es immer eine Funktion $g_\lambda(\mathfrak{p})$ gibt, die an den p festen Stellen von der ersten Ordnung und an der Stelle $\mathfrak{p}$ genau von der λ-ten Ordnung unendlich wird. Damit kann Weierstraß irgendeine algebraische Funktion R des Körpers gewissermaßen in Partialbrüche zerlegen. Wird R an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_s$ unendlich und in $\mathfrak{p}_i$ von der Ordnung λ_i, so läßt sich R in der Form darstellen

$$\sum_i \left(a_{1i}\, g_1(\mathfrak{p}_i) + a_{2i}\, g_2(\mathfrak{p}_i) + \cdots + a_{\lambda_i i}\, g_{\lambda_i}(\mathfrak{p}_i)\right),$$

wo die a_{kl} konstant sind. Diese müssen dann noch p linearen Gleichungen genügen, die ausdrücken, daß R in den p festen Stellen nicht unendlich wird. So ergibt sich der Riemann-Rochsche Satz.

Weierstraß leitet dann die Eigenschaften der Integrale her, und zwar ohne Benutzung der Riemannschen Fläche.

3. Die arithmetische Methode. Während Weierstraß die Funktionen des Körpers (xy) charakterisiert durch Angabe ihrer Unendlichkeitsstellen und der Art ihres Unendlichwerdens und so zu einer Verallgemeinerung der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen kommt, charakterisieren Dedekind und Weber die Funktionen durch

Angabe ihrer Null- und Unendlichkeitsstellen. Ihre Methode ist sehr vereinfacht durch Hensel und Landsberg. Da man, wie schon oben gesagt, die Null- und Unendlichkeitsstellen einer Funktion nicht sämtlich beliebig vorschreiben kann, so werden zunächst nur diejenigen Funktionen bestimmt, die an gegebenen endlichen Stellen mindestens von gegebener Ordnung Null und höchstens von gegebener Ordnung unendlich werden. Aus diesen werden dann diejenigen ausgesucht, die sich auch im Unendlichen in gewünschter Weise verhalten. Die gefundenen Funktionen haben dann außer den angegebenen keine Unendlichkeitsstellen, wohl aber im allgemeinen noch p Nullstellen, auf die man keinen Einfluß hat.

Das folgende Buch soll eine Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen sein. Ich habe mich daher im Stoffumfang beschränkt und mich bemüht, die benutzten Methoden durch einfache Zahlenbeispiele zu erläutern, und hoffe, daß der Leser mit den grundlegenden Methoden durch das Studium dieses Buches hinreichend vertraut wird, um dann umfangreichere Darstellungen leicht verstehen zu können. Im wesentlichen sind die Methoden von Hensel und Landsberg benutzt.

Von ausführlichen Darstellungen der Theorie der algebraischen Funktionen seien empfohlen:

Francesco Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Geometrie auf einer Kurve, Riemannsche Flächen, Abelsche Integrale. Deutsch von E. Löffler. (B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1921.) Hier werden die Brill-Noetherschen Methoden benutzt.

Karl Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten. Gesammelte mathematische Werke, Bd. IV.

Kurt Hensel und Georg Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. (B. G. Teubner, Leipzig 1902.) Im folgenden zitiert mit H—L.

Zusammenfassende Darstellungen, die auch vollständige Literaturangaben enthalten, sind:

A. Brill und M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresb. d. deutsch. Math. Ver. 3 (1894).

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II B 2, Algebraische Funktionen und ihre Integrale von W. Wirtinger (1901), und II C 5, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von K. Hensel (1921).

Erstes Kapitel.

Definition einer algebraischen Funktion y von x und ihr Verhalten in der Umgebung irgendeines Wertes von x.

§ 1. Definition der algebraischen Funktion. Singuläre Werte der unabhängigen Veränderlichen.

Es sei

$$f(x, y) = a_0(x)\, y^m + a_1(x)\, y^{m-1} + \cdots + a_m(x)$$

eine ganze unzerlegbare rationale Funktion von x, y. Sie sei in x vom Grade l und in y vom Grade m. Sie sei also, wie wir kurz sagen wollen, in x, y vom Grade (l, m). Durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

wird y als Funktion von x definiert. Man nennt die so definierte Funktion eine algebraische Funktion.

Zu einem endlichen Werte von x ergeben sich aus (1) im allgemeinen m verschiedene und endliche Werte von y. Unendlich große Werte von y können sich nur für solche Werte von x, die Nullstellen von $a_0(x)$ sind, oder für unendlich große Werte von x ergeben. Gleiche endliche Werte von y erhalten wir nur für die Werte von x, die Nullstellen der Diskriminante $D(x)$ von $f(x, y) = 0$ sind. Diese Diskriminante $D(x)$ ist eine ganze rationale Funktion von x. Sie verschwindet nicht identisch, da wir angenommen haben, daß $f(x, y)$ unzerlegbar ist, also keinen quadratischen Faktor hat und daher die Gleichung $f(x, y) = 0$ nicht für alle Werte von x gleiche Wurzeln haben kann. Bezeichnen wir die m Werte, die y für einen Wert von x annimmt, mit y_1, y_2, ... y_m, so können wir schreiben:

$$f(x, y) = a_0 (y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_m) \tag{2}$$

und

$$D(x) = a_0^m \prod_{\lambda \lessgtr \mu = 1}^{m} (y_\lambda - y_\mu) = \prod_{\lambda = 1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\lambda)\,, \tag{3}$$

wo in dem ersten Produkt λ und μ unabhängig voneinander die Werte von 1 bis m durchlaufen sollen.

Die Werte von x, für die y unendlich wird oder für die zwei oder mehrere der Werte von y einander gleich werden, sind also nur in endlicher Zahl vorhanden. Wir nennen diese Werte von x singulär. Zu ihnen wollen wir jedenfalls den Punkt ∞ rechnen.

Die Werte der unabhängigen Veränderlichen x denken wir uns auf der Gaußschen Zahlenebene ausgebreitet oder auf der Einheitskugel, indem wir uns die Ebene stereographisch auf eine Kugel in folgender Weise projiziert denken (Abb. 1).

Wir machen die Ebene zu einer Berührungsebene der Kugel, und zwar soll der Nullpunkt der Berührungspunkt sein. Er heiße O. Der O diametral gegenüberliegende Punkt der Kugel sei U. Ist P irgendein Punkt der Ebene, so soll ihm auf der Kugel der Punkt P' entsprechen, in dem die Gerade UP die Kugel trifft; diesem Punkt P' ordnen wir den Wert von x zu, der dem Punkt P in der Gaußschen Zahlenebene zugeordnet ist. Dem unendlich fernen Punkt der Zahlenebene entspricht also der Punkt U. Der Vorteil dieser Übertragung auf die Kugel ist vor allem der, daß auch der unendlich ferne Punkt der Zahlenebene mit seiner Umgebung der Anschauung bequem zugänglich wird.

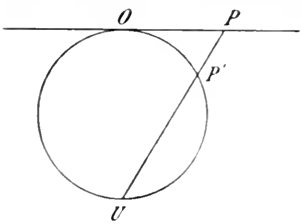


Abb. 1.

Wir bezeichnen die Gaußsche Zahlenebene oder Kugel mit E. Wir schließen aus E zunächst den unendlich fernen Punkt durch einen Kreis um den Nullpunkt mit einem so großen Radius aus, daß außerhalb dieses Kreises außer ∞ kein singulärer Punkt liegt. Dann schließen wir die anderen singulären Punkte durch kleine Kreise aus, deren Radien wir beliebig klein wählen können und jedenfalls so klein wählen, daß sie sich gegenseitig nicht überdecken. Die übrigbleibende Fläche bezeichnen wir mit E'.

§ 2. Verhalten von y in der Umgebung eines nicht singulären Wertes von x.

Es sei a ein Punkt in E'. Für $x = a$ liefert uns die Gleichung $f(x, y) = 0$ m endliche und voneinander verschiedene Werte von y, die wir mit $b_1, b_2, \ldots b_m$ bezeichnen. Wir greifen einen dieser Werte heraus, etwa b_1 und entwickeln $f(x, y)$ nach Potenzen von $x - a$, $y - b_1$ und erhalten:

(4) $f(x,y) = A(x-a) + B(y-b_1) + C(x-a)^2 + D(x-a)(y-b_1) + \cdots = 0.$

Der Koeffizient von $y - b_1$ ist nach dem Taylorschen Satze

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b_1)$$

und ist von Null verschieden, weil sonst nach (3) die Diskriminante $D(x)$

für $x = a$ verschwinden würde. Daher folgt aus einem Satze der Funktionentheorie, daß man aus (4) $y - b_1$ als gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$ berechnen kann

$$y - b_1 = \mathfrak{Q}_1 (x - a) \quad \text{oder} \quad y = b_1 + \mathfrak{Q}_1 (x - a) = \mathfrak{P}_1 (x - a),$$

wo $\mathfrak{P}_1 (x - a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$ bedeutet, die für $x = a$ gleich b_1 wird. Der Konvergenzkreis der Reihe reicht mindestens bis zum nächsten singulären Punkt. Eine solche Entwicklung nennen wir mit Weierstraß ein **Element** oder einen **Zweig** der Funktion y. Der Punkt a heißt Mittelpunkt des Elements. Da wir statt b_1 ebenso einen der anderen $m - 1$ Werte b_κ hätten nehmen können, so folgt, daß wir für die Umgebung eines nicht singulären Punktes a für unsere Funktion y im ganzen m verschiedene Reihenentwicklungen erhalten

$$y = \mathfrak{P}_k (x - a), \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

die nach steigenden positiven ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreiten. Diese Entwicklungen liefern uns **alle** Werte von y in der Umgebung von a; denn sie liefern uns m Werte von y zu jedem x. Es ist also y in der Fläche E' eine m-deutige analytische Funktion, die sich überall in E' wie eine rationale Funktion verhält.

Nun können wir die ganze Fläche E' mit einer **endlichen** Zahl von Kreisen überdecken, von denen keiner einen der singulären Punkte im Innern enthält, und deren Mittelpunkte in E' liegen. Die Flächen der Kreise können zum Teil außerhalb E' liegen und werden sich zum Teil überdecken. Wir können diese Kreise auf unendlich viele verschiedene Arten wählen. Es sei auf irgendeine Art E' in der angegebenen Weise mit Kreisen überdeckt. Es seien im ganzen N Kreise. Ihre Mittelpunkte seien $a_1, a_2, \ldots a_N$. Zu jedem dieser Punkte a_k gehören, wie wir eben gesehen haben, m Elemente der Funktion y, die den betreffenden Punkt zum Mittelpunkt haben, und jede der m Potenzreihen, die diese m Elemente darstellen, konvergiert in dem Kreise mit dem Mittelpunkt a_k. Wir sehen daraus, daß wir den ganzen Wertvorrat der Funktion y innerhalb von E' durch mN, also durch eine endliche Zahl von Elementen darstellen können.

§ 3. Verhalten von y in der Umgebung eines singulären Wertes von x.

Es sei jetzt a einer der singulären Werte von x. Wir unterscheiden drei Fälle, die wir der Reihe nach betrachten. 1. a ist nicht der unendlich ferne Punkt und es wird für $x = a$ keiner der Werte von y unendlich; 2. a ist nicht der unendlich ferne Punkt und es wird für $x = a$ wenigstens einer der Werte von y unendlich; 3. a ist der unendlich ferne Punkt.

Wir beschreiben um a zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2. Es sei $r_1 < r_2$. r_1 können wir beliebig klein wählen und r_2 so klein, daß innerhalb des Kreises mit dem Radius r_2 keiner der anderen singulären Punkte liegt. Den so entstehenden Kreisring nennen wir T. Wir wählen in T einen Punkt c. Da er nach unserer Annahme sicher nicht zu den singulären Punkten gehört, so gehören zu ihm als Mittelpunkt m Elemente von y, die wir mit $y_1, y_2, \ldots y_m$ bezeichnen wollen. Jedes dieser Elemente ist gegeben durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - c$:

$$y_k = \mathfrak{P}_k (x - c).$$

Wir betrachten zunächst das Element y_1, und setzen es analytisch fort längs eines Weges, der ganz in dem Kreisring T bleibt und den Punkt a einmal in positivem Sinne umkreist, bis wir wieder zu der Stelle c zurückkommen. Die Potenzreihe von $x - c$, zu der wir so gelangen, sei

$$\bar{y} = \overline{\mathfrak{P}} (x - c).$$

Dies Funktionselement $\bar{y}$ muß mit einem der Elemente $y_1, y_2, \ldots y_m$ identisch sein, weil $f(x, y_1)$ identisch Null ist und bei der analytischen Fortsetzung diese Eigenschaft erhalten bleibt, also auch $f(x, \bar{y})$ identisch verschwinden muß. Wenn wir das Element $\bar{y}$ wieder rückwärts analytisch fortsetzen, also auf einem Wege, der den Punkt a einmal in negativem Sinne umkreist, so kommen wir wieder zu y_1 zurück. Da in dem Kreisring kein singulärer Punkt liegt, so ist die Wahl der Wege bei der analytischen Fortsetzung gleichgültig, wenn wir nur ganz innerhalb des Kreisringes bleiben und den Punkt a nur einmal umlaufen. Der einfachste Fall ist der, daß $\bar{y}$ mit y_1 übereinstimmt. In diesem Falle ist die durch das Element y_1 und seine analytischen Fortsetzungen in dem Kreisring T definierte Funktion y_1 in der Umgebung von a eine eindeutige analytische Funktion. Da sie in a, wie wir vorausgesetzt haben, nicht unendlich wird, so läßt sie sich nach dem Cauchyschen Satze darstellen durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$:

$$\bar{y}_1 = \overline{\mathfrak{P}}_1 (x - a).$$

Diese Reihenentwicklung muß konvergieren mindestens in dem Kreise mit dem Radius r_2. Sie liefert uns auch wieder ein Element unserer algebraischen Funktion y, diesmal eines, dessen Mittelpunkt ein singulärer Punkt von x ist.

Nicht so einfach ist es, wenn $\bar{y}$ nicht mit y_1 identisch ist. Es sei $\bar{y}$ etwa mit y_2 identisch. Dann setzen wir y_2 analytisch fort auf einem Wege, der in dem Kreisring liegt und den Punkt a einmal in positivem Sinne umkreist, bis wir wieder nach c gelangen. Wir kommen dann wieder zu einer gewöhnlichen Potenzreihe $\bar{\bar{y}}$ von $x - c$, die wieder mit einem der Elemente $y_1, y_2, \ldots y_m$ identisch sein muß. Wenn wir $\bar{\bar{y}}$ auf dem Wege, auf dem wir gekommen sind, analytisch fortsetzen, so kommen wir, wenn wir den Punkt a einmal in negativem Sinne umlaufen haben, wieder zu y_2, und wenn wir ihn zweimal umlaufen haben, wieder zu y_1. Wenn wir also $\bar{\bar{y}}$ analytisch fortsetzen auf einem Wege in dem Kreisring, der den Punkt a einmal in negativem Sinne umkreist, so kommen wir zu y_2, machen wir dasselbe mit y_2, so kommen wir zu y_1. Es kann also keinesfalls $\bar{\bar{y}}$ mit y_2 identisch sein. Wohl aber kann $\bar{\bar{y}}$ mit y_1 identisch sein. Wir wollen gleich den allgemeinsten Fall betrachten. Es sei $\bar{\bar{y}}$ etwa identisch mit y_3. Dann setzen wir wieder y_3 auf einem Wege fort, der den Punkt a einmal in positivem Sinne umkreist, und gelangen so zu einer Potenzreihe von $x - c$, die wieder mit einer der Reihen $y_1, y_2 \ldots y_m$ übereinstimmen muß, etwa mit y_4. Fahren wir so fort, so müssen wir schließlich zu einer Potenzreihe kommen, die schon einmal da war, da ja im ganzen nur m, also eine endliche Zahl vorhanden ist. Es sei

$$y_1, y_2, \ldots y_\alpha$$

die Reihe der verschiedenen Elemente, die auf die angegebene Art der Reihe nach entstehen. Aus y_α möge bei weiterer Fortsetzung des Verfahrens y_β hervorgehen, und es sei y_β das erste Element, das mit einem der vorhergehenden identisch ist. Es ist β also gleich einer der Zahlen 1, 2, ... α. Wenn wir y_β auf einem Wege analytisch fortsetzen, der a einmal in negativem Sinne umkreist, so muß es übergehen in y_α, aus dem es entstanden ist; andererseits aber, wenn $\beta \neq 1$ in $y_{\beta-1}$, aus dem es auch entstanden ist. Es muß also, wenn $\beta \neq 1$, y_α mit $y_{\beta-1}$ übereinstimmen, was nicht sein kann, da wir angenommen haben, daß die Elemente $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ voneinander verschieden sind. Es ist also $\beta = 1$. Aus y_α geht also, wenn x den Punkt a einmal in positivem Sinne umläuft, wieder y_1 hervor, aus y_1 bei nochmaligem Umlauf y_2 usw.; die Elemente $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ vertauschen sich also zyklisch, wenn x den Punkt a einmal in positivem Sinne umkreist.

Der Punkt c, der ja in dem Kreisringe T beliebig gewählt werden kann, liege nicht auf der zur Achse der reellen Zahlen durch a gezogenen Parallelen. Wir denken uns den Kreisring längs des in ihm liegenden Stückes dieser Parallelen zerschnitten und verbieten x diesen Schnitt, den wir s nennen wollen, zu überschreiten. Wir erhalten so ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das begrenzt ist von den beiden Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 und von dem zweimal zu nehmenden Schnitt s. Wir bezeichnen dies Gebiet mit T'. In T' liegt kein singulärer Punkt von y. Es läßt sich daher jedes der Elemente $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ in T' analytisch fortsetzen und jedes bildet mit allen seinen analytischen Fortsetzungen in T' eine innerhalb T' eindeutige analytische Funktion, die in der Umgebung eines jeden Punktes von T' in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelt werden kann. Wir bezeichnen die so aus dem Element $y_\varkappa$ entstehende Funktion auch mit $y_\varkappa$. Überschreitet x den Schnitt s einmal in positivem Sinne, so geht die Funktion y_k über in y_{k+1}; überschreitet x den Schnitt einmal in negativem Sinne, so geht y über in y_{k-1}. Der Index ist nach dem Modul α zu nehmen. Die aus einem der Elemente y_k und allen seinen analytischen Fortsetzungen innerhalb des unzerschnittenen Kreisringes bestehende Funktion $y^{(1)}$ ist also eine α-deutige Funktion von x. Die Werte, die sie für einen Wert von x haben kann, sind $y_1(x), y_2(x), \ldots y_\alpha(x)$. Welchen Wert sie hat, hängt davon ab, von welchem der Elemente y_k man ausgeht und welchen Weg x beschrieben hat. Geht man z. B. von dem Elemente y_1 aus und hat x einen Weg beschrieben, der den Schnitt p-mal in positivem und n-mal in negativem Sinne überschreitet, so ist $y^{(1)}(x) = y_{1+p-n}$, wo der Index nach dem Modul α zu nehmen ist.

§ 4. Ein Beispiel.

Wir betrachten zunächst folgendes Beispiel. Der späteren Verwendung wegen bezeichnen wir die zu betrachtende Funktion mit ξ statt y. Es sei

$$\xi = \sqrt[\alpha]{x-a} = (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{5}$$

Wir führen Polarkoordinaten r, φ in der x-Ebene mit dem Pole a und ϱ, ψ in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkte als Pol ein, indem wir setzen

$$x - a = re^{\varphi i}, \qquad \xi = \varrho e^{\psi i}.$$

Es ist dann zufolge (5)

$$\varrho e^{\psi i} = \sqrt[\alpha]{r}\, e^{\frac{\varphi i}{\alpha}},$$

woraus wir schließen, daß wir setzen können

$$\varrho = \sqrt[\alpha]{r}, \qquad \psi = \frac{\varphi}{\alpha}. \tag{6}$$

Unter $\sqrt[\alpha]{r}$ ist der reelle positive Wert der Wurzel zu verstehen. Es sei zunächst $0 \leq \varphi < 2\pi$. Beschränken wir x auf die zerschnittene Ringfläche T', so bleibt φ immer zwischen 0 und 2π und es liegt ψ zwischen 0 und $2\pi/\alpha$. Da zu einem gegebenen Werte von x ein und nur ein Wert von φ gehört, für den $0 \leq \varphi < 2\pi$, und sich nach (6) aus φ und r eindeutig ψ und ϱ ergeben, so gehört unter den gemachten Annahmen zu einem Wert von x ein und nur ein Wert von ξ. Wir bezeichnen die so definierte innerhalb T' eindeutige Funktion von x mit ξ_1. Für sie ist $0 \leq \psi < 2\pi/\alpha$. Gehen wir von dieser Funktion aus und lassen x den Schnitt k-mal in positivem Sinne überschreiten, so nimmt φ um $2\pi k$ zu, also ψ um $2\pi k/\alpha$. Es geht daher $\xi_1 = \varrho\, e^{\psi i}$ über in $\varrho\, e^{\left(\psi + \frac{2\pi}{\alpha} k\right) i} = e^{\frac{2\pi i}{\alpha} k}\, \xi_1$. Wir bezeichnen die α-ten Einheitswurzeln, die hier auftreten, mit

$$\omega_k = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}k} = \omega_1^{\,k}\,.$$

Es ist für positives oder negatives ganzzahliges k und l

$$\omega_k \cdot \omega_l = \omega_1^{\,k}\,\omega_1^{\,l} = \omega_1^{\,k+l} = \omega_{k+l}\,.$$

Wir setzen

$$\omega_k\,\xi_1 = \xi_{k+1}\,.$$

Da $e^{2\pi i n} = 1$, wenn n eine ganze Zahl ist, so ist $\omega_k = 1$, wenn k durch α teilbar ist und $\omega_k = \omega_l$, wenn $k \equiv l \pmod{\alpha}$. Von den Funktionen ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots$ sind daher nur die ersten α, nämlich $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\alpha$ voneinander verschieden, während $\xi_{\alpha+1} = \xi_1$, $\xi_{\alpha+2} = \xi_2$ usw. Da ξ_1 in T' eindeutig ist, so ist auch jede der Funktionen $\xi_l = \omega_{l-1}\,\xi_1$ in T' eindeutig. Überschreitet x den Schnitt einmal in positivem Sinne, so geht ξ_1 über in $\omega_1\,\xi_1$, also $\xi_l = \omega_{l-1}\,\xi_1$ in $\omega_{l-1}\,\omega_1\,\xi_1 = \omega_l\,\xi_1 = \xi_{l+1}$. Die Funktionen ξ_k vertauschen sich also zyklisch. Alle ξ_k zusammen liefern uns die Funktion ξ innerhalb des unzerschnittenen Kreisringes. Es ist also ξ eine α-deutige Funktion von x. Sie hat bei gegebenem x einen der Werte $\xi_1(x)$, $\xi_2(x), \ldots \xi_\alpha(x)$. Welchen sie hat, hängt davon ab, von welcher der Funktionen ξ_k wir ausgehen und welchen Weg x beschrieben hat. Gehen wir von ξ_1 aus und beschreibt x einen Weg, der den Schnitt p-mal in positivem und n-mal in negativem Sinne überschreitet, so ist $\xi(x) = \xi_{1+p-n}$, wo der Index nach dem Modul α zu nehmen ist. Wir sehen also, daß sich ξ in der Umgebung von a genau so verhält wie die Funktion $y^{(1)}$ in §3. Wir werden sehen, daß das einen tieferen Grund hat.

§ 5. Ein zweites Beispiel.

Wir betrachten noch einen zweiten besonderen Fall, nämlich die allgemeinste **reine** Gleichung in y. Sie hat die Form

(7) $$f(x, y) = y^n - r(x) = 0\,,$$

wo $r(x)$ eine rationale Funktion von x ist. Die Funktion r läßt sich wie jede rationale Funktion in der Umgebung jeder Stelle $x = a$ in eine nach steigenden Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe entwickeln, wobei unter $x - a$ zu verstehen ist x^{-1}, wenn $a = \infty$. Nur für eine endliche Zahl von Stellen können in der Entwicklung negative Potenzen auftreten und auch nur in endlicher Zahl. Nehmen wir die niedrigste Potenz von $x - a$ vor die Klammer, so können wir schreiben

(8) $$r(x) = (x - a)^\lambda\,E(x - a)\,,$$

wo λ eine ganze positive oder negative Zahl oder Null ist und wo $E(x - a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$ ist, die für $x = a$ nicht Null wird. Eine solche Potenzreihe nennt man eine **Einheit für** $x = a$. Wir werden von solchen Einheiten und ihren Eigenschaften häufig Gebrauch machen. Es seien daher ihre Eigenschaften angegeben, soweit wir sie gebrauchen.

1. Der reziproke Wert einer Einheit für $x = a$, also ihre (-1)-te Potenz ist wieder eine Einheit für $x = a$.

Allgemeiner ist jede ganzzahlige oder rational gebrochene Potenz einer Einheit für $x = a$ wieder eine solche Einheit.

2. Der Logarithmus einer Einheit für $x = a$ ist eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$.

Der Beweis dieser Sätze sei kurz angedeutet. Es sei E eine Einheit für $x = a$ und es sei

$$E(x-a) = e_0 + e_1(x-a) + e_2(x-a)^2 + \cdots, \quad (e_0 \neq 0).$$

Wir schreiben

$$(9) \quad E(x-a) = e_0\left\{1 + \frac{e_1}{e_0}(x-a) + \frac{e_2}{e_0}(x-a)^2 + \cdots\right\} = e_0(1+z).$$

Da z für $x = a$ zu Null wird, so können wir $x - a$ so klein annehmen, daß $z < 1$. Ist n irgendeine rationale Zahl, so ergibt der binomische Satz

$$\left\{E(x-a)\right\}^n = e_0^n(1+z)^n = e_0^n\left\{1 + nz\frac{n(n-1)}{2}z^2 + \cdots\right\}.$$

Setzt man hierin für z seinen Wert ein und ordnet nach Potenzen von $x - a$, so erhält man für $E(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe, die für $x = a$ den Wert e_0^n annimmt, also nicht Null wird. Damit ist der erste Satz bewiesen.

Aus (9) folgt ferner

$$ln\,E(x-a) = ln\,e_0 + ln(1+z) = ln\,e_0 + (z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots).$$

Setzt man hierin für z seinen Wert und ordnet nach Potenzen von $x - a$, so erhält man für $ln\,E$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$.

Wir werden eine Reihe auch dann eine Einheit nennen, wenn sie nach ganzen positiven Potenzen einer ganzzahligen Wurzel von $x - a$ fortschreitet und für $x = a$ nicht Null wird. Schreitet solch eine Reihe etwa nach ganzen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fort, so braucht man nur zu setzen $(x - a) = \xi^\alpha$, um den vorigen Fall zu haben. Daraus sieht man, daß auch für diese Einheiten die beiden angegebenen Sätze gelten.

Wir kehren zur Betrachtung der reinen Gleichung (7) zurück. Aus ihr und aus (8) folgt

$$y = \sqrt[m]{r(x)} = (x-a)^{\frac{\lambda}{m}}\left\{E(x-a)\right\}^{\frac{1}{m}} = \omega(x-a)^{\frac{\lambda}{m}}E_1(x-a),$$

wo E_1 eine Einheit für $x = a$ ist, und wo ω irgendeine m-te Einheitswurzel ist. Wir erhalten so, den m m-ten Einheitswurzeln entsprechend, m Entwicklungen, die mit $y_1, y_2, \ldots y_m$ bezeichnet seien.

Ist a weder eine Null- noch eine Unendlichkeitsstelle von $r(x)$, ist also $\lambda = 0$, so erhalten wir m gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$, und es geht jede in sich selbst über, wenn x einen geschlossenen Weg um a beschreibt. Dasselbe gilt, wenn λ durch m teilbar ist. Singuläre Stellen für y sind also höchstens die Null und Unendlichkeitsstellen von $r(x)$.

Ist λ nicht Null und nicht durch m teilbar, so sei δ der größte gemeinsame Teiler von λ und m und es sei $\lambda = \mu\,\delta$, $m = \alpha\,\delta$. Es wird dann

$$y = \omega\,(x - a)^{\frac{\mu}{\alpha}}\,E_1\,(x - a)\,,$$

wo μ und α teilerfremd sind. Es sei y_1 eine dieser m Entwicklungen. Umkreist x den Punkt a einmal, so geht E_1 wieder in sich über, aber $(x - a)^{\frac{\mu}{\alpha}} = \left\{(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\mu}$ nimmt den Faktor $\omega_1^{\mu} = \omega_{\mu}$ an, wo, wie im vorigen Beispiel, $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}$. Es geht also y_1 in eine andere der Entwicklungen y_k über, nämlich in $\omega_{\mu}\,y_1$. Diese sei mit y_2 bezeichnet. Setzen wir allgemeiner

$$y_l = \omega_{\mu}^{l-1}\,y_1\,, \qquad (l = 1, 2, \ldots \alpha) \tag{10}$$

so sind diese α Entwicklungen unter den m Entwicklungen $y_1, y_2, \ldots y_m$ enthalten und sie vertauschen sich zyklisch, wenn x den Punkt a einmal umkreist. Ist $\alpha < m$, so sei $y_{\alpha+1}$ eine von den α Entwicklungen (10) verschiedene Entwicklung. Setzen wir

$$y_{\alpha+l} = \omega_{\mu}^{l-1}\,y_{\alpha+1}\,, \qquad (l = 1, 2, \ldots \alpha)$$

so sind auch diese α Entwicklungen unter den m Entwicklungen $y_1, y_2, \ldots y_m$ enthalten und sie sind von den α Entwicklungen (10) verschieden. Auch sie vertauschen sich zyklisch, wenn x einen geschlossenen Weg um a beschreibt. Ist $m > 2\,\alpha$, so können wir in dieser Weise fortfahren und erhalten das Ergebnis, daß die m Entwicklungen $y_1, y_2, \ldots y_m$ sich in δ Gruppen von je α Entwicklungen so anordnen lassen, daß die Entwicklungen jeder Gruppe sich zyklisch vertauschen, wenn x den Punkt a einmal umkreist. Bleibt x in dem um den Punkt a abgegrenzten Ringgebiet, so kann jede Entwicklung einer Gruppe in jede andere derselben Gruppe übergeführt werden, dadurch, daß x den Punkt a ein oder mehrere Male umkreist. Es ist aber nicht möglich, auf diese Art eine Entwicklung einer Gruppe in eine einer anderen überzuführen.

§ 6. Fortsetzung von § 3.

Wir kehren zur Betrachtung der Funktion $y^{(1)}$ zurück und wollen sie auffassen als Funktion der in § 4 betrachteten Größe ξ. Wir führen also durch die Gleichung (5) oder

$$x = a + \xi^{\alpha} \tag{11}$$

statt x eine neue unabhängige Veränderliche ξ ein. Wir haben x beschränkt auf den Kreisring T, für den $r_1 < |x - a| < r_2$, so daß zufolge (6) auch ξ auf einen Kreisring beschränkt ist, nämlich auf den Kreisring $\sqrt[\alpha]{r_1} < |\xi| < \sqrt[\alpha]{r_2}$, den wir mit τ bezeichnen. Liegt umgekehrt ξ in τ, so liegt x in T. Da nach (6) $\varphi = \arg x$ α-mal so groß ist wie $\psi = \arg \xi$, so gilt ferner folgendes. Wenn ξ einen Sektor von τ mit dem Mittelpunktswinkel $2\pi/\alpha$ durchläuft, so durchläuft x den ganzen Ring T. Wir teilen τ in α kongruente Sektoren mit dem Mittelpunktswinkel $2\pi/\alpha$, die wir der Reihe nach mit $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\alpha$ bezeichnen, und zwar soll τ_k durch die Bedingung

$$(k-1)\frac{2\pi}{\alpha} \leq \psi < k\frac{2\pi}{\alpha}$$

bestimmt sein. Beschreibt ξ einen der Sektoren τ_k, so beschreibt x den zerschnittenen Kreisring T', ohne den Schnitt zu überschreiten.

Es sei ξ_0 irgendein Wert von ξ in τ. Der eindeutig bestimmte zugehörige Wert von x, nämlich $a + \xi_0^\alpha$, sei mit x_0 bezeichnet. Aus (11) folgt

$$x = a + [\xi_0 + (\xi - \xi_0)]^\alpha$$

oder nach dem binomischen Satze

$$(12)\quad x - x_0 = \alpha\,\xi_0^{\alpha-1}(\xi - \xi_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,\xi_0^{\alpha-2}(\xi - \xi_0)^2 + \cdots + (\xi - \xi_0)^\alpha.$$

Da x_0 in T liegt, so läßt sich jede der Funktionen y_k in eine gewöhnliche nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln und diese geht unter Benutzung von (12) in eine gewöhnliche Potenzreihe von $\xi - \xi_0$ über. Daher lassen sich die Funktionen y_k in der Umgebung jeder Stelle ξ_0 von τ in eine gewöhnliche Potenzreihe von $\xi - \xi_0$ entwickeln. Wir wählen im besonderen ξ_0 innerhalb τ_1 und denken uns y_1 nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt und dann mit Hilfe von (12) diese Entwicklung verwandelt in eine Potenzreihe von $\xi - \xi_0$. Wenn wir die so erhaltene Potenzreihe innerhalb τ analytisch fortsetzen, so erhalten wir eine analytische Funktion, die mit $\eta(\xi)$ bezeichnet sei. In der Umgebung von ξ_0 ist nach der Definition $\eta(\xi) = y_1(x)$, wenn x aus der Gleichung (11) bestimmt wird. Durchläuft ξ das Gebiet τ_1, so bleibt x in T' und es bleibt die Gleichung $\eta(\xi) = y_1(x)$ bestehen. Geht aber ξ von τ_1 nach τ_2, so geht x einmal in positivem Sinne über den Schnitt s und $y_1(x)$ geht in $y_2(x)$ über. Befindet sich also ξ in τ_2, so besteht die Gleichung $\eta(\xi) = y_2(x)$, wenn x wieder aus der Gleichung (11) bestimmt wird. Geht ξ von τ_2 nach τ_3, so überschreitet x zum zweiten Male den Schnitt s in positivem Sinne und $y_2(x)$ geht in $y_3(x)$ über. Wenn also ξ in τ_3 liegt, so ist $\eta(\xi) = y_3(x)$. So können wir weiter schließen. Wenn schließlich ξ aus τ_α in

τ_1 übergeht, so überschreitet x zum α-ten Male den Schnitt s in positivem Sinne und wir kommen wieder zu $y_1(x)$. Es ist also

$$\eta(\xi) = y_k(x),$$

wenn ξ in τ_k liegt und x aus (11) bestimmt wird. Dabei ist es gleichgültig, welchen Weg ξ in τ beschrieben hat. Es kann ξ auch den Nullpunkt beliebig oft umkreist haben. Es ist daher $\eta(\xi)$ in τ eine eindeutige analytische Funktion und es ist bei passender Zuordnung von ξ und x

$$\eta(\xi) = y^{(1)}(x). \tag{13}$$

Da nach Voraussetzung $y^{(1)}(x)$ endlich bleibt, wenn x sich dem Punkte a nähert, so bleibt $\eta(\xi)$ endlich, wenn ξ sich dem Punkte 0 nähert. Nach dem Cauchyschen Satze ist daher $\eta(\xi)$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von ξ entwickelbar $\eta = \mathfrak{P}(\xi)$. Aus (11) und (13) folgt dann, daß sich $y^{(1)}$ in der Umgebung von a in eine gewöhnliche Potenzreihe von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ entwickeln läßt:

$$y^{(1)} = e_0 + e_1(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + e_2(x-a)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots = \mathfrak{P}^{(1)}\left[(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}\right]. \tag{14}$$

Wenn wir x erlauben, sich in T beliebig zu bewegen, also auch den Punkt a beliebig oft zu umkreisen, so liefert uns die Reihe (14) alle Werte von $y^{(1)}$. Sie liefert uns zu jedem Werte von x in T, den α Werten entsprechend, die $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ für einen Wert von x hat, α Werte der algebraischen Funktion y. Wenn wir aber x auf T' beschränken, so liefert uns die Reihe (14) nur eine der Funktionen y_k. Welche dieser Funktionen das ist, hängt davon ab, welchen Wert wir der α-ten Wurzel aus $x-a$ beilegen. Wählen wir $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} = \xi$ so, daß ξ in τ_k liegt, so ist bei unseren Festsetzungen der Wert der Reihe (14) gleich y_k. Verstehen wir im besonderen unter $\sqrt[\alpha]{(x-a)}$ den Wert von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$, der in τ_1 liegt, nehmen wir also nach früherer Bezeichnung $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} = \xi_1$ an, so ist der Wert von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ in τ_k gleich $\omega_{k-1}\sqrt[\alpha]{(x-a)} = \omega_{k-1}\xi_1 = \xi_k$. Es bestehen daher die Entwicklungen

$$\begin{aligned} y_k &= e_0 + e_1\,\omega_{k-1}\sqrt[\alpha]{x-a} + e_2\left(\omega_{k-1}\sqrt[\alpha]{x-a}\right)^2 + \cdots \\ &= e_0 + e_1\xi_k + e_2\xi_k^2 + \cdots, \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots \alpha) \tag{15}$$

wo x auf das Gebiet T' zu beschränken ist. Wir nennen diese α Entwicklungen zueinander **adjungiert**. Die Entwicklungen gehen aus einer von ihnen dadurch hervor, daß man x den Punkt a umlaufen läßt, da allgemein aus der Entwicklung für y_k die für y_{k+1} entsteht, wenn man x den Punkt a einmal in positivem Sinne umlaufen läßt. Daher liefert uns jede der Entwicklungen alle Werte von $y^{(1)}$, wenn wir x die Überschreitung des Schnittes s gestatten. Wir sagen daher von adjungierten Entwicklungen, sie hängen in der Umgebung von a miteinander zusammen.

Wir bezeichnen den Teil der algebraischen Funktion y, der uns durch (14) gegeben wird, wieder als Element oder Zweig der Funktion y und die durch die Entwicklungen (15) gegebenen Teile von y als Teilelemente oder Teilzweige.

Fassen wir in der Entwicklung (14) für $y^{(1)}$ immer die Glieder zusammen, wo die Exponenten von $x - a$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, so erhalten wir sie in der Gestalt

$$y^{(1)} = p_1 + p_2 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + p_3 (x-a)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots + p_\alpha (x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

wo die p_k gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ sind. Ein Glied, das in einem der Summanden $p_l\,(x-a)^{\frac{l-1}{\alpha}}$ vorkommt, kann sich nicht gegen Glieder in anderen Summanden fortheben, da Glieder aus verschiedenen Summanden nie dieselbe Potenz von $x - a$ zum Faktor haben. Soll z. B. $y^{(1)}$ für $x = a$ endlich bleiben, so darf in keinem Summanden eine negative Potenz von $x - a$ enthalten sein. Das aber ist dann und nur dann der Fall, wenn die Potenzreihen p_k keine negative Potenz von $x - a$ enthalten, wie man sofort sieht, wenn man bedenkt, daß die p_k nur ganzzahlige Potenzen von $x - a$ enthalten.

Ist $m > \alpha$, so gehen wir von dem Element $y_{\alpha+1} = \mathfrak{P}_{\alpha+1}(x - c)$ aus und setzen es analytisch fort auf einem Wege, der in T liegt und den Punkt a einmal in positivem Sinne umkreist. Dadurch gehe $y_{\alpha+1}$ über in $\bar{y}$. Es muß dann $\bar{y}$ wieder eine Wurzel der Gleichung $f(x, y) = 0$ sein und muß also eines der Elemente $y_1, y_2, \ldots y_m$ sein. Es kann aber nicht gleich einem der Elemente $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ sein. Denn, wenn x in negativem Sinne den Punkt a umkreist, so geht $\bar{y}$ wieder in $y_{\alpha+1}$ über, aber jedes der Elemente $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ geht dabei wieder in eins dieser Elemente über und nicht in $y_{\alpha+1}$. Es sei $\bar{y} = y_{\alpha+2}$. Lassen wir x noch mal den Punkt a in positivem Sinne umkreisen, so gehe $y_{\alpha+2}$ über in $y_{\alpha+3}$, $y_{\alpha+3}$ in $y_{\alpha+4}$ usw., schließlich $y_{\alpha+\beta}$ in $y_{\alpha+\beta+1}$ und es sei $y_{\alpha+\beta+1}$ das erste Element, das gleich einem der vorhergehenden ist. Dann läßt sich wieder wie oben nachweisen, daß $y_{\alpha+\beta+1} = y_{\alpha+1}$ sein muß. Es vertauschen sich also die β Elemente $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \ldots y_{\alpha+\beta}$ auch zyklisch, wenn x den Punkt a einmal umkreist. Wir schließen, wie oben, daß wir für die Funktion y in der Umgebung von a noch ein zweites Element $y^{(2)}$ haben, das gegeben ist durch eine Entwicklung von der Form

$$(16) \quad y^{(2)} = \mathfrak{P}^{(2)}\left[(x-a)^{\frac{1}{\beta}}\right] = c_0 + c_1 (x-a)^{\frac{1}{\beta}} + c_2 (x-a)^{\frac{2}{\beta}} + \cdots,$$

wo $\mathfrak{P}^{(2)}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $(x-a)^{\frac{1}{\beta}}$ ist. Diese Reihe gibt uns, den β Werten von $(x-a)^{\frac{1}{\beta}}$ entsprechend, β Werte von y zu einem Werte von x. Beschränken wir x auf T'', so haben wir statt (16) β adjungierte Entwicklungen.

Ist $\alpha+\beta < m$, so gehen wir aus von dem Element $y_{\alpha+\beta+1} = \mathfrak{P}_{\alpha+\beta+1}(x-c)$ und verfahren wie oben. Wir wollen aber annehmen, daß $\alpha+\beta = m$ sei. Das genügt, um auch den allgemeinsten Fall zu übersehen. Das Ergebnis ist dann folgendes:

Ist a ein im Endlichen liegender singulärer Punkt und wird für $x=a$ keiner der Werte von y unendlich, so lassen sich die Wurzeln von $f(x, y) = 0$ in der Umgebung von a in eine endliche Zahl von Gruppen teilen, etwa in zwei, so daß die Wurzeln in jeder Gruppe sich zyklisch vertauschen, wenn x den Punkt a umkreist (bei einem Wege, der außer a keinen singulären Punkt einschließt). Enthalten die Gruppen α und β Wurzeln, so haben wir in der Umgebung von a zwei Reihenentwicklungen für y von der Form:

$$y = \mathfrak{P}^{(1)}\left[(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}\right], \qquad y = \mathfrak{P}^{(2)}\left[(x-a)^{\frac{1}{\beta}}\right],$$

wo die $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen ihrer Argumente sind. Aus der ersten Entwicklung gehen noch $\alpha-1$, aus der zweiten $\beta-1$ adjungierte hervor, dadurch, daß die Wurzeln von $x-a$ durch ihre verschiedenen Werte ersetzt werden. Wir bekommen also im ganzen $\alpha+\beta = m$ Entwicklungen und bekommen, wie es sein muß, $\alpha+\beta = m$ Werte von y zu jedem Wert von x in der Umgebung von a. Wir nennen diese m Entwicklungen zueinander **konjugiert**.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß sehr wohl der Fall eintreten kann, daß die Zahl der Gruppen gleich m ist, daß also jede Gruppe nur eine einzige Wurzel enthält. Wir haben dann, genau wie bei einem nicht singulären Punkt m Reihenentwicklungen, die nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreiten. Der (unwesentliche) Unterschied ist nur der, daß zwei oder mehrere dieser Entwicklungen für $x=a$ denselben Wert annehmen.

§ 7. Verhalten von y in der Umgebung eines Wertes von x, für den y unendlich wird.

Wir nehmen jetzt den Fall, wo für $x=a$ eine oder mehrere Wurzeln von $f(x, y) = 0$ unendlich werden, wo aber a endlich ist. Es muß dann a eine Nullstelle von $a_0(x)$ sein, dem Koeffizienten von y^m in f. Es sei $a_0(x)$ durch $(x-a)^\delta$ teilbar. Wir setzen $a_0(x) = (x-a)^\delta a_0'(x)$. Statt y führen wir eine neue abhängige Veränderliche ein, durch die Gleichung

$$\eta = (x-a)^\delta y. \tag{17}$$

Die Gleichung $f=0$ geht nach Multiplikation mit $(x-a)^{(m-1)\delta}$ über in

$$a_0'\eta^m + a_1\eta^{m-1} + (x-a)^\delta a_2\eta^{m-2} + \cdots + (x-a)^{(m-1)\delta} a_m = 0.$$

Da für $x = a$ der Koeffizient von η^m nicht Null wird, so können wir auf diese Gleichung unsere bisherigen Ergebnisse anwenden. Wir erhalten also, wenn wir gleich den allgemeinen Fall annehmen, in der Umgebung von $x = a$ eine oder mehrere Entwicklungen, die nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - a$ fortschreiten. Aus der Gleichung (17) folgt dann, daß wir auch für y Entwicklungen nach steigenden Potenzen von $x - a$ oder einer gebrochenen Potenz von $x - a$ erhalten, daß aber diese Entwicklungen eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthalten können, da y aus η entsteht durch Division mit $(x - a)^\delta$. Es brauchen aber nicht alle Entwicklungen von y in der Umgebung von a negative Potenzen enthalten. Es kann ja sein, daß eine oder mehrere der Entwicklungen für η $x - a$ in der Potenz δ oder in höherer Potenz als Faktor enthalten. Aber mindestens eine Entwicklung von y muß wirklich negative Potenzen enthalten, wenn $a_0(x)$ durch $(x - a)$ teilbar ist, weil in diesem Falle mindestens eine Wurzel von $f(a, y) = 0$ unendlich groß sein muß.

§ 8. Verhalten von y in der Umgebung von $x = \infty$.

Wir betrachten schließlich noch das Verhalten von y für unendlich große Werte von x. Zu dem Ende setzen wir $x = 1/z$. Der Umgebung des unendlich fernen Punktes der x-Ebene entspricht die Umgebung des Nullpunktes der z-Ebene. Wir haben also y als Funktion von z in der Umgebung des Punktes $z = 0$ zu betrachten. Die Gleichung $f(x, y) = 0$, die in x vom Grade l sein sollte, geht nach Multiplikation mit z^l über in eine Gleichung $G(z, y) = 0$, wo $G(z, y)$ eine ganze rationale Funktion von z, y ist. Aus den bisher gefundenen Ergebnissen folgt, daß wir für y aus dieser Gleichung eine oder mehrere Entwicklungen erhalten. Jede dieser Entwicklungen schreitet nach ganzen positiven Potenzen von $z = 1/x$ oder einer gebrochenen Potenz von z fort und sie kann höchstens eine endliche Anzahl von negativen Potenzen von z enthalten. Diese Entwicklungen geben uns die Funktion y für die Umgebung des Punktes $z = 0$ oder $x = \infty$. Es gilt also für den Fall, daß der Punkt a der unendlich ferne Punkt der x-Ebene ist, dasselbe wie für endliches a, wenn man nur für $a = \infty$ unter $x - a$ versteht $1/x$.

Damit wissen wir, wie sich die algebraische Funktion y in der Umgebung irgendeines Punktes der x-Ebene verhält.

Wir haben schon früher gesehen (am Ende von § 2), daß der gesamte Wertvorrat von y, soweit er für solche Werte von x angenommen wird, die in E' liegen, durch eine endliche Zahl von Elementen dargestellt werden kann. Da wir jetzt gesehen haben, daß auch zu jedem der in endlicher Zahl vorhandenen singulären Punkte von x nur eine endliche Zahl von Elementen gehört, so folgt: Wir können den gesamten Wertevorrat der algebraischen Funktion y durch eine endliche Zahl von Elementen darstellen. Jedes dieser Elemente ist, wenn a sein Mittelpunkt ist, eine Potenzreihe, die nach steigenden ganzen Potenzen von $x - a$ oder einer ganzzahligen positiven Wurzel aus $x - a$ fortschreitet und die höchstens eine endliche Zahl von negativen Exponenten enthält. Dabei ist unter $x - a$ zu verstehen $1/x$, wenn $a = \infty$. Negative und gebrochene Exponenten können nur an einer endlichen Zahl von Punkten vorkommen.

Zweites Kapitel.

Die Berechnung der Reihenentwicklungen für y in der Umgebung irgendeiner Stelle.

§ 1. Vorbetrachtungen.

Nachdem wir festgestellt haben, daß wir y in der Umgebung jeder Stelle a in nach steigenden Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihen entwickeln können und wie diese beschaffen sind, gehen wir dazu über zu zeigen, wie man diese Entwicklungen praktisch berechnen kann. Wir setzen:

$$x - a = z$$

und, wenn a die unendlich ferne Stelle ist,

$$\frac{1}{x} = z\,.$$

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ schreiben wir (wenn $a = \infty$, nach Multiplikation mit z) in der Form

$$g(z, y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_m y^m = 0\,,$$

wo die c ganze rationale Funktionen von z sein sollen. Es sei das Anfangsglied von c_k, wenn wir c_k nach steigenden Potenzen von z ordnen, gleich $g_k z^{\alpha_k}$, so daß wir unsere Gleichung auch schreiben können:

(1) $$g(y, z) = (g_0 z^{\alpha_0} + \cdots) + (g_1 z^{\alpha_1} + \cdots) y + \cdots + (g_m z^{\alpha_m} + \cdots) y^m = 0.$$

In diese Gleichung setzen wir mit unbestimmten Koeffizienten und Exponenten ein

(2) $$y = e_1 z^{\varepsilon_1} + e_2 z^{\varepsilon_2} + \cdots,$$

wobei wir voraussetzen $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \cdots$ und die Koeffizienten e_k als von Null verschieden. Wir erhalten

(3) $$(g_0 z^{\alpha_0} + \cdots) + (g_1 z^{\alpha_1} + \cdots)(e_1 z^{\varepsilon_1} + \cdots) + (g_2 z^{\alpha_2} + \cdots)(e_1^2 z^{2\varepsilon_1} + \cdots) + \cdots + (g_m z^{\alpha_m} + \cdots)(e_1^m z^{m\varepsilon_1} + \cdots) = 0\,,$$

wo in jeder Klammer nur das Glied niedrigster Ordnung hingeschrieben ist. Soll die Reihe (2) eine Lösung sein, so muß der in (3) auf der linken Seite stehende Ausdruck identisch Null sein. Multiplizieren wir also in (3) die Klammern aus und ordnen nach Potenzen von z, so müssen sich die Potenzen mit gleichen Exponenten fortheben. Es müssen sich also auch die Glieder fortheben, in denen z den kleinsten Exponenten hat. Damit aber diese Glieder sich gegenseitig aufheben können, müssen mindestens zwei von ihnen da sein. Wir werden sehen, daß uns diese Bedingung den Exponenten ε_1, endlich vieldeutig, liefert. Die Bedingung, daß die dann mindestens in zwei Exemplaren vorhandenen Glieder niedrigster Ordnung sich fortheben, liefert uns den ersten Koeffizienten e_1.

Die Glieder niedrigster Ordnung in (3) sind sicher unter denen enthalten, die sich ergeben, wenn wir in (3) in den Klammern nur die Anfangsglieder berücksichtigen, also unter den Gliedern

$$(4)\qquad g_0 z^{\alpha_0}, \quad g_1 e_1 z^{\alpha_1+\varepsilon_1}, \quad g_2 e_1^2 z^{\alpha_2+2\varepsilon_1}, \quad g_3 e_1^3 z^{\alpha_3+3\varepsilon_1}, \ldots g_m z^{\alpha_m+m\varepsilon_1}.$$

Wir haben also ε_1 so zu bestimmen, daß unter den Exponenten

$$(5)\qquad \alpha_0+0\cdot\varepsilon_1, \quad \alpha_1+1\cdot\varepsilon_1, \quad \alpha_2+2\cdot\varepsilon_1, \ldots \alpha_m+m\varepsilon_1$$

der kleinste mindestens zweimal vorkommt.

Wir betrachten erst ein Beispiel. Die Gleichung zwischen x und y sei

$$(6)\qquad x^2+2x^3-(x+x^2)y+xy^2+y^3=0.$$

Wir wollen die Entwicklungen von y in der Umgebung des Punktes $x=0$ betrachten. Wir hätten $x=z$ zu setzen, wollen aber der Einfachheit halber den Buchstaben x beibehalten. Es ist hier

$$\alpha_0=2,\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=0,$$

also die Reihe (5) der Exponenten

$$(7)\qquad 2, 1+\varepsilon_1, 1+2\varepsilon_1, 3\varepsilon_1.$$

Da die Gleichung (6) für $x=0$ übergeht in $y^3=0$, so folgt, daß für $x=0$ alle Wurzeln von (6) den Wert Null annehmen. Es ist also für jede der gesuchten Entwicklungen $\varepsilon_1>0$. Dann aber folgt, daß unter den Zahlen (7) die Zahl $1+2\varepsilon_1$ immer größer ist als $1+\varepsilon_1$, also bei keiner erlaubten Wahl von ε_1 eine der kleinsten Zahlen sein kann. Wir können uns also beschränken auf die Betrachtung der Zahlen

$$(8)\qquad 2, \quad 1+\varepsilon_1, \quad 3\varepsilon_1.$$

Es sind zwei Bedingungen, die zur Bestimmung von ε_1 führen. 1. Es müssen zwei der Zahlen (8) einander gleich sein und 2. diese Zahlen müssen kleiner als die dritte sein (oder ihr gleich). Die erste Bedingung können wir auf drei Arten erfüllen:

$$\text{I.}\quad 2 = 1 + \varepsilon_1\,,\ \varepsilon_1 = 1\,;$$
$$\text{II.}\quad 2 = 3\,\varepsilon_1\,,\qquad \varepsilon_1 = \frac{2}{3}\,;$$
$$\text{III.}\quad 1 + \varepsilon_1 = 3\varepsilon_1\,, \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\,.$$

Die drei Zahlen (8) sind in den drei Fällen:

$$\text{I.}\quad 2\,,\ 2\,,\ 3\,;$$
$$\text{II.}\quad 2\,,\ \frac{5}{3}\,,\ 2\,;$$
$$\text{III.}\quad 2\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{3}{2}\,.$$

Wir sehen, daß im Falle I und III die beiden gleichen Exponenten auch die kleinsten sind, im Falle II aber nicht. Wir haben also zwei mögliche Werte für ε_1:

$$1.\ \varepsilon_1 = 1\,,\qquad 2.\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\,.$$

Die Glieder (4), auf die es zunächst ankommt, sind in unserem Beispiel

$$x^2,\quad -e_1\,x^{1+\varepsilon_1}\,,\quad e_1^2\,x^{1+2\varepsilon_1}\,,\quad e_1^3\,x^{3\varepsilon_1}\,.$$

Im Falle 1, wo $\varepsilon_1 = 1$, werden das erste und zweite Glied von derselben und niedrigsten Ordnung. Sollen sie sich fortheben, so muß $e_1 = 1$ sein. Im Falle 2, wo $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, werden das zweite und vierte Glied von derselben und niedrigsten Ordnung. Sie heben sich fort, wenn $-e_1 + e_1^3 = 0$, also, da e_1 von Null verschieden angenommen ist, wenn $e_1 = \pm 1$. Wir erhalten also für y in der Umgebung von $x = 0$ drei Entwicklungen, die so anfangen

$$y = x + \cdots,\quad y = x^{\frac{1}{2}} + \cdots,\quad y = -\,x^{\frac{1}{2}} + \cdots.$$

§ 2. Das Diagramm von Puiseux.

Wir kehren zu dem allgemeinen Fall zurück. Man kann in jedem Fall zur Bestimmung von ε_1 so verfahren, wie wir es bei dem Beispiel getan haben, indem man nämlich auf alle möglichen Arten zwei der Exponenten (5) einander gleichsetzt und zusieht, ob diese dann die kleinsten werden oder nicht. Dies Verfahren ist aber in den meisten Fällen recht mühsam. Viel übersichtlicher und einfacher ist das Verfahren von Puiseux, das wir jetzt auseinandersetzen. Wir zeichnen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O (Abb. 2) die $m + 1$ Punkte mit den Koordinaten

$$0, \alpha_0\,;\ 1, \alpha_1\,;\ 2, \alpha_2\,; \ldots\, m, \alpha_m\,.$$

Der Punkt (k, α_k) sei mit A_k bezeichnet. Wenn in $f(x, y) = 0$ ein oder mehrere Potenzen von y, z. B. y^2 und y^5 fehlen, so sind die entsprechenden Punkte A, also in dem Beispiel A_2 und A_5, fortzulassen. Wenn man will, kann man sich die entsprechenden α, also α_2, und α_5, unendlich groß denken.

Bestimmen wir einen Winkel τ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau = \varepsilon_1,$$

so können wir die Exponenten (5) sehr einfach geometrisch darstellen, indem wir durch die Punkte A Gerade ziehen, die mit der negativen Abszissenachse den Winkel τ einschließen. Die Gerade durch A_k möge die Ordinatenachse in B schneiden. Dann ist das von der Ordinatenachse abgeschnittene Stück $OB_k = \alpha_k + k \operatorname{tg} \tau = \alpha_k + k\varepsilon_1$. Wir müssen τ, also die Neigung der Geraden so wählen, daß mindestens zwei der

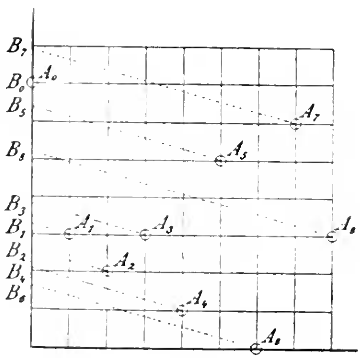


Abb. 2.

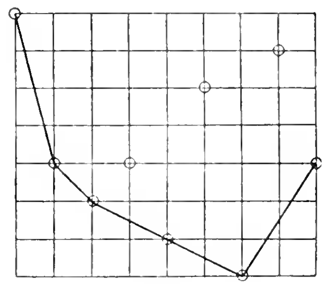


Abb. 3.

Strecken OB_k einander gleich werden und daß keine der anderen Strecken OB_k diese an Größe übertreffen, daß also, anders ausgedrückt, mindestens zwei Punkte B_k zusammenfallen und keiner der anderen Punkte B_k tiefer liegt. Sollen aber z. B. B_1 und B_2 zusammenfallen, so müssen A_1 und A_2 auf derselben Geraden liegen, so daß das zugehörige τ gleich dem Winkel ist, den die Gerade $A_1 A_2$ mit der negativen Abszissenachse bildet. Soll ferner bei dieser Wahl von τ keiner der anderen Punkte tiefer liegen als $B_1 = B_2$, so darf keiner der Punkte A_k unterhalb der Geraden $A_1 A_2$ liegen. Um also alle zulässigen Werte von τ zu finden, haben wir alle Geraden aufzusuchen, die durch mindestens zwei der Punkte A_k gehen und die so liegen, daß keiner der Punkte A_k unterhalb dieser Geraden liegt. Alle Geraden dieser Art finden wir auf folgende Art. Wir legen eine Gerade durch den Punkt A_0 und lassen sie zunächst mit der Ordinatenachse zusammenfallen und drehen sie dann solange um A_0 entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, bis ein zweiter der Punkte A_k auf der Geraden liegt, etwa der Punkt A_λ. Liegen auf der Geraden $A_0 A_\lambda$ mehr als zwei der Punkte A_k, so soll unter A_λ der am weitesten rechts liegende unter diesen Punkten verstanden sein. Die Gerade $A_0 A_\lambda$ ist dann eine der gesuchten Geraden. Wir lassen die Gerade sich weiter drehen in demselben Sinne, aber um den Punkt A_λ, bis wieder einer der Punkte A_k auf der Geraden liegt. Es sei etwa der Punkt A_μ. Liegen außer A_λ, A_μ auf der Geraden $A_\lambda A_\mu$ noch andere der Punkte A_k, so soll wieder A_μ der am weitesten rechts gelegene Punkt sein. $A_\lambda A_\mu$ ist auch eine der gesuchten Geraden. Wir lassen die Gerade sich weiter in demselben Sinne drehen, aber um den Punkt A_μ, bis wieder ein weiterer Punkt außer A_μ auf ihr liegt. Es sei der Punkt A_ν. Liegen außer A_μ und A_ν dann noch andere Punkte A_k auf der Geraden, so sollen wieder alle zwischen A_μ und A_ν liegen. $A_\mu A_\nu$ ist dann auch eine der gesuchten Geraden. In dieser Weise fahren wir fort, bis wir zu einer Geraden kommen, die den am weitesten rechts liegenden Punkt A_m enthält. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, das sei die Gerade $A_\nu A_m$. Wir erhalten dann vier Gerade der verlangten Art, nämlich $A_0 A_\lambda$, $A_\lambda A_\mu$, $A_\mu A_\nu$, $A_\nu A_m$. In dem in der Abb. 3 dargestellten Fall ergeben sich nach dem angegebenen Verfahren die vier Geraden $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_6$, $A_6 A_8$ (Abb. 3). Die Strecken $\overline{A_0 A_\lambda}$, $\overline{A_\lambda A_\mu}$, $\overline{A_\mu A_\nu}$, $\overline{A_\nu A_m}$ bilden einen nach unten überall konvexen und nach oben offenen Streckenzug von der Art, daß keiner der Punkte A_k unterhalb von ihm liegt; der Tangens des Neigungswinkels dieser Strecken gegen die negative Abszissenachse gibt uns die erlaubten Werte von ε_1. Für den Fall der Abb. 2 u. 3 bekommen wir also vier Werte von ε_1, und zwar die Werte $4, 1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

Für jedes ε_1, das wir gefunden haben, finden wir den zugehörigen Wert des Koeffizienten e_1, indem wir aus den Gliedern (4) diejenigen aussuchen, die für das betreffende ε_1 dieselbe Potenz von z als Faktor haben und die Bedingung dafür aufstellen, daß sie sich gegenseitig aufheben. Nehmen wir z. B. das ε_1, das zu der Strecke $A_\lambda A_\mu$ gehört. Es werden für diesen Wert von ε_1 alle diejenigen Exponenten $\alpha_k + k\varepsilon_1$ einander gleich, deren zugehörige Punkte A_k auf der Strecke $A_\lambda A_\mu$ liegen, also vor allem $\alpha_\lambda + \lambda\varepsilon_1$ und $\alpha_\mu + \mu\varepsilon_1$. Liegt auf $A_\lambda A_\mu$ keiner der Punkte A_k außer A_λ und A_μ, so werden auch nur diese beiden Exponenten gleich und gleichzeitig die kleinsten. Sollen die entsprechenden der Glieder (4) sich fortheben, so muß sein

$$g_\lambda e_1^\lambda + g_\mu e_1^\mu = 0$$

oder, da e_1 als von Null verschieden vorausgesetzt werden konnte und $\mu > \lambda$ ist,

$$g_\lambda + g_\mu e_1^{\mu-\lambda} = 0 .$$

Wir erhalten also eine Gleichung vom Grade $\mu - \lambda$ für e_1, und zwar eine reine Gleichung. Liegen auf $A_\lambda A_\mu$ noch andere Punkte A_k, die dann nach unseren Festsetzungen zwischen A_λ und A_μ liegen, etwa A_ϱ und A_σ, so werden für das gewählte ε_1 die vier Exponenten

$$\alpha_\lambda + \lambda\,\varepsilon_1\,, \quad \alpha_\varrho + \varrho\,\varepsilon_1\,, \quad \alpha_\sigma + \sigma\,\varepsilon_1\,, \quad \alpha_\mu + \mu\,\varepsilon_1$$

einander gleich, und es erhalten die vier Glieder (4) mit diesen Exponenten für das gewählte ε_1 dieselbe und zugleich die kleinste Ordnung. Sollen sie sich fortheben, so muß sein

$$g_\lambda\, e_1^\lambda + g_\varrho\, e_1^\varrho + g_\sigma\, e_1^\sigma + g_\mu\, e_1^\mu = 0$$

oder, da $e_1 \neq 0$ und $\lambda < \varrho < \sigma < \mu$,

$$g_\lambda + g_\varrho\, e_1^{\varrho-\lambda} + g_\sigma\, e_1^{\sigma-\lambda} + g_\mu\, e_1^{\mu-\lambda} = 0\,.$$

Wir erhalten also wieder eine Gleichung vom Grade $\mu - \lambda$, freilich diesmal keine reine Gleichung. Die Werte von e_1, die uns diese Gleichung liefert, können also sehr wohl teilweise oder auch alle einander gleich sein.

Wir erhalten also eine endliche Zahl von möglichen Exponenten ε_1; wenn wir bei unserem Beispiel bleiben, vier. Zu jedem ε_1 ergibt sich eine endliche Zahl von Werten für den Koeffizienten e_1, und zwar ergeben sich zu den durch die Strecken $\overline{A_0\,A_\lambda}$, $\overline{A_\lambda\,A_\mu}$, $\overline{A_\mu\,A_\nu}$, $\overline{A_\nu\,A_m}$ bestimmten Werten von ε_1 der Reihe nach λ, $\mu - \lambda$, $\nu - \mu$, $m - \nu$ Werte des Koeffizienten e_1, so daß wir für die gesuchte Entwicklung $y = e_1\, z^{\varepsilon_1} + e_2\, z^{\varepsilon_2} + \cdots$ im ganzen $\lambda + (\mu - \lambda) + (\nu - \mu) + (m - \nu) = m$ Anfangsglieder $e_1\, z^{\varepsilon_1}$ erhalten, die aber nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen.

Zu Abb. 3 würde z. B. folgende Gleichung führen

$$\begin{aligned}(9)\qquad 2\,z^7 - z^8 - z^3\,y + (4\,z^2 + z^3)\,y^2 + (z^3 - z^4)\,y^3 - 4\,z\,y^4 + 7\,z^5\,y^5 \\ + (1 - z^2)\,y^6 + 5\,z^6\,y^7 + z^3\,y^8 = 0\,.\end{aligned}$$

Hier ist

$$g_0 = 2, g_1 = -1, g_2 = 4, g_3 = 1, g_4 = -4, g_5 = 7, g_6 = 1, g_7 = 5, g_8 = 1\,.$$

Wir haben, wie wir schon festgestellt haben, 4 Werte für ε_1, nämlich 4, 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$. Für e_1 ergeben sich folgende Gleichungen:

1. $\varepsilon_1 = 4$. Auf der ersten Strecke des Streckenzuges in Abb. 3 liegen A_0, A_1, also haben wir die Gleichung

$$g_0 + e_1\, g_1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad 2 - e_1 = 0, \qquad e_1 = 2\,.$$

2. $\varepsilon_1 = 1$. Auf der entsprechenden Strecke $\overline{A_1\,A_2}$ liegen A_1, A_2, also ist hier

$$g_1 + e_1\, g_2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad -1 + 4\,e_1 = 0, \qquad e_1 = \frac{1}{4}\,.$$

3. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Es liegen A_2, A_4, A_6 auf der folgenden Strecke, also ist

$$g_2 + e_1^2\, g_4 + e_1^4\, g_6 = 0 \;\text{ oder }\; 4 - 4\,e_1^2 + e_1^4 = 0,\; e_1 = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\,.$$

4. $\varepsilon_1 = -\frac{3}{2}$. Auf der entsprechenden Strecke liegen A_6, A_8, also ergibt sich

$$g_6 + e_1^2 g_8 = 0 \text{ oder } 1 + e_1^2 = 0\,,\ e_1 = \pm\sqrt{-1}\,.$$

Wir erhalten daher für die Entwicklung der durch die Gleichung (9) definierten Funktion y in der Umgebung von $z = 0$ im ganzen 8 Entwicklungen mit den Anfangsgliedern

$$2z^4,\ \frac{1}{4}z,\ \sqrt{2}z^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{2}z^{\frac{1}{2}},\ -\sqrt{2}z^{\frac{1}{2}},\ -\sqrt{2}z^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{-1}z^{-\frac{3}{2}},\ -\sqrt{-1}z^{-\frac{3}{2}},$$

von denen zweimal zwei einander gleich sind.

Die Bestimmung der weiteren Glieder der Reihenentwicklungen läßt sich in derselben Weise ausführen, wie die Bestimmung des Anfangsgliedes. Ist $e_1 z^{\varepsilon_1}$ eins der gefundenen Anfangsglieder, so setzen wir

$$y = e_1 z^{\varepsilon_1} + y_1$$

in die Gleichung (1) zwischen y und z ein. Wir erhalten dann eine Gleichung von der Form

$$(10)\qquad (h_0 z^{\vartheta_0} + \cdots) + (h_1 z^{\vartheta_1} + \cdots)\, y_1 + \cdots + (h_m z^{\vartheta_m} + \cdots)\, y_1^m = 0\,,$$

in der freilich gebrochene Potenzen von z vorkommen können, die aber im übrigen ganz so aussieht wie die Gleichung (1). In dieser Gleichung setzen wir

$$y_1 = e_2 z^{\varepsilon_2} + e_3 z^{\varepsilon_3} + \cdots$$

und bestimmen ε_2 und e_2 geradeso, wie wir ε_1 und e_1 bestimmt haben. Dabei ist zu berücksichtigen, daß nur solche Werte von ε_2 in Betracht kommen, die größer sind als ε_1. Es ergeben sich auch ε_2 und e_2 endlich vieldeutig. Sind ε_2 und e_2 zwei der gefundenen Werte, die zusammen gehören, so setzt man in (10) ein

$$y_1 = e_2 z^{\varepsilon_2} + y_2$$

und erhält eine Gleichung in z und y_2, die in derselben Weise zu behandeln ist wie die Gleichungen (1) und (10).

Auf diese Art erhalten wir für $y = e_1 z^{\varepsilon_1} + y_1 = e_1 z^{\varepsilon_1} + e_2 z^{\varepsilon_2} + y_2 = e_1 z^{\varepsilon_1} + e_2 z^{\varepsilon_2} + e_3 z^{\varepsilon_3} + \cdots$ eine endliche Zahl von Reihenentwicklungen, die der Gleichung (1) jedenfalls formal genügen. Wir erhalten aber durch unser Verfahren alle Reihenentwicklungen dieser Art. Unter diesen sind also sicher auch die m konvergenten Reihenentwicklungen enthalten, deren Vorhandensein in § 2 u. § 3, Kap. I bewiesen ist. Es könnte aber der Fall eintreten, daß uns unser Verfahren noch weitere, der Gleichung (1) nur formal genügende Entwicklungen liefert. Wir können aber leicht zeigen, daß das nicht der Fall sein kann.

Es seien $y_1, y_2, \ldots y_m$ die m Wurzeln unserer Gleichung (1) $g(y, z) = 0$ in der Umgebung von $z = 0$. Es sind also die y_k Potenzreihen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von z. Dann ist identisch

$$g(y, z) = c_m (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_m).$$

Ergab sich durch unser Verfahren noch eine von den y_k verschiedene Potenzreihe $\bar{y}$, die der Gleichung $g = 0$ formal genügt, so müßte $g(\bar{y}, z)$ und also auch

$$c_m (\bar{y} - y_1)(\bar{y} - y_2) \ldots (\bar{y} - y_m)$$

identisch Null werden, jedenfalls dann, wenn man die Klammern ausmultipliziert und nach Potenzen von z ordnet. Das aber ist auch rein formal nur möglich, wenn die Reihe $\bar{y}$ mit einer der Reihen y_k übereinstimmt.

§ 3. Beispiele.

1. Wir betrachten als erstes Beispiel die schon früher behandelte Gleichung (6) § 1

$$x^2 + 2x^3 - (x + x^2)\, y + x y^2 + y^3 = 0. \tag{11}$$

Es soll wieder y als Funktion von x in der Umgebung von $x = 0$ betrachtet werden. Die Glieder, auf die es bei der Bestimmung des Anfangskoeffizienten e_1 und des Anfangsexponenten ε_1 ankommt, sind hier (vgl. (4) § 1)

$$x^2, \quad -e_1 x^{1+\varepsilon_1}, \quad e_1^2 x^{1+2\varepsilon_1}, \quad e_1^3 x^{3\varepsilon_1}. \tag{12}$$

Aus dem Puiseuxschen Diagramm (Abb. 4) ergeben sich für ε_1 die Werte 1 und $\frac{1}{2}$, die wir auch früher auf anderem, weniger einfachem Wege gefunden haben.

1. $$\varepsilon_1 = 1. \quad y = e_1 x + \cdots.$$

Da A_0, A_1 auf der Strecke liegen, die zu $\varepsilon_1 = 1$ führt, so werden für $y = e_1 x + \cdots$ die beiden ersten der Glieder (12) von gleicher und niedrigster Ordnung. Sie heben sich fort, wenn

$$1 - e_1 = 0, \quad e_1 = 1;$$

wir setzen also in (11)

$$y = x + y_1 \tag{13}$$

und erhalten

$$3x^3 - (x - 4x^2)\, y_1 + 4\, x y_1^2 + y_1^3 = 0. \tag{14}$$

Zur Bestimmung von ε_2, e_2 kommt es auf die Glieder an:

$$3x^3, \quad -e_2 x^{1+\varepsilon_2}, \quad 4e_2^2 x^{1+2\varepsilon_2}, \quad e_2^3 x^{3\varepsilon_2}. \tag{15}$$

Das Puiseuxsche Diagramm (Abb. 5) ergibt, wenn man beachtet, daß $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ sein muß, $\varepsilon_2 = 2$. Auf der entsprechenden Strecke liegen A_0, A_1.

Also werden für $\varepsilon_2 = 2$ das erste und zweite Glied (15) von derselben und niedrigsten Ordnung. Sie heben sich fort, wenn

$$3 - e_2 = 0, \quad e_2 = 3.$$

Wir setzen also in (14) ein

$$y_1 = 3x^2 + y_2 \tag{16}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} 12x^4 + 36x^5 + 27x^6 - (x - 4x^2 - 24x^3 - 27x^4)\, y_2 \\ + (4x + 9x^2)\, y_2^2 + y_2^3 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Die Glieder, auf die es zur Bestimmung von ε_3, e_3 ankommt, sind hier

$$12x^4, \quad -e_3 x^{1+\varepsilon_3}, \quad 4e_3^2 x^{1+2\varepsilon_3}, \quad e_3^3 x^{3\varepsilon_3}. \tag{18}$$

Aus dem Puiseuxschen Diagramm (Abb. 6) ergibt sich, wenn man be-

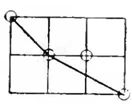


Abb. 4.

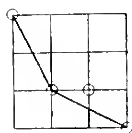


Abb. 5.

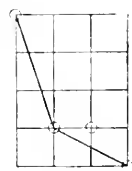


Abb. 6.

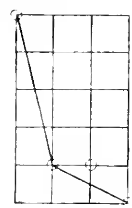


Abb. 7.

denkt, daß $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$ sein muß, $\varepsilon_3 = 3$. Für e_3 erhalten wir die Gleichung, da wieder die beiden ersten Glieder in (18) sich fortheben müssen,

$$12 - e_3 = 0, \quad e_3 = 12.$$

Wir haben also zu setzen in (17)

$$y_2 = 12x^3 + y_3. \tag{19}$$

Wir wollen nur noch ε_4, e_4 bestimmen und brauchen daher nur die Anfangsglieder zu berechnen. Das gibt

$$84x^5 + \cdots - (x + \cdots)\, y_3 + (4x + \cdots)\, y_3^2 + y_3^3 = 0.$$

Aus dem Puiseuxschen Diagramm (Abb. 7) ergibt sich $\varepsilon_4 = 4$ und dann $e_4 = 84$, also

$$y_3 = 84x^4 + \cdots. \tag{20}$$

Aus den Gleichungen (13), (16) und (20) ergibt sich für y folgende Entwicklung

$$y = x + 3x^2 + 12x^3 + 84x^4 + \cdots. \tag{21}$$

2. $$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \quad y = e_1 x^{\frac{1}{2}} + \cdots.$$

Da die Punkte A_1, A_3 auf der Strecke liegen, die zu $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ führt, werden für $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ das zweite und vierte Glied (12) von derselben und niedrigsten Ordnung. Sie heben sich fort, wenn

$$- e_1 + e_1^3 = 0\,, \quad e_1 = \pm 1\,.$$

Wir haben also eine Entwicklung $y = + x^{\frac{1}{2}} \cdots$ und eine $y = - x^{\frac{1}{2}} + \cdots$. Es ist aber nicht etwa nötig, beide Entwicklungen weiter zu berechnen. Es genügt, eine von ihnen zu bestimmen, da wir die andere aus dieser einfach dadurch bekommen, daß wir x einen geschlossenen Umlauf um den Punkt 0 machen lassen, also $x^{\frac{1}{2}}$ durch $- x^{\frac{1}{2}}$ ersetzen.

Wir berechnen die Reihe $y = + x^{\frac{1}{2}} + \cdots$ und setzen

$$y = x^{\frac{1}{2}} + y_1 \tag{22}$$

in (11) ein. Wir erhalten

$$2\,x^2 - x^{\frac{5}{2}} + 2\,x^3 + (2\,x + 2\,x^{\frac{3}{2}} - x^2)\,y_1 + (3\,x^{\frac{1}{2}} + x)\,y_1^2 + y_1^3 = 0\,. \tag{23}$$

Die Glieder, auf die es bei der Bestimmung von ε_2, e_2 ankommt, sind hier

$$2\,x^2\,, \quad 2\,e_2\,x^{1+\varepsilon_2}, \quad 3\,e_2^2\,x^{\frac{1}{2}+2\varepsilon_2}\,, \quad e_2^3\,x^{3\varepsilon_2}\,. \tag{24}$$

Aus dem Puiseuxschen Diagramm (Abb. 8) ergibt sich, da $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ sein muß, $\varepsilon_2 = 1$ und ferner, daß für $\varepsilon_2 = 1$ das erste und zweite Glied (24) von derselben und niedrigsten Ordnung werden. Sie heben sich fort, wenn $2 + 2\,e_2 = 0$, $e_2 = -1$. Wir setzen also

$$y_1 = - x + y_2 \tag{25}$$

in (13) ein und erhalten

$$3\,x^3 + (2\,x - 4\,x^{\frac{3}{2}})\,y_2 + (3\,x^{\frac{1}{2}} - 2\,x)\,y_2^2 + y_2^3 = 0\,. \tag{26}$$

Zur Bestimmung von ε_3, e_3 kommt es an auf die Glieder

$$3\,x^3\,, \quad 2\,e_3\,x^{1+\varepsilon_3}, \quad 3\,e_3^2\,x^{\frac{1}{2}+2\varepsilon_3}\,, \quad e_3^3\,x^{3\varepsilon_3}\,.$$

Wir finden (Abb. 9) $\varepsilon_3 = 2$, $3 + 2\,e_3 = 0$, $e_3 = -\frac{3}{2}$.
Wir setzen

$$y_2 = - \frac{3}{2}\,x^2 + y_3 \tag{27}$$

in (26) ein, beschränken uns aber auf die Berechnung der Anfangsglieder, da wir nur noch ε_4, e_4 bestimmen wollen. Wir erhalten

$$6\,x^{\frac{7}{2}} + \cdots + (2\,x + \cdots)\,y_3 + (3\,x^{\frac{1}{2}} + \cdots)\,y_3^2 + y_3^3 = 0\,.$$

Die Glieder, auf die es ankommt, sind also

$$6x^{\frac{7}{2}}, \quad 2e_4 x^{1+\varepsilon_4}, \quad 3e_4^2 x^{\frac{1}{2}+2\varepsilon_4}, \quad e_4^3 x^{3\varepsilon_4}.$$

Aus (Abb. 10) ergibt sich $\varepsilon_4 = \frac{5}{2}$; $e_4 = -3$, also

$$y_3 = -3x^{\frac{5}{2}} + \cdots. \tag{28}$$

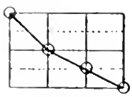


Abb. 8.

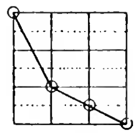


Abb. 9.

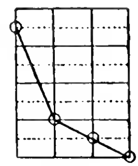


Abb. 10.

Aus den Gleichungen (22), (25), (27) und (28) bekommen wir die Entwicklung

$$y = x^{\frac{1}{2}} - x - \frac{3}{2}x^2 - 3x^{\frac{5}{2}} + \cdots, \tag{29}$$

aus der sich durch Vertauschen von $x^{\frac{1}{2}}$ mit $-x^{\frac{1}{2}}$ die dritte Entwicklung ergibt

$$y = -x^{\frac{1}{2}} - x - \frac{3}{2}x^2 + 3x^{\frac{5}{2}} + \cdots. \tag{30}$$

Der Gang der Rechnung wird durch dieses ausführlich behandelte Beispiel klar geworden sein. Es seien noch drei Beispiele angegeben, aber der Gang der Rechnung nur kurz angedeutet.

II. $\quad f(x, y) \equiv 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + x^4 - (2 + x + x^3)y + y^2 = 0.$

Auch hier wollen wir die Entwicklungen von y für die Stelle $x = 0$ bestimmen.

1. $-2e_1 x^{\varepsilon_1}$, $e_1^2 x^{2\varepsilon_1}$; Abb. 11. $\varepsilon_1 = 0$; $1 - 2e_1 + e_1^2 \equiv (1 - e_1)^2 = 0$, $e_1 = 1$.

$$y = 1 + y_1, \quad \frac{1}{4}x^2 - x^3 + x^4 - (x + x^3)y_1 + y_1^2 = 0.$$

$$\frac{1}{4}x^2, \quad -e_2 x^{1+\varepsilon_2}, \quad e_2^2 x^{2\varepsilon_2};$$

$$\text{Abb. 12. } \varepsilon_2 = 1; \quad \frac{1}{4} - e_2 + e_2^2 = \left(\frac{1}{2} - e_2\right)^2 = 0, \quad e_2 = \frac{1}{2}.$$

$$y_1 = \frac{1}{2}x + y_2, \quad x^3 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 y_2 - y_2^2 = 0.$$

$$x^3, \quad e_3 x^{3+\varepsilon_3}, \quad -e_3^2 x^{2\varepsilon_3}; \text{ Abb. 13. } \varepsilon_3 = \frac{3}{2}, \quad 1 - e_3^2 = 0 \quad e_3 = \pm 1.$$

Es genügt auch hier, mit dem Werte $e_3 = +1$ weiter zu rechnen. Die Entwicklung, für die $e_3 = -1$, erhalten wir aus der anderen, indem wir $x^{\frac{1}{2}}$ durch $-x^{\frac{1}{2}}$ ersetzen.

$$y_2 = x^{\frac{3}{2}} + y_3,\quad \frac{1}{2}x^4 - x^{\frac{9}{2}} + (2x^{\frac{3}{2}} - x^3)\,y_3 + y_3^2 = 0\,.$$

$$\frac{1}{2}x^4,\ 2e_4 x^{\frac{3}{2}+\varepsilon_4},\ e_4^2 x^{2\varepsilon_4};\ \text{Abb. 14.}\ \varepsilon_4 = \frac{5}{2},\ e_4 = -\frac{1}{4}\,.$$

$$y_3 = -\frac{1}{4}x^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

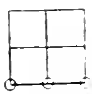


Abb. 11.

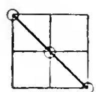


Abb. 12.

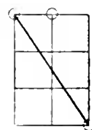


Abb. 13.

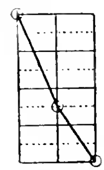


Abb. 14.

Wir erhalten also die Entwicklung

$$y = y_1 = 1 + \frac{1}{2}x + x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^{\frac{5}{2}} + \cdots$$

und die hieraus durch Vertauschen von $x^{\frac{1}{2}}$ mit $-x^{\frac{1}{2}}$ hervorgehende

$$y = y_2 = 1 + \frac{1}{2}x - x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

III. $\quad f(x, y) = x^2 + 4x^3 + 4x^4 - (2x + 4x^2 + 2x^5)\,y + y^2 = 0.$

Auch hier wollen wir y in der Umgebung von $x = 0$ betrachten.

$$x^2,\ -2e_1 x^{1+\varepsilon_1},\ e_1^2 x^{2\varepsilon_1};\ \text{Abb. 15.}\ \varepsilon_1 = 1,\ 1 - 2e_1 + e_1^2 = 0,\ e_1 = 1.$$

$$y = x + y_1,\ 4x^4 - 2x^6 - (4x^2 + 2x^5)\,y_1 + y_1^2 = 0\,.$$

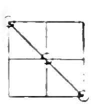


Abb. 15.

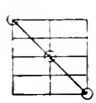


Abb. 16.

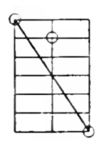


Abb. 17.

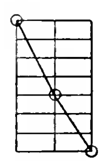


Abb. 18.

$$4x^4,\ -4e_2 x^{2+\varepsilon_2},\ e_2^2 x^{2\varepsilon_2};\ \text{Abb. 16.}\ \varepsilon_2 = 2,\ 4 - 4e_2 + e_2^2 = 0,\ e_2 = 2.$$

$$y_1 = 2x^2 + y_2,\ 2x^6 + 4x^7 + 2x^5 y_2 - y_2^2 = 0.$$

$$2x^6,\ 2e_3 x^{5+\varepsilon_3},\ -e_3^2 x^{2\varepsilon_3};\ \text{Abb. 17.}\ \varepsilon_3 = 3,\ 2 - e_3^2 = 0,\ e_3 = \pm\sqrt{2}\,.$$

Auch hier brauchen wir nur mit einem Wert von e_3 weiter zu rechnen. Die zweite Entwicklung geht zwar dieses Mal nicht dadurch aus der anderen hervor, daß x den Punkt 0 umläuft, wohl aber dadurch, daß man $\sqrt{2}$ durch $-\sqrt{2}$ ersetzt.

$$y_2 = \sqrt{2}\, x^3 + y_3,\; 4\, x^7 + 2\sqrt{2}\, x^8 - (2\sqrt{2}\, x^3 - 2\, x^5)\, y_3 - y_3^2 = 0\,.$$

$$4\, x^7,\; -2\, e_4 \sqrt{2}\, x^{3+\varepsilon_4},\; -e_4^2\, x^{2\varepsilon_4};\; \text{Abb. 18. } \varepsilon_4 = 4,\; e_4 = +\sqrt{2}\,.$$

$$y_3 = \sqrt{2}\, x^4 + \cdots.$$

Wir haben also folgende Entwicklungen

$$y = y_1 = x + 2\, x^2 + \sqrt{2}\, x^3 + \sqrt{2}\, x^4 + \cdots,$$

$$y = y_2 = x + 2\, x^2 - \sqrt{2}\, x^3 - \sqrt{2}\, x^4 + \cdots.$$

IV. $$f(x, y) = x^2 + x\, y - y^3 = 0\,.$$

Wir wollen die Entwicklungen für y in der Umgebung von $x = \infty$ bestimmen und setzen daher $x = 1/z$. Wir erhalten

$$g(z, y) = 1 + z\, y - z^2\, y^3 = 0\,.$$

Wir haben hier einen Fall, wo eine der Potenzen von y, nämlich y^2, fehlt.

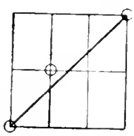


Abb. 19.

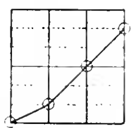


Abb. 20.

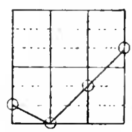


Abb. 21.

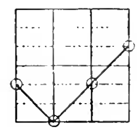


Abb. 22.

In dem Puiseuxschen Diagramm (Abb. 19) fehlt daher der Punkt A_2. Die Rechnung gestaltet sich folgendermaßen

$$1,\; e_1\, z^{1+\varepsilon_1},\; -e_1^3\, z^{2+3\varepsilon_1};\; \text{Abb. 19. } \varepsilon_1 = -\frac{2}{3},\; e_1 = \sqrt[3]{1}\,.$$

Es genügt, mit dem Werte $e_1 = 1$ weiter zu rechnen. Die andern Entwicklungen erhalten wir, indem wir in der errechneten $\sqrt[3]{x}$ durch ihre anderen Werte $\varepsilon \sqrt[3]{x}$ und $\varepsilon^2 \sqrt[3]{x}$ ersetzen, wo $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ die eine primitive dritte Einheitswurzel ist.

$$y = z^{-\frac{2}{3}} + y_1,\; 1 - (3\, z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{2}{3}})\, y_1 - 3\, z\, y_1^2 - z^{\frac{5}{3}}\, y_1^3 = 0\,.$$

$$1,\; -3\, e_2\, z^{\frac{1}{3}+\varepsilon_2},\; -3\, e_2^2\, z^{1+2\varepsilon_2},\; -e_2^3\, z^{\frac{5}{3}+3\varepsilon_2};\; \text{Abb. 20. } \varepsilon_2 = -\frac{1}{3},\; e_2 = \frac{1}{3}\,.$$

$$y_1 = \frac{1}{3}\, z^{-\frac{1}{3}} + y_2,\; \frac{1}{27}\, z^{\frac{1}{3}} + (3 + z^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\, z^{\frac{2}{3}})\, y_2 + (3 z^{\frac{2}{3}} + z)\, y_2^2 + z^{\frac{4}{3}}\, y_2^3 = 0\,.$$

$$\frac{1}{27}\, z^{\frac{1}{3}},\; 3\, e_3\, z^{\varepsilon_3},\; 3\, e_3^2\, z^{\frac{2}{3}+2\varepsilon_3},\; e_3^3\, z^{\frac{4}{3}+3\varepsilon_3};\; \text{Abb. 21. } \varepsilon_3 = \frac{1}{3},\; e_3 = -\frac{1}{81}\,.$$

$$y_2 = -\frac{1}{81} z^{\frac{1}{3}} + y_3, \quad \frac{1}{81} z^{\frac{2}{3}} + \cdots - (3 + \cdots)\, y_3 - (3 z^{\frac{2}{3}} + \cdots)\, y_3^2 - z^{\frac{4}{3}} y_3^3 = 0.$$

$$\frac{1}{81} z^{\frac{2}{3}}, \; -3 e_4 z^{\varepsilon_4}, \; -3 e_4^2 z^{\frac{2}{3} + 2\varepsilon_4}, \; -e_4^3 z^{\frac{4}{3} + 3\varepsilon_4}; \text{ Abb. 22. } \varepsilon_1 = \frac{2}{3}, \; e_4 = \frac{1}{243}.$$

$$y_3 = \frac{1}{243} z^{\frac{2}{3}} + \cdots.$$

Wir erhalten so die Entwicklung

$$y = y_1 = z^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} z^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{81} z^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{243} z^{\frac{2}{3}} + \cdots$$

oder

$$y = y_1 = x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{81} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{243} x^{-\frac{2}{3}} + \cdots$$

und die beiden adjungierten

$$y = y_2 = \varepsilon^2 x^{\frac{2}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{\varepsilon^2}{81} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{\varepsilon}{243} x^{-\frac{2}{3}} + \cdots,$$

$$y = y_3 = \varepsilon x^{\frac{2}{3}} + \frac{\varepsilon^2}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{\varepsilon}{81} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{\varepsilon^2}{243} x^{-\frac{2}{3}} + \cdots.$$

Da in der Gleichung $f(x, y) = x^2 + xy - y^3$ das Glied mit y^2 fehlt, so muß die Summe $y_1 + y_2 + y_3$ der Wurzeln identisch Null sein. Da $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, so bestätigt man das leicht. Aus demselben Grunde fehlen in den gefundenen Entwicklungen die ganzzahligen Potenzen von x.

Drittes Kapitel.

Die Riemannsche Fläche.

§ 1. Die m konjugierten Funktionen.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, wie sich die durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definierte Funktion y in der Umgebung eines Punktes der x-Ebene verhält. Wir wollen uns jetzt über den Verlauf von y in der ganzen x-Ebene Klarheit zu verschaffen suchen. Wir bezeichnen wieder die **Gauß**sche x-Ebene oder Kugel mit E. Diejenigen Punkte a, wo nicht alle Entwicklungen von y nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreiten, seien bezeichnet mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$. Wir schneiden diese Punkte durch kleine Kreise, deren Mittelpunkte diese Punkte sind, aus E aus. Die Kreise müssen jedenfalls so klein sein, daß ihre Flächen sich gegenseitig nicht überdecken. Es sei ferner $\mathfrak{B}_0$ irgendein Punkt der x-Ebene, der außerhalb der h um die Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ gezeichneten Kreise liegt. Wir ziehen von $\mathfrak{B}_0$ nach den Punkten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ Linien, $l_1, l_2, \ldots l_h$, die sich nicht selbst und nicht untereinander treffen. Längs dieser Linien l_k denken wir uns die Ebene E zerschnitten. Die so zerschnittene Ebene nennen wir E_1. Durch jeden Schnitt l_k entstehen zwei Begrenzungslinien, die wir als rechtes und linkes Ufer unterscheiden wollen, und zwar soll das rechte Ufer dasjenige sein, das rechts liegt, wenn man von $\mathfrak{B}_0$ nach $\mathfrak{B}_k$ geht. Wir bezeichnen das rechte Ufer von l_k mit $l_{k\varrho}$ und das linke mit $l_{k\lambda}$. Die Ebene oder Kugel E_1, je nachdem man sich's vorstellen will, hat eine zusammenhängende Begrenzungslinie, zu der sich die Linien $l_{k\varrho}$, $l_{k\lambda}$ zusammenschließen, und zwar bei passender Wahl der Bezeichnung in der Reihenfolge $l_{1\lambda}\ l_{1\varrho}\ l_{2\lambda}\ l_{2\varrho}\ l_{3\lambda}\ l_{3\varrho} \dots l_{h\lambda}\ l_{h\varrho}$. (Abb. 23.)

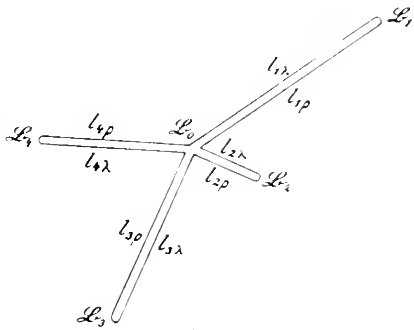


Abb. 23

Es sei c ein Punkt im Innern der Ebene E_1. Wir haben m Entwicklungen für y in der Umgebung von c, die nach ganzen Potenzen von $x-c$ fortschreiten. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{P}_1(x-c)$, $\mathfrak{P}_2(x-c)$, ... $\mathfrak{P}_m(x-c)$. Wir setzen das Funktionselement $\mathfrak{P}_1(x-c)$ in E_1 analytisch fort. Die Funktion, die wir auf diese Art aus $\mathfrak{P}_1(x-c)$ erhalten, nennen wir y_1.

Da E_1 eine einfach zusammenhängende Fläche ist, und da y_1 in E_1 sich überall wie eine rationale Funktion von x verhält, das heißt sich in der Umgebung jeder Stelle a im Innern von E_1 in eine Potenzreihe entwickeln läßt, die nach steigenden ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitet, wobei nur für eine endliche Zahl von Stellen negative Potenzen und immer nur in endlicher Zahl auftreten, so ist y_1 in E_1 eine eindeutige analytische Funktion von x.

Wir erhalten ebenso eine eindeutige analytische Funktion von x, die wir mit y_k bezeichnen wollen, wenn wir das Element $\mathfrak{P}_k(x-c)$ in E_1 analytisch fortsetzen. So erhalten wir die m in E_1 eindeutigen analytischen Funktionen $y_1, \dots y_m$ von x. Wir nennen sie zueinander **konjugiert**. Wir geben jeder dieser Funktionen ein eigenes Blatt oder eine eigene Kugelfläche. Diese bezeichnen wir mit $E_1, E_2, \dots E_m$. Sie sollen alle zu E_1 kongruent sein. Wir denken uns die Werte von y_k auf der Kugelfläche E_k ausgebreitet. Diese m Flächen legen wir so übereinander, daß die Punkte, die demselben Werte von x entsprechen, aufeinander liegen.

Wir wollen diese m getrennten Blätter nach dem Vorgange **Riemanns** zusammenheften längs der Schnitte l_k in einer noch näher zu besprechenden Weise, so daß wir statt der m einzelnen losen Blätter eine einzige m-blättrige Fläche erhalten, auf der dann, wie wir sehen werden, y eine eindeutige Funktion des Ortes ist.

§ 2. Beispiel 1.

Es sei y als algebraische Funktion von x definiert durch die Gleichung

$$y^2 - x^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Es ist $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Es sei a ein endlicher Punkt, der x-Ebene. Wir setzen $x - a = z$ und erhalten

$$y = \sqrt{1 + a^2 + 2\,a\,z + z^2}.$$

Ist $1 + a^2 \neq 0$, also $a \neq \pm i$, so folgt weiter:

$$y = \pm \sqrt{1 + a^2}\left(1 + \frac{2\,a}{1 + a^2}\,z + \frac{z^2}{1 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir erhalten also für y nach dem binomischen Satze zwei gewöhnliche Potenzreihen, die nach Potenzen von $z = x - a$ fortschreiten und die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Für $a = i$ haben wir

$$y = \sqrt{2\,i}\,z^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{z}{2\,i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\,i}\,(x - i)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{i}{2}\,(x - i)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wir erhalten also eine Entwicklung, die nach gebrochenen Potenzen von $x - i$ oder nach ganzen Potenzen von $(x - i)^{\frac{1}{2}}$ fortschreitet. Ebenso erhalten wir für $a = -i$ eine Entwicklung, die nach ganzen Potenzen von $(x + i)^{\frac{1}{2}}$ fortschreitet. Wir haben also für endliche Werte von x zwei singuläre Punkte, i und $-i$.

Um noch y für unendlich große Werte von x zu betrachten, setzen wir $x = 1/z$ und haben

$$y = \pm \frac{1}{z}\sqrt{1 + z^2}.$$

Wir erhalten also für y zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene Potenzreihen, die nach ganzen Potenzen von $z = x^{-1}$ fortschreiten.

Wir bezeichnen i mit $\mathfrak{B}_1$ und $-i$ mit $\mathfrak{B}_2$, um die Bezeichnung des allgemeinen Falles zu haben, und nehmen als Punkt $\mathfrak{B}_0$ den Nullpunkt. Als Linien l_1, l_2 nehmen wir den Teil der Achse der rein imaginären Zahlen, der zwischen $-i$ und $+i$ liegt. Wir zerschneiden also die x-Ebene längs der Strecke von $-i$ bis $+i$. Wir bezeichnen diesen aus l_1 und l_2 bestehenden Schnitt mit l. Unter l_ϱ verstehen wir das Ufer von l, das rechts liegt, wenn man von $-i$ nach $+i$ hinsieht; unter l_λ das andere. Da in unserem Beispiel $m = 2$, so haben wir zwei solche x-Ebenen zu nehmen, die wir mit E_1 und E_2 bezeichnen (Abb. 24).

Als Punkt c nehmen wir den Punkt 1. Hier haben wir die Entwicklungen

$$\mathfrak{P}_1(x-1) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x-1) + \cdots, \quad \mathfrak{P}_2(x-1) = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x-1) + \cdots.$$

Wir können zwar die analytische Fortsetzung praktisch nicht ausführen, aber wir können in diesem einfachen Falle doch angeben, welche von den beiden an einer Stelle a geltenden Entwicklungen ein Element von y_1 und welche eines von y_2 ist. y_1 hat an der Stelle 1 den Wert $+\sqrt{2}$. Der reelle Teil von y_1 ist also für $x = 1$ positiv, und da er sich mit x stetig ändert, so kann er nur negativ werden, wenn er vorher Null wird. Das aber kann nur eintreten, wenn y_1 rein imaginär wird. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $1 + x^2$ reell und negativ ist, also x rein imaginär und absolut größer als 1 ist.

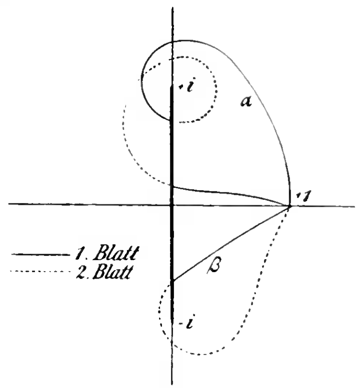


Abb. 24.

Es ist daher der reelle Teil von y_1 nur Null für diejenigen Punkte der Achse der rein imaginären Zahlen, die außerhalb der Strecke von $-i$ bis $+i$ liegen. Daraus folgt zunächst, daß y_1 für alle Punkte rechts von der imaginären Achse, die Punkte der imaginären Achse selbst nicht mit gerechnet, durch dasjenige Element gegeben ist, dessen reeller Teil positiv ist. Lassen wir x auf der reellen Achse bis nach l_0 gehen, so nimmt y_1 den Wert $+1$ an. Lassen wir x längs l_0 weitergehen bis nahe an $+i$, so bleibt y_1 reell und positiv und nähert sich dem Werte Null. Wir lassen x nicht bis ganz nach dem Punkte i gehen, sondern nur bis nahe heran und lassen es dann auf einem kleinen Kreise in positivem Sinne um den Punkt i herumgehen. Haben wir den Kreis halb durchlaufen, befinden wir uns also wieder auf der imaginären Achse, aber außerhalb der Strecke von $-i$ bis $+i$, so hat $\sqrt{x-i}$ den Faktor i bekommen und also zufolge der in der Umgebung von i geltenden Reihenentwicklung auch y. Es ist also y von positiven reellen Werten zu positiven rein imaginären Werten übergegangen. Daraus folgern wir, daß y_1 längs der positiven imaginären Achse oberhalb $+i$ rein imaginäre positive Werte hat. Lassen wir x den kleinen Kreis um $+i$ ganz durchlaufen, so daß wir nach einem nahe bei i gelegenen Punkte von l_λ kommen, so nimmt $\sqrt{x-i}$ und also auch y den Faktor -1 auf, es ist also y_1 längs l_λ reell und negativ. Daraus schließen wir weiter, daß links von der imaginären Achse y_1 überall einen negativen reellen Teil hat, da der reelle Teil ja nur auf der imaginären Achse Null werden kann. Wir lassen jetzt x längs l_λ weitergehen bis nahe an $-i$. Es bleibt y_1 negativ reell. Dann lassen wir x auf einem kleinen Kreise in positivem Sinne um $-i$ herumgehen. Hat x den Kreis halb durchlaufen, so nimmt $\sqrt{x+i}$ und also zufolge der Reihenentwicklung für y_1 in der Umgebung von $-i$ auch y_1 den Faktor i auf, wird also negativ rein imaginär. Daraus schließen wir, daß y_1 auf dem Teil der imaginären Achse, der unterhalb von $-i$ liegt, negativ rein imaginär ist. Lassen wir x den kleinen Kreis um $-i$ ganz durchlaufen, so kommt x wieder zu einem Punkt auf l_ϱ. Es nimmt $\sqrt{x+i}$ und also auch y_1 den Faktor -1 auf, wird also wieder positiv reell, wie es sein muß. Es kann uns dies auch eine Bestätigung dafür sein, daß y_1 wirklich in E_1 eindeutig ist.

Das Ergebnis fassen wir zusammen. Es ist rechts von der imaginären Achse der reelle Teil von y_1 positiv, links von der imaginären Achse negativ. Auf der imaginären Achse selbst ist y_1 unterhalb $-i$ negativ rein imaginär, zwischen $-i$ und $+i$ längs l_ϱ positiv, längs l_λ negativ reell, oberhalb $+i$ ist y_1 positiv rein imaginär. Dadurch ist für jeden Punkt eindeutig bestimmt, welche von den beiden vorhandenen Entwicklungen y_1 darstellt. Die andere stellt dann y_2 dar. Wir wollen z. B. bestimmen, welche Entwicklung y_1 in der Umgebung des unendlich fernen Punktes darstellt. Wir haben die Entwicklungen

$$y = x + \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^3} + \cdots, \qquad y = -x - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^3} - \cdots.$$

Die Reihen geben für rein imaginäre Werte von x rein imaginäre Werte von y, da sie nur ungrade Potenzen von x enthalten. Sie konvergieren aber nur für $|x| > 1$. Die erste ist für großes x annähernd x. Sie gibt also, wenn x auf der imaginären Achse oberhalb $+i$ liegt, positive, und wenn x unterhalb $-i$ liegt, negative rein imaginäre Werte von y. Sie stellt also y_1 dar. Die zweite Reihe demnach y_2.

Wir denken uns die Werte von y_1 in der Ebene E_1 und die von y_2 in der E_1 kongruenten Ebene E_2 ausgebreitet. y_1 ist in E_1 und y_2 in E_2 eine eindeutige analytische Funktion. An l sind die Funktionen unstetig. Wir können hier auch genau angeben in welcher Art. Es sei ξ ein Punkt von l. Wir müssen unterscheiden, ob wir ihn als Punkt von l_ϱ oder l_λ auffassen wollen. Demnach unterscheiden wir zwischen ξ_ϱ und ξ_λ. Es ist, wie wir gesehen haben, $y_1(\xi_\varrho)$ positiv reell und $y_1(\xi_\lambda)$ negativ reell. Es können sich aber zwei Werte von $y = \sqrt{1+x^2}$ für denselben Wert von x nur durch das Vorzeichen unterscheiden und es ist daher $y_1(\xi_\varrho) = -y_1(\xi_\lambda)$. Da y_2 sich von y_1 immer nur durch das Vorzeichen unterscheidet, so ist weiter

$$y_2(\xi_\varrho) = -y_1(\xi_\varrho) = y_1(\xi_\lambda), \quad y_2(\xi_\lambda) = -y_1(\xi_\lambda) = y_1(\xi_\varrho).$$

Das gilt für jeden Punkt ξ von l. Wenn wir also den Rand l_ϱ von E_1 mit dem Rand l_λ von E_2 verbinden und den Rand l_ϱ von E_2 mit dem Rand l_λ von E_1, also festsetzen, daß x, wenn es l überschreitet und sich zunächst in E_1 befindet, von E_1 in E_2, und, wenn es sich in E_2 befindet, in E_1 eintreten soll, so schließen sich die Werte von y_1 und y_2 an l stetig aneinander. Auf der Fläche R, die auf die angegebene Art aus E_1 und E_2 entsteht, ist also y eine eindeutige Funktion des Ortes.

Die Fläche R heißt eine Riemannsche Fläche. Sie besteht in unserem Falle aus zwei Blättern. Diese Blätter hängen längs l kreuzweise zusammen. l_ϱ von E_1 ist mit l_λ von E_2 und l_λ von E_1 mit l_ϱ von E_2 vereinigt. Die Fläche R durchsetzt sich also längs der Linie l. Ein Durchschnitt längs der reellen Achse sieht so aus (Abb. 25). E_1 und E_2 erscheinen als nah (eigentlich unendlich nah) nebeneinander verlaufende Linien, l als Punkt. Denken wir uns die Fläche R materiell, etwa aus Papier hergestellt, und lassen wir x vom Punkte $x = 1$ in E_1 aus längs der reellen Achse nach l wandern und über l hinaus, so kann x, ohne die Fläche R zu verlassen, stetig sich so bewegen, daß es in E_1 bleibt, also nicht nach E_2 kommt (vgl. den gefiederten Pfeilin Abb. 25), ja, es muß x das Papier sogar durchsetzen, wenn es, wie es soll, nach E_2 kommen will (vgl. den ungefiederten Pfeil, Abb. 25). Aber das materielle Modell gibt eben kein genaues Bild der Riemannschen Fläche. Will man diese Schwierigkeit gern vermeiden, so kann man die Verbindung der Ebene E_1 und E_2 in folgender Weise vornehmen. Der Kürze wegen bezeichnen wir die Ränder l_ϱ, l_λ von E_1 mit $l_{\varrho 1}$, $l_{\lambda 1}$ und die von E_2 mit $l_{\varrho 2}$, $l_{\lambda 2}$. Wir verbinden diejenigen Punkte von $l_{\lambda 1}$ mit den entsprechenden von $l_{\varrho 2}$, in denen x ein rationales Vielfaches von i ist, durch unendlich dünne Fäden oder Stäbchen. Wir erhalten so ein Gitter. Wir verbinden ferner diejenigen Punkte von $l_{\lambda 1}$ und die entsprechenden von $l_{\varrho 2}$, in denen x ein irrationales Vielfaches von i ist, durch unendlich dünne Stäbchen. Sie bilden ein zweites Gitter. Die Stäbe des einen Gitters gehen durch die Lücken des anderen. Dann kann x auch ohne weitere Festsetzung in der Fläche R nur so wandern, wie es soll. Jedesmal, wenn es l überschreitet, kommt es in das andere Blatt. Wie man sich das auch vorstellen mag, wesentlich ist, daß x jedesmal, wenn es l überschreitet von dem einen Blatt in das andere übertritt.

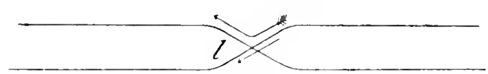


Abb. 25.

§ 3. Beispiel 2.

Es sei y definiert durch die Gleichung

(2) $$y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x - 1}}\,.$$

Da $\sqrt[3]{x}$ dreiwertig und $\sqrt{x-1}$ zweiwertig ist und wir diese Werte beliebig miteinander kombinieren können, so hat y für einen Wert von x sechs im allgemeinen verschiedene Werte. Die rationale Gleichung, der y genügt, ist daher vom 6. Grade. Diese Gleichung lautet

$$y^6 - 3(x-1)y^4 - 2xy^3 + 3(x-1)^2y^2 - 6x(x-1)y \\ - (x^3 - 4x^2 + 3x - 1) = 0 .$$

Aus der Gleichung (38) folgt, daß nur die Punkte $x = 0$, $x = 1$ und $x = \infty$ singulär sind. Für die Umgebung von $x = 0$ haben wir erstens die Entwicklung:

$$(3) \qquad y = i + x^{\frac{1}{3}} - \frac{i}{2}x - \frac{i}{8}x^2 + \cdots,$$

die wir einfach dadurch erhalten, daß wir $\sqrt{x-1}$ nach dem binomischen Satze nach Potenzen von x entwickeln. Aus der Reihe (3) gehen noch zwei andere hervor, dadurch, daß wir $x^{\frac{1}{3}}$ ersetzen durch $\varepsilon x^{\frac{1}{3}}$ und $\varepsilon^2 x^{\frac{1}{3}}$, wo $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$ eine dritte Einheitswurzel. Diese Reihen bezeichnen wir mit (3_1) und (3_2). Außerdem haben wir noch die Entwicklung:

$$(4) \qquad y = -i + x^{\frac{1}{3}} + \frac{i}{2}x + \frac{i}{8}x^2 + \cdots,$$

die wir erhalten, wenn wir den anderen Wert von $\sqrt{x-1}$ benutzen. Auch aus (4) gehen noch zwei Entwicklungen hervor, indem wir $x^{\frac{1}{3}}$ durch $\varepsilon x^{\frac{1}{3}}$ und $\varepsilon^2 x^{\frac{1}{3}}$ ersetzen. Wir bezeichnen sie mit (4_1) und (4_2). Im ganzen haben wir also, wie es sein muß, 6 Entwicklungen. Diese hängen zu je dreien in der Umgebung von $x = 0$ zusammen. Wenn wir x den Nullpunkt umkreisen lassen, so können wir die drei Reihen (3) ineinander überführen und ebenso die drei Reihen (4), nicht aber eine der Reihen (3) in eine der Reihen (4).

Für die Umgebung des Punktes 1 haben wir, indem wir $\sqrt[3]{x}$ nach Potenzen von $x - 1$ entwickeln, je nachdem, welchen Wert von $\sqrt[3]{x}$ wir benutzen, eine der folgenden Entwicklungen:

$$y = 1 + (x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \cdots,$$

$$y = \varepsilon + (x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{3}(x-1) - \frac{\varepsilon}{9}(x-1)^2 + \cdots,$$

$$y = \varepsilon^2 + (x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^2}{3}(x-1) - \frac{\varepsilon^2}{9}(x-1)^2 + \cdots.$$

Aus jeder geht noch eine zweite hervor dadurch, daß wir $(x-1)^{\frac{1}{2}}$ ersetzen durch $-(x-1)^{\frac{1}{2}}$. Wir haben im ganzen 6 konjugierte Entwicklungen. Diese hängen in der Umgebung von $x = 1$ paarweise zusammen.

Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes finden wir

$$y = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + \cdots$$
$$= x^{\frac{2}{6}} + x^{\frac{3}{6}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{6}} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{9}{6}} + \cdots,$$

also eine Reihenentwicklung, die nach steigenden ganzen Potenzen von $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}$ fortschreitet. Lassen wir x den unendlich fernen Punkt in positivem Sinne umkreisen, so erhalten wir nach jedem Umlauf eine neue Entwicklung, und zwar im ganzen sechs. Diese sind der Reihe nach, wie sie sich auf die angegebene Art ergeben:

$$x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^{-1}}, \quad \varepsilon^2 x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^{-1}}, \quad \varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^{-1}},$$
$$x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^{-1}}, \quad \varepsilon^2 x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^{-1}}, \quad \varepsilon x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^{-1}}.$$

Dabei ist unter $\sqrt{1-x^{-1}}$ diejenige Entwicklung von $\sqrt{1-x^{-1}}$ zu verstehen, die für $x = \infty$ den Wert 1 annimmt. Es ist zu beachten, daß, wenn x sich in positivem Sinne um den unendlich fernen Punkt bewegt, es sich auf einem sehr großen Kreise um den Nullpunkt in negativem Sinne bewegt. Die sechs Entwicklungen in der Umgebung des unendlich fernen Punktes hängen also alle in der Umgebung dieses Punktes zusammen.

Wir nennen die Punkte 0, 1, ∞ in dieser Reihenfolge $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ und nehmen als $\mathfrak{B}_0$ den Punkt i und führen längs der Strecken $\overline{\mathfrak{B}_0\,\mathfrak{B}_1}$, $\overline{\mathfrak{B}_0\,\mathfrak{B}_2}$, die Schnitte l_1, l_2 aus. Als Schnitt l_3 nehmen wir den Strahl, der von $\mathfrak{B}_0$ aus parallel zur Achse der positiven reellen Zahlen nach ∞ geht. Für Punkt c nehmen wir den Punkt $\frac{1}{2}$. Für $x = \frac{1}{2}$ sollen $y_1, y_2, \cdots y_6$ die Werte haben $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$, $\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{4} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$, $\frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt[3]{4} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$, $\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$, $\frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$, wo $\sqrt[3]{4}$ und $\sqrt{2}$ reell und positiv genommen werden sollen. Wenn x einmal in positivem Sinne um den Punkt 0 herumgeht, so bleibt $\sqrt{x-1}$ ungeändert, $\sqrt[3]{x}$ nimmt den Faktor ε an. Es geht also y_1 über in y_2, y_2 in y_3, y_3 in y_1 ferner y_4 in y_5, y_5 in y_6, y_6 in y_4. Wir nehmen 6 x-Ebenen $E_1, E_2, \ldots E_6$, die alle längs der Linien l_1, l_2, l_3 zerschnitten sind.

Diese Ebenen haben wir längs l_1 so miteinander zu vereinigen, wie in der Abb. 26 angegeben. Da z. B. y_1 in y_2 übergeht, wenn x den Schnitt l_1 vom linken zum rechten Ufer überschreitet, so muß x hierbei aus E_1 nach E_2 kommen. Wir haben also das linke Ufer von E_1 mit dem rechten von E_2 zu vereinigen, was durch die beiden nebeneinander stehenden Zahlen 2, 1 ausgedrückt ist. Wir wollen überhaupt in folgender Weise angeben, wie die Blätter längs eines Schnittes verbunden sind. Gelangt man beim Überschreiten eines Schnittes von links nach rechts aus dem α-ten ins β-te Blatt, so wollen wir auf die linke Seite des Schnittes irgendwo α hinschreiben und rechts dicht daneben β.

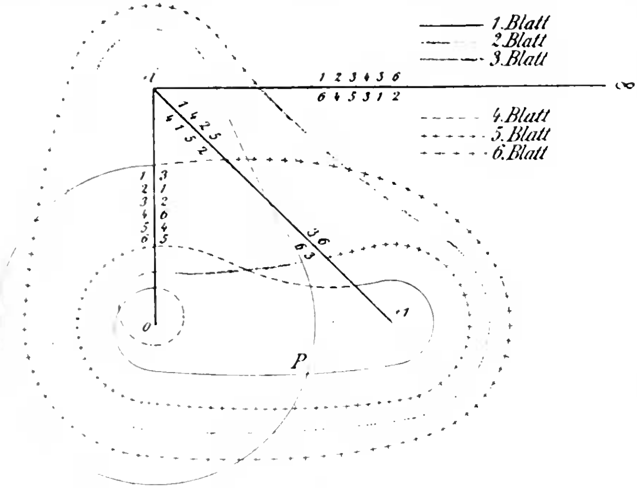


Abb. 26.

Lassen wir x einmal in positivem Sinne um den Punkt 1 gehen, so ändert sich $\sqrt[3]{x}$ nicht, $\sqrt{x-1}$ geht in $-\sqrt{x-1}$ über. Es geht also y_1 über in y_4, y_2 in y_5 y_3 in y_6 und umgekehrt y_4 in y_1, y_5 in y_2, y_6 in y_3. Wir haben also die Blätter E_k längs l_2 so zu vereinigen, wie in Abb. 26 angegeben. Lassen wir schließlich x einmal in positivem Sinne um den Punkt ∞ herumgehen, so geht $\sqrt[3]{x}$ über in $\varepsilon^2 \sqrt[3]{x}$ und $\sqrt{x-1}$ in $-\sqrt{x-1}$, also geht über y_1 in y_6, y_6 in y_2, y_2 in y_4, y_4 in y_3, y_3 in y_5, y_5 wieder in y_1, so daß wir die Blätter längs l_3 so zusammenfügen müssen, wie in der Abb. 26 angegeben.

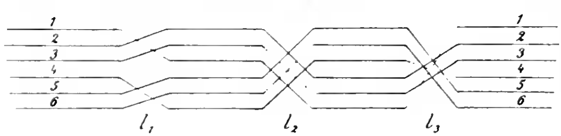


Abb. 27.

In Abb. 27 ist ein Durchschnitt durch die entstandene sechsblättrige Riemannsche Fläche gezeichnet, und zwar längs einer Geraden, die l_1, l_2, l_3 schneidet, der erkennen läßt, wie die Blätter längs l_1, l_2, l_3 zusammenhängen. Nur zu Erhöhung der Übersicht sind die Verbindungslinien zum Teil punktiert. Aus dieser Abbildung geht auch deutlich hervor, daß man allein durch Überschreiten von l_1 aus dem ersten Blatte ins zweite und dritte gelangen kann, aber nicht ins vierte, fünfte oder sechste, daß man allein durch Überschreiten von l_2 aus dem ersten Blatt wohl ins vierte gelangen kann, aber in keines der anderen.

Eine Probe für die Richtigkeit der ausgeführten Verbindungen ist folgendes. Wenn man von irgendeinem Punkte aus in irgendeinem Blatte einen Weg beschreibt, der nur $\mathfrak{V}_0$ umkreist, nicht aber einen der anderen Punkte $\mathfrak{V}_k$, so muß man, da $\mathfrak{V}_0$ kein singulärer Punkt ist, schon nach einem Umlauf wieder zum Ausgangspunkte zurückkommen (also auch ins selbe Blatt). Ich überlasse es dem Leser, dies zu bestätigen. In der Abb. 26 sind zwei geschlossene Kurven gezeichnet, die sich nur in einem Punkte treffen.

§ 4. Beispiel 3.

Es sei y definiert durch die Gleichung

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^3 = 0 .$$

Wie wir in Kap. II § 2 sahen, wo wir diese Gleichung als Beispiel IV behandelten, haben wir im Unendlichen eine nach Potenzen von $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ fortschreitende Reihe, so daß wir dort einen singulären Punkt haben. Um zu sehen, wo etwa im Endlichen noch singuläre Punkte vorhanden sind, sehen wir zu, wo $\frac{df}{dy}$ Null wird. Es ist

$$\frac{df}{dy} = x - 3y^2$$

und das ist gleichzeitig mit f Null, für $x = y = 0$ und für $x = \frac{4}{27}$, $y = -\frac{2}{9}$. Es sind also $x = 0$ und $x = \frac{4}{27}$ die einzigen im Endlichen liegenden Punkte, die singulär sein können.

Wir erhalten in der Umgebung von $x = 0$ eine nach ganzen Potenzen von x und eine nach ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{2}}$ fortschreitende Reihe und in der Umgebung von $x = \frac{4}{27}$ eine nach ganzen Potenzen von $\left(x - \frac{4}{27}\right)$ und eine nach ganzen Potenzen von $\left(x - \frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$ fortschreitende Reihe.

Als Punkt $\mathfrak{V}_0$ nehmen wir den Punkt i und ziehen die Schnitte l_1, l_2, l_3 von $\mathfrak{V}_0$ nach 0, $\frac{4}{27}$, ∞, in der in Abb. 28 angegebenen Weise. Da unsere Gleichung in y vom dritten Grade ist, haben wir drei längs l_1, l_2, l_3 zerschnittene Ebenen E_1, E_2, E_3 nötig, in denen wir uns die Funktionen y_1, y_2, y_3 ausgebreitet denken. Im Unendlichen hängen alle drei Funktionen y_1, y_2, y_3 zusammen. Da wir die Bezeichnung willkürlich wählen dürfen, können wir annehmen, daß y_1 in y_2, y_2 in y_3, y_3 in y_1 übergeht, wenn x den Punkt ∞ einmal in positivem Sinne umkreist. Wir müssen dann die Blätter längs l_3 so zusammenheften, wie in der Abbildung angegeben.

Im Punkte $\frac{4}{27}$ hängen zwei der Wurzeln zusammen und gehen ineinander über, wenn x den Punkt $\frac{4}{27}$ einmal umläuft. Da die Wurzeln y_1, y_2, y_3 noch gleichberechtigt sind, so können wir die Bezeichnung so wählen,

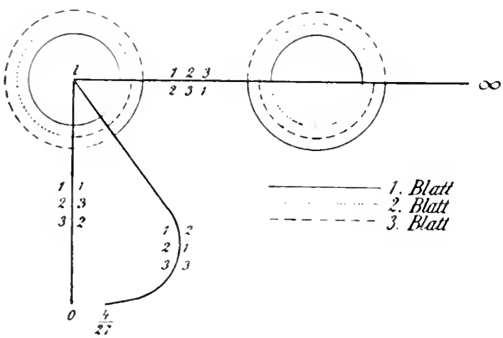


Abb. 28.

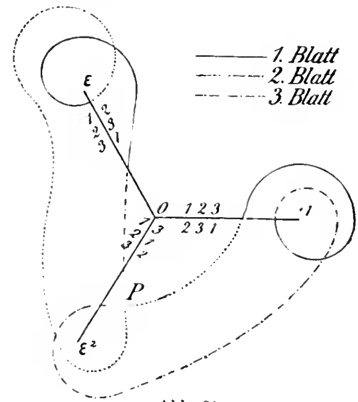


Abb. 29.

daß in $\frac{4}{27}$ die Wurzeln y_1 und y_2 zusammenhängen. Dann müssen wir längs l_2 die Blätter so zusammenheften, wie in der Abb. 28 angegeben. Wie wir die Blätter längs l_1 zusammenheften müssen, ergibt sich jetzt daraus, daß wir nach einmaligem Umkreisen des Punktes $\mathfrak{B}_0$ wieder in dasselbe Blatt gelangen müssen, gleichgültig in welchem Blatt wir uns beim Beginn des Umkreisens befinden. Es ergibt sich, daß längs l_1 die Blätter E_2 und E_3 zusammenhängen.

Wir haben also für die Funktion y eine Riemannsche Fläche hergestellt, können aber nicht entscheiden, welche von den drei in der Umgebung irgendeines Punktes x geltenden Reihenentwicklungen für das erste, zweite oder dritte Blatt gilt. Das zu entscheiden, würde noch allerhand Überlegungen notwendig machen. Am schnellsten kommt man wohl zum Ziel, indem man die Gleichung nach y mit der Cardanischen Formel auflöst.

In Abb. 29 ist noch die Riemannsche Fläche dargestellt, die zu der Gleichung $x^3 + y^3 - 1 = 0$ gehört. Es sind auf ihr zwei geschlossene Kurven gezeichnet, die sich nur in einem Punkte P schneiden.

§ 5. Konstruktion der Riemannschen Fläche.

Wir haben (vgl. § 1) m Blätter $E_1, E_2, \ldots E_m$, die längs der h Linien $l_1, l_2, \ldots l_h$ zerschnitten sind. Auf dem Blatte $E_\varkappa$ denken wir uns, wie das oben auseinandergesetzt ist, die Funktion $y_\varkappa$ ausbreitet. Es sei ξ ein beweglicher Punkt von l_1. Wir unterscheiden wieder, ob der Punkt auf dem rechten oder linken Ufer von l_1 liegend gedacht werden soll, und nennen ihn je nachdem ξ_ϱ oder ξ_λ. Die Funktionen

$$(5) \qquad y_1(\xi_\varrho),\ y_2(\xi_\varrho), \ldots y_m(\xi_\varrho)$$

sind voneinander verschieden und sie stellen alle m Wurzeln von $f(x, y) = 0$ dar, wenn x ein Punkt von l_1 ist. Dasselbe gilt für die Funktionen

$$(6) \qquad y_1(\xi_\lambda),\ y_2(\xi_\lambda), \ldots y_m(\xi_\lambda)\,.$$

Es können sich daher die Funktionen (5) nur durch die Reihenfolge von den Funktionen (6) unterscheiden. Bezeichnen also $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Zahlen 1, 2, ... m in passend gewählter Reihenfolge, so ist

$$y_1(\xi_\lambda) = y_{\alpha_1}(\xi_\varrho),\ y_2(\xi_\lambda) = y_{\alpha_2}(\xi_\varrho), \ldots y_m(\xi_\lambda) = y_{\alpha_m}(\xi_\varrho)\,.$$

Wenn wir also $l_{1\lambda}$ von E_k vereinigen mit $l_{1\varrho}$ von E_{α_k}, so schließen sich die Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ längs der m-Schnitte l_1 stetig aneinander. Jedes der $2m$ längs l_1 vorhandenen Ufer wird mit einem anderen und nur mit einem verbunden, so daß kein freier Rand bleibt. Geht x über l_1 einmal vom linken zum rechten Ufer hinüber, so kommt es, wenn es vorher in E_k war, nach E_{α_k} und es geht y_k über in y_{α_k}. Das tritt im besonderen ein, wenn wir x einen Umlauf in positivem Sinne um den Punkt $\mathfrak{B}_1$ machen lassen. Es tritt also auch dann unter $y_1, y_2, \ldots y_m$ die Vertauschung ein, daß y_k in y_{α_k} übergeht. Diese Vertauschung muß mit der übereinstimmen, die sich aus den für die Umgebung von $\mathfrak{B}_1$ geltenden Reihenentwicklungen ergibt.

Ebenso wie längs l_1 kann man die Blätter $E_1, E_2, \ldots E_m$ längs der anderen Schnitte l_k so zusammenfügen, daß sich auch dort die m Zweige $y_1, y_2, \ldots y_m$ stetig zusammenschließen. Damit haben wir bewiesen, daß es zu jeder algebraischen Funktion y von x eine Riemannsche Fläche gibt, auf der y eine eindeutige Funktion des Ortes ist. Die m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$, die zusammen die Funktion y ausmachen, nennen wir die konjugierten Funktionen von y. Wir nehmen auch wohl im besonderen $y = y_1$, an und nennen $y_2, y_3, \ldots y_m$ konjugiert zu $y = y_1$.

§ 6. Zerfallen der Riemannschen Fläche.

Wir haben die Riemannsche Fläche aus den Ebenen $E_1, E_2, \ldots E_m$ erhalten dadurch, daß wir sie längs der Schnitte l miteinander verbunden haben. Es entsteht die Frage, ob die so erhaltene Fläche aus einem einzigen

Stück besteht oder aus mehreren untereinander nicht zusammenhängenden Teilen. Im ersten Falle kann der Punkt x aus jedem Blatt in jedes andere gelangen, ohne die Fläche zu verlassen, im zweiten nicht. Es zerfalle etwa die Riemannsche Fläche R in zwei Teile R_1, R_2, die miteinander keinen Zusammenhang haben. R_1 möge bestehen aus den Blättern $E_1, E_2, \ldots E_\alpha$ und R_2 aus den Blättern $E_{\alpha+1}, E_{\alpha+2}, \ldots E_m$. Es kann dann x aus keinem der Blätter $E_1, E_2, \ldots E_\alpha$ in eins der Blätter $E_{\alpha+1}, E_{\alpha+2}, \ldots E_m$ gelangen. Das bedeutet aber, daß keine der Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ durch analytische Fortsetzung übergehen kann in eine der Funktionen $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \ldots y_m$. Beschreibt also x in der einfachen x-Ebene eine geschlossene Kurve, so vertauschen sich die α Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ nur untereinander, so daß jede symmetrische Funktion von ihnen ungeändert bleibt, also eine eindeutige analytische Funktion von x ist. In der Funktion

$$(7) \qquad (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_\alpha) = g(x, y)$$

sind daher die Koeffizienten der Potenzen von y eindeutige analytische Funktionen von x. Da es außerdem ganze rationale Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ sind, so können sie nur unendlich werden, wenn $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ es werden. Sie können daher nur an einer endlichen Zahl von Stellen unendlich werden und jedesmal nur von endlicher Ordnung, so daß sie nur eine endliche Zahl von Polen haben und sonst keine singulären Stellen. Sie sind daher rationale Funktionen von x. Demnach ist $g(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von y vom Grade α, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind. Zufolge der Definition von g genügen die α Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ der Gleichung $g(x, y) = 0$. Ebenso läßt sich zeigen, daß die $m - \alpha$ übrigen y_k einer Gleichung

$$(8) \qquad h(x, y) = (y - y_{\alpha+1})(y - y_{\alpha+2}) \ldots (y - y_m) = 0$$

vom Grade $m - \alpha$ in y genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind. Aus den Gleichungen (7), (8) und (2), § 1 folgt die in x und y identische Gleichung

$$f(x, y) = a_0(x)\, g(x, y)\, h(x, y),$$

so daß $f(x, y)$ rational zerfällt. Wenn umgekehrt $f(x, y)$ rational zerfällt, so kann man jeden Faktor für sich Null setzen und für sich behandeln. Man erhält dann für jeden eine besondere Riemannsche Fläche, so daß die Riemannsche Fläche von $f = 0$ in so viele getrennte Teile zerfällt, wie $f(x, y)$ rationale Faktoren hat. Wir sehen also:

Die zu $f(x, y) = 0$ gehörige Riemannsche Fläche zerfällt dann und nur dann, wenn $f(x, y)$ in rationale Faktoren zerfällt, und sie zerfällt in so viele getrennte Teile, wie $f(x, y)$ rationale Faktoren hat.

§ 7. Die zweiblättrige Riemannsche Fläche.

Die bei unseren allgemeinen Betrachtungen und auch bei den Beispielen benutzte Art der Herstellung der Riemannschen Fläche ist nicht immer die einfachste. Dazu wollen wir noch ein besonders wichtiges Beispiel betrachten, nämlich die zweiblättrigen Flächen. Die Gleichung für y muß in y vom zweiten Grade sein, etwa

$$A y^2 + B y + C = 0 ,$$

wo A, B, C ganze rationale Funktionen von x sein sollen. Die Diskriminante $B^2 - 4 A C$ kann einen quadratischen Faktor haben. Wir setzen

$$B^2 - 4 A C = Q^2 G ,$$

wo G keinen mehrfachen Faktor mehr enthält. Da

$$y = -\frac{1}{2 A}(B + Q \sqrt{G}) ,$$

so folgt, daß y an den Nullstellen von G singulär ist und im Endlichen nur an diesen. Der unendlich ferne Punkt ist singulär, wenn der Grad von G ungrade ist, sonst nicht. Wir beschränken uns auf den Fall, wo der Grad von G grade ist und bezeichnen ihn mit $2 g$. Die Nullstellen von G seien $a_1, a_2, \ldots a_{2g}$. Wir nehmen zunächst eine einfache x-Ebene, ziehen in ihr g Linien $l_1, l_2, \ldots l_g$, die sich selbst und untereinander nicht schneiden, und zwar eine von a_1 nach a_2, eine von a_3 nach a_4 usw. und schließlich eine von a_{2g-1} nach a_{2g}, und zerschneiden die Ebene längs der Linien l_k. Die zerschnittene Ebene nennen wir E_1. Im Innern von E_1 wählen wir irgendeinen Punkt c. Für die Umgebung von c bestehen zwei Entwicklungen für y, die sich nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{G}$ unterscheiden. Setzen wir diese Entwicklungen in E_1 analytisch fort, so erhalten wir in E_1 zwei Funktionen y_1 und y_2, die in E_1 eindeutig sind. Denn wenn x einen der Punkte a_k einmal umläuft, so ändert $\sqrt{G}$ sein Zeichen, es würde y_1 in y_2 und y_2 in y_1 übergehen. Aber wegen der Schnitte l_k kann in E_1 x immer nur eine grade Zahl von Punkten a_k umlaufen und daher sind y_1 und y_2 eindeutig in E_1 und können nicht ineinander übergeführt werden, solange x die Linien l_k nicht überschreitet. Wir denken uns y_1 in E_1 ausgebreitet und y_2 in einer zu E_1 kongruenten Ebene E_2. Verbinden wir die Ränder dieser Ebenen an den Schnitten l_k kreuzweise miteinander, so erhalten wir die Riemannsche Fläche, auf der y eindeutig ist. Diese Konstruktion der Riemannschen Fläche ist hier einfacher und übersichtlicher als die für den allgemeinen Beweis benutzte.

§ 8. Die Punkte der Riemannschen Fläche und ihre Umgebung.

Unter der Umgebung eines Punktes P der Gaußschen Zahlen-Ebene oder -Kugel verstehen wir die Fläche eines Kreises, der den gegebenen

Punkt P als Mittelpunkt hat. Durch den Kreis wird die Gaußsche Zahlenkugel in zwei Gebiete geteilt derart, daß man die Umgebung des Punktes P nicht verlassen kann, ohne den Kreisumfang zu überschreiten. Zerschneiden wir die Fläche längs des Kreisumfanges, so wird die Umgebung des Punktes P ganz von der Zahlenkugel losgelöst. Diese Eigenschaft muß die Umgebung eines Punktes P der Riemannschen Fläche auch haben, weil wir sonst nicht entscheiden können, ob ein Punkt der Umgebung von P angehört oder nicht.

Wir betrachten diejenigen Punkte der Riemannschen Fläche R, für die x einen bestimmten Wert, etwa den Wert a hat. Wir unterscheiden zwei Hauptfälle. I. a ist keiner der Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$, II. a ist einer der Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$.

I. Hier unterscheiden wir drei Unterfälle.

1. a liegt auf keiner der Linien l, längs deren wir die m Blätter miteinander verbunden haben. Die m Blätter verlaufen in der Umgebung von a getrennt. Sie liegen übereinander, wie die Blätter eines Buches. Wir haben m Punkte, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_m$ in R, für die x den Wert a hat. Es liege $\mathfrak{p}_k$ in E_k. Unter der Umgebung eines dieser Punkte, z. B. des Punktes $\mathfrak{p}_1$, verstehen wir die Fläche eines Kreises, der in E_1 liegt, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{p}_1$ ist und dessen Halbmesser so gewählt ist, daß keiner der Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ im Innern des Kreises liegt. Der Einfachheit halber wollen wir ferner noch annehmen, obwohl das nicht notwendig ist, daß auch keiner der Punkte der Linien $l_1, l_2, \ldots l_h$ im Innern des Kreises liegt. Machen wir dieselbe Konstruktion bei den Punkten $\mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_m$, so erhalten wir m Kreisflächen, die übereinander liegen und voneinander ganz getrennt verlaufen.

2. Es sei a einer der Punkte von l_1 aber nicht $\mathfrak{B}_0$ oder $\mathfrak{B}_1$. Wir zeichnen um a in jedem der m Blätter von R einen Kreis, dessen Radius so klein zu wählen ist, daß keiner der Punkte $\mathfrak{B}_k$ in ihm liegt, daß außer l_1 keine der Linien l_k ihn durchsetzt und daß l_1 ihn nur in zwei Teile zerlegt, und denken uns die Fläche R längs dieser Kreise zerschnitten. Wir haben in der Umgebung von a wieder m Flächenstücke, die sich zwar längs l_1 durchsetzen, die aber nach unseren Festsetzungen nicht untereinander zusammenhängen. Wir bezeichnen diese Flächenstücke (Kreisflächen) mit I, II, III, ... Nehmen wir als Beispiel die Linie l_3 in Abb. 28. Längs l_3 haben wir den oberen Teil des ersten Blattes mit dem unteren des zweiten verbunden. Es besteht also die Kreisfläche I aus einem Halbkreise, der oberhalb l_3 im ersten Blatt liegt, und aus einem Halbkreis, der unterhalb l_3 im zweiten Blatt liegt. Das Flächenstück II besteht aus einem im zweiten Blatt oberhalb l_3 liegenden Halbkreis und aus einem im dritten Blatt unterhalb l_3 liegenden Halbkreis. Schließlich besteht das Flächenstück III aus einem Halbkreis oberhalb l_3 im dritten Blatt und aus einem Halbkreis unterhalb l_3 im ersten Blatt. Diese drei Kreisflächen I, II, III durchsetzen sich zwar

längs l_3, hängen aber nicht miteinander zusammen. Befindet sich x in einer der Kreisflächen I, II, III, so kann es nicht heraus, ohne den Umfang des Kreises zu überschreiten.

Wir haben also geradeso, wie im Falle I_1, auch im Falle I_2 für $x = a$ im ganzen m Punkte der Riemannschen Fläche und jeder dieser hat als Umgebung eine schlichte Kreisfläche.

3. Es sei a der Punkt $\mathfrak{B}_0$. Auch hier zerschneiden wir jedes der m Blätter der Fläche R längs eines Kreises um den Punkt $\mathfrak{B}_0$ als Mittelpunkt, dessen Halbmesser so klein zu wählen ist, daß keiner der Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ in seinem Innern liegt und daß jede der h Linien l_k den Umfang des Kreises nur einmal trifft. Wir erhalten dann m Flächenstücke, die sich zwar längs der Linien l_k durchsetzen, die aber wieder nicht zusammenhängen und die wir mit I, II, III, ... bezeichnen. Jede dieser Kreisflächen enthält im allgemeinen Stücke aus mehreren der m Blätter von R. So besteht z. B. in Abb. 29 jede der drei Kreisflächen I, II, III zu je einem Drittel aus einem Stück des ersten, einem des zweiten und einem des dritten Blattes. Man vgl. auch Abb. 26 u. 28.

Wir haben also auch bei $\mathfrak{B}_0$ m Punkte der Riemannschen Fläche, deren Umgebungen schlichte Kreisflächen sind.

II. Es sei a einer der Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$, etwa der Punkt $\mathfrak{B}_1$. Es möge in der Umgebung von $x = a$ für y (unter anderem) eine Entwicklung gelten, die nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet. Sie liefert α adjungierte Entwicklungen, die mit $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$ bezeichnet seien. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $y_1, y_2 \ldots y_\alpha$ sich zyklisch vertauschen, wenn x den Punkt $\mathfrak{B}_1$ einmal in positivem Sinne umkreist, also l_1 einmal von links nach rechts überschreitet. Ferner seien die Blätter E_k so geordnet, daß die Werte von y_k in E_k ausgebreitet sind. Da, wenn x den Schnitt l_1 von links nach rechts überschreitet, y_1 übergeht in y_2, y_2 in $y_3, \ldots y_\alpha$ in y_1, so sind die Blätter $E_1, E_2, \ldots E_\alpha$ längs l_1 so miteinander verbunden, daß x, wenn es l_1 von links nach rechts überschreitet, aus E_1 in E_2, aus E_2 in $E_3, \ldots$ aus E_α in E_1 gelangt. Wir zeichnen in jedem der α Blätter $E_1, E_2, \ldots E_\alpha$ einen Kreis um $\mathfrak{B}_1$ mit so kleinem Halbmesser, daß keiner der Punkte $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots \mathfrak{B}_\alpha$ im Innern der Kreise liegt. Die Kreisflächen seien bezeichnet mit $K_1, K_2, \ldots K_\alpha$. Sie hängen miteinander zusammen längs der Linie l_1 und bilden, wie wir gleich sehen werden, ein einziges Flächenstück mit nur einer Begrenzungslinie. Gehen wir nämlich von einem Punkte A des Kreisumfanges im ersten Blatte aus und gehen auf dem Kreisumfang in positivem Sinne in R weiter, so kommen wir nach einem Umlauf nicht nach A zurück, sondern in den unter A liegenden Punkt des zweiten Blattes. Wandern wir auf dem Umfange in demselben Sinne weiter, so kommen wir nach einem weiteren Umlaufe zu dem unter A liegenden Punkt des dritten Blattes. Erst nach α-maligem Umlaufe kommen wir nach A zurück. Die α Umfänge der Kreisflächen $K_1, K_2, \ldots K_\alpha$ schließen sich also zu einer einzigen geschlossenen Kurve zusammen, die mit g bezeichnet sei. Die Kurve g grenzt den Teil der Riemannschen Fläche, der aus den α Kreisflächen $K_1, K_2, \ldots K_\alpha$ besteht, von der übrigen Fläche vollkommen ab. Befindet sich x im Innern dieses Flächenstückes, also in einer der Kreisflächen, so kann x zwar in jede der anderen Kreisflächen gelangen, ohne g zu überschreiten, indem es l_1 in passender Weise ein oder mehrere Male überschreitet; es kann aber x aus den Kreisflächen nicht heraus, ohne g zu überschreiten. Das von den Kreisflächen gebildete Flächenstück ist einfach zusammenhängend. Es bildet die Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}_1$ der Riemannschen Fläche, nämlich des Mittelpunktes der Kreisflächen K. Da die α-Kreisflächen nur ein einziges Flächenstück bilden, so können wir auch ihre Mittelpunkte nur als einen Punkt der Riemannschen Fläche rechnen. Man nennt einen solchen Punkt einen Verzweigungspunkt oder Windungspunkt der Verzweigungsordnung oder auch kurz der Ordnung $\alpha - 1$. Man bezeichnet ihn auch als α-blättrigen Verzweigungs- oder Windungspunkt. Ein gewöhnlicher Punkt der Riemannschen Fläche kann aufgefaßt werden als einblättriger Verzweigungspunkt oder als einer von der nullten Ordnung.

Hat y in der Umgebung von $x = a$ außer der nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitenden noch andere Entwicklungen, etwa eine nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\beta}}$ und eine nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\gamma}}$ fortschreitende, so liegen bei $x = a$ im ganzen drei Punkte der Riemannschen Fläche, nämlich drei Verzweigungspunkte der Ordnungen $\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1$.

Man kann sich leicht ein Modell eines Windungspunktes herstellen, z. B. eines dritter Ordnung. Man schneide sich aus Papier vier Kreise aus und zerschneide sie längs eines Halbmessers. Die linken und rechten Ufer dieser Schnitte seien bezeichnet mit $l_{k\lambda}$, $l_{k\varrho}$ $(k = 1, \ldots 4)$. Dann klebe man $l_{1\varrho}$ mit $l_{2\lambda}$ zusammen, $l_{2\varrho}$ mit $l_{3\lambda}$, $l_{3\varrho}$ mit $l_{4\lambda}$. Hierdurch erhält man eine Fläche, die Ähnlichkeit mit einer Schraubenfläche hat. Um den Windungspunkt mit seiner Umgebung vollkommen zu haben, muß man sich noch $l_{4\varrho}$ mit $l_{1\lambda}$ verbunden denken, was freilich praktisch nicht ausführbar ist. Die Umgebungen der Verzweigungspunkte können sich mannigfach durchsetzen (ohne zusammenzuhängen). Man betrachte z. B. die Punkte $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ der Abb. 26 genauer.

Das Ergebnis fassen wir zusammen:

Jedem Punkt der Riemannschen Fläche kann eine vollkommen abgegrenzte Umgebung zugewiesen werden, die auch beliebig klein gewählt werden kann. Sie besteht aus einer schlichten Kreisfläche oder aus α schraubenartig miteinander verbundenen Kreisflächen, wenn der Punkt ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$ ist. Durchläuft x die ganze Begrenzung der Umgebung, so nimmt $arg\ x$ um $2\pi \cdot \alpha$ zu. y hat für die Umgebung des Punktes eine Entwicklung, die nach ganzen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, wenn x in dem Punkt den Wert a annimmt. Im allgemeinen ist $\alpha = 1$, die Umgebung also eine schlichte Kreisfläche. Es gibt nur eine endliche Zahl von Punkten auf der Riemannschen Fläche, für die $\alpha > 1$. Dies sind die eigentlichen Verzweigungs- oder Windungspunkte.

Die Summe der Verzweigungsordnungen aller Punkte ist also eine endliche Zahl, die mit w oder genauer mit w_x bezeichnet werden soll und die die Verzweigungszahl der Fläche T genannt wird. Für die in dem Beispiel behandelten Flächen können wir die Verzweigungszahlen leicht angeben. Es ist in Beispiel I (Abb. 24) $w = 1 + 1 = 2$, in Beispiel II (Abb. 26) $w = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 = 12$, in Beispiel III (Abb. 28) $w = 1 + 1 + 2 = 4$, in Beispiel IV (Abb. 29) $w = 2 + 2 + 2 = 6$. Es ist also in den Beispielen w immer eine grade Zahl. Wir werden später sehen, daß das kein Zufall ist, sondern daß w immer grade ist.

Viertes Kapitel.

Der algebraische Körper $(x\,y)$ und seine Funktionen.

§ 1. Definition des Körpers.

Gleichzeitig mit y wird auch jede rationale Funktion von x, y eine algebraische Funktion von x. Ist nämlich $R\,(x, y) = \xi$ eine solche Funktion, so erhalten wir durch Elimination von y aus den beiden Gleichungen $f\,(x, y) = 0$, $R\,(x, y) - \xi = 0$ eine algebraische Gleichung zwischen ξ und x, so daß $\xi = R\,(x, y)$ eine algebraische Funktion von x ist. Beispiele für diese Elimination finden sich im Kap. V. Wir werden auf die zwischen ξ und x bestehende Gleichung weiter unten genauer eingehen. Da eine rationale Funktion von x, y eine eindeutige Funktion ihrer Argumente ist, und y eine eindeutige Funktion auf der Riemannschen Fläche, so ist auch jede rationale Funktion von x, y eine eindeutige Funktion auf der Riemannschen Fläche.

Wenn wir zwei rationale Funktionen von x, y addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren, erhalten wir immer wieder eine rationale Funktion von x, y. Dabei sind die Konstanten mit zu den rationalen Funktionen gerechnet. Im Bereiche der rationalen Funktionen von x, y sind also die vier Grundrechenarten unbeschränkt (mit Ausschluß der Division durch Null) ausführbar. Die Gesamtheit der rationalen Funktionen von x, y bildet also, wie man sagt, einen Körper, und zwar einen algebraischen Körper einer unabhängigen Veränderlichen. Wir bezeichnen ihn mit $(x\,y)$.

Sind $\xi = R_1(x, y)$, und $\eta = R_2(x, y)$ zwei Funktionen des Körpers $(x\,y)$, so erhalten wir aus den drei Gleichungen $R_1(x, y) - \xi = 0$, $R_2(x, y) - \eta = 0$, $f(x, y) = 0$ durch Elimination von x, y eine algebraische Gleichung zwischen ξ und η. Es kann eintreten, daß diese Gleichung ξ oder η nicht enthält. Die andere Funktion ist dann, wie aus der Gleichung folgt, eine Konstante.

Wir fassen das bisherige Ergebnis zusammen in den

Satz I. Die rationalen Funktionen von x, y bilden einen algebraischen Körper einer Veränderlichen. Jede Funktion des Körpers ist eine algebraische Funktion von x, die auf der über der x-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche, auf der y eindeutig ist, gleichfalls eindeutig ist. Zwischen je zwei Funktionen des Körpers besteht eine algebraische Gleichung.

§ 2. Gleichung, der eine Funktion des Körpers genügt.

Es seien $y_1, y_2, \ldots y_m$, wie früher, die m konjugierten Funktionen von y. Sie sind die m Wurzeln der Gleichung $f(x, y) = 0$. Wir nennen, wenn $R(x, y)$ eine Funktion des Körpers $(x\,y)$ ist, die m Funktionen $R(x, y_1)$, $R(x, y_2), \ldots R(x, y_m)$ die konjugierten Funktionen von R. Indem wir speziell $y = y_1$ annehmen, nennen wir auch die $m - 1$ Funktionen $R(x, y_2), \ldots R(x, y_m)$ die konjugierten zu $R(x, y) = R(x, y_1)$. Zur Abkürzung bezeichnen wir $R(x, y_k)$ mit R_k. Da die y_k die Wurzeln der Gleichung $f(x, y) = 0$ sind, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, so ist jede rationale symmetrische Funktion der y_k als rationale Funktion von x darstellbar. Es ist also auch jede symmetrische rationale Funktion der R_k als rationale Funktion von x darstellbar. Unter diesen Funktionen seien hervorgehoben, die Summe, die Spur von R, und das Produkt, das Norm von R genannt wird. Also

$$\mathrm{Spur}\,(R) = R_1 + R_2 + \cdots + R_m\,,$$
$$\mathrm{Norm}\,(R) = R_1\,R_2 \cdots R_m\,.$$

Die Funktion

$$G(\xi, x) = (\xi - R_1)(\xi - R_2)\ldots(\xi - R_m)$$

gehört auch bei beliebigen ξ zu den rationalen symmetrischen Funktionen der R_k und ist also eine rationale Funktion von x. Sie ist außerdem, wie aus ihrer Definition folgt, eine ganze rationale Funktion von ξ vom Grade m. Die Geichung

$$G(\xi, x) = 0$$

hat offenbar die Wurzeln $\xi = R_1, R_2, \ldots R_m$. Es ist die Gleichung, der die Funktion $R(x, y)$ genügt. Es sei z. B.

$$f(x, y) \quad y^2 - xy + 1 = 0\,, \quad R = \frac{x+y}{x-y}\,.$$

Es ist dann

$$y_1 + y_2 = x\,, \quad y_1 y_2 = 1$$

und es wird

$$G(\xi, x) = \left(\xi - \frac{x+y_1}{x-y_1}\right)\xi - \left(\xi - \frac{x+y_2}{x-y_2}\right)$$

$$= \xi^2 - \frac{(x+y_1)(x-y_2) + (x-y_1)(x+y_2)}{(x-y_1)(x-y_2)}\,\xi + \frac{(x+y_1)(x+y_2)}{(x-y_1)(x-y_2)}$$

$$= \xi^2 - \frac{2(x^2 - y_1 y_2)}{x^2 - (y_1+y_2)x + y_1 y_2}\,\xi + \frac{x^2 + (y_1+y_2)x + y_1 y_2}{x^2 - (y_1+y_2)x + y_1 y_2}$$

$$= \xi^2 - 2(x^2 - 1)\,\xi + 2x^2 + 1\,.$$

Dem Leser sei empfohlen, die Beispiele des nächsten Kapitels in derselben Weise zu behandeln.

Die Koeffizienten in $G(\xi)$ sind ganze rationale Funktionen der R_k, können also nur unendlich werden, wenn eine oder mehrere der Funktionen R_k unendlich wird. Weiß man also von einer Funktion R des Körpers, daß sie nirgends unendlich wird, so können in der Gleichung $G(\xi) = 0$ die Koeffizienten nicht unendlich werden, müssen also, da es rationale Funktionen von x sind, konstant sein. Dann aber wird R als Wurzel der Gleichung $G(\xi) = 0$ auch konstant.

Satz II. Eine Funktion des Körpers, die nirgends unendlich wird, ist eine Konstante.

Die Gleichung $G(\xi, x) = 0$ kann rational zerfallen. Es sei etwa:

$$G(\xi, x) = G_1(\xi, x)\, G_2(\xi, x) \ldots G_p(\xi, x),$$

wo die $G_k(\xi, x)$ rationale Funktionen von ξ, x sein sollen, und zwar ganz in ξ. Wir setzen die Faktoren $G_k(\xi, x)$ als rational unzerlegbar voraus. Den Koeffizienten der höchsten Potenz von ξ nehmen wir in allen Faktoren gleich 1 an. Die Gleichung $G_1(\xi, x) = 0$ muß mindestens eine der Funktionen R_k als Wurzel haben, etwa R_1. Es ist dann identisch

$$G_1(R_1, x) = G_1[R(x, y_1), x] = 0\,.$$

Diese Gleichung bleibt richtig bei analytischer Fortsetzung. Dadurch können wir aber y_1 in jede der konjugierten Funktionen $y_2, y_3, \ldots y_m$ überführen. Es ist also ganz allgemein für $k = 1, 2, \ldots m$

$$G_1[R(x_1 y_k), x] = G_1(R_k, x) = 0\,.$$

Es sind also alle m Funktionen R_k Wurzeln von $G_1(\xi, x) = 0$. Der Grad von $G_1(\xi, x)$ in ξ sei q. Wenn dann $q < m$, so können die R_k nicht alle voneinander verschieden sein, sondern nur q. So viele müssen aber auch verschieden sein, da $G_1(\xi, x) = 0$ rational unzerlegbar sein soll, also keine mehrfachen Wurzeln haben kann. Es seien $R_1, R_2, \ldots R_q$ voneinander verschieden. Setzen wir

$$g(\xi, x) = (\xi - R_1)(\xi - R_2)\ldots(\xi - R_q)\,,$$

so ist

$$G_1(\xi, x) = g(\xi, x)\,,$$

woraus folgt, daß $g(\xi, x)$ in x rational ist, da es ja nach Voraussetzung $G_1(\xi, x)$ ist.

Genau dieselben Schlüsse gelten für die anderen Faktoren $G_k(\xi, x)$. Es sind daher alle p Faktoren G_k gleich $g(\xi, x)$ und es wird

$$G(x, \xi) = [g(x, \xi)]^p\,.$$

Hieraus folgt

$$m = p \cdot q$$

und, daß die m Funktionen R_k, wenn sie nicht alle voneinander verschieden sind, in q Gruppen von je p einander gleichen zerfallen.

Wir haben also

Satz III. Jede Funktion $R(x, y) = R(x, y_1)$ des Körpers $(x\,y)$ genügt mit ihren konjugierten einer Gleichung $G(\xi, x) = 0$ m-ten Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind. Die Funktion $G(\xi, x)$ ist entweder rational unzerlegbar oder sie ist die Potenz, etwa die p-te, einer unzerlegbaren Funktion $g(\xi, x)$, die in ξ ganz ist und die vom Grade q in ξ sei. Es ist dann $m = p \cdot q$ und die m konjugierten Funktionen $R(x, y_1), R(x, y_2), \ldots R(x, y_m)$ zerfallen in q Gruppen von je p einander gleichen.

§ 3. Verhalten der Funktionen des Körpers in der Umgebung eines Punktes der Riemannschen Fläche.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Punkt der Riemannschen Fläche, und zwar ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$. Ist $\alpha = 1$, so ist $\mathfrak{p}$ ein gewöhnlicher Punkt der Fläche. x habe in ihm den Wert a. Es läßt sich dann y in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ als Potenzreihe darstellen, die nach ganzen steigenden Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet. Wenn $a = \infty$, so ist unter $x - a$ zu verstehen $\frac{1}{x}$. Setzen wir die Reihenentwicklung von y in eine Funktion $R(x, y)$ des Körpers ein, so erhalten wir auch für R eine nach ganzen steigenden Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitende Reihe. Diese kann auch nur eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthalten. Ist die niedrigste Potenz von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$, die in ihr vorkommt, die r-te, so ist für die Umgebung von $\mathfrak{p}$

$$(1) \qquad R(x, y) = (x - a)^{\frac{r}{\alpha}} \, E\left[(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}\right],$$

wo E eine gewöhnliche Potenzreihe von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ ist, die für $x = a$ nicht verschwindet, wo also E eine Einheit für die Stelle $x = a$ ist.

Die Funktionen des Körpers $(x\, y)$ verhalten sich also in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{p}$ der Riemannschen Fläche wie y. Es kann eintreten, daß sich eine Funktion in gewissem Sinne einfacher verhält als y. Die Reihenentwicklung für eine Funktion R kann nämlich unter Umständen nur solche Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ enthalten, deren Exponenten alle mit α denselben gemeinsamen Teiler δ haben. Ist $\alpha = \delta_{\prime}\beta$, so läßt sich die Entwicklung von R auch als Potenzreihe schreiben, die nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\beta}}$ fortschreitet. Nehmen wir z. B. den durch die Gleichung (2), Kap. III, § 3, S. 37 definierten Körper. Die zugehörige Riemannsche Fläche hat nur eine unendlich ferne Stelle und dort ist y in die nach ganzen Potenzen von $x^{-\frac{1}{6}}$ fortschreitende Reihe entwickelbar, die auf Seite 39 angegeben ist. Die Funktion

$$R = \frac{y^3 + 3(x - 1)\,y - x}{3\,y^2 + x - 1}$$

ergibt aber, wenn man die Reihe für y einsetzt, eine Entwicklung, die nur solche Potenzen von $x^{-\frac{1}{6}}$ enthält, deren Exponenten durch 3 teilbar sind, so daß R sich in eine nach ganzen Potenzen von $x^{-\frac{1}{2}}$ fortschreitende Reihe entwickeln läßt für die Umgebung des unendlich fernen Punktes. Am einfachsten sieht man das daran, daß unter Benutzung der zwischen x und y bestehenden Gleichung R übergeführt werden kann in $\sqrt{x - 1}$. Hieraus ersieht man ferner, daß sich R in der Umgebung der beiden Verzweigungspunkte zweiter Ordnung, die bei $x = 0$ liegen, in eine Reihe entwickeln läßt, die nur ganze Potenzen von x enthält.

Das einfachste Beispiel sind die rationalen Funktionen von x, die ja dem Körper angehören, und sich überall nach ganzen Potenzen entwickeln lassen.

Wir haben also den

Satz IV. Jede Funktion R des Körpers läßt sich für die Umgebung eines α-fachen Verzweigungspunktes der über der

x-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche, in dem x den Wert a hat, in der Form darstellen

$$R = (x-a)^{\frac{r}{\alpha}}\, E\left[(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}\right],$$

wo E eine gewöhnliche Potenzreihe von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ ist, die für $x = a$ nicht verschwindet, und wo r eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist ($x - a = x^{-1}$, wenn $a = \infty$).

§ 4. Null- und Unendlichkeitsstellen.

Hat eine Funktion R in der Umgebung des α-fachen Verzweigungspunktes $\mathfrak{p}$, wo $x = a$ sei, die Darstellung (1), so sagen wir, sie wird in $\mathfrak{p}$ von der Ordnung r Null, wenn $r > 0$, und sie wird von der Ordnung $-r$ unendlich, wenn $r < 0$ oder sie ist in $\mathfrak{p}$ von der Ordnung r oder hat die Ordnungszahl r. Wir werden später Kap. VIII, § 7 sehen, daß es für jede Stelle Funktionen des Körpers gibt, die dort von der ersten Ordnung sind. Eine solche Funktion, die in $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung Null wird, sei t. Es ist dann in der Umgebung von $\mathfrak{p}$

$$t = e_1\,(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + e_2\,(x-a)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots,$$

wo $e_1 \neq 0$. Dann aber kann man nach einem Satze der Funktionentheorie aus dieser Gleichung umgekehrt $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ als Potenzreihe von t ausrechnen und erhält

$$(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} = c_1\,t + c_2\,t^2 + c_3\,t^3 + \cdots, \tag{2}$$

wo $c_1 = \dfrac{1}{e_1} \neq 0$. Haben wir eine Funktion R des Körpers in eine nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitende Reihe entwickelt, so können wir diese Entwicklung mit Hilfe von (2) verwandeln in eine nach ganzen Potenzen von t fortschreitende Entwicklung. Hat die Entwicklung von R nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ die Gestalt (1), so wird die Entwicklung nach Potenzen von t so aussehen

$$R\,(x, y) = t^r\, e\,(t), \tag{3}$$

wo $e\,(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist, die für $t = 0$ nicht verschwindet, also eine Einheit ist für $t = 0$. Der Exponent r ist in beiden Gleichungen (1) und (3) derselbe. Ist also t irgendeine Funktion des Körpers, die an einer Stelle $\mathfrak{p}$ der Riemannschen Fläche von der ersten Ordnung Null wird, so läßt sich jede Funktion des Körpers in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ darstellen als eine nach ganzen steigenden Potenzen von t fortschreitende Reihe. Hat diese Darstellung für eine Funktion R die Form $R = t^r\,e\,(t)$, wo $e(t)$ eine Einheit für $t = 0$ ist, so sagen wir in Übereinstimmung mit der oben gegebenen Definition: R wird an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der Ordnung r Null oder von der Ordnung $-r$ unendlich. Ist $r < 0$, wird also R an der Stelle $\mathfrak{p}$ unendlich, und setzen wir $r = -s$, $e(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + \cdots$, so wird

$$R(x, y) = \frac{e_0}{t^s} + \frac{e_1}{t^{s-1}} + \cdots + \frac{e_{s-1}}{t} + e_s + e_{s+1} t + \cdots.$$

Die Reihe enthält also nur eine endliche Zahl von negativen Potenzen und R wird unendlich wie eine rationale Funktion von t. Solche Unendlichkeitsstellen nennt man aber Pole. Die Funktion R ist in der Umgebung jeder Stelle $\mathfrak{p}$, wo $r > 0$, in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar nach Potenzen einer Funktion des Körpers, die in $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung ist. Die Funktionen des Körpers haben also als einzige singuläre Stellen Pole und haben wesentlich singuläre Stellen überhaupt nicht. Hieraus schon kann man ersehen, daß eine Funktion des Körpers nur eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen haben kann. Hätte sie nämlich unendlich viele, so würden sie eine Häufungsstelle haben, und diese müßte eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion sein. Wir können aber auch so schließen. Jede Funktion R des Körpers genügt einer Gleichung, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von x sind. Ist der Koeffizient der höchsten Potenz von R in dieser Gleichung gleich $a(x)$, so kann R nur unendlich werden für die Nullstellen von $a(x)$ und für unendlich großes x, also nur für eine endliche Zahl von Stellen.

§ 5. Residuen.

Sind ξ und η zwei Funktionen des Körpers (xy), so läßt sich das Differential $\eta\, d\xi$ in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{p}$ in der Form darstellen

(4) $$\eta\, d\xi = P(t)\, dt,$$

wo t in $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung Null wird und wo $P(t)$ eine nach steigenden von t fortschreitende Potenzreihe ist, die höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthält. Kommt in $P(t)$ die (-1)te Potenz von t vor, so heißt der Faktor dieser Potenz das Residuum des Differentials $\eta\, d\xi$ für die Stelle $\mathfrak{p}$.

Wir beweisen zunächst, daß das Residuum unabhängig von der Wahl von t ist. Es sei

(5) $$P(t) = p_{-\lambda} t^{-\lambda} + \cdots + p_{-1} t^{-1} + p_0 + \cdots = \sum_{k=-\lambda}^{\infty} p_k t^k.$$

Es sei ferner τ eine zweite Funktion des Körpers, die an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung Null wird. Dann muß zwischen t und τ eine Gleichung bestehen von der Form

(6) $$t = \tau\, e(\tau),$$

wo $e(\tau)$ eine Einheit für die Stelle $\tau = 0$ ist. Da $e(\tau)$ für $\tau = 0$ nicht Null wird, so läßt sich $\log e(\tau)$ als gewöhnliche Potenzreihe von τ darstellen, die mit $h_{-1}(\tau)$ bezeichnet sei. Aus (6) folgt

$$\log t = \log \tau + \log e(\tau) = \log \tau + h_{-1}(\tau)$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau} + h'_{-1}(\tau)\, d\tau\,. \tag{7}$$

Da $e(\tau)$ eine Einheit ist, so sind alle positiven und negativen ganzzahligen Potenzen von $e(\tau)$ auch Einheiten. Es sei $e^k(\tau)$ mit $e_k(\tau)$ bezeichnet. Aus (6) folgt für $k \neq -1$

$$\frac{1}{k+1}\, t^{k+1} = \frac{1}{k+1}\, \tau^{k+1}\, e_{k+1}(\tau) = h_k(\tau)\,,$$

wo $h_k(\tau)$ eine Potenzreihe von τ ist, die höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthält. Durch Differentiation folgt

$$t^k\, dt = h'_k(\tau)\, d\tau\,. \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (4), (5), (7), (8) folgt

$$\eta\, d\xi = P(t)\, dt = \left| p_{-1}\, \tau^{-1} + \sum_{k=-\lambda}^{+\infty} p_k\, h'_k(\tau) \right| d\tau\,.$$

Bedenkt man, daß die Ableitung einer Potenzreihe von τ nach τ nie die (-1)-te Potenz von τ enthält, so folgt hieraus, daß der Koeffizient von τ^{-1} gleich dem von t^{-1} gleich p_{-1} ist, daß also das Residuum unabhängig ist von der Wahl von t. Wesentlich für den Beweis ist das Bestehen der Gleichung (6). Es ist also nicht notwendig, daß τ eine Funktion des Körpers ist. Man kann im besonderen auch τ oder t gleich $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ wählen.

Da jede Funktion des Körpers $(x\,y)$ nur eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen hat, so hat auch jedes Differential nur eine endliche Zahl von Residuen. Es gilt der wichtige

Satz V. Die Summe der Residuen eines Differentials des Körpers $(x\,y)$ ist Null.

Wir beweisen den Satz erst für den Körper der rationalen Funktionen von x. Sind ξ und η rationale Funktionen von x, so läßt sich das Differential $\eta\, d\xi$ darstellen in der Form

$$\eta\, d\xi = \eta \frac{d\xi}{dx}\, dx = r(x)\, dx\,,$$

wo $r(x)$ eine rationale Funktion von x ist. Wir betrachten die Funktion r in der Umgebung der Stelle $x = a$. Ist a endlich, so ist $x - a$, ist x unendlich, so ist x^{-1} eine Funktion erster Ordnung. Es sei a zunächst endlich.

Dann können wir setzen $x - a = t$. Es wird $dx = dt$, und wenn in der Umgebung von a

$$r(x) = r_\mu (x-a)^{-\mu} + r_{(\mu-1)} (x-a)^{-\mu+1} + \cdots + r_1 (x-a)^{-1} + r_0 \\ + r_{-1} (x-a) + \cdots,$$

so wird

$$\eta\, d\xi = r(x)\, dx = (r_\mu t^{-\mu} + \cdots + r_1 t^{-1} + \cdots)\, dt\,.$$

Daher ist das Residuum von $\eta\, d\xi$ für die Stelle a, wenn a endlich, gleich dem Faktor von $(x-a)^{-1}$ in der Entwicklung von $r(x)$ nach steigenden Potenzen von $x - a$. Es sei zweitens a unendlich. Dann können wir setzen $x = t^{-1}$, $dx = -t^{-2} dt$. Wenn in der Umgebung von $x = \infty$

$$r(x) = r_\nu x^\nu + r_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + r_0 + r_{-1} x^{-1} + r_{-2} x^{-2} + \cdots,$$

so ist dort

$$\eta\, d\xi = r(x)\, dx = -(r_\nu t^{-\nu-2} + r_{\nu-1} t^{-\nu-1} + \cdots + r_0 t^{-2} + r_{-1} t^{-1} \\ + r_{-2} + \cdots)\, dt\,.$$

Das Residuum von $\eta\, d\xi$ ist also für die Stelle ∞ gleich $-r_{-1}$, also gleich dem negativen Faktor von x^{-1} in der Entwicklung $r(x)$ nach fallenden Potenzen von x.

Die Funktion $r(x)$ läßt sich wie jede rationale Funktion in Partialbrüche zerlegen, also in der Form darstellen

$$\begin{aligned} r(x) = G(x) &+ \frac{A_\lambda}{(x-a)^\lambda} + \frac{A_{\lambda-1}}{(x-a)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} \\ &+ \frac{B_\mu}{(x-b)^\mu} + \frac{B_{\mu-1}}{(x-b)^{\mu-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} \\ &+ \frac{C_\nu}{(x-c)^\nu} + \frac{C_{\nu-1}}{(x-c)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{C_1}{x-c}, \end{aligned}$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist, wenn wir annehmen, daß $r(x)$ im Endlichen die drei Unendlichkeitsstellen a, b, c von den Ordnungen λ, μ, ν hat. Die Residuen an diesen Stellen sind A_1, B_1, C_1, ihre Summe $A_1 + B_1 + C_1$. Um das Residuum für $x = \infty$ zu bestimmen, haben wir den Faktor von x^{-1} in der Entwicklung von $r(x)$ nach steigenden Potenzen von x^{-1} aufzusuchen. Die Glieder $(x-a)^{-k}$, $(x-b)^{-k}$, $(x-c)^{-k}$ liefern, da sie für unendlich großes x von der Ordnung k Null werden, nur solche Potenzen von x^{-1}, deren Exponent gleich oder größer ist als k. Daher liefern nur die Summanden $A_1 (x-a)^{-1}$, $B_1 (x-b)^{-1}$, $C_1 (x-c)^{-1}$ Glieder mit dem Faktor x^{-1}, und zwar die Glieder $A_1 x^{-1}$, $B_1 x^{-1}$, $C_1 x^{-1}$, so daß der Faktor von x^{-1} gleich $A_1 + B_1 + C_1$ ist und das Residuum gleich $-(A_1 + B_1 + C_1)$. Die Summe aller Residuen ist also $A_1 + B_1 + C_1 - (A_1 + B_1 + C_1) = 0$.

Wir beweisen den Satz über die Summe der Residuen eines Differentials des Körpers (xy), indem wir ihn zurückführen auf den eben bewiesenen Satz. Mit Hilfe der Gleichung $f(x, y) = 0$ können wir schreiben

$$(9)\qquad \eta\, d\xi = \eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}\, dy\right) = \eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right) dx = R(x, y)\, dx\,,$$

wo $R(x, y)$ eine rationale Funktion von x, y ist. Wir bezeichnen die konjugierten Funktionen von R mit $R_1, R_2, \ldots R_m$ und die Spur $R_1 + R_2 + \cdots + R_m$ von R mit $r(x)$. Es ist r eine rationale Funktion von x. Wir werden zeigen, daß die Summe der Residuen, die $\eta\, d\xi = R(x, y)\, dx$ an denjenigen Stellen der Riemannschen Fläche hat, wo $x = a$, gleich ist dem Residuum von $r(x)\, dx$ für $x = a$, und zwar gleichgültig, ob a endlich ist oder nicht. Haben wir das bewiesen, so folgt, daß die Summe der Residuen von $\eta\, d\xi$ gleich ist der Summe der Residuen von $r(x)\, dx$, also nach dem eben bewiesenen Satze gleich Null.

Es sei zunächst a endlich. Es mögen etwa bei $x = a$ zwei Punkte der Riemannschen Fläche liegen, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Sie seien ein α-facher und ein β-facher Windungspunkt. Der Fall α oder β gleich 1 soll nicht ausgeschlossen sein. In der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$ sei

$$\begin{aligned} R(x, y) &= A_\lambda (x-a)^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + A_{\lambda-1}(x-a)^{-\frac{\lambda-1}{\alpha}} + \cdots + A_\alpha (x-a)^{-1} \\ (10)\qquad &+ A_{\alpha-1}(x-a)^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \cdots = \sum_{k=-\lambda}^{+\infty} A_{-k}(x-a)^{\frac{k}{\alpha}}\,. \end{aligned}$$

Setzen wir in $R\, dx$

$$x - a = t^\alpha,\ \ dx = \alpha t^{\alpha-1}\, dt\,,$$

so wird nach dem oben (S. 56) Bewiesenen das Residuum von $R\, dx$ gleich dem Faktor von t^{-1}, also gleich αA_α, d. h. gleich dem mit α multiplizierten Koeffizienten von $(x-a)^{-1}$ in der Entwicklung von R in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$.

Ebenso ist das Residuum von $\eta\, d\xi$ für die Stelle $\mathfrak{p}_2$ gleich dem mit β multiplizierten Koeffizienten — er sei mit B_β bezeichnet — von $(x-a)^{-1}$ in der Entwicklung von $R(x, y)$ in der Umgebung von $\mathfrak{p}_2$. Die beiden bei $x = a$ liegenden Stellen liefern daher zur Summe der Residuen von $\eta\, d\xi$ den Beitrag

$$(11)\qquad \alpha A_\alpha + \beta B_\beta\,.$$

Wir bestimmen jetzt das Residuum von $r(x)\, dx$ an der Stelle a. Bei passender Wahl der Bezeichnung sind in der Umgebung von $x = a$ die Funktionen $R_1, R_2, \ldots R_\alpha$ gegeben durch die Reihe (10) und die $\alpha - 1$ zu ihr adjungierten, die aus ihr dadurch hervorgehen, daß man x den Punkt a ein oder mehrere Male umkreisen läßt. Die α Entwicklungen stimmen also in den Gliedern überein, die ganzzahlige Potenzen von $x - a$ enthalten, so daß in allen der Faktor von $(x-a)^{-1}$ gleich A_α ist.

In der Entwicklung der Summe $R_1 + R_2 + \cdots + R_\alpha$ der ersten α Funktionen R_ν hat daher $(x - a)^{-1}$ den Faktor αA_α. Ebenso folgt, daß in der Entwicklung der Summe $R_{\alpha+1} + R_{\alpha+2} + \cdots + R_{\alpha+\beta}$ der β letzten R_ν der Faktor von $(x - a)^{-1}$ gleich βB_β ist. Also ist das Residuum von $r\,dx = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)\,dx$ an der Stelle a gleich $\alpha A_\alpha + \beta B_\beta$, was mit (11) übereinstimmt. Dies alles gilt, solange a endlich ist.

Wir betrachten jetzt das Differential $\eta\,d\xi$ in der Umgebung von $x = \infty$. Dort mögen auch wieder zwei Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ der Riemannschen Fläche liegen, die Verzweigungspunkte der Ordnung $\alpha - 1$ und $\beta - 1$ seien. In der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$ möge sein

$$R(x, y) = A_\lambda x^{\frac{\lambda}{\alpha}} + A_{\lambda-1} x^{\frac{\lambda-1}{\alpha}} + \cdots + A_{-\alpha} x^{-1} + A_{-\alpha-1} x^{\frac{-\alpha+1}{\alpha}} + \cdots$$

$$(12) \qquad = \sum_{k=\lambda}^{-\infty} A_k x^{\frac{k}{\alpha}}.$$

Setzen wir in $R\,dx$

$$x = t^{-\alpha}, \quad dx = -\alpha t^{-\alpha-1}\,dt,$$

so wird wieder das Residuum von $R\,dx$ gleich dem Faktor von t^{-1}, also gleich $-\alpha A_{-\alpha}$, d. h. gleich dem mit $-\alpha$ multiplizierten Koeffizienten von x^{-1} in der Entwicklung von $R(x, y)$ in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$.

Ebenso ist das Residuum von $\eta\,d\xi$ für die Stelle $\mathfrak{p}_2$ gleich dem mit $-\beta$ multiplizierten Koeffizienten von x^{-1} — er heiße $B_{-\beta}$ — in der Entwicklung von $R(x, y)$ in der Umgebung von $\mathfrak{p}_2$. Die beiden bei $x = \infty$ liegenden Stellen liefern also zu der Summe der Residuen von $\eta\,d\xi$ den Beitrag

$$(13) \qquad -(\alpha A_{-\alpha} + \beta B_{-\beta}).$$

Wir bestimmen weiter das Residuum von $r(x)\,dx$ für $x = \infty$. Unter den m konjugierten Funktionen R_k sind α, deren Entwicklungen nach Potenzen von x^{-1} in der Umgebung von $x = \infty$ gegeben sind durch (12) und die dazu adjungierten Entwicklungen; in diesen haben die ganzzahligen Potenzen von x denselben Faktor, so daß im besonderen x^{-1} in diesen α Entwicklungen den Koeffizienten $A_{-\alpha}$ hat. Die α in Rede stehenden Funktionen R_k liefern daher zu dem Koeffizienten von x^{-1} in der Entwicklung von $r(x) = R_1 + R_2 + \cdots + R_m$ den Beitrag $\alpha A_{-\alpha}$. Ebenso zeigt man, daß die β anderen Funktionen R_h zu dem Faktor von x^{-1} in der Entwicklung von $r(x)$ den Beitrag $\beta B_{-\beta}$ liefern. Das Residuum von $r(x)\,dx$ für $x = \infty$ ist daher $-(\alpha A_{-\alpha} + \beta B_{-\beta})$, was mit (13) übereinstimmt. Damit ist der Satz V bewiesen.

Nebenbei haben wir folgendes Ergebnis erhalten, das wir aussprechen in

Satz VI. *Schreiben wir das Differential $\eta\,d\xi$ des Körpers (xy) in der Form $R(x, y)\,dx$, so ist sein Residuum an einer Stelle $\mathfrak{p}$, wo x den Wert a hat und die eine α-fache Verzwei-*

gungsstelle in bezug auf x ist, gleich dem mit $+\alpha$ multiplizierten Koeffizienten von $(x-a)^{-1}$ in der für die Umgebung von $\mathfrak{p}$ geltenden Reihenentwicklung, wenn a endlich ist, und gleich dem mit $-\alpha$ multiplizierten Koeffizienten von x^{-1}, wenn a unendlich ist.

§ 6. Ordnung einer Funktion.

Es sei R irgendeine Funktion des Körpers (xy). Wir wenden den Satz V an auf das Differential dR/R. Es sei t wieder eine Funktion aus (xy), die an einer Stelle $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung Null wird. Es sei ferner für die Umgebung von $\mathfrak{p}$

(14) $$R = t^{\lambda}\, E(t)\,,$$

wo $E(t)$ eine Einheit für $t = 0$ sei, Es sei also λ die Ordnungszahl von R an der Stelle $\mathfrak{p}$, so daß R dort von der Ordnung λ Null wird ($\lambda > 0$) oder von der Ordnung $-\lambda$ unendlich ($\lambda < 0$) oder weder Null noch unendlich wird ($\lambda = 0$). Aus (14) folgt

$$\log R = \lambda \log t + \log E(t) = \lambda \log t + P(t)\,,$$

wo $P(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist. Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{dR}{R} = \left|\frac{\lambda}{t} + P'(t)\right| dt\,.$$

Da $P'(t)$ als Ableitung einer Potenzreihe nicht die (-1)-te Potenz von t enthält, so ist das Residuum von dR/R für die Stelle $\mathfrak{p}$ gleich λ, also gleich der Ordnung von R in $\mathfrak{p}$. Wenden wir den Satz V an, so folgt, daß die Summe aller Ordnungszahlen einer Funktion des Körpers (xy) gleich Null ist, oder daß die Summe der positiven Ordnungszahlen gleich der der negativen ist. Rechnen wir jede Null- und Unendlichkeitstelle so oft, wie ihre Ordnung angibt, so können wir auch sagen, jede Funktion R des Körpers wird geradeso oft Null wie unendlich. Ist C irgendeine Konstante, so hat die Funktion $R - C$ dieselben Unendlichkeitsstellen wie R; sie wird also geradeso oft Null wie R, d. h. die Funktion R nimmt den Wert C geradeso oft an wie den Wert Unendlich. Da C eine beliebige Konstante ist, so haben wir den

Satz VII. Eine Funktion des Körpers (xy) nimmt jeden Wert gleich oft an. Die Zahl, die angibt, wie oft eine Funktion jeden Wert annimmt, heißt ihre Ordnung.

Im besonderen folgt hieraus, daß eine Funktion des Körpers, die irgend einen Wert, z. B. Null oder Unendlich, nicht annimmt, nur eine Konstante sein kann.

§7. Charakteristische Eigenschaften einer algebraischen Funktion.

Wir beweisen noch den

Satz VIII. Eine m-deutige analytische Funktion R von x, die nur Pole hat, ist eine algebraische Funktion von x. Ist ferner R eindeutig auf der Riemannschen Fläche, auf der y eindeutig ist, und hat sie nur Pole, so ist R eine rationale Funktion von x und y.

Zunächst folgt aus der Voraussetzung, daß R nur eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen haben kann. Hätte sie unendlich viele, so hätten diese eine Häufungsstelle und diese müßte ein wesentlich singulärer Punkt sein. Sind $R_1, R_2, \ldots R_m$ die m Zweige der Funktion R, so vertauschen sich diese nur untereinander, wenn x einen geschlossenen Weg durchläuft. Es ist also jede rationale symmetrische Funktion von $R_1, R_2, \ldots R_m$ eine eindeutige Funktion von x, die auch nur Pole haben kann und die daher eine rationale Funktion von x ist. Daher ist

$$(\xi - R_1)(\xi - R_2) \ldots (\xi - R_m) = G(\xi, x)$$

eine rationale Funktion von x. Es genügt also R einer algebraischen Gleichung $G(\xi, x) = 0$ und ist eine algebraische Funktion.

Ist ferner R eindeutig auf der Riemannschen Fläche, auf der y eindeutig ist, so können wir die m Zweige von R den m konjugierten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ zuordnen, so daß für $y = y_\alpha$ auch $R = R_\alpha$ ist. Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung, der y genügt, und bezeichnen wir mit $f_2'(y)$ die Ableitung von f nach y, so haben wir nach der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$R(x, y) = f(x, y)\left[\frac{R_1}{(y - y_1) f_2'(y_1)} + \frac{R_2}{(y - y_2) f_2'(y_2)} + \cdots + \frac{R_m}{(y - y_m) f_2'(y_m)}\right].$$

Bedenkt man, daß $f(x, y) = a_0(x)(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_m)$, so sieht man, daß in dieser Gleichung rechts eine ganze rationale Funktion von y höchstens vom Grade $m - 1$ steht. Ferner ist die rechtsstehende Funktion symmetrisch von $y_1, y_2, \ldots y_m$ abhängig und also eine rationale Funktion von x. Es läßt sich also unsere Funktion R als rationale Funktion von x. y darstellen. Wir finden nebenbei noch den

Satz IX. Jede Funktion des Körpers (xy) läßt sich darstellen als ganze rationale Funktion von y, deren Grad höchstens gleich $m - 1$ ist und deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind.

Fünftes Kapitel.

Birationale Transformationen.

§ 1. Definition der birationalen Transformation.

Wir haben bisher bei unseren Betrachtungen eine Größe des Körpers bevorzugt, nämlich die Größe x, die wir als unabhängige Veränderliche genommen haben. Wir wollen jetzt zeigen, daß man jede nicht konstante Größe des Körpers (xy) als unabhängige Veränderliche wählen kann. Es sei $\xi = R(x, y)$ eine nicht konstante Größe des Körpers (xy). Ist η irgendeine andere Größe des Körpers, so besteht zwischen ξ und η eine algebraische Gleichung; die Gesamtheit der rationalen Funktionen von ξ, η ist also ein algebraischer Körper $(\xi\eta)$. Da wir ξ und η als Funktionen des Körpers (xy) annehmen, so sind ξ und η rational durch x, y darstellbar, und dasselbe gilt also von jeder rationalen Funktion von ξ, η. Es ist also jede Funktion des Körpers $(\xi\eta)$ gleichzeitig eine Funktion des Körpers (xy): Der Körper $(\xi\eta)$ ist in dem Körper (xy) enthalten. Aber es kann bei beliebiger Wahl von η sehr wohl eintreten, daß nicht umgekehrt auch jede Funktion aus (xy) in $(\xi\eta)$ enthalten ist. Wir werden aber zeigen, daß man zu jeder Funktion ξ, die nicht konstant ist, eine Funktion η so finden kann, daß auch jede rationale Funktion von x, y eine rationale Funktion von ξ, η wird. Es werden dann die Körper (xy) und $(\xi\eta)$ identisch. Man nennt in diesem Falle den Übergang von den veränderlichen x, y zu den neuen ξ, η eine birationale Transformation.

Wie wir in § 2 des vorigen Kapitels gesehen haben, genügt ξ einer unzerlegbaren Gleichung $g(x, \xi) = 0$, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind und deren Grad q ein Teiler von m oder m ist. Sie sei in x vom Grade e. Wir erhalten diese Gleichung dadurch, daß wir aus den beiden Gleichungen

$$(1) \qquad R(x, y) - \xi = 0, \qquad f(x, y) = 0$$

die Größe y eliminieren. Dies kann dadurch geschehen, daß wir die beiden Funktionen $R(x, y) - \xi$ und $f(x, y)$ als ganze rationale Funktionen von y allein betrachten und ihren größten gemeinsamen Teiler aufsuchen und den letzten (von y unabhängigen) Rest gleich Null setzen.

§ 2. Beispiel 1.

Es sei

$$(2) \qquad f(x,y) = y^3 - x = 0; \qquad \xi = x^2 + y^2 = R(x,y).$$

$$\begin{array}{l}
y^3 - x : y^2 + x^2 - \xi = y \\
\underline{y^3 + (x^2 - \xi)\,y} \\
\quad - (x^2 - \xi)\,y - x \\[1ex]
y^2 + x^2 - \xi : (x^2 - \xi)\,y + x = \dfrac{y}{x^2 - \xi} - \dfrac{x}{(x^2 - \xi)^2} \\[1ex]
\underline{y^2 + \dfrac{x\,y}{x^2 - \xi}} \\
\quad - \dfrac{x\,y}{x^2 - \xi} + x^2 - \xi \\
\quad \underline{- \dfrac{x\,y}{x^2 - \xi} - \dfrac{x^2}{(x^2 - \xi)^2}} \\
\qquad\qquad\quad \dfrac{x^2}{(x^2 - \xi)^2} + x^2 - \xi
\end{array}$$

Sollen also die beiden Gleichungen $f = 0$ und $R = \xi$ in diesem Falle gleichzeitig bestehen, so muß

$$\frac{x^2}{(x^2 - \xi)^2} + x^2 - \xi = 0$$

sein. Die Gleichung $g(x, \xi) = 0$ lautet also

$$g(x, \xi) = (x^2 - \xi)^3 + x^2 = 0\,.$$

Die Gleichung ist in ξ vom dritten Grade und sie ist unzerlegbar. Es sind also die drei konjugierten Werte von ξ voneinander verschieden. Das können wir hier leicht bestätigen. Es ist nämlich $\xi = x^2 + y^2 = x^2 + \sqrt[3]{x^2}$ und die drei konjugierten Werte von ξ sind $x^2 + \sqrt[3]{x^2}$, $x^2 + \varepsilon\sqrt[3]{x^2}$, $x^2 + \varepsilon^2\sqrt[3]{x^2}$, wo ε eine primitive dritte Einheitswurzel ist.

Aus der Rechnung ergibt sich, daß für $g(x, \xi) = 0$ folgende Gleichungen bestehen:

$$y^2 + x^2 - \xi = [(x^2 - \xi)\,y + x]\left[\frac{y}{x^2 - \xi} - \frac{x}{(x^2 - \xi)^2}\right],$$

$$\begin{aligned}
y^3 - x &= [y^2 + x^2 - \xi]\,y - [(x^2 - \xi)\,y + x] \\
&= [(x^2 - \xi)\,y + x]\left[\frac{y^2}{x^2 - \xi} - \frac{x\,y}{(x^2 - \xi)^2} - 1\right].
\end{aligned}$$

Es haben also $y^3 - x$ und $y^2 + x^2 - \xi$ für $g(x, \xi) = 0$ den gemeinsamen Teiler $(x^2 - \xi)\,y + x$. Die Gleichungen (2) können also gleichzeitig nur bestehen, wenn $g(x, \xi) = 0$ und wenn $(x^2 - \xi)\,y + x = 0$, und sie sind andererseits erfüllt, wenn diese beiden Gleichungen bestehen. Es ergibt sich aber aus $(x^2 - \xi)\,y + x = 0$ die Größe y als rationale Funktion von x und ξ.

$$y = \frac{x}{\xi - x^2}\,.$$

Wählen wir also als Größe η die Größe x, so haben wir die Transformationsformeln

$$(3) \qquad \xi = x^2 + y^2\,, \qquad \eta = x\,,$$

aus denen sich umgekehrt, wie eben bewiesen, ergibt

$$(4) \qquad x = \eta\,, \qquad y = \frac{\eta}{\xi - \eta^2}\,,$$

so daß der Körper $(x\,y)$ mit dem Körper $(\xi\,\eta)$ identisch ist. Zwischen x, y besteht die Gleichung $f(x, y) = y^3 - x = 0$ und zwischen ξ, η die Gleichung $g(\eta, \xi) = (\eta^2 - \xi)^3 + \eta^2 = 0$. Es ergibt sich aus dem Vorhergehenden, daß aus den Gleichungen (3) die Gleichungen (4) nur folgen, wenn $f(x, y) = 0$ angenommen wird, und daß auch (3) aus (4) nur folgt für $g(\eta, \xi) = 0$, aber es sei doch ausdrücklich darauf hingewiesen.

Daß wir hier so einfach zum Ziele gelangen, daß wir nämlich als η einfach x wählen können, liegt daran, daß die Gleichungen (1), nämlich $f(x, y) = 0$ und $R(x, y) - \xi = 0$ unter der Voraussetzung $g(x, \xi) = 0$ und aufgefaßt als Gleichungen für y, nur eine gemeinsame Wurzel haben. Jedesmal, wenn dies eintritt, und nur dann ist der größte gemeinsame Teiler von $f(x, y)$ und $R(x, y) - \xi$, der sich auf rationalem Wege bestimmen läßt, in y vom ersten Grade. Er sei $a(x, \xi)\,y + b(x, \xi)$. So bestehen die Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $R(x, y) - \xi = 0$ dann und nur dann gleichzeitig, wenn gleichzeitig $g(x, \xi) = 0$ und $a\,y + b = 0$, und umgekehrt. Aus der letzten Gleichung ergibt sich aber y als rationale Funktion von x und ξ. Und man kann weiter schließen wie in dem Beispiel.

§ 3. Beispiel 2.

Es sei

$$(5) \qquad f(x, y) = y^6 - (1 - x^2)\,x^2 = 0\,, \qquad \xi = \frac{y^3}{x}\,.$$

Wir eliminieren y aus diesen beiden Gleichungen und bestimmen zugleich den größten gemeinsamen Teiler der beiden Funktionen

$$(6) \qquad y^6 - (1 - x^2)\,x^2\,, \qquad y^3 - x\xi\,.$$

$$\begin{aligned}
&y^6 - (1 - x^2)\,x^2 : y^3 - x\xi = y^3 + x\xi \\
&y^6 - x\xi\,y^3 \\
&\qquad x\xi\,y^3 - (1 - x^2)\,x^2 \\
&\qquad x\xi\,y^3 - x^2\xi^2 \\
&\qquad \text{Rest} \quad x^2(x^2 + \xi^2 - 1)\,.
\end{aligned}$$

Sollen die Gleichungen (5) zusammen bestehen, so muß also sein

$$g(x, \xi) = x^2 + \xi^2 - 1 = 0 .$$

Die Division geht dann auf und der größte gemeinsame Teiler der Funktionen (6) ist $y^3 - x\xi$. Die beiden Gleichungen (5) sind also gleichbedeutend mit

$$x^2 + \xi^2 - 1 = 0 , \quad y^3 - x\xi = 0 .$$

Hier haben demnach die Gleichungen (5) für $g(x, \xi) = 0$ drei Wurzeln gemeinsam, nämlich die drei Wurzeln von $y^3 - x\xi = 0$. Der Körper $(x\xi)$, definiert durch die Gleichung $x^2 + \xi^2 - 1 = 0$, ist nicht gleich dem Körper (xy), sondern nur ein Teilkörper von (xy). So gehört z. B. $y = \sqrt[3]{x\xi}$ dem Körper $(x\xi)$ nicht an. Die Gleichung $g(x, \xi) = 0$ ist hier nicht vom Grade $m = 6$, sondern nur vom Grade $q = 2$ in ξ. Die 6 konjugierten Werte von ξ sind also zu je dreien einander gleich, was man leicht bestätigt, wenn man bedenkt, daß $\xi = \frac{y^3}{x} = \sqrt{1 - x^2}$ eine zweiwertige Funktion von x ist.

Wie wir in diesem Falle eine passende Größe η finden, werden wir weiter unten sehen.

§ 4. Beispiel 3.

Es sei

(7) $$f(x, y) = y^4 + (8 - 10x) y^2 + 16 - 24x + 9x^2 .$$

$$\xi = -\frac{y^3 + (4 - 7x) y}{2(4 - 3x)} = R(x, y) .$$

Zur Elimination von y rechnen wir

$$y^4 + (8 - 10x) y^2 + (16 - 24x + 9x^2) : y^3 + (4 - 7x) y + 2(4 - 3x)\xi = y$$
$$y^4 + (4 - 7x) y^2 + 2(4 - 3x)\xi y$$
$$\text{Rest } (4 - 3x)(y^2 - 2\xi y + 4 - 3x)$$

$$y^3 + (4 - 7x) y + 2(4 - 3x)\xi : y^2 - 2\xi y + 4 - 3x = y + 2\xi$$
$$y^3 - 2\xi y^2 + (4 - 3x) y$$
$$2\xi y^2 - 4xy + 2(4 - 3x)\xi$$
$$2\xi y^2 - 4\xi^2 y + 2(4 - 3x)\xi$$
$$\text{Rest } 4(\xi^2 - x) y$$

Es ist also hier $g(x, \xi) = \xi^2 - x$ und der größte gemeinsame Teiler von $f(x, y)$ und $R(x, y) - \xi$ ist $y^2 - 2\xi y + 4 - 3x$. Die Gleichungen (7) sind daher gleichwertig mit den Gleichungen

$$g(x, \xi) = \xi^2 - x = 0 , \quad y^2 - 2\xi y + 4 - 3x = 0 .$$

Auch hier ist der Körper $(x\xi)$ nur ein Teilkörper vom Körper (xy). Die Gleichung $g(x, \xi) = 0$ ist in ξ nicht vom Grade $m = 4$, sondern nur vom Grade $q = 2$.

§ 5. Bestimmung einer Größe η zu einer Größe ξ, so daß die Körper (xy) und $(\xi\eta)$ identisch werden.

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück. Die Gleichung $g(x, \xi) = 0$ ist, wie wir angenommen, in x vom Grade e und in ξ vom Grade q. Es sei wie früher $q \cdot p = m$. Die m konjugierten Werte von ξ, nämlich $\xi_\alpha = R(x, y_\alpha)$ sind, wenn $p > 1$, zu je p einander gleich. Es sei etwa $\xi_\alpha = \xi_\beta$, wenn $\alpha \equiv \beta \pmod q$, so daß $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ voneinander verschieden sind. Der größte gemeinsame Teiler von $f(x, y)$ und $R(x, y) - \xi$ sei $D(y; x, \xi)$; er sei in y vom Grade n. Wir können n sofort bestimmen. Ist (x, ξ) irgendein Wertepaar, das der Gleichung $g(x, \xi) = 0$ genügt, so haben die Gleichungen

$$f(x, y) = 0\,, \quad R(x, y) - \xi = 0 \tag{8}$$

mindestens eine Wurzel y gemeinsam, etwa y_1. Da aber $R(x, y_\alpha) = R(x, y_1)$, wenn $\alpha \equiv 1 \pmod q$ und also gleichzeitig mit $R(x, y_1) - \xi = 0$ auch $R(x, y_\alpha) - \xi = 0$ für jedes $\alpha \equiv 1 \pmod q$, so haben die Gleichungen (8) die p Wurzeln $y_1, y_{q+1}, y_{2q+1}, \ldots y_{(p-1)q+1}$ gemeinsam und für beliebiges x, ξ auch keine anderen, da $R(x, y_\alpha) \neq R(x, y_1)$, wenn $\alpha \not\equiv 1 \pmod q$. Daher ist $n = p$.

Zu einem Werte von x, etwa x_0, gehören zufolge der Gleichung $g(x, \xi) = 0$ q Werte von ξ, die mit $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots \xi_0^{(q)}$ bezeichnet seien. Zu jedem Wertepaar $(x_0, \xi_0^{(\varrho)})$ folgen aus $D(y; x, \xi) = 0$ p Werte von y. Wir erhalten also zu einem Werte von x im ganzen $q \cdot p = m$ Werte von y, wie es sein muß. Der Körper (xy) kann also so erhalten werden, daß man erst den Körper $(x\xi)$ durch die Gleichung $g(x, \xi) = 0$ definiert und dann y durch die Gleichung $D(y; x, \xi) = 0$ vom Grade p definiert. Der Körper (xy) ist, wie man sagt, ein Überkörper des Körpers $(x\xi)$ vom Relativgrade p.

Ist also $p = 1$, so können wir $\eta = x$ setzen. Dann ist ja die Gleichung $D(y; x\xi) = 0$ in y vom ersten Grade, und es folgt aus ihr y als rationale Funktion von x und ξ (Beispiel 1). Wir haben bisher das Ergebnis:

Satz I. Genügt eine Funktion ξ des Körpers (xy) einer unzerlegbaren Gleichung vom Grade m, wo m die Ordnung von x ist, so ist der Körper $(x\xi)$ gleich dem Körper (xy). Genügt aber ξ nur einer unzerlegbaren Gleichung vom Grade $q < m$, so ist zunächst q ein Teiler von m. y genügt einer unzerlegbaren Gleichung $D(y; x, \xi) = 0$ vom Grade $p = m/q$, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x, ξ sind. Der Körper (xy) ist ein Körper vom Relativgrade p über dem Körper $(x\xi)$.

Im Falle $p > 1$ finden wir ein passendes η durch folgende Betrachtungen. Es sei η gefunden. Die Gleichung zwischen ξ und η sei $\varphi(\xi, \eta) = 0$.

Sie sei in η vom Grade μ. Dann gehören im allgemeinen μ verschiedene Werte von η zu einem Werte von ξ. Es ist also ξ im Körper $(\xi\,\eta)$, der nach Annahme gleich $(x\,y)$ ist, von der Ordnung μ. Wir werden daher nur dann erwarten können, daß η eine passende Größe ist, wenn zu einem Werte von ξ so viele Werte von η gehören, wie die Ordnung von ξ angibt.

Zu einem Werte von ξ gehören zufolge der Gleichung $g\,(x, \xi) = 0$. e Werte von x. Zu einem Wertepaar x, ξ gehören zufolge der Gleichung $D\,(y;\;x\xi) = 0$ p Werte von y. Zu einem Werte ξ gehören also ep Wertepaare x, y. Es ist daher $\mu = ep$. Man kann leicht Funktionen angeben, die ep verschiedene Werte für einen gegebenen Wert von ξ annehmen. Die einfachste ist

$$w = u\,x + v\,y\,,$$

wo unter u und v zunächst noch unbestimmte Konstante verstanden sein sollen. Sind $x_1, x_2, \ldots x_e$ die Werte von x, die einem Wert von ξ entsprechen, und $y_{\alpha 1}, y_{\alpha 2}, \ldots y_{\alpha p}$, die Werte von y, die dem Wertepaar ξ, x_α entsprechen, so nimmt für einen Wert von ξ die Größe w die $ep = \mu$ Werte

$$u\,x_\alpha + v\,y_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots e;\; \beta = 1, 2, \ldots p)$$

an, die wir in irgendeiner Reihenfolge mit $w_1, w_2 \ldots w_\mu$ bezeichnen. Wenn ξ irgendeinen geschlossenen Weg durchläuft, so vertauschen sich die x_α untereinander. Geht dabei z. B. x_1 in x_2 über, so geht $D\,(y;\; x_1, \xi)$ über in $D\,(y; x_2, \xi)$, und es müssen daher die Größen $y_{1\beta}$, abgesehen von der Reihenfolge, übergehen in die Größen $y_{2\beta}$. Bei einem geschlossenen Umlauf von ξ vertauschen sich daher die w_k höchstens untereinander, so daß die symmetrischen rationalen Funktionen der w_k rationale Funktionen von ξ sind. Diese sind bei unbestimmtem u und v bei nicht speziellem ξ voneinander verschieden. Denn für nicht speziell gewähltes ξ hat weder die Gleichung $g\,(x, \xi) = 0$, noch haben die Gleichungen $D\,(y; x_\alpha, \xi) = 0$ gleiche Wurzeln.

Die Größe w genügt einer Gleichung μ-ten Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von ξ sind, nämlich der Gleichung

$$\psi\,(w, \xi) \quad (w - w_1)\,(w - w_2) \ldots (w - w_\mu) = 0\,.$$

$\psi\,(w, \xi)$ ist eine ganze rationale Funktion von u, v. Setzen wir $w = u\,x + v\,y$, so ist die Gleichung $\psi\;(w, \xi) = 0$ identisch befriedigt, auch in bezug auf u, v. Wir dürfen sie daher nach u und v differentiieren und erhalten, wegen $\partial w / \partial u = x$, $\partial w / \partial v = y$,

$$x\frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0\,, \qquad y\frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0$$

oder

(9) $$x = -\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial w}}\,, \quad y = -\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial w}}\,.$$

Da die Gleichung $\psi = 0$ bei beliebigem ξ, u, v keine mehrfachen Wurzeln hat, so ist $\frac{\partial \psi}{\partial w}$ nicht identisch Null und man kann daher immer u und v so wählen, etwa gleich u_0 und v_0, daß bei dieser Wahl $\frac{\partial \psi}{\partial w}$ nichtidentisch Null ist. Wir setzen dies spezielle w gleich η, also

$$\eta = u_0 x + v_0 y .$$

Es werden dann, wie aus den Gleichungen (9) hervorgeht, x und y rationale Funktionen von ξ, η. Da andererseits ξ und η rationale Funktionen von x, y sind, so ist damit bewiesen, daß man zu einer Funktion ξ des Körpers (xy), die nicht konstant ist, immer eine zweite Funktion η finden kann, so daß der Körper (xy) mit dem Körper $(\xi\eta)$ identisch ist. Wir fassen das Ergebnis in folgende Sätze zusammen, wobei wir gleichzeitig den Satz III, Kap. IV § 2 der sich auf x als unabhängige Veränderliche bezieht, anwenden auf ξ als unabhängige Veränderliche.

Satz II. Es sei ξ eine nicht konstante Größe des Körpers (xy). Ihre Ordnung sei μ. Ist dann η eine zweite Größe des Körpers, so besteht zwischen ξ und η eine unzerlegbare Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$, deren Grad in bezug auf η gleich μ oder gleich einem Teiler von μ ist. Dann und nur dann, wenn der Grad der Gleichung μ ist, ist der Körper $(\xi\eta)$ identisch mit dem Körper (xy). Der Grad der Gleichung zwischen ξ und η ist in diesem Falle in bezug auf ξ gleich der Ordnung λ von η. Ist aber der Grad der Gleichung $\varphi = 0$ in η gleich μ/p, so ist er in ξ vom Grade λ/p.

Satz III. Zu jeder nicht konstanten Größe ξ des Körpers (xy) läßt sich (auf unendlich viele Arten) eine Größe η aus (xy) bestimmen, so daß die Körper (xy) und $(\xi\eta)$ identisch sind.

§ 6. Anwendung auf die Beispiele 2 und 3.

Beispiel 2. Wir bestimmen zunächst die Ordnung von ξ. Es ist $\xi = \sqrt{1 - x^2}$, also in der Umgebung des unendlich fernen Punktes der x-Ebene $\xi = x\sqrt{-1} + \cdots$. Die über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche ist 6blättrig. Sie hat für unendlich großes x zwei zweifache Verzweigungspunkte, wie daraus folgt, daß dort $y = +\sqrt[6]{-1}\, x^{\frac{2}{3}} + \cdots$ oder $y = -\sqrt[6]{-1}\, x^{\frac{2}{3}} + \cdots$. Da $\xi = \sqrt{1 - x^2}$ für unendlich großes x unendlich wird wie x, so wird ξ in jedem der beiden bei $x = \infty$ übereinanderliegenden Verzweigungspunkten von der Ordnung 3 unendlich, hat also, da es sonst nirgends unendlich wird, im ganzen 6 Unendlichkeitsstellen. Die Ordnung von ξ ist daher $\mu = 6$. Wir konnten das auch schon aus der

Gleichung $g(x, \xi) = 0$ ersehen. Diese ist in ξ vom Grade $q = 2$, während $m = 6$ ist. Es ist also $p = m/2 = 3$. Die Gleichung $g(x, \xi) = 0$ ist ferner in x vom Grade $e = 2$. Also ist $\mu = e\,p = 6$.

Wir setzen
$$w = u\,x + v\,y.$$
w nimmt als Funktion von ξ betrachtet sechs verschiedene Werte an. Das können wir hier sofort übersehen, denn es ist
$$w = u\sqrt{1 - \xi^2} + v\sqrt[3]{\xi\sqrt{1 - \xi^2}}.$$
Hieraus ergibt sich auch am einfachsten die Gleichung $\psi(w, \xi) = 0$, nämlich
$$\begin{aligned}\psi(w, \xi) = w^6 - 3(1 - \xi^2)\,u^2 w^4 - 3(1 - \xi^2)\,[2v^3\xi - u^3(1 - \xi^2)]\,u\,w^2 \\ - (1 - \xi^2)\,[v^3\xi + u^3(1 - \xi^2)]^2 = 0.\end{aligned}$$
Es wird also
$$x = -\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial w}} = \frac{(1-\xi^2)\{u\,w^4 + [v^3\xi - 2u^3(1-\xi^2)]\,w^2 + u^2(1-\xi^2)[v^3\xi + u^3(1-\xi^2)]\}}{w\{w^4 - 2(1-\xi^2)\,u^2 w^2 - (1-\xi^2)\,[2v^3\xi - u^3(1-\xi^2)]\,u\}},$$
$$y = -\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial w}} = \frac{(1-\xi^2)\{3u\,w^2 + [v^3\xi + u^3(1-\xi^2)]\}\,v^2\xi}{w\{w^4 - 2(1-\xi^2)\,u^2 w^2 - (1-\xi^2)\,[2v^3\xi - u^3(1-\xi^2)]\,u\}}.$$
Würden wir hier $u = 1$, $v = 0$, also $w = x$ wählen, so wird ψ zerlegbar und erhält mehrfache Faktoren. Es wird nämlich dann $\psi = [w^2 - (1 - \xi^2)]^3$. Es wird daher $\dfrac{\partial\psi}{\partial w}$ zugleich mit ψ zu Null und die Werte für x und y verlieren ihren Sinn. Dagegen können wir wählen $u = 0$, $v = 1$, also $w = y = \eta$. Es wird
$$\psi = w^6 - \xi^2(1 - \xi^2) = \eta^6 - \xi^2(1 - \xi^2),$$
bleibt also unzerlegbar. Ferner wird
$$x = \frac{(1 - \xi^2)\,\xi\,\eta^2}{\eta^5} = \frac{(1 - \xi^2)\,\xi\,\eta^3}{\eta^6} = \frac{(1 - \xi^2)\,\xi\,\eta^3}{\xi^2(1 - \xi^2)} = \frac{\eta^3}{\xi},$$
$$y = \frac{(1 - \xi^2)\,\xi^2}{\eta^5} = \frac{(1 - \xi^2)\,\xi^2\,\eta}{\eta^6} = \eta,$$
ein Ergebnis, dessen Richtigkeit man ohne weiteres einsieht.

Beispiel 3. Wir bestimmen auch hier zunächst die Ordnung von ξ. Es ist, wie aus $g(x, \xi) = 0$ folgt $\xi = \sqrt{x}$. Es wird daher ξ Null nur für $x = 0$. Die Riemannsche Fläche, die über der x-Ebene ausgebreitet ist, ist hier 4blättrig. Sie hat im Punkte $x = 0$ zwei Verzweigungspunkte erster Ordnung, wie sich ergibt, wenn man die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y auflöst. In jedem dieser Punkte wird ξ von der ersten Ordnung Null und sonst nirgends. Es ist also ξ von der Ordnung $\mu = 2$. Auch hier ist, wie es sein muß, $\mu = ep$, da $e = 1$, $p = 2$.

Setzen wir

$$w = ux + vy,$$

so ergibt sich zunächst aus $g(x, \xi) = 0$ und $D(y; x, \xi) = 0$ $w = u\xi^2 + v(\xi + 2\sqrt{\xi^2 - 1})$ und daraus

$$\varphi(w, \xi) = w^2 - 2(v\xi + u\xi^2)w + 4v^2 - 3v^2\xi^2 + 2uv\xi^3 + u^2\xi^4 = 0.$$

Es wird also

$$x = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}} = \frac{\xi^2(w - v\xi - u\xi^2)}{w - (v\xi + u\xi^2)},$$

$$y = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}} = \frac{w\xi - 4v + 3v\xi^2 - u\xi^3}{w - (v\xi + u\xi^2)}.$$

Wir dürfen z. B. wählen

$$u = 0, \quad v = 1, \quad w = y = \eta.$$

Dann wird

$$\varphi = w^2 - 2\xi w + 4 - 3\xi^2 = \eta^2 - 2\xi\eta + 4 - 3\xi^2 = 0,$$

$$x = \xi^2, \quad y = \frac{\xi\eta - 4 + 3\xi^2}{\eta - \xi}.$$

Aus der Gleichung $\varphi(\eta, \xi) = 0$ folgt aber $\eta(\eta - \xi) = \xi\eta - 4 + 3\xi^2$, so daß y, wie es sein muß, gleich η wird.

Man könnte auch wählen $u = v = 1$. Man kann hier überhaupt u und v beliebig wählen, wenn man nur v von Null verschieden annimmt.

§ 7. Die beiden Riemannschen Flächen.

Geradeso wie wir über der x-Ebene eine Riemannsche Fläche hergestellt haben, ebenso können wir über der ξ-Ebene eine Riemannsche Fläche herstellen, auf der auch die Funktionen des Körpers eindeutige Funktionen des Ortes sind. Sie wird aus μ Blättern bestehen, wenn μ wieder die Ordnung von ξ ist. Sie wird Verzweigungspunkte enthalten, deren Zahl und Anordnung ganz anders sein kann, als bei der über der x-Ebene konstruierten. Ist der Körper (xy) z. B. definiert durch die Gleichung $y^2 = 1 - x^4$, so ist die über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche zweiblättrig und hat als Verzweigungspunkte erster Ordnung die Punkte $1, -1, i, -i$. Nehmen wir $\xi = y$ als unabhängige Veränderliche und etwa $x = \eta$, so daß der Körper (xy) gewiß mit $(\xi\eta)$ identisch ist, so ist $\eta = \sqrt[4]{1 - \xi^2}$ und die Riemannsche Fläche über der ξ-Ebene ist vierblättrig. Sie hat in den Punkten + 1 und − 1 je einen dreifachen und im Unendlichen zwei einfache Verzweigungspunkte. Da wir ξ auf unendlich viele Arten wählen können, so gibt es unendlich viele Riemannsche Flächen, auf denen wir die Funktionen desselben algebraischen Körpers (xy) als eindeutige Funktionen des Ortes betrachten können. So verschieden diese auch aussehen können, so haben sie doch gewisse Eigenschaften gemeinsam, worauf wir aber erst später eingehen.

Jedem Punkte und seiner Umgebung einer dieser Riemannschen Flächen, die zu dem Körper (xy) gehören, entspricht ein Punkt und seine Umgebung auf jeder anderen. Wir können daher die Stellen eines algebraischen Körpers und ihre Umgebung mit Hilfe irgendeiner Größe ξ des Körpers definieren, die nicht konstant ist. Ja, wir können auch jede Stelle mit Hilfe einer anderen Größe ξ definieren, wie es uns gerade am einfachsten erscheint.

Eine Stelle, die in der einen Fläche eine Verzweigungsstelle ist, braucht es keineswegs in der anderen zu sein oder kann eine von anderer Verzweigungsordnung sein, wie das schon das Beispiel lehrt, was wir eben betrachteten. Sprechen wir also von einer Verzweigungsstelle, so muß immer hinzugefügt werden, welche Größe als unabhängige Veränderliche betrachtet werden soll.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß man die birationale Transformation vor allem dazu benutzen kann, statt der gegebenen Gleichung $f(x, y) = 0$ eine andere $\varphi(\xi, \eta) = 0$ zu erhalten, die den algebraischen Körper geradeso gut definiert und die einfacher ist oder für die besondere Aufgabe, die man gerade behandeln will, brauchbarer. Wir werden darauf noch zurückkommen.

Sechstes Kapitel.

Divisoren.

§ 1. Primteiler.

Eine Stelle des algebraischen Körpers können wir jetzt mit seiner Umgebung so definieren. Ist t irgendeine Größe, die an der Stelle von möglichst niedriger Ordnung Null wird, so lassen sich alle Funktionen des Körpers als Potenzreihen darstellen, die nach ganzen steigenden Potenzen von t fortschreiten und die höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthalten. Setzen wir in die Reihenentwicklung, die sich für eine Funktion R des Körpers ergibt, $t = 0$, so erhalten wir den Wert, den die Funktion an der betreffenden Stelle annimmt.

Wir bezeichnen die Stellen des Körpers wie bisher mit kleinen deutschen Buchstaben. Es sei etwa $\mathfrak{p}$ eine Stelle. Wir ordnen jeder Stelle einen

Primteiler zu, den wir gerade so bezeichnen wie die Stelle, also der Stelle $\mathfrak{p}$ den Primteiler $\mathfrak{p}$. Hat eine Funktion R in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ die Darstellung

$$R = t^{\lambda} E(t),$$

wo t eine Einheit für $t = 0$ ist, ist also die Funktion R an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der Ordnung λ, so definieren wir: R ist durch $\mathfrak{p}^{\lambda}$ teilbar. Das soll gelten für positives und negatives λ und auch, wenn $\lambda = 0$. Ein Produkt aus mehreren Primteilern, jeden in einer positiven oder negativen ganzzahligen Potenz genommen, nennen wir einen Divisor. Ein Divisor heißt ganz, wenn keiner der Exponenten negativ ist. Die Summe aller Exponenten heißt die Ordnung des Divisors. So hat z. B. der Divisor $\mathfrak{p}_1^3 \mathfrak{p}_2^{-2} \mathfrak{p}_3^{-2}$ die Ordnung -1.

§ 2. Zerlegung der Funktionen des Körpers in Primteiler.

Da wir gesehen haben, daß jede Funktion des Körpers nur eine endliche Zahl von Null- und Unendlichkeitsstellen hat, so enthält jede Funktion nur eine endliche Zahl von Primteilern. Wir können sie daher in eindeutiger Weise in Primteiler zerlegen. Auf diese Art wird jeder Funktion des Körpers ein ganz bestimmter Divisor zugeordnet. Es sei R eine Funktion des Körpers und es sei, in Primteiler zerlegt,

$$R = \frac{\mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}}{\mathfrak{q}_1^{\beta_1} \mathfrak{q}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{q}_s^{\beta_s}},$$

wo wir die α und β als positiv annehmen wollen. Solch eine Zerlegung ist nur ein übersichtlicher Ausdruck dafür, wo und wie R Null und unendlich wird. Zwei Funktionen, deren Zerlegung denselben Divisor ergibt, haben also dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen und unterscheiden sich daher nur um einen konstanten Faktor. Wir nennen die ganzen Divisoren

$$\mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}, \qquad \mathfrak{q}_1^{\beta_1} \mathfrak{q}_2^{\beta_2} \ldots \mathfrak{q}_s^{\beta_s}$$

den Zähler und den Nenner von R. Die Ordnung des Zählers von R ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ und sie ist nichts anderes als die Zahl der Nullstellen von R, jede so oft gerechnet, als ihre Vielfachheit angibt. Ebenso ist die Ordnung des Nenners, nämlich $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s$ gleich der Zahl der Unendlichkeitsstellen von R. Aber wir haben bewiesen, daß die Zahl der Nullstellen einer Funktion des Körpers immer gleich der Zahl ihrer Unendlichkeitsstellen ist. Daher haben der Zähler und der Nenner von R dieselbe Ordnung, und diese Ordnung stimmt überein mit der Ordnung der Funktion R, und die Ordnung $\sum \alpha - \sum \beta$ des der Funktion R entsprechenden Divisors ist Null. Wir haben den Satz:

Jede Funktion des Körpers läßt sich eindeutig in eine endliche Zahl von Primteilern zerlegen. Die Ordnung des so entstehenden Divisors ist Null.

Es sei gleich bemerkt, daß im allgemeinen nicht das Umgekehrte gilt, daß also nicht jedem Divisor der Ordnung Null eine Funktion des Körpers entspricht.

Wir bezeichnen den Zähler einer Funktion R des Körpers auch mit $\mathfrak{l}_R$ und den Nenner mit $\mathfrak{n}_R$, so daß

$$R = \frac{\mathfrak{l}_R}{\mathfrak{n}_R}.$$

Die Ordnung von R bezeichnen wir mit n_R. Sie ist gleichzeitig die Ordnung der Divisoren $\mathfrak{l}_R$ und $\mathfrak{n}_R$.

§ 3. Verzweigungsdivisoren.

Als Beispiel betrachten wir die Zerlegung von $x - a$. Die Ordnung von $x - a$ ist m, wo m der Grad der Gleichung $f(x, y) = 0$ in y ist. Es möge zunächst von den Stellen der über der x-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche, für die x den Wert a hat, keine eine Verzweigungsstelle sein. Dann liegen dort m Stellen übereinander. Zu jeder dieser Stellen gehört ein Primteiler. Diese m Primteiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_m$. Für die Umgebung eines jeden dieser Punkte lassen sich die Funktionen des Körpers nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickeln. In jedem dieser Punkte hat daher $x - a$ die Ordnung 1, so daß $x - a$ genau durch die erste Potenz eines jeden der Primteiler $\mathfrak{p}_k$ teilbar ist. Es wird

$$\mathfrak{l}_{x-a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m .$$

Es möge ferner ein α-facher, ein β-facher und ein γ-facher Verzweigungspunkt dort vorhanden sein, wo x den Wert a annimmt. Wir haben dann nur drei Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ bei $x = a$ und auch nur drei Primteiler $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$. Für die Umgebung von $\mathfrak{p}_1$ lassen sich alle Funktionen des Körpers nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ entwickeln. Es ist $(x - a) = (x - a)^{\frac{\alpha}{\alpha}}$, also von der Ordnung α an der Stelle $\mathfrak{p}_1$, so daß $x - a$ genau durch $\mathfrak{p}_1^\alpha$ teilbar ist. Ebenso ist es durch $\mathfrak{p}_2^\beta$ und $\mathfrak{p}_3^\gamma$ teilbar. Wir haben also in diesem Falle

$$\mathfrak{l}_{x-a} = \mathfrak{p}_1^\alpha \mathfrak{p}_2^\beta \mathfrak{p}_3^\gamma .$$

Es enthält also $\mathfrak{l}_{x-a}$ die Primteiler, die zu Stellen gehören, an denen x den Wert a hat, und es enthält einen dieser Primteiler nur dann mehrfach, wenn die Stelle, zu der er gehört, ein Verzweigungspunkt in bezug auf x ist. Ist die Verzweigungsordnung gleich $\alpha - 1$, so enthält $\mathfrak{l}_{x-a}$ den betreffenden Primteiler genau in der α-ten Potenz. Was für x gilt, gilt natürlich auch für jede andere Größe des Körpers. Wie wir gesehen haben, gibt es in bezug auf jede Größe ξ des Körpers eine endliche Zahl von Verzweigungsstellen. Die zu diesen Stellen gehörenden Primteiler heißen Verzweigungs-Primteiler in bezug auf $\mathfrak{x}$. Das Produkt aller dieser Primteiler — jeder in der Potenz genommen, die seine Verzweigungsordnung angibt — heißt Verzweigungsdivisor von $\mathfrak{x}$ und wird mit $\mathfrak{z}_{\mathfrak{x}}$ bezeichnet. Die Ordnung dieses Divisors heißt die Verzweigungszahl von oder in bezug auf $\mathfrak{x}$ und soll mit $w_{\mathfrak{x}}$ bezeichnet werden. Vgl. Kap. III, § 8.

§ 4. Divisorenklassen.

Wir teilen die Divisoren in Klassen ein, indem wir zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnen, wenn der Quotient einer Funktion des Körpers entspricht. So bilden die Divisoren, die den Funktionen des Körpers entsprechen, eine Klasse. Sind nämlich $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ zwei solche Divisoren und R_1 und R_2 die Funktionen, denen sie entsprechen, so entspricht auch $\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}_2}$ einer Funktion des Körpers, nämlich der Funktion $\frac{R_1}{R_2}$. Es gehören daher $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ zu derselben Klasse. Ist andererseits $\mathfrak{r}$ irgendein Divisor der Klasse zu der $\mathfrak{r}_1 = R_1$ gehört, so ist nach Definition $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_1}$ eine Funktion R des Körpers und daher entspricht auch $\mathfrak{r}$ einer Funktion des Körpers, nämlich der Funktion $R R_1$. Die Funktionen des Körpers bilden also wirklich eine Klasse für sich, die alle und nur Funktionen des Körpers enthält. Sie heißt die Hauptklasse.

Die Divisoren der Hauptklasse haben die Eigenschaft, daß das Produkt von irgend zweien oder ihr Quotient wieder der Klasse angehört. Allgemeiner ist ein irgendwie aus Divisoren der Hauptklasse multiplikativ zusammengesetzter Divisor wieder ein Divisor der Hauptklasse.

Wir können jetzt auch definieren: Zwei Divisoren gehören dann und nur dann zu derselben Klasse, wenn ihr Quotient ein Divisor der Hauptklasse ist. Es sind daher alle Divisoren, die mit einem Divisor $\mathfrak{q}$ in dieselbe Klasse gehören, in der Form

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$$

darstellbar, wo $\mathfrak{r}$ ein Divisor der Hauptklasse ist, und umgekehrt gehört jeder Divisor der Form $\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{q}$ in dieselbe Klasse. Da die Divisoren der Hauptklasse die Ordnung Null haben, so haben die Divisoren $\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ alle dieselbe Ordnung wie $\mathfrak{q}$, so daß die Divisoren einer Klasse alle dieselbe Ordnung haben, die die Ordnung der Klasse heißt. Durchläuft $\mathfrak{r}$ die Divisoren der Hauptklasse, so durchläuft $\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ alle und nur die Divisoren der Klasse, der $\mathfrak{q}$ angehört. Wir bezeichnen sie mit $(\mathfrak{q})$. Ist $\mathfrak{s}$ irgendein anderer Divisor, so durchläuft auch $\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}$ alle und nur die Divisoren einer Klasse, die wir mit $(\mathfrak{s})$ bezeichnen. Wir betrachten zunächst den Fall, wo $\mathfrak{s}$ der Klasse $(\mathfrak{q})$ angehört. Es ist dann $\mathfrak{s} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{r}_0$, wo $\mathfrak{r}_0$ der Hauptklasse angehört, und die Klassen $(\mathfrak{q})$ und $(\mathfrak{s})$ sind identisch. Denn jeder Divisor der Klasse $(\mathfrak{s})$ läßt sich dann darstellen in der Form $\mathfrak{q}(\mathfrak{r}_0\mathfrak{r})$, wo $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_0$, also auch $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_0$ der Hauptklasse angehören, und gehört daher der Klasse $(\mathfrak{q})$ an. Ebenso ist jeder Divisor der Klasse $(\mathfrak{q})$ in der Form $\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}}$ darstellbar und gehört demnach der Klasse $(\mathfrak{s})$ an. Es ist daher ganz gleichgültig, welchen Divisor der Klasse man benutzt, um die Klasse zu definieren. Ist $\mathfrak{q}'$ irgendein Divisor der Klasse, so durchläuft $\mathfrak{q}'\mathfrak{r}$ die Divisoren der Klasse und nur diese, wenn $\mathfrak{r}$ die Divisoren der Hauptklasse durchläuft. Jede Klasse ist durch irgendeinen ihrer Divisoren vollständig bestimmt. Es sei ferner $\mathfrak{s}$ nicht in der Klasse $(\mathfrak{q})$ enthalten. Dann haben die Klassen $(\mathfrak{q})$ und $(\mathfrak{s})$ keinen Divisor gemeinschaftlich. Hätten sie nämlich einen Divisor $\mathfrak{q}'$ gemeinsam, so könnten wir die Divisoren von $(\mathfrak{q})$ sowohl wie die von $(\mathfrak{s})$, und zwar jeden einmal und nur einmal erhalten, wenn wir in $\mathfrak{q}'\mathfrak{r}$ den Divisor $\mathfrak{r}$ alle Divisoren der Hauptklasse durchlaufen lassen. Die Klassen wären also identisch und $\mathfrak{s}$ würde gegen die Voraussetzung der Klasse $(\mathfrak{q})$ angehören.

Wir haben also: Jeder Divisor gehört einer und nur einer Klasse an oder: Zwei Klassen sind entweder identisch oder haben gar keinen Divisor gemeinsam. Wir können daher auch zwei Divisoren $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, die derselben Klasse angehören, äquivalent nennen, in Zeichen $\mathfrak{q}_1 \sim \mathfrak{q}_2$. Denn es gilt nach dem Bewiesenen folgendes:

1. Jeder Divisor ist sich selbst äquivalent.

2. Wenn zwei Divisoren zu einem dritten äquivalent sind, so sind sie untereinander äquivalent.

Sind $(\mathfrak{q}_1)$ und $(\mathfrak{q}_2)$ irgend zwei Klassen, also $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ irgendwelche Divisoren aus ihnen, so heißt die Klasse $(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$ ihr Produkt und die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}_2}\right)$ ihr Quotient. Diese Klassen sind nach dem Bewiesenen vollständig bestimmt, und es ist gleichgültig, welche Divisoren $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ man aus den Klassen $(\mathfrak{q}_1)$ und $(\mathfrak{q}_2)$ zur Definition der Klassen $(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$, $\left(\frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}_2}\right)$ benutzt. Wir können also die Klassen beliebig multiplizieren und dividieren. Dabei spielt die Hauptklasse die Rolle der Einheit, da in ihr der Divisor $\mathfrak{l}$ vorhanden ist und man diesen beim Multiplizieren oder Dividieren mit der Hauptklasse als Repräsentanten dieser Klasse nehmen kann.

§ 5. Dimension einer Klasse.

In einer Klasse können ganze Divisoren vorhanden sein. Es sei in einer Klasse $(\mathfrak{q})$ mehr als ein ganzer Divisor vorhanden, also mindestens zwei voneinander verschiedene $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$. Es ist dann $\frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_1}$ eine Funktion des

Körpers, die mit G_2 bezeichnet sei. Sind λ_1 und λ_2 Konstante, so kann die Funktion $\lambda_1 + \lambda_2 G_2$ nur unendlich werden, wo G_2 unendlich wird, und nicht von höherer Ordnung als G_2. Schreiben wir daher, in Faktoren zerlegt,

$$\lambda_1 + \lambda_2 G_2 = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}_1},$$

so ist $\mathfrak{g}$ sicher ein ganzer Divisor. Dieser Divisor ist vollständig bestimmt durch λ_1, λ_2, und da rein formal

$$\lambda_1 + \lambda_2 G_2 = \frac{\lambda_1 \mathfrak{g}_1 + \lambda_2 \mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_1},$$

so schreibt man einfach

(1) $$\mathfrak{g} = \lambda_1 \mathfrak{g}_1 + \lambda_2 \mathfrak{g}_2 .$$

Wir erhalten auf diese Art unendlich viele ganze Divisoren $\mathfrak{g}$, die alle der Klasse $(\mathfrak{q})$ angehören, da ja $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}_1}$ gleich einer Funktion des Körpers ist und daher $\mathfrak{g} \sim \mathfrak{g}_1$. Es kann sein, daß in der Klasse $(\mathfrak{q})$ andere als diese ganzen Divisoren nicht enthalten sind. Es kann aber auch sein, daß außer diesen noch andere ganze Divisoren vorhanden sind. Es sei $\mathfrak{g}_3$ einer dieser Divisoren. Es ist auch $\frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_1}$ eine Funktion des Körpers, die mit G_3 bezeichnet sei. Sind λ_1, λ_2, λ_3 irgendwelche Konstante, so ist $\lambda_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$ eine Funktion des Körpers, die wieder höchstens den Nenner $\mathfrak{g}_1$ haben kann, so daß, in Primteiler zerlegt,

$$G_3 = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}_1},$$

wo $\mathfrak{g}$ sicher ein ganzer Divisor ist, der äquivalent zu $\mathfrak{g}_1$ ist und daher der Klasse $(\mathfrak{q})$ angehört. Wir schreiben wieder symbolisch

(2) $$\mathfrak{g} = \lambda_1 \mathfrak{g}_1 + \lambda_2 \mathfrak{g}_2 + \lambda_3 \mathfrak{g}_3 .$$

Unter diesen Divisoren sind die in der Form (1) darstellbaren natürlich mit enthalten. Keiner dieser Divisoren kann identisch Null sein, weil sonst für die Konstanten c_1, c_2, c_3 eine Gleichung der Form

$$c_1 \mathfrak{g}_1 + c_2 \mathfrak{g}_2 + c_3 \mathfrak{g}_3 = 0$$

bestehen müßte. Wäre hier $c_3 = 0$, so würde folgen, daß $\frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_1} = G_2 = -\frac{c_1}{c_2}$, also konstant wäre, so daß $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1$ sein würde gegen unsere Annahme. Ist aber c_3 von Null verschieden, so folgt

$$\mathfrak{g}_3 = -\frac{c_1}{c_3}\mathfrak{g}_1 - \frac{c_2}{c_3}\mathfrak{g}_2 .$$

Es wäre also gegen unsere Annahme $\mathfrak{g}_3$ in der Form $\lambda_1 \mathfrak{g}_1 + \lambda_2 \mathfrak{g}_2$ darstellbar.

Es sind wieder zwei Fälle möglich. Entweder es gibt außer den in der Form (2) enthaltenen ganzen Divisoren keine anderen in der Klasse ($\mathfrak{q}$) oder es gibt noch andere. Gibt es noch andere, so sei $\mathfrak{g}_4$ einer von diesen. Es sind dann alle die durch $\lambda_1 \mathfrak{g}_1 + \cdots + \lambda_1 \mathfrak{g}_4$ mit konstanten λ definierten Divisoren ganze Divisoren der Klasse ($\mathfrak{q}$). In dieser Weise können wir weiter schließen. Es sind zwei Fälle denkbar. Das Verfahren kann entweder unbegrenzt fortgesetzt werden oder nicht.

Im ersten Falle würde es, wie groß auch die Zahl r angenommen wird, immer ganze Divisoren $\mathfrak{g}_k$ in der Klasse ($\mathfrak{q}$) geben von der Art, daß keine identische Gleichung von der Form

$$c_1 \mathfrak{g}_1 + c_2 \mathfrak{g}_2 + \cdots + c_r \mathfrak{g}_r = 0 \tag{3}$$

mit konstanten c besteht. Bezeichnen wir die Funktion, die dem Divisor $\frac{\mathfrak{g}_k}{\mathfrak{g}_1}$ entspricht, mit G_k, so heißt das, daß keine Gleichung von der Form

$$c_1 + c_2 G_2 + c_3 \mathfrak{g}_3 + \cdots + c_r G_r = 0 \tag{4}$$

identisch bestehen kann. Die Funktionen $G_2, G_3, \ldots G_r$ haben alle als Unendlichkeitsstellen höchstens die Stellen, zu denen die Primteiler von $\mathfrak{g}_1$ gehören, und werden an einer dieser Stellen höchstens von der Ordnung α unendlich, wenn der zu dieser Stelle gehörende Primteiler in $\mathfrak{g}_1$ in der α-ten Potenz enthalten ist. Ist die Ordnung von $\mathfrak{g}_1$ gleich g, so hat also jede Funktion der Form

$$G \quad c_1 + c_2 G_2 + c_3 G_3 + \cdots + c_r G_r$$

wo die c konstant sind, höchstens g Unendlichkeitsstellen und also auch höchstens g Nullstellen. Wenn aber $r > g + 1$, und das können wir annehmen, da wir ja r beliebig groß voraussetzen dürfen, so können wir die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_r$ immer so bestimmen, daß die Funktion G an $g + 1$ beliebig gegebenen Stellen verschwindet. Sind nämlich $G_2^{(k)}, G_3^{(k)}, \ldots G_r^{(k)} (k = 1, 2, \ldots g + 1)$ die Werte, die die Funktionen $G_2, G_3 \ldots G_r$ an $g + 1$ irgendwie (nur verschieden von den Unendlichkeitsstellen von G) gewählten Stellen annehmen, so brauchen wir nur die $g + 1$ linearen homogenen Gleichungen zu lösen

$$\lambda_1 + \lambda_2 G_2^{(k)} + \lambda_3 G_3^{(k)} + \cdots + \lambda_r G_r^{(k)} = 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots g + 1).$$

und diese haben immer mindestens eine von Null verschiedene Lösung $c_1, c_2 \ldots c_r$, wenn nur $r > g + 1$. Die Funktion $c_1 + c_2 G_2 + \cdots + c_r G_r$ würde dann bei höchstens g Unendlichkeitsstellen $g + 1$ Nullstellen haben. Sie muß daher identisch Null sein. Es besteht also doch eine Gleichung der Form (4) und damit eine der Form (3). Der erste denkbare Fall ist also nicht möglich und es bleibt nur der zweite übrig. Daraus ergibt sich der Satz:

Sind in einer Klasse ($\mathfrak{q}$) überhaupt ganze Divisoren enthalten, so gibt es immer eine endliche Zahl s von ganzen

Divisoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_s$ in der Klasse, so daß erstens keine Gleichung von der Form

$$c_1 \mathfrak{g}_1 + c_2 \mathfrak{g}_2 + \cdots + c_s \mathfrak{g}_s = 0$$

mit konstanten c identisch besteht und daß zweitens alle und nur die **ganzen** Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q})$ in der Form darstellbar sind

$$\lambda_1 \mathfrak{g}_1 + \lambda_2 \mathfrak{g}_2 + \cdots + \lambda_s \mathfrak{g}_s ,$$

wo die λ konstant sind.

Wir nennen ganze Divisoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_r$ zwischen denen keine Gleichung der Form (3) besteht, linear unabhängig. Wir können daher auch kürzer sagen:

„Es gibt in jeder Klasse eine endliche Zahl linear unabhängiger ganzer Divisoren.

Hierin ist auch der Fall eingeschlossen, wo es in der Klasse gar keinen ganzen Divisor gibt.

Die Zahl der in einer Klasse $(\mathfrak{q})$ enthaltenen linear unabhängigen ganzen Divisoren heißt die Dimension der Klasse und wird mit $\{\mathfrak{q}\}$ bezeichnet. Die Hauptklasse hat die Dimension 1. Denn in ihr ist der ganze Divisor 1 enthalten und kein anderer; wäre noch ein anderer vorhanden, etwa $\mathfrak{g}$, so müßte $\mathfrak{g} = \dfrac{\mathfrak{g}}{1}$ einer Funktion des Körpers entsprechen und diese Funktion würde Nullstellen, aber keine Unendlichkeitsstellen haben. Es ist also

$$\{1\} = 1 .$$

Aus unseren Betrachtungen ergibt sich, daß, wenn die Ordnung einer Klasse $(\mathfrak{q})$ gleich g ist, dann

$$\{\mathfrak{q}\} \leq g + 1 .$$

Da ferner alle Divisoren einer Klasse dieselbe Ordnung haben und ein ganzer Divisor immer eine positive Ordnung hat — abgesehen von dem Divisor 1 mit der Ordnung Null —, so ist die Dimension jeder Klasse mit negativer Ordnung oder der Ordnung Null gleich Null mit Ausnahme allein der Hauptklasse, deren Ordnung Null ist und deren Dimension gleich 1 ist.

Die Bestimmung der in einer Klasse enthaltenen ganzen Divisoren und der Dimension einer Klasse wird uns in den beiden nächsten Kapiteln beschäftigen.

§ 6. Die kanonische Klasse.

Außer der Hauptklasse ist noch eine andere Klasse von besonderer Wichtigkeit, die wir jetzt definieren wollen. Es sei ξ irgendeine Funktion des Körpers. Es sei für die Umgebung irgendeiner Stelle $\mathfrak{p}$

$$\xi = P(t) , \; d\xi = P'(t)\, dt ,$$

wo t in $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung ist und wo $P(t)$ eine nach steigenden Potenzen von t fortschreitende Reihe ist. Wenn $P'(t) = t^{\lambda} E(t)$, wo $E(t)$ eine Einheit für die Stelle $t = 0$ ist, so sagen wir, das Differential $d\xi$ ist durch $\mathfrak{p}^{\lambda}$ teilbar, gleichgültig, ob λ positiv, negativ oder Null ist. Der Exponent λ kann nur für eine endliche Zahl von Stellen von Null verschieden sein, wie wir jetzt zeigen wollen. Wir unterscheiden die beiden Fälle, wo ξ an der betrachteten Stelle endlich bleibt und es unendlich wird. Im ersten Falle sei ξ_0 der Wert von ξ an der Stelle. Es sei

(5) $$\xi = \xi_0 + e_0 t^{\alpha} + e_1 t^{\alpha+1} + \cdots, \quad (e_0 \neq 0, \ \alpha > 0).$$

Es wird
$$d\xi = (\alpha e_0 t^{\alpha-1} + \cdots)\, dt,$$
also $\lambda = \alpha - 1$. Aus der Gleichung (5) folgt aber, daß $\xi - \xi_0$ durch $\mathfrak{p}^{\alpha}$ teilbar ist, daß also $\mathfrak{p}$ ein Verzweigungsprimteiler in bezug auf ξ von der Ordnung $\alpha - 1$ ist. Es ist also im ersten Falle $\lambda \neq 0$ nur für diejenigen Primteiler, die Verzweigungsprimteiler in bezug auf ξ sind. Solcher gibt es nur eine endliche Zahl. Da es ferner nur eine endliche Zahl von Stellen gibt, für die der zweite Fall eintritt, an denen nämlich ξ unendlich wird, so kann λ nur für eine endliche Zahl von Stellen von Null verschieden sein. Wir betrachten den zweiten Fall genauer. Es sei an einer Stelle $\mathfrak{p}$

$$\xi = e_0 t^{-\beta} + e_1 t^{-\beta+1} + \cdots, \quad (\beta > 0, \ e_0 \neq 0)$$
$$d\xi = (-\beta e_0 t^{-\beta-1} + \cdots)\, dt,$$

so daß in diesem Falle $\lambda = -(\beta + 1) = +(\beta - 1) - 2\beta$ wird. Ferner folgt, daß ξ^{-1} durch $\mathfrak{p}^{\beta}$ teilbar ist, daß also $\mathfrak{p}$ ein Verzweigungsprimteiler der Ordnung $\beta - 1$ ist und daß ferner der Nenner $\mathfrak{n}_{\xi}$ von ξ genau durch $\mathfrak{p}^{\beta}$ teilbar ist. Fassen wir alles zusammen, so können wir sagen:

Das Differential $d\xi$ ist genau teilbar durch $\dfrac{\mathfrak{z}_{\xi}}{\mathfrak{n}_{\xi}^2}$, wo $\mathfrak{z}_{\xi}$ der Verzweigungsdivisor und $\mathfrak{n}_{\xi}$ der Nennerdivisor von ξ ist.

Der Divisor, durch den ein Differential teilbar ist, hängt wesentlich ab von dem Differential, aber wir zeigen jetzt, daß alle diese Divisoren derselben Klasse angehören. Es sei ζ irgendeine (nicht konstante) zweite Funktion des Körpers. Wir bezeichnen die Divisoren, durch die $d\xi$ und $d\zeta$ teilbar sind, mit $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$. Wählen wir η passend, so können wir alle Funktionen des Körpers als rationale Funktionen von ξ und η darstellen, also auch ζ. Es sei $\zeta = R(\xi, \eta)$. Die zwischen ξ und η bestehende unzerlegbare Gleichung sei $\varphi(\xi, \eta) = 0$. Es ist

$$d\zeta = \frac{\partial R}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial R}{\partial \eta} d\eta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta = 0$$

und

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{v}} = \frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}} \frac{\partial R}{\partial \eta},$$

also gleich einer rationalen Funktion von ξ, η und damit gleich einer Funktion des Körpers. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{v} \sim \mathfrak{w}$.

Die Klasse, zu der hiernach alle Divisoren gehören, die den Differentialen der Funktionen des Körpers (xy) entsprechen, heißt die **Differentialklasse** oder die **kanonische Klasse**. Die Ordnung der Differentialklasse ist, wie wir später sehen werden, immer grade und wird mit $2p-2$ bezeichnet. Die Zahl p heißt das **Geschlecht des Körpers**. Ihre eigentliche Bedeutung lernen wir später (Kap. VIII, § 4) kennen. Da alle Divisoren einer Klasse dieselbe Ordnung haben und diese nichts anderes ist als die Ordnung der Klasse, so ist für jede Funktion ξ

$$w_\xi - 2n_\xi = 2p - 2\,, \tag{6}$$

da $w_\xi - 2n_\xi$ die Ordnung des Divisors $\dfrac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ ist. Es ist danach der Wert von $w_\xi - 2n_\xi$ unabhängig von ξ. In Worten heißt das:

Die Differenz der Verzweigungszahl und der doppelten Zahl der Blätter ist dieselbe für alle Riemannschen Flächen, auf denen die Funktionen des Körpers eindeutig sind. Man setzt diese Zahl gleich $2p-2$ und nennt p das Geschlecht des Körpers. Es ergibt sich noch

Sind ξ und ζ irgend zwei nicht konstante Größen des Körpers, so ist $\dfrac{d\xi}{d\zeta}$ eine Funktion des Körpers. Es ist, in Primteiler zerlegt,

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{\mathfrak{z}_\xi \mathfrak{n}_\zeta^2}{\mathfrak{z}_\zeta \mathfrak{n}_\xi^2}\,, \tag{7}$$

wo $\mathfrak{z}_\xi$, $\mathfrak{z}_\zeta$ und $\mathfrak{n}_\xi$, $\mathfrak{n}_\zeta$ die Verzweigungsdivisoren und die Nennerdivisoren von ξ, ζ sind.

Wir gehen noch auf die Bedeutung der Differentialklasse ein. Ist ξ irgendeine nicht konstante Größe des Körpers, so gehört zu $d\xi$ der Divisor $\mathfrak{z}_\xi \mathfrak{n}_\xi^{-2}$ der Differentialklasse. Ist R eine Funktion des Körpers, so ist $Rd\xi$ eins seiner Differentiale. Diesem entspricht der Divisor

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\mathfrak{z}_\xi \mathfrak{n}_\xi^{-2}\,,$$

wenn $\mathfrak{r}$ der Divisor ist, den wir durch Zerlegung von R in Primteiler erhalten. Da $\mathfrak{r} \sim 1$, so ist $\mathfrak{q} \sim \mathfrak{z}_\xi \mathfrak{n}_\xi^{-2}$, gehört also der kanonischen Klasse an. Ist umgekehrt $\mathfrak{q}$ irgendein Divisor dieser Klasse und ξ irgendeine nicht konstante Größe des Körpers, so ist der Divisor

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{z}_\xi}$$

ein Divisor der Hauptklasse, entspricht also einer Funktion R des Körpers, und es ist $Rd\xi$ ein Differential des Körpers, dem der Divisor $\mathfrak{q}$ entspricht. Wir haben also:

Jedem Differential des Körpers entspricht ein Divisor der Differentialklasse, der angibt, wie das Differential Null und unendlich wird, und umgekehrt entspricht jedem Divisor der Differentialklasse ein Differential des Körpers.

§ 7. Beispiel 1.

Die Gleichung zwischen x und y sei

$$f(x, y) \quad y^2 + x^5 - 1 = 0\,.$$

Nehmen wir x als unabhängige Veränderliche, so ist $y = \sqrt{1 - x^5}$. Die Riemannsche Fläche über der x-Ebene ist zweiblättrig, $n_x = 2$. Sie hat 6 Verzweigungspunkte erster Ordnung, nämlich, wenn ω eine primitive fünfte Einheitswurzel ist, die Punkte 1, ω, ω^2, ω^3, ω^4 und den Punkt ∞. Die zu diesen Punkten gehörenden Primteiler seien bezeichnet mit $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2, \ldots \mathfrak{w}_6$. Es ist $w_x = 6$ und

$$w_x - 2n_x = 2p - 2 = 2\,.$$

Nehmen wir y als unabhängige Veränderliche, so ist $x = \sqrt[5]{1 - y^2}$. Die Riemannsche Fläche über der y-Ebene hat fünf Blätter; $n_y = 5$. Sie hat drei Verzweigungspunkte vierter Ordnung, nämlich $+1$, -1, ∞. Die zu den ersten beiden Stellen gehörenden Primteiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$. Zu der dritten gehört der Primteiler $\mathfrak{w}_6$. Es ist $w_y = 3 \cdot 4 = 12$ und

$$w_y - 2n_y = 2\,.$$

Da $2p - 2 = 2$, so ist das Geschlecht des hier betrachteten Körpers $p = 2$.

Genauer haben wir folgendes. Die Riemannsche Fläche über der x-Ebene hat nur einen unendlich fernen Punkt, der ein Verzweigungspunkt erster Ordnung ist und zu dem der Primteiler $\mathfrak{w}_6$ gehört. Es ist also

$$\mathfrak{n}_x = \mathfrak{w}_6^2\,.$$

Ähnlich findet man, daß

$$\mathfrak{n}_y = \mathfrak{w}_6^5\,.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{z}_x = \mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2 \ldots \mathfrak{w}_6\,, \quad \mathfrak{z}_y = \mathfrak{v}_1^4 \mathfrak{v}_2^4 \mathfrak{w}_6^4\,,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{z}_y\, \mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{z}_x\, \mathfrak{n}_y^2} = \frac{\mathfrak{v}_1^4 \mathfrak{v}_2^4 \mathfrak{w}_6^4 \mathfrak{w}_6^4}{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2 \ldots \mathfrak{w}_6 \mathfrak{w}_6^{10}} = \frac{\mathfrak{v}_1^4 \mathfrak{v}_2^4}{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{w}_5 \mathfrak{w}_6^3}\,.$$

Andererseits ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-5x^4}{2y} = -\frac{5}{2} \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^5}}\,.$$

Die Funktion $-\frac{5x^4}{2y}$ wird tatsächlich, wie am einfachsten aus der Form $-\frac{5}{2} \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^5}}$ hervorgeht, Null von der vierten Ordnung an den beiden

Stellen, wo $x = 0$, $y = \pm 1$, zu denen die Primteiler $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ gehören, und unendlich von der ersten Ordnung an den Stellen, zu denen die Primteiler $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots \mathfrak{w}_5$ gehören, aber unendlich dritter Ordnung für $x = \infty$.

§ 8. Beispiel 2.

Als zweites Beispiel nehmen wir das Beispiel 3 in Kap. V, § 4. Der Körper besteht in diesem Fall aus allen rationalen Funktionen von x und y, wenn zwischen x und y die Gleichung besteht

$$f(x, y) = y^4 + (8 - 10x)\, y^2 + (4 - 3x)^2 = 0,$$

oder, wenn wir setzen

$$\xi = -\frac{y^3 + (4 - 7x)\, y}{2\,(4 - 3x)}, \qquad \eta = y,$$

aus allen rationalen Funktionen von ξ, η, wenn zwischen ξ und η die Gleichung besteht

$$\eta^2 - 2\xi\eta + 4 - 3\xi^2 = 0, \tag{8}$$

wie wir in Kap. V, § 4 gesehen haben. Nehmen wir x als unabhängige Veränderliche, so haben wir eine vierblättrige Riemannsche Fläche. Die Verzweigungspunkte können nur dort liegen, wo $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird, oder im Punkte $x = \infty$. $\frac{\partial f}{\partial y} = 4\,y\,(y^2 + 4 - 5x)$ wird Null für folgende Punkte:

1. $x = \frac{4}{3}$, $y = 0$; 2. $x = 0$, $y = +2i$; 3. $x = 0$, $y = -2i$; 4. $x = 1$, $y = 1$; 5. $x = 1$, $y = -1$. Dazu kommt noch als sechster Punkt, der untersucht werden muß, der Punkt $x = \infty$. Da wir dies Beispiel auch später noch benutzen wollen, seien die Entwicklungen von y für die sechs Fälle angegeben. Sie sind nach den Methoden des Kap. II zu bestimmen.

$$1.\ y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{3\left(x - \frac{4}{3}\right)} \left[1 - \frac{15}{16}\left(x - \frac{4}{3}\right) + \frac{189}{128}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \cdots\right].$$

Wir haben also zwei verschiedene Entwicklungen in der Umgebung von $x = \frac{4}{3}$, die die Eigenschaft haben, daß für $x = \frac{4}{3}$ die Größe y den Wert Null annimmt. Die zu diesen Stellen gehörenden Primteiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$. Sie sind nicht Verzweigungsprimteiler in bezug auf x.

$$2.\ y = \quad 2i + x^{\frac{1}{2}} - i x - \frac{i}{4} x^2 + \cdots,$$

$$3.\ y = -\left(2i + x^{\frac{1}{2}} - i x - \frac{i}{4} x^2 + \cdots\right).$$

Die zu diesen beiden Entwicklungen gehörenden Primteiler seien mit

$\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ bezeichnet. Sie sind Verzweigungsprimteiler der ersten Ordnung in bezug auf x.

$$4.\ y = \quad 1 + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^{2} + \cdots .$$

$$5.\ y = -\left|1 + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^{2} + \cdots\right|.$$

Die hierdurch definierten Primteiler nennen wir $\mathfrak{w}_3$, $\mathfrak{w}_4$. Es sind Verzweigungsprimteiler erster Ordnung in bezug auf x.

$$6.\ y = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \cdots$$

und

$$y = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \cdots .$$

Die Riemannsche Fläche hat daher bei $x = \infty$ zwei Punkte, die beide Verzweigungspunkte erster Ordnung sind. Die zugehörigen Primteiler seien mit $\mathfrak{w}_5$, $\mathfrak{w}_6$ bezeichnet.

Die über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche hat vier Blätter und sechs Verzweigungspunkte erster Ordnung. Es ist also

$$n_x = 4,\ w_x = 6,\ w_x - 2n_x = 2p - 2 = -2\,,\ p = 0\,.$$

Nehmen wir ξ als unabhängige Veränderliche und konstruieren die Riemannsche Fläche über der ξ-Ebene, so erhalten wir eine zweiblättrige Fläche, wie aus der Gleichung (8) folgt. Aus dieser Gleichung ergibt sich $\eta = \xi \pm 2\sqrt{\xi^2 - 1}$, woraus man ersieht, daß die Fläche bei $\xi = +1$ und $\xi = -1$ Verzweigungspunkte erster Ordnung hat und sonst keine Verzweigungspunkte. Die zu diesen Stellen gehörenden Primteiler sind die Primteiler $\mathfrak{w}_3$. $\mathfrak{w}_4$. Es ist

$$n_\xi = 2,\ w_\xi = 2,\ w_\xi - 2n_\xi = -2 = w_x - 2n_x\,.$$

Wir wollen auch noch $\dfrac{dx}{d\xi}$ bestimmen. Wir zerlegen erst x und ξ in Primteiler. Die Riemannsche Fläche hat für $x = 0$ zwei Verzweigungspunkte mit den Primteilern $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$. Der Zähler $\mathfrak{z}_x$ von x ist daher $\mathfrak{z}_x = \mathfrak{w}_1^2\mathfrak{w}_2^2$. Für unendlich großes x hat die Fläche zwei Verzweigungspunkte erster Ordnung, denen die Primteiler $\mathfrak{w}_5$, $\mathfrak{w}_6$ entsprechen. Der Nenner von x ist also $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{w}_5^2\mathfrak{w}_6^2$ und es ist

$$x = \frac{\mathfrak{w}_1^2\,\mathfrak{w}_2^2}{\mathfrak{w}_5^2\,\mathfrak{w}_6^2}\,. \tag{9}$$

Für $\xi = 0$ ist $\eta\ (\quad y) = \pm 2i$ und für x ergibt sich aus der Definitionsgleichung von ξ als zugehöriger Wert 0. Es wird also der Zähler $\mathfrak{z}_\xi$ von ξ nur die Primteiler $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ enthalten. Da die über der ξ-Ebene ausgebreitete

Riemannsche Fläche bei $\xi = 0$ zwei gewöhnliche Punkte hat, so müssen zu diesen beiden die Primteiler $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ gehören und es wird ξ an diesen Stellen nur von der ersten Ordnung Null, so daß $\mathfrak{z}_\xi = \mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2$. Man findet dasselbe Ergebnis, wenn man die Entwicklungen 3. und 4., durch die $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ definiert sind, in die Definitionsgleichung von ξ einsetzt und nach Potenzen von x entwickelt. Die Entwicklungen beginnen mit der $\frac{1}{2}$-Potenz von x. Für $\xi = \infty$ hat die Riemannsche Fläche über der ξ-Ebene zwei gewöhnliche Punkte. Da für $\xi = \infty$ auch η und also auch y unendlich ist, so ist auch x unendlich; denn y wird nur für unendliches x unendlich. Die beiden Primteiler, die den beiden Punkten bei $\xi = \infty$ entsprechen, sind also $\mathfrak{w}_5$ und $\mathfrak{w}_6$. Es wird $\mathfrak{n}_\xi = \mathfrak{w}_5 \mathfrak{w}_6$ und

$$\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi} = \frac{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2}{\mathfrak{w}_5 \mathfrak{w}_6}. \tag{10}$$

Vergleichen wir (9) mit (10), so sehen wir, daß ξ^2 und x sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden können, da ihre Zerlegung in Primteiler dieselbe ist. Es ist ja auch in der Tat $\xi^2 = x$, wie wir in Kap. V, § 4 gesehen haben.

Es ist ferner
$$\mathfrak{d}_x = \mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2 \ldots \mathfrak{w}_6 , \quad \mathfrak{d}_\xi = \mathfrak{w}_3 \mathfrak{w}_4 ,$$
also
$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\mathfrak{d}_x \mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{d}_\xi \mathfrak{n}_x^2} = \frac{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{w}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{w}_5^3 \mathfrak{w}_6^3}{\mathfrak{w}_3 \mathfrak{w}_4 \mathfrak{w}_5^4 \mathfrak{w}_6^4} = \frac{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2}{\mathfrak{w}_5 \mathfrak{w}_6}.$$
Es kann sich also $\frac{dx}{d\xi}$ nur durch einen konstanten Faktor von ξ unterscheiden. Es ist ja auch $x = \xi^2$ und also $\frac{dx}{d\xi} = 2\xi$.

Siebentes Kapitel.

Rechnen mit Systemen.*)

§ 1. Lineare Substitutionen.

Zwischen den m Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ und den m Größen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ mögen die m linearen Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} \eta_1 &= p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 + \cdots + p_{1m}\xi_m , \\ \eta_2 &= p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + \cdots + p_{2m}\xi_m , \\ &\text{— — — — — — — — — — — —} \\ \eta_m &= p_{m1}\xi_1 + p_{m2}\xi_2 + \cdots + p_{mm}\xi_m . \end{aligned} \tag{1}$$

*) Eine ausführliche Darstellung findet man in L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, bearbeitet und fortgeführt von K. Hensel, Bd. I (Teubner. Leipzig 1903).

Man sagt in diesem Falle: die η gehen durch eine **lineare homogene Substitution** aus den ξ hervor. Die Substitution ist bestimmt durch das System ihrer m^2 Koeffizienten p_{kl}, das wir kurz mit p bezeichnen, und zwar sei

$$p = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ - & - & - & - \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{mm} \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Die Anordnung der Elemente im System p ist, worauf ausdrücklich hingewiesen sei, nicht dieselbe wie in den Gleichungen (1), sondern es sind gegenüber (1) Horizontal- und Vertikalreihen vertauscht. Das System, das aus p durch Vertauschen der Horizontal- mit den Vertikalreihen hervorgeht, also die p_{kl} in derselben Anordnung wie in (1) zeigt, heißt das zu p **adjungierte System** und wird mit $\bar{p}$ bezeichnet.

Wir nennen die durch (1) vermittelte Substitution auch kurz die Substitution p und schreiben sie abgekürzt in der Form

$$\eta = \xi p\,. \tag{3}$$

Wie aus den ξ durch die Substitution p die Größen η hervorgehen, so können wir aus den η durch eine zweite lineare Substitution q neue Größen ξ hervorgehen lassen, also durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= q_{11}\,\eta_1 + q_{12}\,\eta_2 + \cdots + q_{1m}\,\eta_m\,, \\ \zeta_2 &= q_{21}\,\eta_1 + q_{22}\,\eta_2 + \cdots + q_{2m}\,\eta_m\,, \\ &- - - - - - - - - - - - \\ \zeta_m &= q_{m1}\,\eta_1 + q_{m2}\,\eta_2 + \cdots + q_{mm}\,\eta_m\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen schreiben wir auch in der Form

$$\zeta = \eta q\,. \tag{5}$$

Setzen wir die Werte der η aus (1) in (4) ein, so erhalten wir Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= r_{11}\,\xi_1 + r_{12}\,\xi_2 + \cdots + r_{1m}\,\xi_m\,, \\ \zeta_2 &= r_{21}\,\xi_1 + r_{22}\,\xi_2 + \cdots + r_{2m}\,\xi_m\,, \\ &- - - - - - - - - - - - \\ \zeta_m &= r_{m1}\,\xi_1 + r_{m2}\,\xi_2 + \cdots + r_{mm}\,\xi_m\,, \end{aligned} \tag{6}$$

also eine lineare Substitution r, die die ξ in die ζ überführt. Wir schreiben wieder kurz

$$\zeta = \xi r\,. \tag{7}$$

Man findet

$$\begin{aligned} r_{1\alpha} &= p_{1\alpha}\,q_{11} + p_{2\alpha}\,q_{12} + \cdots + p_{m\alpha}\,q_{1m}\,, \\ r_{2\alpha} &= p_{1\alpha}\,q_{21} + p_{2\alpha}\,q_{22} + \cdots + p_{m\alpha}\,q_{2m}\,, \\ &- - - - - - - - - - - - \\ r_{m\alpha} &= p_{1\alpha}\,q_{m1} + p_{2\alpha}\,q_{m2} + \cdots + p_{m\alpha}\,q_{mm}\,. \\ &(\alpha = 1, 2, \ldots m)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (3) und (5) folgt rein formal

$$\ddot{\xi} = \xi pq\,.$$

Vergleichen wir dies mit (7), so werden wir dazu geführt, zu schreiben

(9) $$r = pq\,.$$

Definition I. Man nennt daher die durch das Ausführen der beiden linearen Substitutionen p und q — in dieser Reihenfolge — entstehende lineare Substitution r aus p und q zusammengesetzt oder auch geradezu das Produkt von p und q. Ebenso nennt man das System r das Produkt der Systeme p und q.

§ 2. Multiplikation von Systemen.

Wir müssen uns zunächst die durch die Gleichungen (8) gegebene Multiplikationsregel für Systeme möglichst klarmachen, da wir davon ausgiebigen Gebrauch machen werden.

Es seien

$$\begin{aligned} &a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ a_m\,,\\ &b_1\,,\ b_2\,,\ \ldots\ b_m \end{aligned}$$

zwei Reihen von je m Größen. Dann versteht man unter dem Produkte der beiden Reihen die Summe der Produkte je zweier entsprechender Größen, also den Ausdruck

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m\,.$$

Definition II. Es seien p und q zwei Systeme. Dann versteht man unter dem Produkte pq von p und q das System, das an der Stelle, wo seine α-te Horizontalreihe und seine β-te Vertikalreihe sich treffen, das Produkt aus der α-ten Horizontalreihe von p und der β-ten Vertikalreihe aus q stehen hat.

Oder: Man erhält die α-te Horizontalreihe des Systems pq, indem man die α-te Horizontalreihe von p der Reihe nach mit den Vertikalreihen von q multipliziert.

Man überzeugt sich leicht, daß diese Definition mit der durch die Gleichungen (8) gegebenen übereinstimmt.

Einige einfache Beispiele mögen die Definition erläutern. Weitere Beispiele finden sich in Nr. 6.

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma, & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma, & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 3, & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3, & 3\cdot 1 - 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 15 & -5 \end{pmatrix},$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 3, & -1\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ 3\cdot 2 - 2\cdot 3, & 3\cdot -1 - 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}.$

Die Beispiele 2. und 3. zeigen, daß bei der Multiplikation von Systemen **nicht** das Vertauschungsgesetz gilt.

Es wird dem Leser dringend empfohlen, sich durch Rechnen von Zahlenbeispielen mit der Multiplikation von Systemen ganz vertraut zu machen.

Die für die Multiplikation von Systemen gegebene Definition gilt nicht nur für quadratische, sondern auch für rechteckige Systeme, wenn nur in den Horizontalreihen des ersten Faktors geradeso viele Elemente stehen wie in den Vertikalreihen des zweiten. Z. B.

4. $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1+3a_2-a_3, & 2b_1+3b_2-b_3, & 2c_1+3c_2-c_3 \\ 4a_1+a_2+3a_3, & 4b_1+b_2+3b_3 & 4c_1+c_2+3c_3 \end{pmatrix},$$

5. $$(x\ \ y\ \ z) \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \\ c & \gamma \end{pmatrix} = (a\,x + b\,y + c\,z\,, \quad \alpha x + \beta\,y + \gamma z)\,.$$

6. $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z \end{pmatrix}.$$

7. $$(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} = (p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 + p_{31}\xi_3, \quad p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + p_{23}\xi_3, \quad p_{31}\xi_1 + p_{32}\xi_2 + p_{33}\xi_3)$$

Aus dem letzten Beispiel ersehen wir: Bezeichnen wir die aus je einer Horizontalreihe bestehenden Systeme $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$, $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m)$, $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ mit ξ, η, ζ, so sind die zunächst symbolisch eingeführten Gleichungen (3), (5), (7) Gleichungen zwischen Systemen.

Wie schon gesagt, gilt für die Multiplikation von Systemen nicht das Vertauschungsgesetz, wohl aber gilt das Zusammenfassungsgesetz, d. h. sind a, b, c drei Systeme, so ist es bei der Berechnung von abc gleichgültig, ob man erst ab bestimmt und das Ergebnis hinten mit c multipliziert, oder ob man erst bc ausrechnet und dann vorn mit a multipliziert. Davon überzeugt man sich leicht durch Ausrechnung. Man kann also schlechtweg vom Produkte abc sprechen und ebenso von Produkten mit mehr als drei Faktoren.

Setzen wir das Multiplizieren von Systemen als bekannt voraus, so können wir, wie schon bemerkt, die linearen Substitutionen (1), (4), (6) als Gleichungen zwischen Systemen in der Form (3), (5), (7) schreiben, und es **folgt** dann aus (3) und (5), und zwar **nicht mehr nur formal**, $\zeta = \xi\, pq$ und also durch Vergleich mit (7) $r = pq$.

§ 3. Quadratische Systeme.

Wir betrachten in diesem §, wo nichts anderes gesagt ist, quadratische Systeme von m^2 Elementen.

1. Die Determinante. Jedes quadratische System p hat eine bestimmte Determinante, nämlich die aus den m^2 Elementen des Systems bestehende. Sie wird mit $p|$ bezeichnet. Wir betrachten im folgenden nur solche quadratische Systeme, deren Determinante nicht identisch Null ist. Vergleicht man den Multiplikationssatz der Determinanten mit der Definition des Produktes von Systemen, so ergibt sich

Satz I. Die Determinante eines Produktes von quadratischen Systemen ist gleich dem Produkt ihrer Determinanten.

2. Adjungierte Systeme. Vertauscht man in einem System p die Horizontal- mit den Vertikalreihen, so heißt das neue System das adjungierte zu p und wird mit $\bar{p}$ bezeichnet. Diese schon in § 3 gegebene Definition ist hier der Vollständigkeit wegen wiederholt. Die Definition gilt nicht nur für quadratische Systeme. Ist z. B. ξ wieder das nur aus der einen Horizontalreihe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ bestehende System, so hat das adjungierte System $\bar{\xi}$ nur die eine Vertikalreihe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$. Da eine Determinante ihren Wert nicht ändert, wenn man Reihen mit Spalten vertauscht, so gilt:

Satz II. Ein quadratisches System und sein adjungiertes haben dieselbe Determinante.

Ferner gilt

Satz III. Das adjungierte des adjungierten Systems ist das ursprüngliche System.

Es seien p und q zwei Systeme und es sei

$$pq = r, \quad \bar{q}\,\bar{p} = r'.$$

Wir erhalten das Element $r_{\beta\alpha}$ von r, also das Element, das in der α-ten Reihe und in der β-ten Spalte steht, indem wir die α-te Horizontalreihe von p mit der β-ten Vertikalreihe von q multiplizieren. Wir erhalten ebenso das Element $r'_{\alpha\beta}$ von r', indem wir die β-te Horizontalreihe von $\bar{q}$ mit der α-ten Vertikalreihe von $\bar{p}$ multiplizieren. Da aber die Horizontalreihen von $\bar{q}$ die Vertikalreihen von q sind und die Vertikalreihen von $\bar{p}$ die Horizontalreihen von p, so folgt $r_{\beta\alpha} = r'_{\alpha\beta}$. Das heißt aber, es ist $r' = \bar{r}$. Aus $pq = r$ folgt also $\bar{q}\bar{p} = \bar{r}$ oder

$$\overline{(pq)} = \bar{q} \cdot \bar{p}.$$

Sind a, b, c drei Systeme, so ergibt sich durch wiederholte Anwendung des Gefundenen

$$\overline{(a\,b\,c)} = \overline{(ab)c} = \bar{c} \cdot \overline{ab} = \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a}\,.$$

Daher haben wir:

Satz IV. Das adjungierte System zu einem Produkte ist gleich dem Produkte der adjungierten, aber in umgekehrter Reihenfolge.

Ein System, das mit seinem adjungierten übereinstimmt, heißt symmetrisch.

3. Das Einheitssystem. Bei der gewöhnlichen Multiplikation von Zahlen spielt der Faktor 1 eine besondere Rolle, indem er zu einem Produkte beliebig hinzugefügt werden kann, ohne den Wert des Produktes zu ändern. Es fragt sich, ob es nicht zwei Systeme e und e' so gibt, daß für jedes System p

(10) $$p\,e = p\,, \quad e'\,p = p\,.$$

Nehmen wir an, e und e' existieren, dann folgt aus den Gleichungen (10), indem wir in der ersten $p = e'$ und in der zweiten $p = e$ setzen,

$$e'\,e = e' = e\,.$$

Die α-te Horizontalreihe von e oder e' sei $e_1, e_2, \ldots e_m$. Wenn wir diese Reihe der Reihe nach mit den Vertikalreihen von p multiplizieren, erhalten wir die α-te Horizontalreihe von ep, was gleich p sein soll, so daß sich die α-te Horizontalreihe von p ergeben muß, gleichgültig wie p beschaffen ist. Daraus folgt aber, daß $e_\alpha = 1$ sein muß, während die anderen $e_i = 0$ sind. In e muß also in der α-ten Horizontalreihe an α-ter Stelle eine 1 stehen und an den anderen Stellen 0. Oder: Wenn ein System e der verlangten Art existiert, so stehen in seiner Hauptdiagonale Einsen und an allen anderen Stellen Nullen. Wie man aber leicht sieht, hat dies System die gewünschte Eigenschaft. Es heißt das Einheitssystem und wird mit 1 bezeichnet. Es ist also für jedes System p

(11) $$p \cdot 1 = 1 \cdot p = p\,.$$

Die Determinante des Einheitssystems ist offenbar gleich 1.

4. Reziproke Systeme. Wir fragen uns jetzt, ob es zu einem (quadratischen) System p Systeme p' und p'' gibt, so daß

$$pp' = 1\,, \quad p''p = 1\,.$$

Multiplizieren wir die zweite dieser Gleichungen hinten mit p', so erhalten wir unter Beachtung der ersten

$$p''\,pp' = p''\,(pp') = p'' = p'\,.$$

Ist also $pp' = 1$, so ist auch $p'p = 1$. Weiter sehen wir, daß es höchstens ein System p' der verlangten Art geben kann. Ist nämlich $pp'_1 = 1$ und auch $pp'_2 = 1$, also auch nach dem eben bewiesenen $p'_1\,p = p'_2\,p = 1$, so folgt aus $pp'_1 = 1$ durch vordere Multiplikation mit p'_2

$$(p'_2\,p)\,p'_1 = p'_2\,,$$

also wegen $p'_2\,p = 1$, $p'_1 = p'_2$.

Das System p' heißt, wenn es existiert, das zu p reziproke System und wird mit p^{-1} bezeichnet. Es ist

(12) $$pp^{-1} = p^{-1}p = 1.$$

Hieraus ergibt sich:

Satz V. Das reziproke System zu dem reziproken eines Systems ist das ursprüngliche System.

Gehen wir in (12) zu den Determinanten über, so folgt

(13) $$|p|\,|p^{-1}| = 1,$$

also:

Satz VI. Die Determinanten reziproker Systeme sind reziproke Zahlen. Daraus schließen wir, daß zu einem System p das reziproke nur vorhanden sein kann, wenn seine Determinante von Null verschieden ist. Wir setzen also voraus, daß

(14) $$|p| \neq 0.$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so existiert das reziproke System, und wir können es nach bekannten Determinantensätzen leicht angeben. Es sei P_{ki} die Unterdeterminante des Elementes p_{ki} der Determinante $|p|$. Das quadratische System der P_{ki} sei mit P bezeichnet und es sei p_0 das System von m^2 Elementen, in dessen Hauptdiagonale überall die Determinante $|p|$ steht, während alle anderen Elemente Null sind. Dann können wir die Gleichungen, die zwischen den Elementen einer Determinante und ihren Unterdeterminanten bestehen, in der Form schreiben

$$p\,\bar{P} = p_0, \qquad \bar{P}\,p = p_0.$$

Daraus folgt dann:

Satz VII. Dividiert man in dem System P der Unterdeterminanten erster Ordnung des Systems p alle Elemente durch die Determinante $|p| \neq 0$ und vertauscht dann die Horizontal- mit den Vertikalreihen, so ist das so erhaltene System das reziproke p^{-1} von p, d. h. es ist

$$p\,p^{-1} = p^{-1}p = 1$$

und dies System ist das einzige, das diese Eigenschaft hat.

Setzen wir $a\,d - bc = \delta$, so ist z. B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{\delta} & -\dfrac{b}{\delta} \\ -\dfrac{c}{\delta} & \dfrac{a}{\delta} \end{pmatrix}.$$

Sind p, q, r drei Systeme mit von Null verschiedener Determinante, so ist wegen des Zusammenfassungsgesetzes

$$(p\,q\,r)\,(r^{-1}\,q^{-1}\,p^{-1}) = p\,q\,(rr^{-1})\,q^{-1}p^{-1} = p\,(q\,q^{-1})\,p^{-1} = pp^{-1} = 1.$$

Es ist also $(pqr)^{-1} = r^{-1} q^{-1} p^{-1}$
oder in Worten:

Satz VIII. Das reziproke System eines Produktes ist gleich dem Produkt der reziproken Systeme, aber in umgekehrter Reihenfolge.

5. Komplementäre Systeme. Es sei wieder p ein System, dessen Determinante von Null verschieden ist, und es sei p' das adjungierte seines reziproken, also

$$p' = (p^{-1}).$$

Gehen wir in der Gleichung $pp^{-1} = 1$ links und rechts zu den adjungierten Systemen über, so folgt, da das Einheitssystem dabei ungeändert bleibt, $p'\bar{p} = 1$, d. h. aber, es sind p' und $\bar{p}$ reziproke Systeme. Oder:

Satz IX. Das reziproke zum adjungierten eines Systems ist gleich dem adjungierten seines reziproken.

Dies System heißt das komplementäre System zu dem ursprünglichen. Da das adjungierte System $\bar{p}'$ von p' gleich p^{-1} ist und das reziproke hiervon p, so folgt

Satz X. Ist ein System zu einem anderen komplementär, so ist auch das andere zum ersten komplementär.

Schließlich folgt noch aus den entsprechenden Sätzen für adjungierte und reziproke Systeme

Satz XI. Das komplementäre System zu einem Produkt von Systemen ist gleich dem Produkt der komplementären Systeme in derselben Reihenfolge.

§ 4. Einige besondere Systeme.

1. Multiplikationssysteme.

Es sei M ein quadratisches System, das außerhalb der Hauptdiagonale nur Nullen hat. Die Elemente der Hauptdiagonale seien $M_1, M_2, \ldots M_m$. Ein solches System heißt Multiplikationssystem. Seine Determinante ist $M_1 M_2 \ldots M_m$.

Diese Bezeichnung wird sofort klar, wenn wir die Wirkung betrachten, die die Multiplikation mit einem derartigen System hat. Es genügt, den Fall $m = 3$ zu nehmen. Es wird

$$pM = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 p_{11}, & M_2 p_{21}, & M_3 p_{31} \\ M_1 p_{12}, & M_2 p_{22}, & M_3 p_{32} \\ M_1 p_{13}, & M_2 p_{23}, & M_3 p_{33} \end{Bmatrix},$$

$$Mp = \begin{Bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 p_{11}, & M_1 p_{21}, & M_1 p_{31} \\ M_2 p_{12}, & M_2 p_{22}, & M_2 p_{32} \\ M_3 p_{13}, & M_3 p_{23}, & M_3 p_{33} \end{Bmatrix}.$$

Also:

Satz XII. Wird ein System mit einem Multiplikationssystem, dessen Diagonale $M_1, M_2, \ldots M_m$ ist, hinten multipliziert, so werden seine Vertikalreihen, wird es vorne multipliziert, so werden seine Horizontalreihen der Reihe nach mit $M_1, M_2, \ldots M_m$ multipliziert.

Das System, das multipliziert wird, braucht nicht quadratisch zu sein. Die Richtigkeit folgender beider Sätze erkennt man sofort:

Satz XIII. Multiplikationssysteme sind vertauschbar.

Satz XIV. Das reziproke eines Multiplikationssystems ist das Multiplikationssystem, dessen Diagonalglieder die reziproken Werte derjenigen des ursprünglichen Systems sind.

2. Additionssysteme.

Es sei A_α das System, das aus dem Einheitssystem dadurch hervorgeht, daß die α-te Vertikalreihe ersetzt wird durch

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\alpha-1}, 1, \lambda_{\alpha+1}, \ldots \lambda_m .$$

Ein solches System heißt Additionssystem. Seine Determinante ist 1.

Es wird etwa für $m = 4$, $\alpha = 3$

$$pA = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & p_{41} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{43} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} p_{11}, & p_{21}, & p_{31} + \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{21} + \lambda_4 p_{41}, & p_{41} \\ p_{12}, & p_{22}, & p_{32} + \lambda_1 p_{12} + \lambda_2 p_{22} + \lambda_4 p_{42}, & p_{42} \\ p_{13}, & p_{23}, & p_{33} + \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{23} + \lambda_4 p_{43}, & p_{43} \\ p_{14}, & p_{24}, & p_{34} + \lambda_1 p_{14} + \lambda_2 p_{24} + \lambda_4 p_{44}, & p_{44} \end{Bmatrix}.$$

Also:

Satz XV. Wird ein System mit dem Additionssystem A_α hinten multipliziert, so wird zu seiner α-ten Vertikalreihe das λ_i-fache der i-ten Vertikalreihe addiert ($i \neq \alpha$).

Das multiplizierte System braucht nicht quadratisch zu sein.

3. Vertauschungssysteme.

Es sei $V_{\alpha\beta}$ das System, das aus dem Einheitssystem durch Vertauschen der α-ten mit der β-ten Horizontalreihe hervorgeht oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Vertauschen der α-ten und β-ten Vertikalreihe. Wir nennen ein solches System ein Vertauschungssystem. Seine Determinante ist -1.

Wir nehmen als Beispiel $m=4$, $\alpha=1$, $\beta=3$. Es wird

$$pV_{13}=\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & p_{41} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{43} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_{31} & p_{21} & p_{11} & p_{41} \\ p_{32} & p_{22} & p_{12} & p_{42} \\ p_{33} & p_{23} & p_{13} & p_{43} \\ p_{34} & p_{24} & p_{14} & p_{44} \end{Bmatrix},$$

$$V_{13}p=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & p_{41} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{43} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{43} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & p_{42} \\ p_{11} & p_{21} & p_{31} & p_{41} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{Bmatrix}.$$

Also:

Satz XVI. Durch hintere Multiplikation mit dem Vertauschungssystem $V_{\alpha\beta}$ werden die α-te und β-te Vertikalreihe und durch vordere die α-te und β-te Horizontalreihe vertauscht.

Auch hier braucht das multiplizierte System nicht quadratisch zu sein.

§ 5. Quadratische Systeme, deren Elemente Funktionen einer Veränderlichen x sind.

1. Definitionen.

Def. III. Sind die Elemente eines quadratischen Systems ganze rationale Funktionen von x und ist seine Determinante von x unabhängig und von Null verschieden, so nennen wir das System eine Einheit.

Def. IV. Sind die Elemente eines quadratischen Systems rationale Funktionen von x, die für $x=a$ nicht unendlich werden, oder gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$, und ist die Determinante des Systems eine Einheit für $x=a$, so nennen wir das System eine Einheit für die Stelle $x=a$.

2. Sätze.

Satz XVII. Produkte von Einheiten sind wieder Einheiten. Adjungierte, reziproke und komplementäre Systeme von Einheiten sind auch Einheiten. Das gilt auch von Einheiten für eine Stelle $x=a$.

Diese Sätze ergeben sich aus den für die Einheiten gegebenen Definitionen in Verbindung mit den Regeln für die Multiplikation von Systemen.

Satz XVIII. Es bedeute g das System, das aus der einen Horizontalreihe

$$(g_1,\ g_2,\dots g_m)$$

besteht, wo die g_i rationale Funktionen von x sein sollen;

es sei ferner das System p eine Einheit für $x = a$. Setzen wir

$$(15) \qquad \mathfrak{P} = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_m) = g p,$$

so werden die $\mathfrak{P}_i$ dann und nur dann sämtlich für $x = a$ nicht unendlich, wenn die g_i für $x = a$ nicht unendlich werden.

Zunächst ergibt sich sofort aus den Voraussetzungen, daß die $\mathfrak{P}_i$ sämtlich für $x = a$ nicht unendlich werden, wenn die g_i für die Umgebung von $x = a$ ganz sind. Sind umgekehrt alle $\mathfrak{P}_i$ ganz für $x = a$, so folgern wir aus (15)

$$g = \mathfrak{P} p^{-1}.$$

Da aber p^{-1} gleichzeitig mit p eine Einheit für $x = a$ ist, so folgt, daß die g für $x = a$ nicht unendlich werden können, wenn die $\mathfrak{P}_i$ es nicht werden.

Satz XIX. Umkehrung von XVIII. Sind in (15) die $\mathfrak{P}_i$ dann und nur dann ganz für $x = a$, wenn die g_i es sind, und ist p nicht identisch Null, so ist p eine Einheit für $x = a$.

Wählen wir in (15) $g_\alpha = 1$ und die anderen $g_i = 0$, so wird

$$\mathfrak{P} = (p_{1\alpha}, p_{2\alpha}, \ldots p_{m\alpha})$$

und daher müssen die $p_{i\alpha}$ nach Voraussetzung ganz für $x = a$ sein. Also sind alle Elemente von p nicht unendlich für $x = a$ und dasselbe gilt daher von der Determinante $|p|$. Bezeichnen wir das zu p reziproke System mit q, so folgt aus (15)

$$g = \mathfrak{P} q.$$

Wählen wir hierin $\mathfrak{P}_\alpha = 1$ und alle anderen $\mathfrak{P}_i = 0$, so wird

$$g = (q_{1\alpha}, q_{2\alpha}, \ldots q_{m\alpha})$$

und es sind daher nach Voraussetzung die $q_{i\alpha}$ nicht unendlich für $x = a$. Es sind also auch die Elemente von q ganz für $x = a$ und daher auch die Determinante $|q|$. Aber da p und q reziprok sind, so ist $|p| \cdot |q| = 1$ und es müssen daher $|p|$ und $|q|$ Einheiten für $x = a$ sein. Damit ist aber Satz XIX bewiesen.

Satz XX. Es seien in dem quadratischen System p die Elemente Potenzreihen von $x - a$, die in endlicher Zahl negative Potenzen enthalten dürfen. Die Determinante $|p|$ sei nicht identisch Null. Dann gibt es ein System S folgender Art.

a) Die Elemente von S sind rationale Funktionen von x.

b) Es ist S eine Einheit für alle endlichen Werte von x, höchstens mit Ausnahme von $x = a$.

c) Es ist das System

$$q = pS$$

eine Einheit für $x = a$.

Das System S ist nicht etwa eindeutig bestimmt; das ist aber auch nicht notwendig für unsere Zwecke. Es sei dem Leser empfohlen, bei dem folgenden Beweise eins der weiter unten folgenden Beispiele als Erläuterung zu benutzen.

Zunächst multiplizieren wir die Vertikalreihen von p mit solchen ganzen positiven oder negativen Potenzen von $x-a$, daß in dem neu entstehenden System $\mathfrak{P}$ alle Elemente gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ sind und daß in jeder Vertikalreihe mindestens ein Element steht, das für $x=a$ nicht Null wird. Um das auszuführen, haben wir p mit einem Multiplikationssystem S_1 hinten zu multiplizieren, in dessen Diagonale ganzzahlige Potenzen von $x-a$ stehen, so daß

$$\mathfrak{P} = pS_1\,. \tag{16}$$

Die Determinante von S_1 ist eine ganzzahlige Potenz von $x-a$ und es ist S_1 eine Einheit für alle endlichen Stellen x mit höchstens der Ausnahme $x=a$. Wenn die Determinante $|\mathfrak{P}|$ des Systems $\mathfrak{P}$ für $x=a$ von Null verschieden ist, so ist $\mathfrak{P}$ eine Einheit für $x=a$ und unser Satz ist bewiesen. Es ist dann $S=S_1$ und $q=\mathfrak{P}$.

Es sei jetzt $|\mathfrak{P}|=0$ für $x=a$, es sei also

$$|\mathfrak{P}| = (x-a)^{\varrho} E\,, \tag{17}$$

wo $\varrho>0$ und E eine Einheit für $x=a$ ist. Wir bezeichnen den Wert, den das Element $\mathfrak{P}_{kl}$ von $\mathfrak{P}$ für $x=a$ annimmt, mit r_{kl}. Nach unserer Annahme ist die Determinante der r_{kl} gleich Null. Es gibt daher Konstanten, $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$, die nicht sämtlich verschwinden, so daß die Gleichungen bestehen

$$\mu_1 r_{1\alpha} + \mu_2 r_{2\alpha} + \cdots + \mu_m r_{m\alpha} = 0\,, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)\,.$$

Es sei z. B. μ_1 von Null verschieden. Wir dividieren dann mit μ_1 und setzen $\mu_i/\mu_1 = \lambda_i$, so daß

$$r_{1\alpha} + \lambda_2 r_{2\alpha} + \cdots + \lambda_m r_{m\alpha} = 0\,, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)\,.$$

Addieren wir daher in $\mathfrak{P}$ das λ_2-fache der zweiten Vertikalreihe, das λ_3-fache der dritten usw. zur ersten Vertikalreihe, so entsteht ein neues System $\mathfrak{P}'$, in dem die Elemente der ersten Vertikalreihe sämtlich für $x=a$ verschwinden, also mindestens durch die erste Potenz von $x-a$ teilbar werden. Um $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ überzuführen, haben wir $\mathfrak{P}$ hinten mit einem Additionssystem zu multiplizieren. Dies System sei mit S_2 bezeichnet. Es geht aus dem Einheitssystem hervor, indem man die Nullen von dessen erster Vertikalreihe durch $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m$ ersetzt. Es wird

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} S_2\,. \tag{18}$$

Da $|S_2| = 1$ und da die Elemente von S_2 konstant sind, so ist S_2 eine Einheit.

Wir dividieren die erste Vertikalreihe von $\mathfrak{P}'$ mit $x-a$ oder, wenn möglich, durch eine höhere Potenz von $x-a$. Dazu müssen wir $\mathfrak{P}'$ mit einem Multiplikationssystem S_3 hinten multiplizieren, das dadurch entsteht, daß in dem Einheitssystem die erste 1 durch eine passende negative ganzzahlige Potenz von $x-a$ ersetzt wird. Es ist S_3 eine Einheit für alle endlichen Stellen mit Ausnahme von $x=a$. Das neue System ist unter Benutzung von (16) und (18)

(19) $$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}' S_3 = \mathfrak{P} S_2 S_3 = p S_1 S_2 S_3 .$$

Das System $\mathfrak{P}_1$ hat als Elemente geradeso wie $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$. Seine Determinante ist nach (19)

(20) $$|\mathfrak{P}_1| = |\mathfrak{P}|\,|S_2|\,|S_3| .$$

Da aber $|S_2| = 1$ und $|S_3|$ eine negative ganzzahlige Potenz von $x-a$ ist, so ergibt sich aus (20) und (17)

$$|\mathfrak{P}_1| = (x-a)^{\varrho_1} E ,$$

wo

$$0 \leqq \varrho_1 < \varrho .$$

Ist $\varrho_1 = 0$, so ist $\mathfrak{P}_1$ eine Einheit für die Stelle a und unser Satz ist bewiesen. Es wird $S = S_1 S_2 S_3$ und $q = \mathfrak{P}_1$.

Ist ϱ_1 noch größer als Null, so fahren wir in derselben Weise fort. Wie wir aus $\mathfrak{P}$ das System $\mathfrak{P}_1$ abgeleitet haben, können wir aus $\mathfrak{P}_1$ ein System $\mathfrak{P}_2$ herleiten, dessen Elemente auch gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ sind, dessen Determinante aber durch eine niedrigere Potenz von $x-a$ teilbar ist als $|\mathfrak{P}_1|$. So müssen wir schließlich zu einem System b kommen, das eine Einheit für die Stelle $x=a$ ist, und das aus p durch Multiplikation mit Systemen $S_1, S_2, S_3, \ldots S_r$ hervorgeht, deren Elemente konstant oder ganzzahlige Potenzen von $x-a$ sind und deren Determinanten gleich 1 oder gleich einer ganzzahligen Potenz von $x-a$ sind. Es wird

$$q = p S_1 S_2 \ldots S_r = p S .$$

Da aber die Systeme S_i Einheiten für jede endliche Stelle mit Ausnahme von $x=a$ sind, so gilt dasselbe für ihr Produkt S. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 6. Beispiele zu § 5.

Beispiel I. $a = 0$.

$$p = \begin{Bmatrix} x^2, & x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \cdots \\ x^{-1}, & -x^{-1} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^3 + \cdots \end{Bmatrix}.$$

1. Multiplikation der beiden Vertikalreihen mit x. Substitution

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = S_1 .$$

Das neue System ist

$$pS_1 = \left|\begin{matrix} x^3, & x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \cdots \\ 1, & -1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots \end{matrix}\right|.$$

Die Determinante dieses Systems ist gleich Null für $x = a = 0$.

2. Addieren der ersten Vertikalreihe zur zweiten. Substitution

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das neue System ist

$$pS_1S_2 = \left\{\begin{matrix} x^3, & 2\,x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \cdots \\ 1, & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

Die im ganzen bisher ausgeübte Substitution ist S_1S_2.

3. Multiplizieren der zweiten Vertikalreihe mit x^{-2}. Substitution

$$S_3 = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{-2} \end{matrix}\right\}, \quad pS_1S_2S_3 = \left\{\begin{matrix} x^3, & 2\,x - \frac{1}{2}x^3 + \cdots \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

Die Determinante dieses Systems wird für $x = 0$ noch zu Null. Die bisher im ganzen ausgeübte Substitution ist $S_1S_2S_3$.

4. Addieren des $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$-fachen der ersten Vertikalreihe zur zweiten. Substitution

$$S_4 = \left\{\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \quad pS_1S_2S_3S_4 = \left\{\begin{matrix} x^3, & 2\,x - x^3 + \cdots \\ 1, & \frac{1}{8}x^2 + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

5. Division der zweiten Vertikalreihe mit x.

$$S_5 = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{matrix}\right\}, \quad pS_1S_2S_3S_4S_5 = \left\{\begin{matrix} x^3, & 2 - x^2 + \cdots \\ 1, & \frac{1}{8}x + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

Die Determinante dieses Systems ist von Null verschieden für $x = 0$, so daß wir am Ziel sind. Es ist das System

$$pS_1S_2S_3S_4S_5 = q$$

von der gewünschten Beschaffenheit. Das gesuchte System ist

$$S = S_1S_2S_3S_4S_5.$$

Es wird

$$S_1S_2 = \left\{\begin{matrix} x & x \\ 0 & x \end{matrix}\right\}, \quad S_1S_2S_3 = \left\{\begin{matrix} x & x^{-1} \\ 0 & x^{-1} \end{matrix}\right\}, \quad S_1S_2S_3S_4 = \left\{\begin{matrix} x, & x^{-1} - \frac{1}{2}x \\ 0, & x^{-1} \end{matrix}\right\},$$

$$S = S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 = \left\{\begin{matrix} x, & x^{-2} - \frac{1}{2} \\ 0, & x^{-2} \end{matrix}\right\}, \quad |S| = x^{-1}.$$

Beispiel II. $a = 1$.

$$p = \left\{\begin{matrix} 0, & (x-1) - \frac{7}{4}(x-1)^2 + \cdots \\ 1 + (x-1), & \frac{1}{2} - 2(x-1) + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

1. Addieren des $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$-fachen der ersten Vertikalreihe zur zweiten.

$$S_1 = \left\{\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \quad pS_1 = \left\{\begin{matrix} 0, & (x-1) - \frac{7}{4}(x-1)^2 + \cdots \\ 1 + (x-1), & -\frac{5}{2}(x-1) + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

2. Dividieren der zweiten Vertikalreihe mit $(x-1)$.

$$S_2 = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & (x-1)^{-1} \end{matrix}\right\}, \quad pS_1 S_2 = \left\{\begin{matrix} 0, & 1 + \cdots \\ 1 + (x-1), & -\frac{5}{2} + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

Die Determinante dieses Systems ist für $x = 1$ nicht Null. Es ist $S = S_1 S_2$, also

$$S = \left\{\begin{matrix} 1, & -\frac{1}{2}(x-1)^{-1} \\ 0, & (x-1)^{-1} \end{matrix}\right\}, \quad |S| = (x-1)^{-1}.$$

Beispiel III. $a = 0$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, so daß $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

$$p = \left\{\begin{matrix} x^{-1}, & x^{-1} - \frac{1}{3} x^5 + \cdots, & x^{-1} + 1 + x + \cdots \\ 1, & \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} x^6 + \cdots, & \varepsilon^2 + \varepsilon^2 x + \varepsilon^2 x^2 + \cdots \\ x^{-2}, & \varepsilon^2 x^{-2} - \frac{\varepsilon^2}{3} x^4 + \cdots, & \varepsilon x^{-2} + \varepsilon x^{-1} + \varepsilon + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

$$S_1 = \left\{\begin{matrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{matrix}\right\}, \quad pS_1 = \left\{\begin{matrix} x, & x + (7), & x + x^2 + (3) \\ x^2, & \varepsilon x^2 + (8), & \varepsilon^2 x^2 + (3) \\ 1, & \varepsilon^2 + (6), & \varepsilon + \varepsilon x + (2) \end{matrix}\right\},$$

wo mit (α) eine Summe von Gliedern bezeichnet ist, die mindestens die α-te Potenz von x enthalten.

$$S_2 = \left\{\begin{matrix} 1 & -\varepsilon^2 & -\varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \quad pS_1 S_2 = \left\{\begin{matrix} x, & (1-\varepsilon^2)x + (7), & (1-\varepsilon)x + x^2 + (3) \\ x^2, & (\varepsilon - \varepsilon^2)x^2 + (8), & (\varepsilon^2 - \varepsilon)x^2 + (3) \\ 1, & (6), & \varepsilon x + (2) \end{matrix}\right\};$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{vmatrix}, \quad p S_1 S_2 S_3 = \begin{vmatrix} x, & (1-\varepsilon^2)+(6), & (1-\varepsilon)+x+(2) \\ x^2, & (\varepsilon-\varepsilon^2)x+(7), & (\varepsilon^2-\varepsilon)x+(2) \\ 1, & (5), & \varepsilon+(1) \end{vmatrix};$$

$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad p S_1 S_2 S_3 S_4 = \begin{vmatrix} x, & (1-\varepsilon^2)+(6), & (1-\varepsilon)x+(2) \\ x^2, & (\varepsilon-\varepsilon^2)x+(7), & 3\varepsilon^2 x+(2) \\ 1, & (5), & (1) \end{vmatrix};$$

$$S_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{vmatrix}, \quad p S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 = \begin{vmatrix} (1), & (1-\varepsilon^2)+(6), & (1-\varepsilon)+(1) \\ (2), & (\varepsilon-\varepsilon^2)x+(7), & 3\varepsilon^2+(1) \\ 1, & (5) & (0) \end{vmatrix}.$$

Für $x = 0$ wird jedes $(\varkappa) = 0$, wenn $\varkappa > 0$. Also ist die Determinante des zuletzt gefundenen Systems

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\varepsilon^2 & 1-\varepsilon \\ 0 & 0 & 3\varepsilon^2 \\ 1 & 0 & (0) \end{vmatrix} = 3\varepsilon^2(1-\varepsilon^2) \neq 0,$$

wo (0) irgendeine Konstante ist, auf deren Wert es nicht ankommt. Es ist

$$S = S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 = \begin{vmatrix} x^2, & -\varepsilon^2 x^2, & \varepsilon^2 - \varepsilon x \\ 0, & x, & \varepsilon \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}, \quad |S| = x^3.$$

Beispiel IV. $a = 0$.

$$p = \begin{vmatrix} 0, & \sqrt{3}\,x^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{18} + (1), & \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{5}{81}\sqrt{3}\,x + (2) \\ x^{-2}, & -\frac{1}{3}x^{-1} - \frac{4}{81} + (1), & 3x^{-1} - \frac{2}{9} - \frac{64}{243}x + (2) \\ 1, & \frac{2}{3}x + \frac{8}{81}x^2 + (3), & \frac{4}{9}x^2 + (3) \end{vmatrix}.$$

$$S_1 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{vmatrix}, \quad S_4 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix},$$

$$S_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S = S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 = \begin{vmatrix} x^2, & -\frac{9}{2} + \frac{2}{3}x, & -3x \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & \frac{3}{2}x^{-1}, & 1 \end{vmatrix}, \quad |S| = x^2.$$

Achtes Kapitel.

Die Vielfachen eines Divisors.

§ 1. Die Aufgabe.

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Aufgabe beschäftigen, Funktionen des Körpers mit gegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen herzustellen. Wir wählen eine Größe des Körpers, etwa x als unabhängige Veränderliche und lassen zunächst die Stellen, für die x unendlich groß ist, unberücksichtigt. Wenn wir von einer Funktion verlangen, sie soll an einer Stelle von der α-ten Ordnung Null werden, so soll das bedeuten, sie soll mindestens von der Ordnung α Null werden. Wenn wir verlangen, eine Funktion soll an einer Stelle von der Ordnung α unendlich werden, so soll das heißen, sie soll höchstens von der Ordnung α unendlich werden.

Wir können der zu behandelnden Aufgabe auch eine andere Form geben. Wir bezeichnen die Funktionen, die nur für unendlich große Werte von x unendlich werden, als ganze Funktionen, eine Bezeichnung, die selbstverständlich wesentlich von der Wahl der Größe x abhängt, so daß wir, wenn nötig, die Funktionen ganz in bezug auf x nennen. Wir sagen ferner, ein Divisor $\mathfrak{q}$ ist ganz in bezug auf x, wenn er im Nenner nur Primteiler enthält, die in $\mathfrak{n}_x$, dem Nenner von x, vorkommen. Er läßt sich dann, indem man mit einem passenden Divisor erweitert, darstellen in der Form

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{n}_x^\lambda}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{g}$ ein (absolut) ganzer Divisor ist. Es ist klar, daß umgekehrt jeder Divisor von der Form (1), wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist, ganz in bezug auf x ist. Wir wollen ferner eine Funktion R des Körpers teilbar durch einen Divisor $\mathfrak{q}$ oder ein Vielfaches des Divisors $\mathfrak{q}$ nennen, wenn $\frac{R}{\mathfrak{q}}$ ein ganzer Divisor in bezug auf x ist. Eigentlich müßten wir sagen: teilbar in bezug auf x, aber der Kürze wegen wollen wir einfach teilbar sagen. Wir können die Aufgabe, die uns in diesem und den folgenden Paragraphen beschäftigen soll, so formulieren: Es sollen die Vielfachen eines gegebenen Divisors $\mathfrak{q}$ bestimmt werden.

§ 2. Ein Beispiel.

Wir betrachten zuerst ein einfaches Beispiel. Der Körper sei definiert durch die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 1 = 0 . \tag{2}$$

Die über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche ist zweiblättrig. Sie hat Verzweigungspunkte erster Ordnung in $x = 1$ und $x = -1$. Der zu dem ersten dieser Punkte gehörende Primteiler sei mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet. Bei $x = 0$ sind die beiden Blätter getrennt. Im einen ist $y = +1$, im anderen $y = -1$. Die zu diesen Stellen gehörenden Primteiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Wir wählen dann als Divisor $\mathfrak{q}$ den Divisor

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1^2} \tag{3}$$

und stellen uns die Aufgabe, die Vielfachen dieses Divisors zu bestimmen.

Wir können jede Funktion des Körpers nach Satz IX in Kap. IV, § 7 in der Form schreiben

$$R = g_1 + g_2\, y\,, \tag{4}$$

wo g_1 und g_2 rationale Funktionen von x sind. Man nennt zwei solche Funktionen z_1, z_2 des Körpers von der Art, daß sich jede Funktion des Körpers in der Form

$$g_1\, z_1 + g_2\, z_2$$

darstellen läßt, wo g_1 und g_2 rationale Funktionen von x allein sind, ein Fundamentalsystem oder eine Basis. Es sind also z. B. die Funktionen 1 und y ein solches Fundamentalsystem.

Wir haben g_1 und g_2 so zu bestimmen, daß die Funktion R ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$ wird. Zunächst sehen wir, daß g_1 und g_2 nur für $x = 1$ und für $x = 0$ unendlich werden. Es sei nämlich

$$g_1 + g_2\, y = \frac{g(x) + h(x)\, y}{k(x)}\,, \tag{5}$$

wo g, h, k ganze rationale Funktionen von x ohne gemeinsamen Teiler sein sollen. Es enthalte $k(x)$ den Faktor $x - a$ und es sei a weder 1 noch 0. Da R für $x = a$ in keinem der beiden Blätter der Riemannschen Fläche unendlich werden darf, so dürfen die Funktionen

$$\frac{g + h\,y}{x - a}\,, \qquad \frac{g - h\,y}{x - a}$$

für $x = a$ nicht unendlich werden, also auch nicht ihre Summe und Differenz, also nicht

$$\frac{2g}{x - a}\,, \qquad \frac{2h}{x - a}\, y\,.$$

Daher müssen g und h durch $x - a$ teilbar sein und es würden gegen die Voraussetzung g, h, k einen gemeinsamen Teiler haben. Es kann daher $k(x)$ in (5) nur die Faktoren x und $x - 1$ enthalten. Man sieht ferner leicht, daß k den Faktor x höchstens in der zweiten und $x-1$ höchstens in der ersten Potenz enthalten kann. Wir können daher setzen

$$k = x^2(x-1).$$

Es wird

$$R = \frac{g + hy}{x^2(x-1)}.$$

Wir betrachten R zunächst in der Umgebung der Stelle $x = 1$. Es wird

$$R = \frac{g(x)}{x^2(x-1)} + \frac{ih(x)}{x^2\sqrt{x+1}}\sqrt{x-1}. \tag{6}$$

Hieraus folgt, daß die Entwicklung von R nach Potenzen von $\sqrt{x-1}$ mit $g(1)\left(\sqrt{x-1}\right)^{-2}$ beginnen würde, wenn nicht $g(1) = 0$, d. h. wenn nicht $g(x)$ durch $x-1$ teilbar ist. Da aber R für $x = 1$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden soll, also in der Entwicklung nur die (-1)te Potenz von $\sqrt{x-1}$ vorkommen darf, so muß $g(x)$ durch $x-1$ teilbar sein. Wir setzen $g(x) = g_1(x)(x-1)$ und haben wegen (6)

$$R = \frac{g_1(x)}{x^2} + \frac{h(x)}{x^2(x-1)}\,y \tag{7}$$

und jede Funktion dieser Form, wo g_1 und h ganze rationale Funktionen von x sind, verhält sich an der Stelle $x = 1$ so, wie wir wünschen.

Wir betrachten weiter die Stellen $x = 0$, $y = \pm 1$. Es sei

$$g_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots, \quad h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots. \tag{8}$$

Es ist

$$y = \pm\left[1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \cdots\right],$$

$$yh = \pm\left[b_0 + b_1x + \left(b_2 - \frac{1}{2}b_0\right)x^2 + \cdots\right],$$

$$\frac{g(x) \pm h(x)\,y}{x^2(x-1)} \tag{9}$$

$$= \frac{1}{x-1}\left[(-a_0 \pm b_0)x^{-2} + (a_0 - a_1 \pm b_1)x^{-1} + \left(a_1 - a_2 \pm b_2 \mp \frac{1}{2}b_0\right) + \cdots\right],$$

wo das obere Zeichen für die Stelle $x = 0$, $y = +1$ und das untere für die Stelle $x = 0$, $y = -1$ gilt. Aus der Entwicklung geht hervor, daß die Funktion an der Stelle $x = 0$, $y = +1$ höchstens von der zweiten Ordnung unendlich wird, also dort so beschaffen ist, wie wir wünschen. Soll die Funktion an der Stelle $x = 0$, $y = -1$ mindestens von der ersten Ordnung Null werden, so folgt aus (9)

$$a_0 + b_0 = 0, \quad a_0 - a_1 - b_1 = 0, \quad a_1 - a_2 - b_2 + \frac{1}{2}b_0 = 0$$

oder
$$a_0 = -b_0,\; a_1 = -b_0 - b_1,\; a_2 = -\frac{1}{2}b_0 - b_1 - b_2.$$
Es wird wegen (8)

(10) $$g(x) = (x-1)\,g_1(x)$$
$$= -(x-1)\left[b_0 + (b_0+b_1)x + \left(\frac{1}{2}b_0 + b_1 + b_2\right)x^2 + x^3\gamma(x)\right]$$
$$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 - \frac{1}{2}b_0 x^2 - \left(\frac{1}{2}b_0 + b_1 + b_2\right)x^3 + x^3\gamma(x)(1-x),$$
wo $\gamma(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist. Setzen wir noch

(11) $$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + x^3\chi(x),$$
so nimmt wegen (7), (10) und (11) unsere Funktion R die Form an

(12) $$R = \frac{1}{x^2(x-1)}\left[b_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + y\right) + b_1(1 - x^2 + y)x \right.$$
$$\left. + b_2(1 - x + y)x^2 + x^3(1-x)\gamma(x) + x^3\chi(x)\,y\right].$$
Hier sind b_0, b_1, b_2 beliebige Konstante und $\gamma(x)$ und $\chi(x)$ beliebige ganze rationale Funktionen von x. Alle Funktionen der Form (12) sind Vielfache des Divisors $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}_1^{-2}\mathfrak{p}_2$. Das Ergebnis läßt sich aber noch erheblich vereinfachen. Wir setzen zur Abkürzung

(13) $$f_1 = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + y,\; f_2 = (1 - x^2 + y)x,\; f_3 = (1 - x + y)x^2$$
und beachten, daß folgende Gleichungen bestehen
$$f_1 x - f_2 = \frac{1}{2}x^3(1-x),\; f_1 x^2 - f_3 = x^3(1-x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right).$$
Es wird mit Hilfe dieser Gleichungen
$$R = \frac{1}{x^2(x-1)}\left[(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)f_1 + x^3(1-x)\bar{\gamma}(x) + x^3\chi(x)\,y\right],$$
wo $\bar{\gamma}(x)$ wieder eine beliebige ganze rationale Funktion von x ist. Bedenken wir ferner, daß aus der ersten der Gleichungen (13) folgt
$$y = f_1 - (1-x)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right),$$
so haben wir
$$R = \frac{1}{x^2(x-1)}\left\{\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + x^3\chi(x)\right)f_1 + x^3(1-x)\left[\bar{\gamma}(x) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \chi(x)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)\right]\right\}.$$
Da aber b_0, b_1, b_2 beliebige Konstanten sind, so ist $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + x^3\chi(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von x, die mit $\lambda_1(x)$ bezeichnet

sei, und ebenso ist $\bar{\gamma}(x) - \chi(x)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von x, die mit $\lambda_2(x)$ bezeichnet sei. Setzen wir

$$(14)\quad \zeta_1 = \frac{f_1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)}\left[(1-x)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + y\right], \quad \zeta_2 = x,$$

so wird schließlich

$$(15)\qquad R = \lambda_1(x)\,\zeta_1 + \lambda_2(x)\,\zeta_2,$$

wo λ_1 und λ_2 beliebige ganze rationale Funktionen von x sind.

Das Ergebnis ist sehr einfach und läßt sich in der Form aussprechen:

Es gibt zwei Funktionen ζ_1 und ζ_2 des Körpers von der Art, daß sich jedes Vielfache des gegebenen Divisors $\mathfrak{q}$ in der Form $\lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2$ darstellen läßt, wo λ_1 und λ_2 ganze rationale Funktionen von x sind, und daß umgekehrt jede Funktion der Form $\lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2$ ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$ ist, wenn λ_1 und λ_2 ganze rationale Funktionen von x sind.

Man nennt (ζ_1, ζ_2) ein Fundamentalsystem oder eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{q}$.

Wie wir gesehen haben, läßt sich jede Funktion R des hier betrachteten Körpers durch die Basis $(1, y)$ in der Form darstellen

$$(16)\qquad R = h_1 \cdot 1 + h_2 y,$$

wo h_1 und h_2 rationale Funktionen von x sind. Aus den Gleichungen (14) folgt

$$1 = \frac{1}{x}\cdot\zeta_2, \quad y = x^2(x-1)\,\zeta_1 - \frac{1-x}{x}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)\zeta_2.$$

Führt man diese Werte von 1 und y in (16) ein, so sieht man, daß man auch jede Funktion R aus (xy) darstellen kann in der Form

$$R = \lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2,$$

wo λ_1 und λ_2 rationale Funktionen von x sind. Wir können das eben angegebene Ergebnis daher auch so aussprechen.

Es lassen sich zwei Funktionen ζ_1 und ζ_2 des Körpers finden von der Art, daß sich jede Funktion des Körpers in der Form $\lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2$ darstellen läßt, wo λ_1 und λ_2 rationale Funktionen von x sind. Die Funktion ist dann und nur dann ein Vielfaches von dem gegebenen Divisor $\mathfrak{q}$, wenn λ_1 und λ_2 ganz sind.

Wir wollen zeigen, daß dies Ergebnis nicht nur für diesen besonderen Fall gilt, sondern daß ein ganz entprechender Satz für jeden algebraischen Körper und für jeden Divisor $\mathfrak{q}$ gilt.

§ 3. Basen des Körpers.

Der algebraische Körper (xy), den wir untersuchen, war definiert durch die Gleichung

(17) $$f(x, y) = 0\,,$$
die in y vom m-ten Grade sein sollte. Jede Funktion des Körpers läßt sich, nach Satz IX, Kap. IV, § 7 darstellen in der Form

$$h_1 + h_2\, y + h_3\, y^2 + \cdots + h_m\, y^{m-1}\,,$$

wo die h_i rationale Funktionen von x sind, also als lineare homogene Funktion der m Funktionen $1, y, y^2, \cdots y^{m-1}$.

Definition I. Man nennt m Größen des Körpers (xy) $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ mit der Eigenschaft, daß sich jede Funktion R des Körpers in der Form darstellen läßt

$$R = g_1\xi_1 + g_2\xi_2 + \cdots + g_m\xi_m\,,$$

wo die g_i rationale Funktionen von x sind, eine **Basis** des Körpers.

Es bilden also z. B. nach Satz IX in Kap. IV, § 7 die Funktionen

(18) $$1, y, y^2, \ldots y^{m-1}$$
eine Basis.

Es sei

(19) $$(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$$

ein System von m Funktionen des Körpers (xy). Es sei $\xi_\alpha = T_\alpha(x, y)$, wo T eine rationale Funktion von x, y ist. Wir bezeichnen y auch mit y_1 und wie früher die konjugierten Werte von y mit $y_1, y_2, \ldots y_m$. Wir bezeichnen ferner ξ_α auch mit $\xi_{\alpha 1}$ und setzen

(20) $$\xi_{\alpha\beta} = T_\alpha(x, y_\beta)\,,$$

so daß $\xi_{\alpha 1}, \xi_{\alpha 2}, \ldots \xi_{\alpha m}$ die m konjugierten Werte von $\xi_\alpha = \xi_{\alpha 1}$ sind. Wir erhalten so aus dem System (ξ), das nur aus einer Horizontalreihe besteht, ein quadratisches System, dessen Elemente die $\xi_{\alpha\beta}$ sind. Wir bezeichnen dies System mit (ξ_{kl}), setzen also

(21) $$(\xi_{kl}) = \left\{\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{m1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{m2} \\ - & - & - & - \\ \xi_{1m} & \xi_{2m} & \cdots & \xi_{mm} \end{vmatrix}\right.\,.$$

Satz I. Es gehört zu jedem System (ξ) ein quadratisches System (ξ_{kl}), und zwar stehen in diesem System in jeder Vertikalreihe m konjugierte Funktionen des Körpers (xy).

Wenn wir die Veränderliche x in der einfachen x-Ebene einen geschlossenen Weg durchlaufen lassen, so tritt unter den y_α höchstens eine Permutation ein. Es werden also in dem System (ξ_{kl}) die Horizontalreihen permutiert, so daß die Determinante $|\xi_{kl}|$ höchstens ihr Vorzeichen ändert. Daher bleibt das Quadrat der Determinante bei jedem solchen

Umlauf von x ungeändert, und da es eine algebraische Funktion von x ist, so muß es rational in x sein. Also:

Definition II. Ist (ξ) ein System von m Funktionen des Körpers und ist (ξ_{kl}) das zugehörige quadratische System, so ist das Quadrat der Determinante $|\xi_{kl}|$ eine rationale Funktion von x. Sie heißt die **Diskriminante** der m Funktionen ξ_α.

Zum Beispiel gehört zu der Basis (22) das quadratische System

$$(y_k^{l-1}) = \begin{Bmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{m-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{m-1} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & y_m & y_m^2 & \dots & y_m^{m-1} \end{Bmatrix}. \tag{22}$$

Die zugehörige Diskriminante ist nach (3), § 1 und einem bekannten Satze der Algebra

$$|y_k^{l-1}|^2 = \prod_{\substack{\lambda, \mu = 1 \\ \lambda \neq \mu}}^{m} (y_\lambda - y_\mu) = \frac{D(x)}{a_0^m(x)}, \tag{23}$$

wo $D(x)$ die Diskriminante der Gleichung (17) in bezug auf y ist und $a_0(x)$ der Koeffizient von y^m in $f(x, y)$. Es ist also bei unseren Voraussetzungen die Diskriminante d r Basis (18) nicht identisch Null.

Wir wollen jetzt ein Kriterium dafür aufsuchen, ob ein System (ξ) von m Funktionen des Körpers eine Basis ist oder nicht. Es sei erstens (ξ) eine Basis. Dann lassen sich alle Funktionen des Körpers $(x\, y)$ linear homogen durch die ξ_k ausdrücken, also auch die Funktionen $1, y, y^2, \dots y^{m-1}$ der Basis (18). Es bestehen also Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} 1 &= g_{11}\xi_1 + g_{12}\xi_2 + \dots + g_{1m}\xi_m, \\ y &= g_{21}\xi_1 + g_{22}\xi_2 + \dots + g_{2m}\xi_m, \\ &- - - - - - - - - - - - - - \\ y^{m-1} &= g_{m1}\xi_1 + g_{m2}\xi_2 + \dots + g_{mm}\xi_m, \end{aligned} \tag{24}$$

wo die g_{kl} rationale Funktionen von x sind. Bezeichnen wir die Basis (18) kurz mit (y) und mit g das System

$$g = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{m2} \\ - & - & - & - \\ g_{1m} & g_{2m} & \dots & g_{mm} \end{Bmatrix}, \tag{25}$$

so können wir die Gleichungen (24) kürzer schreiben:

$$(y) = (\xi)\, g. \tag{26}$$

Es beschreibe x einen geschlossenen Weg in der einfachen x-Ebene, so daß $y = y_1$ in y_k übergeht. Dabei bleiben die identischen Gleichungen

(26) bestehen. Es geht $\xi_\alpha = \xi_{\alpha 1}$ in $\xi_{\alpha k}$ über, während die $g_{\alpha\beta}$ als rationale Funktionen von x ungeändert bleiben. Daher folgt aus (26)

$$(y_k^{l-1}) = (\xi_{kl})\, g\,. \tag{27}$$

Gehen wir hierhin zu den Determinanten über, so folgt

$$|y_k^{l-1}| = |\xi_{kl}| \cdot |g|\,. \tag{28}$$

Da aber die Diskriminante der Basis (y) nicht identisch Null ist, so ergibt sich hieraus, daß die Determinanten $|g|$ und $|\xi_{kl}|$ auch nicht identisch Null sein können. Es ist also die Diskriminante einer Basis nicht identisch Null.

Es sei zweitens die Diskriminante des Systems (ξ) nicht identisch Null. Da (y) eine Basis ist, so bestehen Gleichungen der Form

$$(\xi) = (y)\, h\,, \tag{29}$$

wo die Elemente des quadratischen Systems h rationale Funktionen von x sind. Aus (29) folgt, geradeso wie aus (26) sich (27) ergab,

$$(\xi_{kl}) = (y_k^{l-1})\, h\,. \tag{30}$$

Durch Übergang zu den Determinanten folgt aus (30)

$$|\xi_{kl}| = |y_k^{l-1}| \cdot |h|$$

und hieraus, weil nach Annahme $|\xi_{kl}| \neq 0$, daß $|h| \neq 0$. Daher existiert zu h das reziproke System h^{-1}, und aus (30) folgt

$$(y_k^{l-1}) = (\xi_{kl})\, h^{-1}$$

und also auch, indem wir uns links und rechts auf die erste Horizontalreihe beschränken,

$$(y) = (\xi)\, h^{-1}\,. \tag{31}$$

Ist jetzt R irgendeine Funktion des Körpers $(x\, y)$, so können wir sie zunächst in der Form

$$R = r_1\, 1 + r_2\, y + \cdots + r_m\, y^{m-1} \tag{32}$$

darstellen, wo die r rationale Funktionen von x sind. Setzen wir in (32) die Werte von $1, y, \ldots y^{m-1}$ ein, wie sie aus (31) folgen, so erhalten wir R als lineare homogene Funktion der ξ_α mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten. Damit ist aber bewiesen, daß (ξ) eine Basis ist.

Wir haben also:

Satz II. Ein System von m Funktionen des Körpers $(x\, y)$

$$(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$$

ist dann und nur dann eine Basis des Körpers, wenn die Diskriminante des Systems nicht identisch Null ist.

Hieraus folgt weiter:

Satz III. Zwischen den Funktionen einer Basis kann keine lineare homogene Gleichung bestehen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind.

Es bestehe nämlich zwischen den Funktionen ξ_α einer Basis (ξ) eine Gleichung

$$g_1 \xi_1 + g_1 \xi_2 + \cdots + g_m \xi_m = 0, \tag{33}$$

wo die g_i rationale Funktionen von x sind. Diese Gleichung bleibt richtig bei analytischer Fortsetzung. Dadurch können wir $\xi_\alpha = \xi_{\alpha 1}$ in jede konjugierte Funktion $\xi_{\alpha k}$ überführen, während die g_i als rationale Funktionen ungeändert bleiben. Daher bestehen die m linearen homogenen Gleichungen

$$g_1 \xi_{1k} + g_2 \xi_{2k} + \cdots + g_m \xi_{mk} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots m).$$

Daraus würde aber folgen, daß die Determinante $|\xi_{kl}|$ identisch Null wäre, was nicht sein kann. Eine Gleichung der Form (33) ist also, wie behauptet, nicht möglich.

Daraus schließen wir

Satz IV. Eine Funktion R des Körpers $(x\,y)$ läßt sich durch eine Basis (ξ) auf eine und nur auf eine Art in der Form darstellen

$$R = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + \cdots + r_m \xi_m,$$

wo die r_i rationale Funktionen von x sind.

Gäbe es nämlich noch eine zweite Darstellung

$$R = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2 + \cdots + s_m \xi_m,$$

so würde durch Subtraktion folgen

$$(r_1 - s_1) \xi_1 + (r_2 - s_2) \xi_2 + \cdots + (r_m - s_m) \xi_m = 0.$$

Eine solche Gleichung kann aber nach dem eben Bewiesenen nicht bestehen, wenn nicht alle Differenzen $r_i - s_i$ identisch Null sind.

Es seien jetzt (ξ) und (η) zwei Basen des Körpers. Dann müssen sich die η_i linear durch die ξ_i darstellen lassen mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von x sind, d. h. es besteht eine Gleichung

$$(\eta) = (\xi)\, g, \tag{34}$$

wo g ein quadratisches System ist, dessen Elemente rationale Funktionen von x sind. Lassen wir x einen geschlossenen Weg in der einfachen x-Ebene durchlaufen, so daß $y = y_1$ in y_k übergeht, so geht $\xi_\alpha = \xi_{\alpha 1}$ in $\xi_{\alpha k}$ und $\eta_\alpha = \eta_{\alpha 1}$ in $\eta_{\alpha k}$ über, während g ungeändert bleibt. Da die Gleichungen (34) bei analytischer Fortsetzung bestehen bleiben, so folgt, daß auch

$$(\eta_{kl}) = (\xi_{kl})\, g.$$

Durch Übergang zu den Determinanten folgt

$$|\eta_{kl}| = |\xi_{kl}| \cdot |g|.$$

Da $|\eta_{kl}| \neq 0$, weil (η) eine Basis, so ist auch $|g| \neq 0$. Daraus aber folgt, daß das zu g reziproke System g^{-1} existiert, und aus (34) folgt daher

$$(\xi) = (\eta)\, g^{-1}\,.$$

Wir haben also:

Satz V. Je zwei Basen des Körpers $(x\,y)$ sind durch eine lineare homogene Substitution miteinander verknüpft, deren Elemente rationale Funktionen von x sind und deren Determinante nicht identisch Null ist.

Ferner beweisen wir noch:

Satz VI. Sind zwei Systeme (ξ), (η) von je m Funktionen des Körpers $(x\,y)$ durch eine lineare homogene Substitution miteinander verbunden, deren Determinante nicht identisch Null ist und deren Elemente rationale Funktionen von x sind, so ist die eine dann und nur dann eine Basis, wenn die andere es ist.

Denn nach Voraussetzung besteht eine Gleichung der Form (34), aus der folgt, daß auch

$$(\eta_{kl}) = (\xi_{kl})\, g\,.$$

Gehen wir zu den Determinanten über, so folgt

$$|\eta_{kl}| = |\xi_{kl}| \cdot |g|\,;$$

da aber nach Voraussetzung $|g|$ nicht identisch Null ist, so sind die Diskriminanten $|\xi_{kl}|^2$ und $|\eta_{kl}|^2$ von (ξ) und (η) gleichzeitig identisch Null oder nicht. Das ist aber nur ein anderer Ausdruck für die Behauptung.

§ 4. Basis für die Vielfachen eines Divisors.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein Divisor, der keine Primteiler enthält, die zu Stellen gehören, wo x unendlich groß ist. Wir nennen, wie wir schon in § 1 definiert haben, eine Funktion R ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$, wenn der Divisor, der der Funktion R entspricht, durch Division mit $\mathfrak{q}$ übergeht in einen Divisor, der höchstens noch solche Primteiler im Nenner enthält, die zu Stellen gehören, wo x unendlich wird. Die Definition ist also wesentlich abhängig von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen x. Die Aufgabe, die uns jetzt beschäftigen wird, ist, alle Vielfachen eines gegebenen Divisors zu bestimmen. Wir lösen die Aufgabe so, daß wir eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ aufsuchen. Dabei verstehen wir unter einer Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$ folgendes:

Definition III. Eine Basis $(\zeta) = \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ des Körpers heißt eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{q}$, wenn eine Funktion

$$g_1\,\zeta_1 + g_2\,\zeta_2 + \cdots + g_m\,\zeta_m$$

dann und nur dann ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$ ist, wenn die rationalen Funktionen g ganz sind.

Gelingt es uns, eine solche Basis zu bestimmen, so haben wir eine Lösung der Aufgabe, die ganz so beschaffen ist wie die Lösung in dem in § 2 behandelten Beispiel.

Zunächst zeigen wir, daß und wie sich aus einer Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ alle anderen herleiten lassen, und dann zeigen wir, wie wir immer eine solche Basis finden können.

Es sei (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ und ebenso (η). Es ist jede Funktion der Form $g_1 \eta_1 + g_2 \eta_2 + \cdots + g_m \eta_m$, wenn die g ganze rationale Funktionen von x sind, ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$, also z. B. jede der Funktionen η_i selbst, so daß Gleichungen bestehen der Form

$$(35) \qquad (\eta) = (\xi)\, g\,,$$

wo die g_{kl} ganze rationale Funktionen von x sind. Es sind aber auch die ξ_i Vielfache von $\mathfrak{q}$ und sie müssen sich durch die η_i linear mit ganzen rationalen Funktionen von x als Koeffizienten darstellen lassen. Es bestehen also auch Gleichungen der Form

$$(36) \qquad (\xi) = (\eta)\, h\,,$$

wo auch die h_{kl} ganze rationale Funktionen von x sind. Aus den Gleichungen (35) und (36) folgt, daß g und h zueinander reziprok sind, so daß

$$g \cdot h = 1\,.$$

Da die Elemente von g und h ganze rationale Funktionen von x sind, so gilt dasselbe von ihren Determinanten, und da ihr Produkt gleich 1 ist, so müssen sie beide konstant sein. Es sind also nach der Definition III, Kap. VII, § 5 die Systeme g und h Einheiten.

Wir beweisen hiervon auch die Umkehrung. Es sei (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ und es sei g ein System von m^2 rationalen Funktionen von x, das eine Einheit ist. Das System (η) sei durch (35) definiert. Um zu zeigen, daß (η) auch eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ ist, haben wir zweierlei zu beweisen:

1. daß jedes vielfache R von $\mathfrak{q}$ sich in der Form darstellen läßt

$$(37) \qquad R = r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2 + \cdots + r_m \eta_m\,,$$

wo die r_i ganze rationale Funktionen von x sind;

2. daß jede Funktion der Form (37) ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$ ist.

1. Ist R ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$, so haben wir für R eine Darstellung

$$(38) \qquad R = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2 + \cdots + s_m \xi_m\,,$$

wo die s_i ganze rationale Funktionen von x sind. Aus (35) folgt aber (36), wo $h = g^{-1}$ ist. Da g eine Einheit ist, so gilt nach Satz XVII, Kap. VII, § 5 dasselbe von h. Ersetzen wir also in (38) die ξ_i durch die η_i, so erhalten wir für R eine Darstellung der Form (37) und die Koeffizienten r_i werden ganze rationale Funktionen von x.

2. Hat R die Darstellung (37) und ersetzen wir die η_i mit Hilfe von (35) durch die ξ_i, so erhalten wir eine Gleichung der Form (38), wo die s_i ganze rationale Funktionen von x sind, da dasselbe von den r_i und von den Elementen von g gilt.

Wir haben also:

Satz VII. Zwischen je zwei Basen für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$ besteht eine lineare homogene Substitution, deren Elemente rationale Funktionen von x sind und die eine Einheit ist, und wenn zwischen zwei Systemen von je m Größen des Körpers eine solche Substitution besteht, so ist die eine gleichzeitig mit der anderen eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$.

Zwischen zwei Basen (ξ) und (η) für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$ besteht eine Gleichung der Form (35), wo g eine Einheit ist. Aus (35) folgt

$$(\eta_{kl}) = (\xi_{kl})\, g$$

und

$$|\eta_{kl}| = |\xi_{kl}| \cdot g \;.$$

Da g konstant ist, so haben wir:

Satz VIII. Die Diskriminanten aller Basen für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$ unterscheiden sich nur durch einen konstanten von Null verschiedenen Faktor.

§ 5. Normalbasen.

Es sei $x = a$ irgendein endlicher Wert von x. Die Primteiler, die zu denjenigen Stellen der Riemannschen Fläche gehören, wo $x = a$ ist, also die im Zähler $x - a$ enthaltenen Primteiler seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n$. Es sei $\mathfrak{p}_k$ in $\mathfrak{q}$ genau in der Potenz τ_k enthalten. Wir definieren dann:

Definition IV. Eine Basis (ξ) heißt normal an der Stelle $x = a$ in bezug auf $\mathfrak{q}$, wenn eine Funktion

$$g_1 \xi_1 + g_2 \xi_2 + \cdots + g_m \xi_m \tag{39}$$

dann und nur dann den Divisor

$$\mathfrak{p}_1^{\tau_1} \mathfrak{p}_2^{\tau_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{\tau_n} \tag{40}$$

enthält, wenn die rationalen Funktionen g_i für $x = a$ nicht unendlich werden.

Eine Funktion enthält einen Divisor $\mathfrak{p}_1^{\tau_1} \mathfrak{p}_2^{\tau_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{\tau_n}$ soll hier und im folgenden bedeuten, sie enthält jeden Primteiler $\mathfrak{p}_i$ mindestens in der Potenz τ_i.

Es gelten die Sätze

Satz IX. Es sei die Basis (ξ) normal für $x = a$ in bezug auf den Divisor $\mathfrak{q}$, und es sei die Basis (η) definiert durch

$$(41) \qquad (\eta) = (\xi)\, g\,,$$

wo g ein quadratisches System ist, dessen Elemente rationale Funktionen von x sind; so ist (η) dann und nur dann normal für $x = a$ in bezug auf $\mathfrak{q}$, wenn g eine Einheit für $x = a$ ist.

Satz X. Sind (ξ) und (η) zwei Basen, die normal sind für $x = a$ in bezug auf den Divisor $\mathfrak{q}$, so unterscheiden sich ihre Diskriminanten nur um einen Faktor, der eine Einheit für $x = a$ ist.

Diese Sätze entsprechen denen des vorigen § und werden ganz ähnlich bewiesen. Nämlich: Da (η) auch eine Basis sein soll, so muß in (41) g eine Determinante haben, die nicht identisch Null ist. Es existiert also das zu g reziproke System g^{-1}, das mit h bezeichnet sei. Aus (41) folgt dann

$$(42) \qquad (\xi) = (\eta)\, h\,.$$

Aus (41) folgt ferner

$$(43) \qquad (\eta_{kl}) = (\xi_{kl})\, g\,, \quad |\eta_{kl}| = |\xi_{kl}| \cdot |g|\,.$$

Nun sei erstens (η) auch normal für $x = a$. Dann sind alle Funktionen der Form (39), also im besonderen auch die ξ_i durch den Divisor (40) teilbar und ebenso die η_i. Daher sind nach der Definition des Begriffes normal die Elemente in g und h ganz für $x = a$, also auch die Determinanten $|g|$ und $|h|$. Da aber g und h reziprok sind, so ist $|g| \cdot |h| = 1$. Also müssen g und h Einheiten für $x = a$ sein. Hieraus folgt wegen (43) auch der zweite der angegebenen Sätze.

Zweitens sei g und also auch h eine Einheit für $x = a$. Um zu zeigen, daß dann (η) gleichzeitig mit (ξ) normal für $x = a$ ist, haben wir wieder zweierlei zu zeigen:

1. daß jede Funktion R des Körpers $(x\, y)$, die den Divisor (40) enthält, in der Form darstellbar ist:

$$(44) \qquad R = r_1\, \eta_1 + r_2\, \eta_2 + \cdots + r_m\, \eta_m\,,$$

wo die r_i rationale Funktionen von x sind, die für $x = a$ nicht unendlich werden;

2. daß eine Funktion der Form (44) immer den Divisor (40) enthält.

1. Zunächst läßt sich R in der Form darstellen

$$(45) \qquad R = s_1\, \xi_1 + s_2\, \xi_2 + \cdots + s_m\, \xi_m\,,$$

wo die s_i für $x = a$ nicht unendlich werden. Führen wir hierin statt der ξ_i die η_i ein mit Hilfe der Gleichung (42), so erhalten wir, da die Elemente von h für $x = a$ nicht unendlich werden, für R eine Darstellung der Form (44).

2. Aus (44) folgt mit Hilfe von (41) die Darstellung (45), wo die s_i für $x = a$ nicht unendlich werden, so daß R in der Tat den Divisor (40) enthält. Denn (ξ) ist normal für $x = a$ in bezug auf q.

Ist eine Basis (ξ) für alle endlichen Stellen x in bezug auf q normal, so ist eine Funktion $R = g_1 \xi_1 + g_2 \xi_2 + \cdots + g_m \xi_m$ dann und nur dann durch q teilbar, wenn die g für keinen endlichen Wert von x unendlich werden, wenn es also ganze rationale Funktionen von x sind, d. h. aber, (ξ) ist eine Basis für die Vielfachen von q. Um zu einer solchen Basis zu gelangen, werden wir so verfahren, daß wir von irgendeiner Basis ausgehen und sie Schritt für Schritt verwandeln in eine Basis, die an den Stellen, an denen die ursprüngliche nicht normal ist, auch normal ist. Dabei ist der erste der eben bewiesenen Sätze für uns sehr wichtig, weil er uns gestattet, dafür zu sorgen, daß nicht etwa, wenn wir eine Basis (ξ) in eine neue (η) verwandeln, die an der Stelle a normal ist, diese neue Basis (η) an einer anderen Stelle b nicht normal ist, an der (ξ) normal war oder vielleicht mit vieler Mühe normal gemacht war.

§ 6. Herstellen einer Normalbasis. I.

Es sei (ξ) irgendeine Basis des Körpers. Eine solche können wir immer finden. Wir können z. B. nehmen die Basis $1, y, y^2, \ldots y^{m-1}$. Wir betrachten die Basis (ξ) an einer Stelle $x = a$ und zeigen, wie man entscheiden kann, ob sie normal ist für $x = a$ in bezug auf q und wie man, wenn das nicht der Fall ist, durch eine lineare Substitution aus ihr eine neue Basis herleiten kann, die an der Stelle $x = a$ normal ist, und die außerdem an allen Stellen normal ist, an denen (ξ) normal ist. Wir unterscheiden zwei Hauptfälle

I. Bei $x = a$ liegt kein Verzweigungspunkt.

II. Bei $x = a$ liegt mindestens ein Verzweigungspunkt.

I. Es sei $x = a$ eine im Endlichen liegende Stelle, und es liege in der Riemannschen Fläche bei $x = a$ kein Verzweigungspunkt.

Bei $x = a$ liegen dann genau m Stellen der Riemannschen Fläche übereinander. Die zu ihnen gehörenden Primteiler seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_m$. Es sei $\mathfrak{p}_k$ genau in der Potenz τ_k in q enthalten, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß alle τ_k gleich Null sind. Irgendeine Funktion R des Körpers läßt sich darstellen in der Form

$$R = g_1 \xi_1 + g_2 \xi_2 + \cdots + g_m \xi_m ,$$

wo die g rationale Funktionen von x sind. Die Werte von R in der Umgebung der m Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_m$ der Riemannschen Fläche sind

$$(46)\qquad \begin{aligned} R_1 &= g_1 \xi_{11} + g_2 \xi_{21} + \cdots + g_m \xi_{m1}\,, \\ R_2 &= g_1 \xi_{12} + g_2 \xi_{22} + \cdots + g_m \xi_{m2}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_m &= g_1 \xi_{1m} + g_2 \xi_{2m} + \cdots + g_m \xi_{mm}\,. \end{aligned}$$

Soll R durch $\mathfrak{q}$ teilbar sein, so muß es jedenfalls den Divisor $\mathfrak{p}_1^{\tau_1}\mathfrak{p}_2^{\tau_2}\ldots\mathfrak{p}_m^{\tau_m}$ enthalten. Wir nehmen die Bezeichnung so gewählt an, daß R_k den Wert von R für die Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}_k$ darstellt. Damit dann R den Divisor $\mathfrak{p}_1^{\tau_1}\mathfrak{p}_2^{\tau_2}\ldots\mathfrak{p}_m^{\tau_m}$ enthält, muß die Entwicklung von R_k nach steigenden ganzen Potenzen von $x-a$ mit einer Potenz von $x-a$ beginnen, deren Exponent mindestens gleich τ_k ist. Setzen wir

$$(47)\qquad R_k = (x-a)^{\tau_k}\,\mathfrak{P}_k,$$

so müssen die $\mathfrak{P}_i$ gwöhnliche Potenzreihen von $x-a$ sein. Setzen wir ferner

$$(48)\qquad \xi_{k1} = (x-a)^{\tau_1} p_{k1},\ \xi_{k2} = (x-a)^{\tau_2} p_{k2},\ \ldots\ \xi_{km} = (x-a)^{\tau_m} p_{km}\,, \qquad (k=1,2,\ldots m)\,,$$

so sind die p_{kl} nach ganzen steigenden Potenzen von $x-a$ entwickelbar. Die Beziehung zwischen den Systemen (ξ_{kl}) und (p_{kl}) ist die, daß das System (ξ_{kl}) aus dem System (p_{kl}) dadurch hervorgeht, daß man die Horizontalreihen von (p_{kl}) der Reihe nach multipliziert mit $(x-a)^{\tau_1}, (x-a)^{\tau_2}, \ldots (x-a)^{\tau_m}$. Bezeichnen wir das Multiplikationssystem, dessen Diagonalreihe $(x-a)^{\tau_1}, (x-a)^{\tau_2}, \ldots (x-a)^{\tau_m}$ ist, mit A, so können wir die Gleichungen (48) in der Form schreiben

$$(49)\qquad (\xi_{kl}) = A\,(p_{kl})\,.$$

Da die Determinante von A gleich $(x-a)^{\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_m}$ ist, so folgt hieraus

$$(50)\qquad \xi_{kl} = p_{kl}\,(x-a)^{\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_m}\,.$$

Unter Benutzung der Gleichungen (47) und (48) gehen die Gleichungen (46) über in

$$(51)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= g_1 p_{11} + g_2 p_{21} + \cdots + g_m p_{m1}\,, \\ \mathfrak{P}_2 &= g_1 p_{12} + g_2 p_{22} + \cdots + g_m p_{m2}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{P}_m &= g_1 p_{1m} + g_2 p_{2m} + \cdots + g_m p_{mm}\,. \end{aligned}$$

Es enthält R den Divisor $\mathfrak{p}_1^{\tau_1}\mathfrak{p}_2^{\tau_2}\ldots\mathfrak{p}_m^{\tau_m}$, wenn die rationalen Funktionen g_i so gewählt sind, daß die Funktionen $\mathfrak{P}_i$ für $x=a$ nicht unendlich werden.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall. Das System (p_{kl}) ist eine Einheit für $x=a$.

Dann folgt aus XVIII, Kap. VII §5, daß die $\mathfrak{P}_i$ dann und nur dann nicht unendlich werden für $x=a$, wenn die g_i ganz für $x=a$ sind. D. h. aber, es ist dann das System (ξ) normal für $x = a$. Wenn aber umgekehrt dann und nur dann die $\mathfrak{P}_i$ für $x = a$ ganz sind, wenn es die g_i sind, wenn mit anderen Worten (ξ) normal ist für $x = a$, so folgt aus XIX, Kap. VII § 5, daß das System (p_{kl}) eine Einheit sein muß für $x = a$. Wir können jetzt folgenden Satz beweisen:

Satz XI. Die Basis (ξ) ist dann und nur dann normal für $x = a$ in bezug auf den Divisor $\mathfrak{q}$, wenn die Funktionen ξ_i den Divisor

$$\mathfrak{p}_1^{\tau_1}\,\mathfrak{p}_2^{\tau_2}\,\ldots\,\mathfrak{p}_m^{\tau_m} \tag{52}$$

enthalten, und wenn die Diskriminante von (ξ) genau durch die $2(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_m)$-te Potenz von $x - a$ teilbar ist. Dabei ist angenommen, daß bei $x = a$ kein Verzweigungspunkt liegt.

Es sei nämlich erstens (ξ) normal für $x = a$. Dann ist nach dem eben Bewiesenen das System (p_{kl}) eine Einheit für $x = a$. Seine Elemente p_{kl} sind also gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ und seine Determinante ist eine Einheit für $x = a$. Aus (48) folgt dann, daß die ξ_i den Divisor (52) enthalten, und aus (50), daß die Diskriminante $|\xi_{kl}|^2$ durch die angegebene Potenz von $x - a$ genau teilbar ist.

Enthalten zweitens die ξ_i den Divisor (52), so sind wegen (48) die p_{kl} gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ und dasselbe gilt dann von der Determinante $|p_{kl}|$. Aus (50) folgt weiter, da nach Voraussetzung $|\xi_{kl}|$ genau durch die $(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_m)$-te Potenz von $x - a$ teilbar ist, daß $|p_{kl}|$ nicht Null wird für $x = a$. Also ist (p_{kl}) eine Einheit für $x = a$ und nach dem oben Bewiesenen ist (ξ) normal für $x = a$ in bezug auf $\mathfrak{q}$.

Aus dem bewiesenen Satze können wir schließen, daß es nur eine endliche Zahl von Stellen x gibt, für die eine Basis (ξ) nicht normal ist in bezug auf einen gegebenen Divisor $\mathfrak{q}$. Denn die Bedingungen des eben angegebenen Satzes sind höchstens für folgende Stellen nicht erfüllt:

1. für die Stellen $x = a$, wo die Riemannsche Fläche Verzweigungspunkte hat;
2. für die Stellen $x = a$, an denen eine oder mehrere der Funktionen ξ oder ihrer konjugierten unendlich werden;
3. für die Stellen $x = a$, zu denen Primteiler gehören, die in $\mathfrak{q}$ vorkommen;
4. für die Stellen $x = a$, für die die Diskriminante von (ξ) verschwindet.

Die Zahl dieser Stellen ist aber endlich. Die Stellen lassen sich bestimmen, wenn $\mathfrak{q}$ gegeben und (ξ) gewählt ist. Nur diese Stellen brauchen behandelt zu werden.

Zweiter Fall. Das System (p_{kl}) ist keine Einheit für $x = a$.

In diesem Falle gibt es nach XX, Kap. VII, § 5 ein System S von m^2

rationalen Funktionen von x, das für alle endlichen Stellen eine Einheit ist außer für $x = a$, so daß

(53) $$(p_{kl})\, S = (q_{kl})$$

eine Einheit für $x = a$ ist. Setzen wir aber

$$(\eta) = (\xi)\, S\,, \quad (\eta_{kl}) = (\xi_{kl})\, S\,,$$

so folgt aus (49), (53)

$$(\eta_{kl}) = A\, (q_{kl})\,,$$

wo (q_{kl}) eine Einheit ist. Daraus folgt aber nach dem ersten Fall, daß das System (η) normal ist in bezug auf $x = a$, und nach den Sätzen des vorigen § ist (η) überall da normal, wo (ξ) es war, da S für alle endlichen Stellen mit alleiniger Ausnahme von $x = a$ eine Einheit ist. Damit ist aber gezeigt, wie wir aus (ξ) eine Basis herleiten können, die an allen Stellen, wo kein Verzweigungspunkt liegt, normal ist.

§ 7. Herstellen einer Normalbasis. II.

II. Es mögen an der Stelle $x = a$ ein oder mehrere Verzweigungspunkte liegen. Wir begnügen uns damit, zwei besondere Fälle zu betrachten, weil das genügt, um die Richtigkeit des Verfahrens auch im allgemeinsten Falle darzutun.

IIa. Es sei erstens $m = 5$ und es mögen an der Stelle $x = a$ in der Riemannschen Fläche zwei Verzweigungspunkte liegen, einer von der ersten und einer von der zweiten Ordnung.

Zum ersten gehöre der Primteiler $\mathfrak{p}_1$, zum zweiten $\mathfrak{p}_2$.

Es seien $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{q}$ genau in den Potenzen τ_1, τ_2 enthalten. Eine Funktion R enthält den Divisor $\mathfrak{p}_1^{\tau_1}\mathfrak{p}_2^{\tau_2}$, wenn in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$ die Funktion $R\,(x-a)^{-\frac{\tau_1}{2}}$ und in der Umgebung von $\mathfrak{p}_2$ $R\,(x-a)^{-\frac{\tau_2}{3}}$ für $x = a$ nicht unendlich wird. In der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$ läßt sich aber R und also auch $R\,(x-a)^{-\frac{\tau_1}{2}}$ nach ganzen steigenden Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln. Eine solche Entwicklung läßt sich, wie wir in § 6, Kap. I gesehen haben, schreiben

$$R\,(x-a)^{-\frac{\tau_1}{2}} = r_1 + r_2\,(x-a)^{\frac{1}{2}}\,,$$

wo die r nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Potenzreihen sind. Da in r_1 nur grade und in $r_2\,(x-a)^{\frac{1}{2}}$ nur ungrade Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ vorkommen, so kann ein Glied in r_1 sich nicht fortheben gegen ein Glied in $r_2\,(x-a)^{\frac{1}{2}}$. Soll also $R\,(x-a)^{-\frac{\tau_1}{2}}$ für $x = a$ nicht unendlich werden, so darf weder in r_1 noch in $r_2\,(x-a)^{\frac{1}{2}}$ eine negative Potenz von $x-a$ vorkommen. Also müssen r_1 und r_2 für $x=a$ endlich sein.

In der Umgebung von $\mathfrak{p}_2$ wird R und also auch $R\,(x-a)^{-\frac{r_2}{3}}$ eine Potenzreihe von $(x-a)^{\frac{1}{3}}$, die wir schreiben können

$$R\,(x-a)^{-\frac{r_2}{3}} = s_1 + s_2\,(x-a)^{\frac{1}{3}} + s_3\,(x-a)^{\frac{2}{3}},$$

wo die s nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreiten. Ähnlich wie eben schließen wir, daß $R\,(x-a)^{-\frac{r_2}{3}}$ dann und nur dann für $x=a$ endlich bleibt, wenn die drei Reihen s_1, s_2, s_3 für $x=a$ endlich bleiben.

Wir haben also gefunden: Wir können eine Funktion R in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ in der Form schreiben

$$R = (x-a)^{\frac{r_1}{2}}\,r_1 + (x-a)^{\frac{r_1+1}{2}}\,r_2,$$

$$R = (x-a)^{\frac{r_2}{3}}\,s_1 + (x-a)^{\frac{r_2+1}{3}}\,s_2 + (x-a)^{\frac{r_2+2}{3}}\,s_3,$$

wo die r und s nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen sind. Die Funktion R enthält dann und nur dann den Divisor $\mathfrak{p}_1^{r_1}\,\mathfrak{p}_2^{r_2}$, wenn die Reihen r und s für $x=a$ nicht unendlich werden. Es sei wieder (ξ) irgendeine Basis. Wir setzen

$$(54)\qquad \xi_{k\,1} = (x-a)^{\frac{r_1}{2}}\left\{p_{k\,1} + (x-a)^{\frac{1}{2}}\,p_{k\,2}\right\}, \quad (k=1,2,\ldots 5),$$

wo $p_{k\,1}$ und $p_{k\,2}$ nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Potenzreihen sein sollen. Ersetzen wir hierin $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ durch seinen anderen Wert $-(x-a)^{\frac{1}{2}}$, so erhalten wir $\xi_{k\,2}$, also

$$(55)\quad \xi_{k\,2} = (-1)^{r_1}\,(x-a)^{\frac{r_1}{2}}\left\{p_{k\,1} - (x-a)^{\frac{1}{2}}\,p_{k\,2}\right\}, \quad (k=1,2,\ldots 5).$$

Ferner setzen wir

$$(56)\quad \xi_{k\,3} = (x-a)^{\frac{r_2}{3}}\left\{p_{k\,3} + (x-a)^{\frac{1}{3}}\,p_{k\,4} + (x-a)^{\frac{2}{3}}\,p_{k\,5}\right\}, \quad (k=1,2,\ldots 5),$$

wo die $p_{k\,i}$ nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen sein sollen. Hieraus erhalten wir $\xi_{k\,4}$ und $\xi_{k\,5}$, indem wir $(x-a)^{\frac{1}{3}}$ durch seine beiden anderen Werte $\varepsilon\,(x-a)^{\frac{1}{3}}$ und $\varepsilon^2\,(x-a)^{\frac{1}{3}}$ ersetzen, wo ε eine primitive dritte Einheitswurzel ist. Also

$$(57)\qquad \begin{aligned} \xi_{k4} &= \varepsilon^{\tau_2} (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}} \left\{p_{k3} + \varepsilon\, (x-a)^{\frac{1}{3}}\, p_{k4} + \varepsilon^2 (x-a)^{\frac{2}{3}}\, p_{k5}\right\}, \\ \xi_{k5} &= \varepsilon^{2\tau_2} (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}} \left\{p_{k3} + \varepsilon^2 (x-a)^{\frac{1}{3}}\, p_{k4} + \varepsilon\, (x-a)^{\frac{2}{3}}\, p_{k5}\right\}. \end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen dem System (ξ_{kl}) und (p_{kl}) können wir auch in folgender Weise schreiben. Wir setzen

$$(58)\qquad \begin{aligned} r_{k1} &= p_{k1} + (x-a)^{\frac{1}{2}}\, p_{k2}, \\ r_{k2} &= p_{k1} - (x-a)^{\frac{1}{2}}\, p_{k2}, \\ r_{k3} &= p_{k3} + (x-a)^{\frac{1}{3}}\, p_{k4} + (x-a)^{\frac{2}{3}}\, p_{k5}, \\ r_{k4} &= p_{k3} + \varepsilon\, (x-a)^{\frac{1}{3}}\, p_{k4} + \varepsilon^2 (x-a)^{\frac{2}{3}}\, p_{k5}, \\ r_{k5} &= p_{k3} + \varepsilon^2 (x-a)^{\frac{1}{3}}\, p_{k4} + \varepsilon\, (x-a)^{\frac{2}{3}}\, p_{k5}. \end{aligned}$$

Es wird dann

$$(59)\qquad \begin{aligned} &\xi_{k1} = (x-a)^{\frac{\tau_1}{2}}\, r_{k1}, \quad \xi_{k2} = (-1)^{\tau_1} (x-a)^{\frac{\tau_1}{2}}\, r_{k2}, \\ &\xi_{k3} = (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}}\, r_{k3}, \quad \xi_{k4} = \varepsilon^{\tau_2} (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}}\, r_{k4}, \quad \xi_{k5} = \varepsilon^{2\tau_2} (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}}\, r_{k5}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit A_1 das Multiplikationssystem von 5^2 Elementen, dessen Diagonale ist

$$(x-a)^{\frac{\tau_1}{2}}, \quad (-1)^{\tau_1} (x-a)^{\frac{\tau_1}{2}}, \quad (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}}, \quad \varepsilon^{\tau_2} (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}}, \quad \varepsilon^{2\tau_2} (x-a)^{\frac{\tau_2}{3}},$$

so ist

$$(\xi_{kl}) = A_1\, (r_{kl}).$$

Setzen wir ferner

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & (x-a)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(x-a)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (x-a)^{\frac{1}{3}} & (x-a)^{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon\, (x-a)^{\frac{1}{3}} & \varepsilon^2 (x-a)^{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon^2 (x-a)^{\frac{1}{3}} & \varepsilon\, (x-a)^{\frac{2}{3}} \end{array}\right\} = B,$$

so ist

$$(r_{kl}) = B\, (p_{kl})$$

und also

$$(\xi_{kl}) = A_1\, B\, (p_{kl}).$$

Das System B ist aus zwei Systemen zusammengesetzt, nämlich aus einem System von 2^2 und einem von 3^2 Elementen, und zwar in der Weise, daß die Diagonalen der kleineren Systeme sich zur Diagonale des Systems von 5^2 Elementen zusammensetzen und die fehlenden Elemente durch Nullen ersetzt sind. Das System B geht aus dem System

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{Vmatrix} = A_2$$

dadurch hervor, daß dessen Vertikalreihen der Reihe nach mit $1, (x-a)^{\frac{1}{2}}, 1, (x-a)^{\frac{1}{3}}, (x-a)^{\frac{2}{3}}$ multipliziert werden. Bezeichnen wir also das Multiplikationssystem, dessen Diagonalelemente $1, (x-a)^{\frac{1}{2}}, 1, (x-a)^{\frac{1}{3}}, (x-a)^{\frac{2}{3}}$ sind, mit A_3, so ist

$$B = A_2 A_3$$

und

(60) $$(\xi_{kl}) = A_1 A_2 A_3 (p_{kl}) \,.$$

Das System A_2 ist geradeso wie B aus zwei kleineren Systemen zusammengesetzt, nämlich aus den Systemen

$$(a) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad (b) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{Vmatrix}.$$

Die Determinanten dieser beiden Systeme sind von Null verschieden, so daß auch die Determinante von A_2, die nach einem bekannten Determinantensatze gleich dem Produkt der Determinanten a und b ist, von Null verschieden ist. Wie die Systeme (a) und (b) gebildet sind, sieht man, wenn man sie folgendermaßen schreibt. Es seien $u_1 = 1$ und $u_2 = -1$ die Wurzeln der Gleichung $z^2 - 1 = 0$ und $v_1 = 1$, $v_2 = \varepsilon$, $v_3 = \varepsilon^2$ die Wurzeln der Gleichung $z^3 - 1 = 0$. Dann ist

$$(a) = \begin{Vmatrix} u_1^0 & u_1^1 \\ u_2^0 & u_2^1 \end{Vmatrix}, \quad (b) = \begin{Vmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^0 & v_2^1 & v_2^2 \\ v_3^0 & v_3^1 & v_3^2 \end{Vmatrix}.$$

Die Determinanten a und b sind also die Quadratwurzeln aus den Diskriminanten der Gleichungen $z^2 - 1 = 0$ und $z^3 - 1 = 0$.

Eine Funktion $R = g_1 \xi_1 + g_2 \xi_2 + \cdots + g_5 \xi_5$ hat in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$ die Darstellung

$$\begin{aligned} R = (x-a)^{\frac{r_1}{2}} &\{g_1 p_{11} + g_2 p_{21} + \cdots + g_5 p_{51}\} \\ + (x-a)^{\frac{r_1+1}{2}} &\{g_1 p_{12} + g_2 p_{22} + \cdots + g_5 p_{52}\} \end{aligned}$$

und in der Umgebung von $\mathfrak{p}_2$ ist

$$
\begin{aligned}
R = (x-a)^{\frac{r_2}{3}} & \{ g_1 \, p_{13} + g_2 \, p_{23} + \cdots + g_5 \, p_{53} \} \\
+ (x-a)^{\frac{r_2+1}{3}} & \{ g_1 \, p_{14} + g_2 \, p_{24} + \cdots + g_5 \, p_{54} \} \\
+ (x-a)^{\frac{r_2+2}{3}} & \{ g_1 \, p_{15} + g_2 \, p_{25} + \cdots + g_5 \, p_{55} \} \, .
\end{aligned}
$$

Die Funktion R enthält also dann und nur dann den Divisor $\mathfrak{p}_1^{r_1} \mathfrak{p}_2^{r_2}$, wenn die fünf Funktionen

$$(61) \qquad g_1 \, p_{1k} + g_2 \, p_{2k} + \cdots + g_5 \, p_{5k} \, , \quad (k = 1, 2, \ldots 5)$$

für $x = a$ nicht unendlich werden. Hieraus ergibt sich dann ganz so wie im vorigen Paragraphen, daß die Basis (ξ) dann und nur dann normal für $x = a$ ist, wenn das System (p_{kl}) eine Einheit für $x = a$ ist.

Aus (60) folgt

$$(62) \qquad \xi_{kl} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot p_{kl} = A_2 \, (x-a)^{r_1 + r_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \, p_{kl} \, ,$$

wo A_2 eine von Null verschiedene Konstante ist. Liegen an der Stelle $x = a$ allgemeiner drei Verzweigungspunkte von den Ordnungen $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\gamma - 1$, so lautet der Exponent von $x - a$ in (62)

$$
\begin{aligned}
& r_1 + r_2 + r_3 + \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} + \cdots + \frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta} + \cdots + \frac{\beta - 1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\
& + \frac{2}{\gamma} + \cdots + \frac{\gamma - 1}{\gamma} = r_1 + r_2 + r_3 + \frac{1}{2} (\alpha - 1) + \frac{1}{2} (\beta - 1) + \frac{1}{2} (\gamma - 1)
\end{aligned}
$$

und es ist

$$(63) \qquad \xi_{kl} = A_2 \, (x-a)^{r_1 + r_2 + r_3 + \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{2}(\beta - 1) + \frac{1}{2}(\gamma - 1)} \, p_{kl} \, .$$

Ganz ähnlich wie in der vorigen Nummer haben wir

Satz XII. *An der Stelle $x = a$ mögen etwa drei Verzweigungspunkte der Ordnungen $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\gamma - 1$ liegen. Die zu ihnen gehörenden Primteiler seien $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ und es sei im Divisor $\mathfrak{a}$ genau die r_i-te Potenz von $\mathfrak{p}_i$ enthalten. So ist die Basis (ξ) dann und nur dann normal für $x = a$ in bezug auf $\mathfrak{a}$, wenn die ξ_i den Divisor*

$$(64) \qquad \mathfrak{p}_1^{r_1} \, \mathfrak{p}_2^{r_2} \, \mathfrak{p}_3^{r_3}$$

enthalten und wenn die Diskriminante $|\xi_{kl}|^2$ von (ξ) genau durch die $[2(r_1 + r_2 + r_3) + (\alpha - 1) + (\beta - 1) + (\gamma - 1)]$-te Potenz von $x - a$ teilbar ist.

Es sei nämlich erstens (ξ) normal für $x = a$. So ist der Divisor (64) in einer Funktion

$$R = g_1 \, \xi_1 + g_2 \, \xi_2 + \cdots + g_m \, \xi_m$$

dann und nur dann enthalten, wenn die g_i für $x = a$ endlich bleiben. Es sind also die Funktionen (61) dann und nur dann endlich für $x = a$, wenn dasselbe von den g_i gilt. Daraus aber folgt nach XIX, Kap. VII § 5, daß (p_{kl}) eine Einheit für $x = a$ ist. Aus (54) bis (57) ergibt sich also, daß die ξ_i den Divisor (64) enthalten, und aus (63), daß die Diskriminante von (ξ) $x - a$ genau in der angegebenen Potenz zum Faktor hat.

Ist zweitens der Divisor (64) in den ξ_i enthalten und ist die Diskriminante genau durch die im Satze angegebene Potenz von $x - a$ teilbar, so folgt zunächst aus (54) bis (57), daß die p_{kl} gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ sind. Dasselbe gilt dann von der Determinante $|p_{kl}|$ und aus 63) folgt, daß diese überdies eine Einheit für $x = a$ sein muß. D. h. aber, es ist (p_{kl}) eine Einheit für $x = a$, womit bewiesen ist, daß (ξ) normal ist für $x = a$ in bezug auf $\mathfrak{q}$.

Ist (p_{kl}) keine Einheit für $x = a$, so bestimmen wir wieder ein rationales System S, das für alle Stellen im Endlichen eine Einheit ist mit alleiniger Ausnahme von $x = a$, so daß

(65) $$(p_{kl})\, S = (q_{kl})$$

eine Einheit für $x = a$ ist. Setzen wir dann

$$(\eta) = (\xi)\, S, \quad (\eta_{kl}) = (\xi_{kl})\, S\,,$$

so ergibt sich aus (60), (65)

$$(\eta_{kl}) = A_1\, A_2\, A_3\, (q_{kl})\,,$$

und da (q_{kl}) eine Einheit ist für $x = a$, so ist (η) normal für $x = a$ und außerdem normal für alle Stellen, für die (ξ) normal war, weil S eine Einheit ist für alle Stellen, für die nicht $x = a$. Wir können also auch für solche Stellen $x = a$, wo Verzweigungspunkte liegen, aus einer Basis (ξ) eine neue Basis (η) herleiten, die normal ist, und zwar auch wieder, ohne an andern Stellen etwas zu verderben.

Damit ist aber gezeigt, wie wir aus irgendeiner Basis (ξ) eine Basis herleiten können, die an allen endlichen Stellen normal ist in bezug auf einen gegebenen Divisor, die also eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ ist.

Wir können jetzt noch folgenden Satz beweisen:

Satz XIII. Es gibt immer eine Funktion des Körpers $(x\, y)$, die an einer beliebigen Stelle genau von der ersten Ordnung Null wird.

Ist nämlich die Basis (ξ) normal für $x = a$ in bezug auf $\mathfrak{q}$ — und eine solche Basis gibt es immer, wie wir jetzt wissen —, so ist das System (p_{kl}) in (54) bis (57) eine Einheit. Daraus folgt, daß nicht alle p_{k1} und nicht alle p_{k3} gleich Null werden können für $x = a$, da sonst in $|p_{kl}|$ eine Horizontalreihe durch $x - a$ teilbar sein würde und also auch $|p_{kl}|$ den Faktor

$x-a$ hätte. Dann aber ist wegen (54) mindestens eine der Funktionen ξ_{k1} genau durch $\mathfrak{p}_1^{r_1}$ und eine der Funktionen ξ_{k3} wegen (56) genau durch $\mathfrak{p}_2^{r_2}$ teilbar. Wählen wir $r_1 = r_2 = 1$, so gibt es also eine Funktion des Körpers $(x\,y)$, die genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}_1$, und eine, die genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}_2$ teilbar ist. Das gilt offenbar auch, wenn die Verhältnisse nicht so einfach liegen, wie in dem Fall, den wir zu unsern Beweisen benutzt haben.

Ferner folgt noch: Es können nicht alle Funktionen ξ_i den Primteiler $\mathfrak{p}_k$ in einer höheren als der r_k-ten Potenz enthalten, wenn (ξ) normal ist für $x=a$. Ist also (ξ) normal für alle endlichen Stellen von x, d. h. ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$, so können nicht alle Funktionen ξ_i einen Primteiler $\mathfrak{p}$ in höherer Potenz enthalten, als er in $\mathfrak{q}$ enthalten ist. Das gilt auch für den Fall, wo der Primteiler in $\mathfrak{q}$ nicht (oder in der nullten Potenz) enthalten ist. Denn der Fall, daß bei unsern Betrachtungen mehrere oder alle r_i Null sind, ist ja nicht ausgeschlossen. Daher haben wir:

Satz XIV. Ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$, so ist $\mathfrak{q}$ der größte gemeinsame Teiler der ξ_i, soweit es sich um Stellen handelt, wo x endlich ist.

§ 8. Herstellen einer Normalbasis. III.

IIb. Wir betrachten zweitens noch den Fall, wo im Zähler von $x-a$ nur ein Primteiler enthalten ist, der mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet sei. Bei $x=a$ liegt dann nur eine Stelle der Riemannschen Fläche, die also ein Verzweigungspunkt der Ordnung $m-1$ ist. Wir bezeichnen m auch mit α. Es sei $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{q}$ genau in der Potenz r enthalten. Wir schreiben dann in der Umgebung von $\mathfrak{p}$

$$(66)\qquad \xi_{k1} = (x-a)^{\frac{r}{\alpha}}\left[p_{k1} + (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} p_{k2} + \cdots + (x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} p_{k\alpha}\right].$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für die konjungierten Funktionen die Darstellung

$$(67)\ \xi_{kl} = \omega_l^r (x-a)^{\frac{r}{\alpha}}\left[p_{k1} + \omega_l^1 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} p_{k2} + \cdots + \omega_l^{\alpha-1} (x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} p_{k\alpha}\right],$$

wenn wir setzen

$$\omega_l = e^{\frac{2\pi i l}{\alpha}}.$$

Die Gleichungen (66), (67) können wir in folgender Weise schreiben. Es seien bezeichnet mit A_1 und A_3 die Multiplikationssysteme mit den Diagonalen

$$(68)\qquad (x-a)^{\frac{r}{\alpha}},\ \omega_1^r (x-a)^{\frac{r}{\alpha}},\ \ldots\ \omega_{\alpha-1}^r (x-a)^{\frac{r}{\alpha}}$$

und

(69)
$$1, (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots (x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Ferner sei

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \ldots & \omega_1^{\alpha-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_2^{\alpha-1} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & \omega_{\alpha-1} & \omega_{\alpha-1}^2 & \ldots & \omega_{\alpha-1}^{\alpha-1} \end{vmatrix}.$$

Dann ist

(70)
$$(\xi_{kl}) = A_1 A_2 A_3 (p_{kl}).$$

Eine Funktion $R = g_1 \xi_1 + g_2 \xi_2 + \cdots + g_m \xi_m$ hat zufolge dieser Gleichungen in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} R = {} & (x-a)^{\frac{\tau}{\alpha}} \quad (g_1 p_{11} + g_2 p_{21} + \cdots + g_\alpha p_{\alpha 1}) \\ & + (x-a)^{\frac{\tau+1}{\alpha}} \quad (g_1 p_{12} + g_2 p_{22} + \cdots + g_\alpha p_{\alpha 2}) \\ & + - - - - - - - - - - - - - - - \\ & + (x-a)^{\frac{\tau+\alpha-1}{\alpha}} \quad (g_1 p_{1\alpha} + g_2 p_{2\alpha} + \cdots + g_\alpha p_{\alpha\alpha}). \end{aligned}$$

Die Funktion enthält also dann und nur dann den Divisor $\mathfrak{p}^\tau$, wenn die α Funktionen

$$g_1 p_{1k} + g_2 p_{2k} + \cdots + g_\alpha p_{k\alpha}, \quad (k = 1, 2, \ldots \alpha)$$

für $x = a$ nicht unendlich werden. Ist das System (p_{kl}) eine Einheit für $x = a$, so ist das dann und nur dann der Fall, wie wir wissen, wenn die g für $x = a$ nicht unendlich werden. Wenn aber (p_{kl}) keine Einheit für $x = a$ ist, so können wir ein System S so bestimmen, daß das System

(71)
$$(q_{kl}) = (p_{kl})\, S$$

eine Einheit für $x = a$ ist. Dabei können wir S so wählen, daß es für alle endlichen Stellen mit Ausnahme von $x = a$ eine Einheit ist. Definieren wir eine neue Basis durch die Gleichung

$$(\eta) = (\xi)\, S,$$

aus der folgt

(72)
$$(\eta_{kl}) = (\xi_{kl})\, S,$$

so ergeben die Gleichungen (70), (71), (72)

(73)
$$(\eta_{kl}) = A_1 A_2 A_3 (q_{kl}).$$

Da aber (q_{kl}) eine Einheit für $x = a$ ist, so enthält eine Funktion $R = g_1 \eta_1 + g_2 \eta_2 + \cdots + g_m \eta_m$ dann und nur dann $\mathfrak{p}^\tau$, wenn die g ganz sind; mit anderen Worten, die Basis (η) ist für $x = a$ normal in bezug auf $\mathfrak{q}$. Da die Substitution S, durch die (η) aus (ξ) hervorgeht, für alle endlichen von a verschiedenen Stellen eine Einheit ist, so ist außerdem (η) normal für alle Stellen, für die (ξ) es ist.

Aus der Gleichung (73) folgt durch Übergang zu den Determinanten

$$|\eta_{kl}| = |A_1|\,|A_2|\,|A_3|\,|q_{kl}|\,. \tag{74}$$

Da A_1 und A_3 Diagonalsysteme sind, so sind ihre Determinanten gleich dem Produkte ihrer Diagonalglieder, also nach (68) und (69) leicht zu berechnen. A_2 ist die Diskriminante der Gleichung $z^\alpha - 1 = 0$, also eine von Null verschiedene Konstante. Daher folgt aus (74)

$$|\eta_{kl}| = \text{konst}\,(x-a)^{r+\frac{\alpha-1}{2}}\,|q_{kl}|\,. \tag{75}$$

Da $|q_{kl}|$ für $x = a$ nicht Null oder unendlich wird, so schließen wir hieraus, daß die Diskriminante $|\eta_{kl}|^2$ genau durch die $(2r+\alpha-1)$-te Potenz von $x - a$ teilbar ist.

§ 9. Die Diskriminante einer Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$.

1. Die Idealnorm. Definition V. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primteiler und hat x an der Stelle, zu der $\mathfrak{p}$ gehört, den endlichen Wert a, so heißt $x - a$ die Idealnorm von $\mathfrak{p}$ in bezug auf x oder auch kurz die Idealnorm von $\mathfrak{p}$. Wir schreiben

$$NI(\mathfrak{p}) = x - a\,.$$

Primteiler, die zu Stellen gehören, wo x unendlich wird, haben keine Idealnorm.

Diese Definition überträgt sich ohne weiteres auf Divisoren. Ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1^{\varrho_1}\,\mathfrak{r}_2^{\varrho_2}\ldots\mathfrak{r}_\lambda^{\varrho_\lambda}$$

ein Divisor und nimmt x an der Stelle des Primteilers $\mathfrak{r}_i$ den endlichen Wert a_i an, so ist die Idealnorm von $\mathfrak{r}$

$$NI(\mathfrak{r}) = (x-a_1)^{\varrho_1}(x-a_2)^{\varrho_2}\ldots(x-a_\lambda)^{\varrho_\lambda}\,.$$

Satz XV. Die Idealnorm eines Divisors ist also immer eine rationale Funktion von x, deren Ordnung — d. h. Differenz zwischen den Graden des Zählers und Nenners — gleich der Ordnung des Divisors ist.

Es ist z. B. die Idealnorm des Zählers von $x - a$ gleich $(x-a)^m$.

2. Die Diskriminante. Es sei $\mathfrak{q}$ wieder ein Divisor, der nur Primteiler enthält, die zu endlichen Werten von x gehören, und es sei $\mathfrak{z}'$ der Teil des Verzweigungsdivisors von x, der zu den im Endlichen gelegenen Verzweigungsstellen gehört. Es sei $x = a$ irgendein endlicher Wert von x und es mögen bei a die Primteiler $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$ liegen, und zwar sei $\mathfrak{p}_i$

von der Verzweigungsordnung $\lambda_i - 1$. Ferner sei $\mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{q}$ in der Potenz r_i enthalten. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, daß die Zahlen $\lambda_i - 1$ und r_i teilweise oder sämtlich Null sind. Ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$, so enthält nach Satz XII, § 7 die Diskriminante von (ξ) den Faktor $(x - a)$ genau in der Potenz

$$2\sum r + \sum(\lambda_i - 1)\,. \tag{76}$$

Da aber $\mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{q}$ in der Potenz r_i und in $\mathfrak{z}'$ in der Potenz $\lambda_i - 1$ enthalten ist, so folgt, daß $(x - a)$ auch in der Idealnorm von $\mathfrak{q}^2\mathfrak{z}'$ genau in der Potenz (76) enthalten ist. Da das für alle endlichen Stellen gilt, so folgt:

Satz XVI. Ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{q}$, so ist die Diskriminante

$$|\xi_{kl}|^2 = \text{const.}\, NI(\mathfrak{q}^2\mathfrak{z}')\,.$$

Von diesem Satz gilt folgende Umkehrung:

Satz XVII. Ist (ξ) eine Basis und ist $\mathfrak{q}$ der größte gemeinsame Teiler der ξ_i, soweit es sich um Stellen handelt, wo x endlich ist, und ist die Diskriminante

$$|\xi_{kl}|^2 = \text{const.}\, NI(\mathfrak{q}^2\mathfrak{z}')\,, \tag{77}$$

so ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$.

Denn wenn die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind, so sind für jede endliche Stelle $x = a$ die Voraussetzungen des Satzes XII in § 7 erfüllt, so daß (ξ) für jede endliche Stellen in bezug auf $\mathfrak{q}$ normal ist. Das ist aber nur ein anderer Ausdruck für die Behauptung.

Nach dem Satz XV folgt aus (77) für den Fall, daß $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}$ ist:

Satz XVIII. Ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$ von der Ordnung q und liegt bei $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt, so ist die Diskriminante von (ξ) von der Ordnung

$$2q + w\,,$$

wo w die Verzweigungsordnung in bezug auf x ist, oder, anders ausgedrückt, es wird die Diskriminante für unendliches x von der Ordnung $2q + w$ unendlich.

Ist (ξ) irgendeine Basis, so gibt es nicht immer einen Divisor $\mathfrak{q}$ von der Art, daß (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ wäre. Damit das der Fall ist, muß zunächst $\mathfrak{q}$ nach Satz XIV in § 7 der größte gemeinsame Teiler der ξ_i sein, soweit die endlichen Werte von x in Betracht kommen. Dann aber muß außerdem nach dem eben angegebenen Satze die Gleichung (77) bestehen. Das ist aber im allgemeinen keineswegs der Fall, wie folgendes einfache Beispiel lehrt.

Es sei
$$f(x, y) \quad y^2 - x^3 = 0$$
die den Körper $(x\, y)$ definierende Gleichung. Es ist
$$\xi_1 = 1\,, \; \xi_2 = y$$
eine Basis. Der größte gemeisame Teiler von ξ_1 und ξ_2 ist $\mathfrak{q} = 1$. Im Endlichen ist nur eine Verzweigungsstelle bei $x = 0$, und zwar von der ersten Ordnung. Bezeichnen wir den zu $x = 0$ gehörenden Primteiler mit $\mathfrak{p}$, so ist also $\mathfrak{z}' = \mathfrak{p}$ und
$$N\,I\,(\mathfrak{q}^2\,\mathfrak{z}') = N\,I\,(\mathfrak{p}) = x\,.$$
Dagegen ist
$$|\xi_{kl}|^2 = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & -y \end{vmatrix}^2 = 4\,y^2 = 4\,x^3\,.$$

§ 10. Beispiel 1.

Es sei
$$f\,(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\,.$$
Die über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche ist zweiblättrig. Da $y = \sqrt{1 - x^2}$, so liegen bei $x = 1$ und $x = -1$ je ein Verzweigungspunkt erster Ordnung. Wir bezeichnen die zugehörigen Primteiler mit $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$. Es ist der Verzweigungsdivisor in bezug auf x
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2$$
und die Idealnorm von $\mathfrak{z}$
$$N\,I\,(\mathfrak{z}) = x^2 - 1\,.$$
An der Stelle $x = 0$ liegen zwei Punkte der Riemannschen Fläche, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Die Entwicklungen von y sind in ihrer Umgebung
$$y = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{8}\,x^4 + \cdots, \quad y = -1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{8}\,x^4 + \cdots.$$
Es sei
$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{-2}\,\mathfrak{p}_2^{-1}\,\mathfrak{v}_1^{-1}\,.$$
Wir gehen aus von der Basis $(\xi) = (1, y)$. Das zugehörige System ist
$$(\xi_{kl}) = \begin{pmatrix} 1, & y \\ 1, & -y \end{pmatrix}.$$

Das System (ξ_{kl}) müssen wir betrachten in der Umgebung derjenigen Stellen x, an denen es nicht normal ist in bezug auf $\mathfrak{q}$. Das sind zunächst diejenigen Stellen, die einen Beitrag zu $\mathfrak{q}$ liefern, also $x = 0$ und $x = 1$. Da die Funktionen ξ_{kl} für endliche Werte von x nicht unendlich werden, so kommen nur noch in Frage die Nullstellen der Diskriminante $|\xi_{kl}|^2 = 4\,y^2 = 4\,(1 - x^2)$, also außer der schon genannten Stelle $x = 1$ noch die Stelle

$x = -1$. Es ist aber $\xi_{k\,l}{}^2$ genau durch $N\,I\,(\mathfrak{v}_2)$ teilbar, also normal in bezug auf $\mathfrak{q}$ an der Stelle $x = -1$, da ja die $\xi_{k\,l}$ für $x = -1$ endlich sind. Das System $(\xi_{k\,l})$ ist also nur in der Umgebung von $x = 0$ und $x = 1$ zu betrachten. An allen anderen Stellen ist es normal in bezug auf $\mathfrak{q}$.

Wir betrachten $(\xi_{k\,l})$ zunächst in der Umgebung von $x = 0$ und setzen

$$1 = x^{-2} \cdot x^{+2}, \quad y = x^{-2}\left[x^2 - \frac{1}{2}\,x^4 + \cdots\right],$$

$$1 = x \cdot x^{-1}, \quad -y = x\left[-x^{-1} + \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{8}\,x^3 + \cdots\right].$$

Es ist also

$$(p_{k\,l}) = \begin{Bmatrix} x^2, & x^2 - \frac{1}{2}\,x^4 + \cdots \\ x^{-1}, & -x^{-1} + \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{8}\,x^3 + \cdots \end{Bmatrix}.$$

Wir haben eine Substitution S zu suchen, die $(p_{k\,l})$ in eine Einheit für $x = 0$ überführt. Diese entnehmen wir aus dem Beispiel I in § 6 des Kap. VII. Danach können wir nehmen

$$S = \begin{Bmatrix} x, & x^{-2} - \frac{1}{2} \\ 0, & x^{-2} \end{Bmatrix}.$$

Die Funktionen

$$\eta_1 = x\xi_1 + 0 \cdot \xi_2 = x\,,$$

$$\eta_2 = \left(x^{-2} - \frac{1}{2}\right)\xi_1 + x^{-2}\xi_2 = x^{-2} - \frac{1}{2} + x^{-2}y = \frac{1 - \frac{1}{2}\,x^2 + y}{x^2}$$

bilden eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$, die normal ist für $x = 0$. Es bleibt noch der Punkt $x = 1$ zu betrachten. Wir haben in der Umgebung von $x = 1$

$$\eta_1 = 1 + (x - 1)\,,$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} - 2\,(x - 1) + \cdots + i\,\sqrt{2}\,(x - 1)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{7}{4}\,(x - 1) + \cdots\right].$$

Wir setzen

$$\eta_1 = 0 \cdot (x - 1)^{-\frac{1}{2}} + 1 + (x - 1)\,,$$

$$\eta_2 = i\sqrt{2}\left[x - 1 - \frac{7}{4}\,(x - 1)^2 + \cdots\right](x - 1)^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2} - 2\,(x - 1) + \cdots\right].$$

Es ist jetzt

$$(p_{k\,l}) = \begin{Bmatrix} 0 & i\sqrt{2}\left[(x - 1) - \frac{7}{4}\,(x - 1)^2 + \cdots\right] \\ 1 + (x - 1) & \frac{1}{2} - 2\,(x - 1) + \cdots \end{Bmatrix}.$$

Die Substitution S, die (p_{ki}) in eine Einheit für $x = 1$ verwandelt, entnehmen wir dem Beispiel II in § 6 des Kap. VII. Der Faktor $i\sqrt{2}$ in der ersten Zeile des hier auftretenden Systems (p_{ki}) ist ohne Einfluß. Es ist

$$S = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}(x-1)^{-1} \\ 0, & (x-1)^{-1} \end{vmatrix}.$$

Die Funktionen

$$\zeta_1 = 1 \cdot \eta_1 + 0 \cdot \eta_2, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2}(x-1)^{-1} \cdot \eta_1 + (x-1)^{-1}\eta_2$$

bilden eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$. Setzen wir die Werte von η_1 und η_2 ein, so folgt

$$\zeta_1 = x, \quad \zeta_2 = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + y}{x^2(x-1)}.$$

Das Ergebnis ist in voller Übereinstimmung mit dem früher in § 2 gefundenen, wo wir dies Beispiel auf andere Art behandelt haben.

Wir berechnen noch die Diskriminante der Basis (ζ). Es ist

$$|\zeta_{ki}|^2 = \begin{vmatrix} x, & \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + y}{x^2(x-1)} \\ x, & \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - y}{x^2(x-1)} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0, & \dfrac{2y}{x^2(x-1)} \\ x, & \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - y}{x^2(x-1)} \end{vmatrix}^2$$

$$= 4\,\frac{y^2}{x^2(x-1)^2} = -4\,\frac{x+1}{x^2(x-1)}.$$

Anderseits ist

$$N\,I(\mathfrak{p}_1) = x, \quad N\,I(\mathfrak{p}_2) = x, \quad N\,I(\mathfrak{v}_1) = x - 1, \qquad \text{also}$$

$$N\,I(\mathfrak{q}) = \frac{1}{x(x-1)}$$

und

$$[N\,I(\mathfrak{q})]^2\,N\,I(\mathfrak{z}) = \frac{x+1}{x^2(x-1)},$$

also, wie es sein muß, bis auf einen konstanten Faktor gleich der Diskriminante von (ζ).

Wir wollen auch noch eine Basis für die Vielfachen des Divisors

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1^2\,\mathfrak{p}_2^{-1}\,\mathfrak{v}_2^{-1}$$

bestimmen. Wir gehen wieder aus von der Basis $(1, y)$. Auch hier haben wir nur zwei Stellen, nämlich $x = 0$ und $x = -1$, zu untersuchen.

In der Umgebung von $x = 0$ schreiben wir

$$1 = x^2 \cdot x^{-2}, \qquad y = x^2\left(x^{-2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\,x^2 + \cdots\right),$$

$$1 = x^{-1} \cdot x, \qquad -y = x^{-1}\left(-x + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{8}\,x^5 + \cdots\right),$$

so daß

$$(p_{kl}) = \begin{Bmatrix} x^{-2} & x^{-2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\,x^2 + \cdots \\ x & -x + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{8}\,x^5 + \cdots \end{Bmatrix}.$$

Um (p_{kl}) in eine Einheit für $x = 0$ zu verwandeln, wenden wir folgende Substitutionen an:

1. Wir multiplizieren (p_{kl}) mit x^2.

$$S_1 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}, \quad (p_{kl})\,S_1 = \begin{Bmatrix} 1, & 1 - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{8}\,x^4 + \cdots \\ x^3, & -x^3 + \frac{1}{2}\,x^5 + \cdots \end{Bmatrix}.$$

2. Wir subtrahieren das $\left(1 - \frac{1}{2}\,x^2\right)$-fache der ersten Vertikalreihe von der zweiten.

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1, & -1 + \frac{1}{2}\,x^2 \\ 0, & 1 \end{vmatrix}, \qquad (p_{kl})\,S_1 S_2 = \begin{vmatrix} 1, & -\frac{1}{8}\,x^4 + \cdots \\ x^3, & -2x^3 + x^5 + \cdots \end{vmatrix}.$$

3. Wir dividieren die zweite Vertikalreihe mit x^3.

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{-3} \end{pmatrix}, \quad (p_{kl})\,S_1 S_2 S_3 = \begin{vmatrix} 1, & -\frac{1}{8}\,x + \cdots \\ x^3 & -2 + \cdots \end{vmatrix},$$

womit wir am Ziele sind, da die Determinante von $(p_{kl})\,S_1 S_2 S_3$ für $x = 0$ nicht mehr Null wird. Es wird

$$S = S_1 S_2 S_3 = \begin{vmatrix} x^2, & -x^{-1} + \frac{1}{2}\,x \\ 0, & x^{-1} \end{vmatrix}.$$

Die Basis $(\eta_i') = (1, y)\,S$, also

$$\eta_1' = x^2, \qquad \eta_2' = \left(-x^{-1} + \frac{1}{2}\,x\right) + x^{-1}\,y = \frac{-2 + x^2 + 2y}{2x}$$

ist daher normal für $x = 0$ in bezug auf $\mathfrak{r}$.

In der Umgebung von $x = -1$ setzen wir

$$\eta_1' = (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 0 + 1 \cdot [1 - 2(x+1) + (x+1)^2],$$

$$\eta_2' = (x+1)^{-\frac{1}{2}} \left[-\sqrt{2}\,(x+1) - \frac{3}{4}\sqrt{2}\,(x+1)^2 + \cdots \right] + 1 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x+1) + \cdots \right],$$

so daß

$$(p_{kl}) = \begin{Bmatrix} 0, & -\sqrt{2}\,(x+1) - \frac{3}{4}\sqrt{2}\,(x+1)^2 + \cdots \\ 1 + \cdots, & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x+1) + \cdots \end{Bmatrix}.$$

Die anzuwendenden Substitutionen sind:

1. Subtraktion des $\frac{1}{2}$-fachen der ersten Vertikalreihe von der zweiten.

2. Division der zweiten Vertikalreihe durch $(x+1)$.

$$S_1 = \begin{Bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad S_2 = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & (x+1)^{-1} \end{Bmatrix}, \quad S = S_1 S_2 = \begin{Bmatrix} 1, & -\frac{1}{2}(x+1)^{-1} \\ 0, & (x+1)^{-1} \end{Bmatrix}.$$

Es ist also $(\zeta') = (\eta') S$ oder

$$\zeta_1' = x^2, \quad \zeta_2' = -\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\eta_1' + (x+1)^{-1}\eta_2' = \frac{-2 + x^2 - x^3 + 2y}{2x(1+x)}$$

eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{r}$.

§ 11. Beispiel 2.

Es sei

$$f(x, y) = x^6 + y^3 - 1 = 0.$$

Die über der x-Ebene ausgebreitete Fläche ist dreiblättrig. Aus $y = \sqrt[3]{1 - x^6}$ ersehen wir, daß wir sechs Verzweigungspunkte zweiter Ordnung haben, die Nullstellen von $x^6 - 1$. Wir bezeichnen diese Stellen und die zugehörigen Primteiler mit $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots \mathfrak{v}_6$. Im besonderen gehöre $\mathfrak{v}_1$ zu der Stelle $x = 1$.

Es wird

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{v}_1^2 \mathfrak{v}_2^2 \cdots \mathfrak{v}_6^2, \quad NI(\mathfrak{z}) = (x^6 - 1)^2.$$

An der Stelle $x = 0$ haben wir drei Punkte der Riemannschen Fläche übereinander. Die zugehörigen Primteiler seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$. Die Entwicklungen von y sind in ihrer Umgebung

$$y = 1 - \frac{1}{3}x^6 + \cdots, \qquad y = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3}x^6 + \cdots, \qquad y = \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2}{3}x^6 + \cdots,$$

wo $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ die eine primitive dritte Einheitswurzel sein soll.

Es sei $$\mathfrak{q} = \mathfrak{v}_1^{-1}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_3^2\,.$$

Wir gehen aus von der Basis $(\xi) = (1,\ y,\ y^2)$, so daß

$$(\xi_{kl}) = \left\{\begin{matrix} 1 & y & y^2 \\ 1 & \varepsilon y & \varepsilon^2 y^2 \\ 1 & \varepsilon^2 y & \varepsilon y^2 \end{matrix}\right\}.$$

Es wird $|\xi_{kl}|^2 = \text{konst}\, y^6 = \text{konst}(1 - x^6)^2$. Da die ξ_{kl} für endliches x nirgends unendlich werden, so ist das System (ξ_{kl}) nur zu untersuchen in der Umgebung der Stellen $x = 0$, $x = 1$, die einen Beitrag zu $\mathfrak{q}$ liefern, der Nullstellen von $|\xi_{kl}|^2$ und der Verzweigungsstellen. In unserm Falle wird $|\xi_{kl}|^2$ nur an den Verzweigungsstellen Null, und an diesen genau so wie $NI(\mathfrak{z})$. Hieraus schließen wir, da die ξ_{kl} an diesen Stellen endlich bleiben, daß die Basis (ξ) an diesen Stellen normal ist in bezug auf $\mathfrak{q}$, soweit sie nicht einen Beitrag zu $\mathfrak{q}$ liefern. Die einzigen Stellen, an denen (ξ) nicht normal ist, sind daher höchstens die beiden Stellen $x = 0$ und $x = 1$.

In der Umgebung von $x = 1$ haben wir zu setzen

$$\xi_1 = 1 = (x-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 0 + 1\cdot 1 + (x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot 0,$$

$$\xi_2 = y = (x-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 0 + 1\cdot 0 + (x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\left[-\sqrt[3]{6} + \cdots\right],$$

$$\xi_3 = y^2 = (x-1)^{-\frac{1}{3}}\left[\sqrt[3]{36}\,(x-1) + \cdots\right] + 1\cdot 0 + (x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot 0.$$

Es ist also

$$(p_{kl}) = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & \sqrt[3]{36}\,(x-1) + \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{6} + \cdots & 0 \end{matrix}\right\}.$$

Wir brauchen nur die letzte Vertikalreihe mit $x - 1$ zu dividieren, um durch eine erlaubte Transformation das System (p_{kl}) in eine Einheit für $x = 1$ zu verwandeln. Das System S ist ein Diagonalsystem mit der Diagonale $1,\ 1,\ (x-1)^{-1}$. Die neue Basis (η) ist

$$\eta_1 = \xi_1 = 1, \quad \eta_2 = \xi_2 = y, \quad \eta_3 = \xi_3(1-x)^{-1} = \frac{y^2}{1-x}.$$

In der Umgebung von $x = 0$ haben wir zu setzen

$$\eta_{11} = x \cdot x^{-1}, \quad \eta_{21} = x\left(x^{-1} - \frac{1}{3} x^5 + \cdots\right), \quad \eta_{31} = x\,(x^{-1} + 1 + x + \cdots),$$

$$\eta_{12} = 1 \cdot 1, \quad \eta_{22} = 1 \cdot \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} x^6 + \cdots\right), \quad \eta_{32} = \varepsilon^2\,(1 + x + x^2 + \cdots),$$

$$\eta_{13} = x^2 \cdot x^{-2}, \quad \eta_{23} = x^2\left(\varepsilon^2 x^{-2} - \frac{\varepsilon^2}{3} x^4 + \cdots\right), \quad \eta_{33} = \varepsilon\, x^2\,(x^{-2} + x^{-1} + \cdots).$$

Es ist also jetzt $(p_{\kappa\lambda})$ das System, das in Beispiel III in Kap. VII, § 6 behandelt ist. Wir entnehmen von dort die erlaubte Substitution S, die $(p_{\kappa\lambda})$ in eine Einheit für $x = 0$ verwandelt. Aus ihr folgt, daß die Funktionen

$$\zeta_1 = x^2 \eta_1, \quad \zeta_2 = -\varepsilon^2 x^2 \eta_1 + x\,\eta_2, \quad \zeta_3 = (\varepsilon^2 - \varepsilon\, x)\,\eta_1 + \varepsilon\,\eta_2 + \eta_3$$

eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ bilden. Es wird

$$\zeta_1 = x^2, \quad \zeta_2 = -\varepsilon^2 x^2 + x\,y, \quad \zeta_3 = (\varepsilon^2 - \varepsilon\, x) + \varepsilon\, y + \frac{y^2}{1 - x}.$$

Es muß sein

$$|\zeta_{\kappa\lambda}|^2 = \text{konst}\,[N I(\mathfrak{q})]^2\, N I(\mathfrak{j}) = \text{konst}\; x^6 \frac{(1 - x^6)^2}{(1 - x)^2},$$

was man leicht bestätigt.

§ 12. Beispiel 3.

Es sei
$$f(x, y) = y^3 - 3\,x\,y + 2\,x^2 = 0.$$

Die über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche ist dreiblättrig. Die Diskriminante der Gleichung $f(x, y) = 0$ in bezug auf y ist $x^3(x - 1)$. Verzweigungspunkte können daher nur sein bei $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. Bei $x = 0$ haben wir die Entwicklungen

$$y_1 = \sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\, x - \frac{\sqrt{3}}{18}\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{81}\, x^2 - \frac{35 \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot 243}\, x^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

$$y_2 = -\sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\, x + \frac{\sqrt{3}}{18}\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{81}\, x^2 + \frac{35 \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot 243}\, x^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

$$y_3 = \frac{2}{3}\, x + \frac{8}{81}\, x^2 + \frac{32}{729}\, x^3 + \cdots.$$

Wir haben also bei $x = 0$ einen Verzweigungspunkt erster Ordnung, den wir mit $\mathfrak{v}_1$, und einen gewöhnlichen Punkt, den wir mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Bei $x = 1$ haben wir ebenfalls einen Verzweigungspunkt erster Ordnung, der mit $\mathfrak{v}_2$ bezeichnet sei, und einen gewöhnlichen Punkt. Schließlich liegt bei $x = \infty$ ein Verzweigungspunkt zweiter Ordnung, den wir $\mathfrak{v}_3$ nennen. Es wird

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_3^2, \quad \mathfrak{j}' = \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2, \quad N I(\mathfrak{j}') = x\,(x - 1).$$

Es sei
$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^3 .$$
Wir gehen aus von der Basis $(\xi) = (1, y, y^2)$. Die Funktion y und damit auch die Funktionen ξ_{kl} werden für endliches x nicht unendlich. Für $x = 1$ ist $(1, y, y^2)$ normal. Es bleibt nur die Stelle $x = 0$ zu betrachten. Hier haben wir zu setzen

$$\xi_{11} = 1 = x^{\frac{3}{2}} \cdot 0 + x^2 \cdot x^{-2},$$

$$\xi_{21} = y = x^{\frac{3}{2}}\left[\sqrt{3}\, x^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{18} + (1)\right] + x^2\left[-\frac{1}{3}\, x^{-1} - \frac{4}{81} + (1)\right],$$

$$\xi_{31} = y^2 = x^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{5}{81}\sqrt{3}\, x + (2)\right] + x^2\left[3\, x^{-1} - \frac{2}{9} - \frac{16}{243}\, x + (2)\right],$$

$$\xi_{13} = 1, \quad \xi_{23} = \frac{2}{3}\, x + \frac{8}{81}\, x^2 + (3), \qquad \xi_{33} = \frac{4}{9}\, x^2 + (3).$$

Es ist daher das System (p_{kl}) in diesem Falle im wesentlichen gleich dem im Beispiel IV in Kap. VII, § 6 behandelten. Wir entnehmen dort das System S. Es bilden die Funktionen

$$\zeta_1 = x^2 \xi_1, \quad \zeta_2 = \left(-\frac{9}{2} + \frac{2}{3}\, x\right)\xi_1 + \xi_2 + \frac{3}{2}\, x^{-1}\xi_3, \quad \zeta_3 = -3\, x\, \xi_1 + \xi_3$$

eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$. Es wird

$$\zeta_1 = x^2, \quad \zeta_2 = -\frac{9}{2} + \frac{2}{3}\, x + y + \frac{3}{2}\,\frac{y^2}{x}, \quad \zeta_3 = -3\, x\, y + y^2 .$$

Ferner muß sein

$$|\zeta_{kl}|^2 = \text{konst}\,[N\, I\,(\mathfrak{q})]^2\, N\, I\,(\mathfrak{z}') = \text{konst} \cdot x^7\,(1 - x),$$

was man leicht bestätigt.

§ 13. Komplementäre Basen.

Zu einer Basis (ξ) gehört ein quadratisches System (ξ_{kl}), dessen erste Zeile die Funktionen $\xi_i = \xi_{i1}$ enthält, während die andern Reihen die zu den ξ_{i1} konjugierten Funktionen enthalten. Es liegt nahe, zu (ξ_{kl}) das reziproke System zu bilden und zu sehen, ob das nicht auch zu einer Basis gehört. Wir nehmen zunächst ein einfaches Beispiel. Es sei der Körper $(x\, y)$ definiert durch

$$f(x, y) = y^2 - x = 0$$

und es sei $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = y$, also

$$(\xi_{kl}) = \begin{pmatrix} 1, & y \\ 1, & -y \end{pmatrix}.$$

Da $\xi_{kl} = -2y$ nicht identisch Null ist, so ist $(\xi) = (1, y)$ eine Basis. Das reziproke System zu (ξ_{kl}) sei mit (η_{kl}) bezeichnet. Es wird

$$(\eta_{kl}) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2y}, & -\frac{1}{2y} \end{Bmatrix}.$$

Die Determinante von (η_{kl}) ist natürlich nicht identisch Null, da sie zu der von (ξ_{kl}) reziprok ist. Es gehört aber (η_{kl}) doch nicht zu einer Basis, da nicht in jeder Vertikalreihe zueinander konjugierte Funktionen stehen. Wenn wir aber in (η_{kl}) die Zeilen mit den Spalten vertauschen, also das adjungierte System zu (η_{kl}) und das komplementäre zu (ξ_{kl}) bilden, so erhalten wir ein System, das zu einer Basis gehört. Wir bezeichnen es mit (ξ'_{kl}). Es ist

$$(\xi'_{kl}) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2y} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2y} \end{Bmatrix}$$

und dies gehört offenbar zu der Basis

$$(\xi') = \left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2y}\right).$$

Das ist nun nicht nur in dem Beispiel so. Es gilt nämlich der Satz:

Satz XIX. Es sei (ξ) eine Basis und es sei (ξ'_{kl}) das zu (ξ_{kl}) komplementäre System. Dann bilden die Funktionen

$$\xi'_1 = \xi'_{11}, \quad \xi'_2 = \xi'_{21}, \ldots \quad \xi'_m = \xi'_{m1}$$

eine Basis (ξ') und es ist (ξ'_{kl}) das zu dieser Basis gehörende quadratische System. Die beiden Systeme (ξ) und (ξ') heißen zueinander komplementär.

Die Determinante von (ξ'_{kl}) ist reziprok zu der von (ξ_{kl}), also nicht identisch Null. Es bleibt noch zu zeigen, daß die m Funktionen (ξ'_k) Funktionen des Körpers (xy) sind und daß in (ξ'_{kl}) in jeder Spalte m konjugierte Funktionen stehen. Dazu beweisen wir zunächst folgenden

Hilfssatz. Es seien $y_1, y_2, \ldots y_m$ die m konjugierten Werte von y_1. Dann ist eine rationale Funktion von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$, die in den $m-1$ Funktionen $y_2, y_3, \ldots$ symmetrisch ist, darstellbar als rationale Funktion von x und y_1.

Die Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ genügen der Gleichung

$$f(x, y) = a_0(x)\, y^m + a_1(x)\, y^{m-1} + \cdots + a_m(x)$$
$$= a_0 (y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_m) = 0;$$

also genügen $y_2, y_3, \ldots y_m$ der Gleichung

$$g(y) = \frac{f(x, y)}{y - y_1} = a_0 (y - y_2)(y - y_3) \cdots (y - y_m) = 0 .$$

Diese Gleichung können wir uns folgendermaßen herstellen. Da $f(x, y_1) = 0$, so ist

$$g(y) = \frac{f(x, y) - f(x, y_1)}{y - y_1} = a_{m-1} \frac{y - y_1}{y - y_1} + a_{m-2} \frac{y^2 - y_1^2}{y - y_1} + \cdots + a_0 \frac{y^m - y_1^m}{y - y_1}$$
$$= a_{m-1} + a_{m-2}(y + y_1) + \cdots + a_0 (y^{m-1} + y^{m-2} y_1 + \cdots + y_1^{m-1}) .$$

Hieraus folgt, daß die Koeffizienten der Gleichung $g(y) = 0$ rationale Funktionen von x und y_1 sind. Nach dem Fundamentalsatze über rationale symmetrische Funktionen läßt sich aber jede symmetrische rationale Funktion der Wurzeln einer algebraischen Gleichung rational durch die Koeffizienten ausdrücken. Daher läßt sich eine symmetrische rationale Funktion von $y_2, y_3, \ldots y_m$ rational durch x und y_1 darstellen. Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.

Es sei

$$(78) \qquad \xi_{1k} = R_1(x, y_k), \quad \xi_{2k} = R_2(x, y_k), \quad \ldots \quad \xi_{mk} = R_m(x, y_k),$$

und es sei z_{kl} die Unterdeterminante von ξ_{kl} in der Determinante $|\xi_{kl}|$. Dann bestehen für die Elemente der ersten Zeile von (ξ'_{kl}) die Gleichungen (vgl. Kap. VII, § 3)

$$(79) \qquad \xi'_{11} = \frac{z_{11}}{|\xi_{kl}|}, \quad \xi'_{21} = \frac{z_{21}}{|\xi_{kl}|}, \ldots \quad \xi'_{m1} = \frac{z_{m1}}{|\xi_{kl}|} .$$

Diese Größen sind also rationale Funktionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$. Die Zähler sind die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile von $|\xi_{kl}|$, also bis aufs Vorzeichen die Determinanten derjenigen quadratischen Systeme, die aus dem System

$$\begin{vmatrix} R_1(x, y_2), & R_2(x, y_2), \ldots & R_m(x, y_2) \\ R_1(x, y_3), & R_2(x, y_3), & R_m(x, y_3) \\ - - - - & - - - - & - - - \\ R_1(x, y_m), & R_2(x, y_m), & R_m(x, y_m) \end{vmatrix}$$

hervorgehen, indem man der Reihe nach eine Spalte fortstreicht. Permutieren wir also, die Größen $y_2, y_3, \ldots y_m$ irgendwie, so ändern die z_{i1} höchstens ihr Zeichen, da in ihnen die Horizontalreihen permutiert werden. Genau dieselbe Permutation tritt aber unter den $m-1$ letzten Zeilen von

ξ_{kl} ein. Daher bleiben die Funktionen (79) ungeändert; d. h. aber sie sind symmetrisch in $y_2, y_3, \ldots y_m$. Nach unserm Hilfssatz lassen sie sich also als rationale Funktionen von x und y_1 darstellen, etwa

$$(80) \qquad \xi'_{11} = S_1(x, y_1), \quad \xi'_{21} = S_2(x, y_1), \quad \ldots \quad \xi'_{m1} = S_m(x, y_1).$$

Vertauscht man in der ganzen angestellten Betrachtung und in der Rechnung, die zu den Gleichungen (80) führt, y_1 mit y_α, so geht ξ'_{k1} in $\xi'_{k\alpha}$ über und es ist also allgemeiner

$$(81) \qquad \xi'_{1\alpha} = S_1(x, y_\alpha), \quad \xi'_{2\alpha} = S_2(x, y_\alpha), \quad \ldots \quad \xi'_{m\alpha} = S_m(x, y_\alpha).$$

Damit ist aber gezeigt, daß die Größen (79) Funktionen des Körpers sind und daß im System (ξ'_{kl}) in jeder Spalte m konjugierte Funktionen stehen, und unser Satz ist bewiesen.

Es sei jetzt (ξ) eine Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$. Wir wollen sehen, ob die zu (ξ) komplementäre Basis (ξ') nicht auch eine Basis für die Vielfachen eines Divisors ist. Nach dem Satz XVII in § 9 haben wir zunächst den größten gemeinsamen Teiler $\bar{\mathfrak{q}}$ der Funktionen ξ'_i zu bestimmen, soweit es sich um Primteiler handelt, die zu endlichen Stellen von x gehören. Es sei $x = a$ ein endlicher Wert von x. Wir unterscheiden wieder die Fälle wie in den §§ 6, 7, 8 und benutzen die dortigen Bezeichnungen.

I. Es liege bei $x = a$ kein Verzweigungspunkt.

Nach (49) ist

$$(82) \qquad (\xi_{kl}) = A\,(p_{kl}).$$

Dabei ist A das Multiplikationssystem mit der Diagonale

$$(x-a)^{\tau_1}, \quad (x-a)^{\tau_2}, \quad \ldots \quad (x-a)^{\tau_m}$$

und (p_{kl}) ist eine Einheit für $x = a$, da (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ ist. Bezeichnen wir die komplementären Systeme von A und (p_{kl}) mit A' und (p'_{kl}), so folgt nach Satz XI in Kap. VII, § 3 aus (82)

$$(83) \qquad (\xi'_{kl}) = A'(p'_{kl})$$

und hier ist (p'_{kl}) auch eine Einheit für $x = a$. Da A als Multiplikationssystem symmetrisch ist, so ist A' gleich dem reziproken von A, also nach Satz XIV in Kap. VII, § 4 gleich dem Multiplikationssystem mit der Diagonale

$$(x-a)^{-\tau_1}, \quad (x-a)^{-\tau_2}, \quad \ldots \quad (x-a)^{-\tau_m}.$$

Aus (83) ergibt sich also z. B.

$$\xi'_{11} = (x-a)^{-\tau_1} p'_{11}, \quad \xi'_{21} = (x-a)^{-\tau_1} p'_{21}, \quad \ldots \quad \xi'_{m1} = (x-a)^{-\tau_1} p'_{m1}.$$

Hieraus folgt, daß die Funktionen ξ'_i den Primteiler $\mathfrak{p}_1$ alle mindestens in der Potenz $(-r_1)$ enthalten; aber mindestens eine von ihnen enthält ihn genau in dieser Potenz, weil sonst die m Funktionen

$$p'_{11}, \quad p'_{21}, \ldots \quad p'_{m1}$$

alle durch $x-a$ teilbar sein müßten. Das aber ist nicht möglich, weil sonst die Determinante $|p'_{il}|$ den Faktor $x-a$ hätte und keine Einheit wäre. Also ist $\mathfrak{p}_1$ in dem größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{q}$ der ξ'_i genau in der Potenz $(-r_1)$ enthalten. Ebenso folgt, daß allgemeiner $\mathfrak{p}_i$ in $\bar{\mathfrak{q}}$ genau in der Potenz $(-r_i)$ enthalten ist, also in derselben Potenz wie in $\mathfrak{q}^{-1}$.

II. Es liege bei $x=a$ mindestens ein Verzweigungspunkt.

IIa. Es sei $m=5$ und es mögen wie in § 7 bei $x=a$ ein Verzweigungspunkt erster und einer zweiter Ordnung liegen.

Nach (60) ist

$$(\xi_{il}) = A_1 A_2 A_3 (p_{il}) \tag{84}$$

Hierin ist (p_{il}) eine Einheit für $x=a$, da (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ ist. Dasselbe gilt daher von dem komplementären System (p'_{il}). A_1 und A_3 sind Multiplikationssysteme mit den Diagonalen

$$(x-a)^{\frac{r_1}{2}}, \ (-1)^{r_1}(x-a)^{\frac{r_1}{2}}, \ (x-a)^{\frac{r_2}{3}}, \ \varepsilon^{r_2}(x-a)^{\frac{r_2}{3}}, \ \varepsilon^{2r_2}(x-a)^{\frac{r_2}{3}} \tag{85}$$

und

$$1, \ (x-a)^{\frac{1}{2}}, \quad 1, \ (x-a)^{\frac{1}{3}}, \quad (x-a)^{\frac{2}{3}}. \tag{86}$$

Die hierzu komplementären oder, was hier dasselbe ist, reziproken Systeme A'_1 und A'_3 sind Multiplikationssysteme mit den Diagonalen

$$(x-a)^{-\frac{r_1}{2}}, \quad (-1)^{-r_1}(x-a)^{-\frac{r_1}{2}}, \quad (x-a)^{-\frac{r_2}{3}}, \quad \varepsilon^{-r_2}(x-a)^{-\frac{r_2}{3}},$$

$$\varepsilon^{-2r_2}(x-a)^{-\frac{r_2}{3}}$$

und

$$1, \ (x-a)^{-\frac{1}{2}}, \quad 1, \ (x-a)^{-\frac{1}{3}}, \quad (x-a)^{-\frac{2}{3}},$$

deren Elemente reziprok zu denen der Diagonalen (85) und (86) von A_1 und A_3 sind. Das System A_2 war

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$$

Es sei A_2' das System, das aus A_2 entsteht, wenn man die von Null verschiedenen Elemente durch ihre reziproken Werte ersetzt. In unserm einfachen Falle entsteht A_2' aus A_2 durch Vertauschen von ε und ε^2, da $\varepsilon^3 = 1$. Bedenkt man, daß $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, so ergibt sich für das Produkt $A_2 A_2'$ das Multiplikationssystem mit der Diagonale

$$2, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad 3.$$

Dies sei mit C bezeichnet. Es ist dann

$$A_2 A_2' = C, \quad A_2' = A_2^{-1} C, \quad A_2^{-1} = A_2' C^{-1},$$

wo C^{-1} das Multiplikationssystem mit der Diagonale

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}.$$

Da A_2 symmetrisch ist, so ist das komplementäre System von A_2 gleich dem reziproken A_2^{-1} und aus (84) folgt durch Übergang zu den komplementären Systemen

$$(\xi'_{kl}) = A_1' A_2' C^{-1} A_3' (p'_{kl}).$$

Da aber Multiplikationssysteme vertauschbar sind, so haben wir weiter

$$(\xi'_{kl}) = A_1' A_2' A_3' (q_{kl}), \tag{87}$$

wenn wir $C^{-1}(p'_{kl}) = (q_{kl})$ setzen. Es ist (q_{kl}) eine Einheit für $x = a$, da dasselbe von C^{-1} und (p'_{kl}) gilt. Aus (87) folgt durch Ausmultiplizieren

$$\xi'_{k1} = (x - a)^{-\frac{\tau_1 + 1}{2}} \{q_{k1} (x - a)^{\frac{1}{2}} + q_{k2}\}, \tag{88}$$

$$\xi'_{k3} = (x - a)^{-\frac{\tau_2 + 2}{3}} \{q_{k3} (x - a)^{\frac{2}{3}} + q_{k4} (x - a)^{\frac{1}{3}} + q_{k5}\}, \tag{89}$$

während ξ'_{k2} die konjugierte Entwicklung zu ξ'_{k1} ist und ξ'_{k4}, ξ'_{k5} die konjugierten zu ξ'_{k3} sind. Aus (88) ergibt sich, daß die ξ'_i den Primteiler $\mathfrak{p}_1$ mindestens in der Potenz $-(\tau_1 + 1)$ enthalten. In einer höheren würden sie ihn sämtlich dann und nur dann enthalten, wenn alle Funktionen q_{k2} $(k = 1, 2, \ldots 5)$ durch $x - a$ teilbar wären. Das geht aber nicht, da (q_{kl}) eine Einheit für $x = a$ ist und also die Elemente der zweiten Zeile der Determinante $|q_{kl}|$ nicht sämtlich für $x = a$ verschwinden können. Daher ist $\mathfrak{p}_1$ in dem größten gemeinsamen Teiler $\bar{\mathfrak{q}}$ der ξ'_i genau in der Potenz $-(\tau_1 + 1)$ enthalten. Ebenso schließen wir aus (89), daß $\mathfrak{p}_2$ in $\bar{\mathfrak{q}}$ genau in der Potenz $-(\tau_2 + 2)$ enthalten ist. Da $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ Verzweigungsprimteiler erster und zweiter Ordnung sind und also im Verzweigungsdivisor $\mathfrak{z}$ in der ersten und zweiten Potenz enthalten sind, so sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ in $\bar{\mathfrak{q}}$ in derselben Potenz enthalten wie in $\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{z}^{-1}$. Dies stimmt mit dem in I gefundenen Ergebnis überein, da dort die Primteiler $\mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{z}$ nicht vorkommen.

IIb. Es liege bei $x = a$ nur eine Stelle, die dann ein Verzweigungspunkt der Ordnung $m-1$ ist. Wir schreiben wieder für m auch α.

Es ist nach (70)

$$(\xi_{kl}) = A_1 A_2 A_3 (p_{kl}), \tag{90}$$

wo (p_{kl}) eine Einheit für $x = a$ ist, da (ξ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ ist. Nach § 8 sind A_1 und A_3 die Multiplikationssysteme mit den Diagonalen

$$(x-a)^{\frac{\tau}{\alpha}}, \quad \omega_1^{\tau}(x-a)^{\frac{\tau}{\alpha}}, \ldots \quad \omega_{\alpha-1}^{\tau}(x-a)^{\frac{\tau}{\alpha}}$$

und

$$1, \qquad (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots \quad (x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Daher sind die zu A_1 und A_3 komplementären Systeme A_1', A_3' die Multiplikationssysteme mit den Diagonalen

$$(x-a)^{-\frac{\tau}{\alpha}}, \quad \omega_1^{-\tau}(x-a)^{-\frac{\tau}{\alpha}}, \ldots \quad \omega_{\alpha-1}^{-\tau}(x-a)^{-\frac{\tau}{\alpha}};$$

$$1, \qquad (x-a)^{-\frac{1}{\alpha}}, \ldots \quad (x-a)^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Dabei ist gesetzt

$$\omega_l = e^{\frac{2\pi i l}{\alpha}}.$$

Ferner ist

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \ldots \omega_1^{\alpha-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \ldots \omega_2^{\alpha-1} \\ - & - & - & - \\ 1 & \omega_{\alpha-1} & \omega_{\alpha-1}^2 & \ldots \omega_{\alpha-1}^{\alpha-1} \end{vmatrix}.$$

Wir bezeichnen das System, das aus A_2 dadurch hervorgeht, daß man seine Elemente durch ihre reziproken Werte ersetzt, mit A_2'. Das System A_2 ist symmetrisch. Setzt man nämlich

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}},$$

so ist

$$\omega_l^k = \omega^{kl}. \tag{91}$$

Das reziproke System A_2^{-1} von A_2 ist also auch komplementär zu A_2. Wir berechnen wie in IIa das Produkt $A_2 A_2'$. Die $(l+1)$-Zeile in A_2 ist wegen (91)

$$1, \quad \omega^l, \quad \omega^{2l}, \ldots \quad \omega^{(\alpha-1)l} \tag{92}$$

und die $(k+1)$-te Spalte von A_2' ist

$$1, \quad \omega^{-k}, \quad \omega^{-2k}, \ldots \quad \omega^{-(\alpha-1)k}. \tag{93}$$

Setzen wir also
$$\omega^{l-k} = \omega',$$
so ist das Produkt der beiden Reihen (92), (93)

(94)
$$1 + \omega' + \omega'^2 + \cdots + \omega'^{\alpha-1}.$$

Ist $l = k$, so ist $\omega' = 1$ und die Summe (94) hat den Wert α. Ist $l \neq k$ und also auch nicht $l \equiv k \pmod{\alpha}$, da l und k beide zwischen 0 und $\alpha - 1$, die Grenzen eingeschlossen, liegen, so ist ω' eine von 1 verschiedene Lösung der Gleichung $z^\alpha - 1 = 0$, also eine Lösung der Gleichung
$$\frac{z^\alpha - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{\alpha-1} = 0$$
und es wird die Summe (94) zu Null. Daher wird $A_2 A_2'$ gleich dem Multiplikationssystem, in dessen Diagonale überall α steht. Bezeichnen wir dies System mit C, so wird genau wie in IIa
$$A_2^{-1} = A_2' C^{-1}$$
und
$$(\xi_{kl}') = A_1' A_2' A_3' (q_{kl}),$$
wo (q_{kl}) eine Einheit für $x = a$ ist. Hieraus folgt
$$\xi_{k1}' = (x - a)^{-\frac{\tau + \alpha - 1}{\alpha}} \left\{ q_{k1} (x - a)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} + \cdots + q_{k,\alpha-1} (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} + q_{k\alpha} \right\},$$
während $\xi_{k2}', \xi_{k3}', \ldots \xi_{k\alpha}$ die hierzu konjugierten Entwicklungen sind. Da wieder $q_{1\alpha}, q_{2\alpha}, \ldots q_{\alpha\alpha}$ nicht sämtlich für $x = a$ Null werden können, so ist der zu der betrachteten Stelle gehörende Primteiler $\mathfrak{p}$ in dem größten gemeinsamen Teiler $\bar{\mathfrak{q}}$ der ξ_i' genau in der Potenz $-(\tau + \alpha - 1)$ enthalten, also in derselben Potenz wie in $\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{z}^{-1}$.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so haben wir:

Satz XX. Ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{q}$, so haben die Funktionen ξ_i' der komplementären Basis (ξ') den größten gemeinsamen Teiler

(95)
$$\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{-1} \mathfrak{z}'^{-1},$$

wo $\mathfrak{z}'$ der Teil des Verzweigungsdivisors $\mathfrak{z}$ ist, der die zu endlichen Stellen von x gehörenden Primteiler enthält.

Um nun zu sehen, ob (ξ') eine Basis für die Vielfachen von $\bar{\mathfrak{q}}$ ist, haben wir die Diskriminante von (ξ') zu berechnen. Da (ξ_{kl}) und (ξ_{kl}') komplementär sind, so sind die Determinanten dieser Systeme reziprok zueinander. Also ist nach (77)
$$|\xi_{kl}'|^2 = |\xi_{kl}|^{-2} = \text{konst}\, NI\left(\frac{1}{\mathfrak{q}^2 \mathfrak{z}'}\right)$$
oder wegen (95)
$$|\xi_{kl}'|^2 = \text{konst}\, NI(\bar{\mathfrak{q}}^2 \mathfrak{z}').$$

Daher sind die Voraussetzungen des Satzes XVII in § 9 erfüllt, und wir haben

Satz XXI. Ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$, so ist die komplementäre Basis (ξ') eine Basis für die Vielfachen des Divisors

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{-1}\,\mathfrak{z}'^{-1}\,,$$

wo $\mathfrak{z}'$ der Teil des Verzweigungsdivisors $\mathfrak{z}$ ist, der die zu endlichen Stellen von x gehörenden Primteiler enthält.

Wir formulieren den Satz noch besonders für den Fall, daß bei $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt liegt, und definieren zunächst:

Definition VI. Ist $\mathfrak{z}$ der Verzweigungsdivisor, so heißen zwei Divisoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zueinander komplementär, wenn

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}' = \mathfrak{z}^{-1}\,.$$

Dann haben wir:

Satz XXII. Liegt bei $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt und ist (ξ) eine Basis für die Vielfachen eines Divisors, so ist die komplementäre Basis eine Basis für die Vielfachen des komplementären Divisors.

§ 14. Beispiele zu § 13.

Beispiel I.

Der Körper sei definiert durch

$$f(x, y) \equiv y^3 - 3\,x^2\,y + 2\,x = 0\,.$$

Ferner sei $\mathfrak{q} = 1$. Zunächst bestimmen wir eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q} = 1$, also für die in bezug auf x ganzen Funktionen. Die Diskriminante von $f(y) = 0$ ist

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{vmatrix}^2 = D(x) = 4 \cdot 27\,x^2\,(x^4 - 1)\,.$$

Verzweigungspunkte liegen daher höchstens bei $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm i$, $x = \infty$. Durch das in Kap. II auseinandergesetzte Verfahren findet man, daß bei $x = 0$ ein dreifacher und bei den vier Punkten $x = \pm 1$, $x = \pm i$ je ein zweifacher Verzweigungspunkt liegt, während bei $x = \infty$ drei gewöhnliche Punkte vorhanden sind. Die zu den Verzweigungsstellen gehörenden Primteiler seien mit $\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_1, \ldots \mathfrak{v}_4$ bezeichnet. Es ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{v}_0^2\,\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{v}_3\,\mathfrak{v}_4\,, \qquad w = 6\,.$$

$$N I(\mathfrak{z}) = x^2\,(x^4 - 1)\,.$$

Die Funktionen $(1, y, y^2)$ bilden eine Basis. Die Funktionen der Basis werden für endliche Werte von x nicht unendlich, und da sie nirgends gleichzeitig Null werden, so ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleich $\mathfrak{l}$, gleich $\mathfrak{q}$. Ferner ist die Diskriminante der Basis, nämlich $D(x)$, bis auf einen konstanten Faktor gleich $NI(\mathfrak{z}) = NI(\mathfrak{q}^2\mathfrak{z})$. Nach Satz XVII, § 9 ist daher die Basis $(1, y, y^2)$ schon eine Basis für die Vielfachen von 1, so daß wir setzen können $(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, y, y^2)$.

Wir gehen dazu über, die komplementäre Basis (η) zu bestimmen. Es ist

$$g(y) = (y - y_2)(y - y_3) = \frac{f(x, y) - f(x, y_1)}{y - y_1} = y^2 + y\, y_1 + y_1^2 - 3x^2,$$

woraus wir schließen

$$y_2 + y_3 = -y_1, \qquad y_2 y_3 = y_1^2 - 3x^2.$$

Ferner ist in der Bezeichnung des vorigen Paragraphen

$$z = \xi_{\eta} = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_3 - y_2) = g(y_1)(y_3 - y_2) = -3(y_1^2 - x^2)(y_2 - y_3),$$
$$z_{11} = -y_2 y_3 (y_2 - y_3), \quad z_{21} = y_2^2 - y_3^2, \quad z_{31} = -(y_2 - y_3),$$

also
$$\begin{aligned} D(x)\,\eta_{11} = z^2 \eta_{11} = z \cdot z_{11} &= 3(y_1^2 - x^2)\, y_2 y_3 (y_2 - y_3)^2 \\ &= 3(y_1^2 - x^2)(y_1^2 - 3x^2)\left[(y_2 + y_3)^2 - 4 y_2 y_3\right] = \\ &= -9(y_1^2 - x^2)(y_1^2 - 3x^2)(y_1^2 - 4x^2) \\ &= -9\left(y_1^6 - 8x^2 y_1^4 + 19x^4 y_1^2 - 12x^6\right). \end{aligned}$$

Aus der Gleichung
$$f(x, y_1) = y_1^3 - 3x^2 y_1 + 2x \equiv 0$$
folgt aber
$$y_1^3 = 3x^2 y_1 - 2x,$$
so daß wird

$$\begin{aligned} D(x)\,\eta_{11} &= -9\left[(3x^2 y_1 - 2x)^2 - 8x^2 y_1 (3x^2 y_1 - 2x) + 19x^4 y_1^2 - 12x^6\right] \\ &= -36x^2 (x^2 y_1^2 + x y_1 - 3x^4 + 1). \end{aligned}$$

Daher wird, wenn wir den Wert von $D(x)$ einsetzen

$$\eta_1 = \frac{1 - 3x^4 + xy + x^2 y^2}{3(1 - x^4)}.$$

Ebenso findet man

$$\eta_2 = \frac{-2x^2 - (2x - 3x^2)\,y + y^2}{6x(1 - x^4)}, \qquad \eta_3 = \frac{-2x + y + x y^2}{6x(1 - x^4)}.$$

Die so gefundene Basis (η) ist eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{z}^{-1} = \mathfrak{z}^{-1} = \mathfrak{v}_0^{-2}(\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3\mathfrak{v}_4)^{-1}$. Es wird dem Leser empfohlen, nach den in diesem Kapitel auseinandergesetzten Methoden unmittelbar eine Basis (ι') für die Vielfachen von $\mathfrak{z}^{-1}$ zu bestimmen und das Ergebnis mit dem hier gefundenen zu vergleichen. Es braucht nicht $(\eta) = (\iota')$ zu sein, sondern es muß nur (ι') aus (ι) hervorgehen durch eine Substitution, die eine Einheit in bezug auf x ist.

Beispiel II.

Wir betrachten das Beispiel 1 in § 10. Dort hatten wir als Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{-2}\,\mathfrak{p}_2^{1}\,\mathfrak{v}_1^{-1}$ gefunden:

$$\zeta_1 = x\,, \qquad \zeta_2 = \frac{2 - x^2 - x^3 + 2y}{2x^2(x-1)}\,,$$

so daß

$$(\zeta_{kl}) = \begin{vmatrix} x, & \dfrac{2 - x^2 - x^3 + 2y}{2x^2(x-1)} \\ x, & \dfrac{2 - x^2 - x^3 - 2y}{2x^2(x-1)} \end{vmatrix},$$

woraus sofort folgt, da

$$|\zeta_{kl}| = \frac{-2y}{x(x-1)} = \frac{-2y^2}{x(x-1)y} = \frac{2(x+1)}{xy}$$

$$(\eta_{kl}) = (\zeta_{kl})^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{2 - x^2 - x^3 - 2y}{2x^2(x-1)} \cdot \dfrac{xy}{2(x+1)}, & -x \cdot \dfrac{xy}{2(x+1)} \\ -\dfrac{2 - x^2 - x^3 + 2y}{2x^2(x-1)} \cdot \dfrac{xy}{2(x+1)}, & x \cdot \dfrac{xy}{2(x+1)} \end{vmatrix},$$

also nach gehöriger Umformung unter Benutzung der Gleichung $f(x, y) = y^2 + x^2 - 1 = 0$

$$\eta_1 = \frac{2(1+x) - (2 + 2x + x^2)\,y}{4x(1+x)}\,, \qquad \eta_2 = -\frac{x^2 y}{2(1+x)}\,.$$

Es ist (η) eine Basis für die Vielfachen des Divisors

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^{-1}\,\mathfrak{z}^{-1} = \mathfrak{p}_1^2\,\mathfrak{p}_2^{-1}\,\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_1^{-1}\,\mathfrak{v}_2^{-1} = \mathfrak{p}_1^2\,\mathfrak{p}_2^{-1}\,\mathfrak{v}_2^{-1}\,.$$

Für die Vielfachen dieses Divisors haben wir aber in § 10 auch eine Basis (ζ') bestimmt. Es müssen also (η) und (ζ') auseinander durch eine Substitution hervorgehen, die eine Einheit inbezug auf x ist. Wir wollen das bestätigen. Setzen wir

$$b = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2x}, & 0 \\ -\dfrac{2 + 2x + x^2}{4x(1+x)}, & -\dfrac{x^2}{2(1+x)} \end{vmatrix}, \qquad c = \begin{vmatrix} x^2, & -\dfrac{2 - 2x + x^2}{2x} \\ 0, & \dfrac{1}{x(1+x)} \end{vmatrix},$$

so ist $\qquad (\eta) = (1, y)\,b\,, \qquad (\zeta') = (1, y)\,c\,,$

also $\qquad (1, y) = (\zeta')\,c^{-1}\,, \quad (\eta) = (\zeta')\,c^{-1}\,b\,.$

Es ist

$$|c| = \frac{x}{1+x}, \qquad c^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x^2}, & \frac{(2-2x+x^2)(1+x)}{2x^2} \\ 0, & x(1+x) \end{vmatrix}$$

$$c^{-1}b = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8}x, & -\frac{1}{4}(2-2x+x^2) \\ -\frac{1}{4}(2+2x+x^2), & -\frac{1}{2}x^3 \end{vmatrix}, \quad |c^{-1}b| = -\frac{1}{4}$$

Es geht (η) aus (ζ') hervor durch die Substitution $c^{-1}b$ und diese ist tatsächlich eine Einheit in bezug auf x, da ihre Elemente ganze rationale Funktionen von x sind und ihre Determinante eine von Null verschiedene Konstante ist.

Es wird dem Leser empfohlen, die Beispiele in § 11 und § 12 ebenso zu behandeln.

Neuntes Kapitel.

Der Riemann-Rochsche Satz.

§ 1. Die ganzen Divisoren einer Klasse.

Es sei $(\mathfrak{t})$ irgendeine Klasse. Wir behandeln die Aufgabe, alle ganzen Divisoren der Klasse zu bestimmen, und im besonderen die Zahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren der Klasse, also die Dimension der Klasse festzustellen.

Wir wählen aus der Klasse $(\mathfrak{t})$ irgendeinen Divisor $\mathfrak{t}$ aus. Dann nehmen wir statt x, wenn notwendig, eine neue unabhängige Veränderliche x', die wir durch die Gleichung

$$\frac{1}{x - x_0} = x'$$

definieren. Dabei soll x_0 so gewählt sein, daß erstens bei $x = x_0$ kein Verzweigungspunkt liegt und daß zweitens keiner der im Zähler von $x - x_0$ vorkommenden Primteiler in $\mathfrak{t}$ enthalten ist. Wir bezeichnen die neue unabhängige Veränderliche wieder mit x. Wir können also annehmen, daß erstens bei $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt liegt und daß zweitens keiner der im Nenner von x enthaltenen Primteiler in $\mathfrak{t}$ vorkommt.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{t})$. Dann ist $\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{q}$ eine Funktion des Körpers und diese Funktion ist, da $\mathfrak{t}$ keinen Divisor enthält, der zu einer im Unendlichen liegenden Stelle gehört, ein Vielfaches von $\mathfrak{t}^{-1}$ nach der Definition des vorigen Kapitels, und zwar eins, das für unendliches x nicht unendlich wird. Ist umgekehrt R ein Vielfaches von $\mathfrak{t}^{-1}$, das für unendlich große Werte von x nicht unendlich wird, und schreiben wir $R = \mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{t})$. Wir erhalten also alle ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{t})$, wenn wir aus den Vielfachen von $\mathfrak{t}^{-1}$ diejenigen aussuchen, die für unendlich großes x nicht unendlich werden.

Es sei (ζ) eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{t}^{-1}$, dann läßt sich jedes Vielfache von $\mathfrak{t}^{-1}$ in der Form schreiben

$$(1) \qquad R = g_1 \zeta_1 + g_2 \zeta_2 + \cdots + g_m \zeta_m ,$$

wo die g_i ganze rationale Funktionen von x sind, und umgekehrt ist jede Funktion dieser Form ein Vielfaches von $\mathfrak{t}^{-1}$, wenn die g_i ganz sind. Wie müssen die g_i gewählt werden, damit die Funktion R für unendliches x nicht unendlich wird? Wir wollen diese Frage gleich in etwas allgemeinerer Form stellen. Zunächst definieren wir:

Definition I. Wenn die Funktion R des Körpers in keinem der m Punkte der Riemannschen Fläche, in denen x unendlich ist, von höherer als der r-ten Ordnung unendlich wird, aber wenigstens in einem dieser Punkte genau von der Ordnung r, so wollen wir r die Ordnung der Funktion nennen.

Es ist dann Rx^{-r} im Unendlichen endlich und wenigstens in einem der m im Unendlichen liegenden Punkte von Null verschieden. Wir wollen die Frage beantworten: Wie müssen die g_i in (1) gewählt werden, damit R höchstens von der gegebenen Ordnung r ist? Für $r = 0$ haben wir die spezielle oben gestellte Frage.

Die gesuchten Funktionen der Ordnung r lassen sich, wenn wir den Nenner von x mit $\mathfrak{l}$ bezeichnen, in der Form schreiben

$$(2) \qquad R = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{t}\,\mathfrak{l}^r} ,$$

wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist. Die Zahl der linear unabhängigen Funktionen dieser Art ist also gleich der Zahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{l}^r)$, d. h. gleich der Dimension $\{\mathfrak{t}\,\mathfrak{l}^r\}$ dieser Klasse. Nach unseren Voraussetzungen liegt bei $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt. Die Funktionen ζ lassen sich also in allen m Blättern der Riemannschen Fläche nach steigenden Potenzen von x^{-1} entwickeln. Es seien die ganzen Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_m$ so gewählt, daß die Funktionen $\zeta_1 x^{-r_1}, \zeta_2 x^{-r_2}, \ldots \zeta_m x^{-r_m}$ in keinem der m Blätter für $x = \infty$ unendlich werden, daß aber jede von ihnen in wenigstens einem Blatte für $x = \infty$ nicht Null wird. Es sei also r_k die Ordnung von ζ_k. Wir setzen

$$(3) \qquad \zeta_{kl} = x^{r_k}\,\mathfrak{P}_{kl}\left(\frac{1}{x}\right) = x^{r_k}\left(a_{kl} + b_{kl}\frac{1}{x} + c_{kl}\frac{1}{x^2} + \cdots\right).$$

Es wird dann, wenn wir die m konjugierten Werte von R mit $R_1, R_2, \ldots R_m$ bezeichnen,

$$
\begin{aligned}
R_1 &= g_1 x^{r_1} \mathfrak{P}_{11} + g_2 x^{r_2} \mathfrak{P}_{21} + \cdots + g_m x^{r_m} \mathfrak{P}_{m1}\,, \\
R_2 &= g_1 x^{r_1} \mathfrak{P}_{12} + g_2 x^{r_2} \mathfrak{P}_{22} + \cdots + g_m x^{r_m} \mathfrak{P}_{m2}\,, \\
&\text{-----------------} \\
R_m &= g_1 x^{r_1} \mathfrak{P}_{1m} + g_2 x^{r_2} \mathfrak{P}_{2m} + \cdots + g_m x^{r_m} \mathfrak{P}_{mm}\,.
\end{aligned}
$$

Da die Potenzreihen $\mathfrak{P}_{kl}$ für $x = \infty$ nicht unendlich werden, so sehen wir aus diesen Gleichungen sofort, daß keiner der konjugierten Werte $R_1, R_2, \ldots R_m$ für $x = \infty$ von höherer als der r-ten Ordnung unendlich wird, wenn wir den Grad von g_k höchstens gleich $r - r_k$ wählen, wenn $r - r_k \geqq 0$, und wenn wir $g_k = 0$ wählen, wenn $r - r_k < 0$. Es fragt sich, ob auch das Umgekehrte gilt oder ob auch, wenn die g_k alle oder zum Teil von höherem Grade sind, die Funktion R die Ordnung r haben kann.

Es sei das Glied der höchsten Ordnung von g_k gleich $\lambda_k x^{s-r_k}$, wo $s > r$; dabei schließen wir nicht aus, daß die λ_k zum Teil gleich Null sind. Nur dürfen sie nicht alle Null sein. Die Anfangsglieder der Entwicklungen der Funktionen R_k sind

$$
\begin{aligned}
&x^s(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1})\,, \\
&x^s(\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2})\,, \\
&\text{-----------} \\
&x^s(\lambda_1 a_{1m} + \lambda_2 a_{2m} + \cdots + \lambda_m a_{mm})\,.
\end{aligned}
$$

Soll R in keinem Blatte für $x = \infty$ von höherer als der r-ten Ordnung unendlich werden, so müssen diese Anfangsglieder sämtlich verschwinden. Das ist dann, aber auch nur dann möglich, wenn die Determinante $|a_{kl}|$ gleich Null ist.

Wir unterscheiden daher die beiden Fälle, wo $|a_{kl}| \neq 0$ und wo $|a_{kl}| = 0$. Im ersten ist die Determinante $\mathfrak{P}_{kl}$ nicht Null für $x = \infty$; es ist also das System $(\mathfrak{P}_{kl})$ eine Einheit für $x = \infty$. Wir nennen in diesem Falle die Basis (ζ) **normal für** $x = \infty$. Aus den Gleichungen (3) folgt

$$|\zeta_{kl}| = x^{r_1 + r_2 + \cdots + r_m}\,|\mathfrak{P}_{kl}|\,.$$

Setzen wir also

$$|\zeta_{kl}| = x^{\varrho}\,E\left(\frac{1}{x}\right), \tag{4}$$

wo $E\left(\frac{1}{x}\right)$ eine Einheit für $x = \infty$ sein soll, so ist im ersten Falle

$$\varrho = r_1 + r_2 + \cdots + r_m \tag{5}$$

und im zweiten

$$\varrho < r_1 + r_2 + \cdots + r_m\,.$$

Wir können daher definieren:

Definition II. **Eine Basis heißt normal für** $x = \infty$**, wenn ihre Diskriminante für unendliches** x **von einer Ordnung un-**

endlich wird, die gleich der doppelten Summe der Ordnungen ihrer Funktionen ist.

Wenn die Basis (ζ) für $x=\infty$ nicht normal ist, können wir immer aus ihr eine neue Basis herleiten, die normal ist. Damit die neue Basis auch eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{t}^{-1}$ ist, muß nach Satz VII, Kap. VIII, § 4 die Substitution, die (ζ) in die neue Basis überführt, für alle endlichen Stellen von x eine Einheit sein, d. h. sie muß aus ganzen rationalen Funktionen von x bestehen und ihre Determinante muß eine von Null verschiedene Konstante sein. Wir dürfen daher z. B. die ζ_i beliebig vertauschen und wir dürfen zu einer der Funktionen die andern addieren, nachdem wir diese mit irgendwelchen ganzen rationalen Funktionen von x multipliziert haben. D. h. anders ausgedrückt, wir dürfen (ζ) hinten multiplizieren mit Vertauschungssystemen und mit Additionssystemen, deren von 1 verschiedene Elemente ganze rationale Funktionen von x sind.

Es sei jetzt $|a_{kl}|=0$, also (ζ) nicht normal für $x=\infty$. Wir denken uns die ζ_i so geordnet, daß

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \cdots \leqq r_m\,.$$

Da $|a_{kl}|=0$, so können wir Konstante $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, die nicht alle Null sind, so bestimmen, daß die m Gleichungen bestehen

$$\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \cdots + \lambda_m a_{mk} = 0\,. \qquad (k=1,2,\ldots m)\,. \tag{6}$$

Es sei λ_α das letzte von Null verschiedene λ, so daß also alle λ, deren Index größer ist als α, gleich Null sind, während λ_α nicht Null ist. Wir können $\lambda_\alpha=1$ annehmen, so daß die Gleichungen (6) lauten

$$a_{\alpha k} + \lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \cdots + \lambda_{\alpha-1} a_{\alpha-1\,k} = 0\,. \qquad (k=1,2,\ldots m)\,. \tag{7}$$

Wir führen dann statt ζ_α eine neue Funktion ein, während wir die andern Funktionen ζ_k unverändert lassen. Wir nehmen nämlich statt ζ_α die Funktion

$$\zeta'_\alpha = \zeta_\alpha + \lambda_1 x^{r_\alpha - r_1}\zeta_1 + \lambda_2 x^{r_\alpha - r_2}\zeta_2 + \cdots + \lambda_{\alpha-1} x^{r_\alpha - r_{\alpha-1}}\zeta_{\alpha-1}\,. \tag{8}$$

Mit Benutzung der Gleichungen (3) wird

$$\begin{aligned}\zeta'_{\alpha k} = {} & x^{r_\alpha}(a_{\alpha k} + \lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \cdots + \lambda_{\alpha-1} a_{\alpha-1\,k}) \\ & + x^{r_\alpha - 1}(b_{\alpha k} + \lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \cdots + \lambda_{\alpha-1} b_{\alpha-1\,k}) + \cdots\,.\end{aligned}$$

Zufolge der Gleichungen (7) ist also die Ordnungszahl von ζ'_α kleiner als r_α.

Wir bezeichnen die neue Basis mit (ζ'), die Ordnungszahl von ζ'_k mit r'_k. Es ist im allgemeinen $\zeta'_k=\zeta_k$, $r'_k=r_k$; nur ζ'_α ist nicht gleich

ζ_α, sondern durch die Gleichung (8) gegeben, und es ist $r'_\alpha < r_\alpha$, also

$$r'_1 + r'_2 + \cdots + r'_m < r_1 + r_2 + \cdots + r_m. \tag{9}$$

Es ist nach (4)

$$|\zeta'_{kl}| = |\zeta_{kl}| = x^\varrho E\left(\frac{1}{x}\right), \tag{10}$$

da ja $|\zeta'_{kl}|$ aus $|\zeta_{kl}|$ dadurch hervorgeht, daß man Vielfache von einigen Vertikalreihen zu einer anderen addiert. Da die Vertikalreihen von $|\zeta'_{kl}|$ der Reihe nach durch $x^{r'_1}, x^{r'_2}, \ldots x^{r'_m}$ teilbar sind, so folgt aus (10)

$$r'_1 + r'_2 + \cdots + r'_m \geqq \varrho. \tag{11}$$

Wenn hier das Gleichheitszeichen richtig ist, so ist die Basis (ζ') normal für $x = \infty$. Ist das Gleichheitszeichen falsch, so können wir auf dem eben benutzten Wege eine neue Basis (ζ'') ableiten mit den Ordnungszahlen r''_k, so daß wieder entsprechend (9) und (11)

$$r''_1 + r''_2 + \cdots + r''_m < r'_1 + r'_2 + \cdots + r'_m,$$

$$r''_1 + r''_2 + \cdots + r''_m \geqq \varrho.$$

Ist hier das Gleichheitszeichen richtig, so ist die Basis (ζ'') normal für $x = \infty$. Im anderen Falle leiten wir aus (ζ'') in der angegebenen Weise wieder eine neue Basis her. Da bei jedem Schritte die Summe der Ordnungszahlen der Elemente der Basis kleiner wird, diese Summe aber andererseits mindestens gleich der unveränderlichen Zahl ϱ ist, so muß es nach einer endlichen Zahl von Schritten eintreten, daß wir eine Basis erhalten, bei der die Summe der Ordnungszahlen genau gleich ϱ ist, die also für $x = \infty$ normal ist.

Nachdem wir gesehen haben, wie wir immer eine Basis finden können, die für $x = \infty$ normal ist, nehmen wir an, die Basis (ζ) sei normal für $x = \infty$. Dann ist wegen (5) und nach Satz XVIII, Kap. VIII, § 9

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = -t + \frac{w}{2}, \tag{12}$$

wo w die Verzweigungszahl in bezug auf x ist und t die Ordnung des Divisors $\mathfrak{t}$ oder der Klasse $(\mathfrak{t})$. Eine Funktion

$$R = g_1 \zeta_1 + g_2 \zeta_2 + \cdots + g_m \zeta_m$$

ist, wie wir schon oben sahen, dann und nur dann ein Vielfaches von $\mathfrak{t}^{-1}$, das für $x = \infty$ höchstens von der Ordnung r ist, wenn die g_i ganze rationale Funktionen von x sind und wenn der Grad von g_k höchstens gleich $r - r_k$ ist für $r - r_k \geqq 0$ und wenn g_k identisch Null ist für $r - r_k < 0$.

§ 2. Der Riemannsche Satz.

Nach dem Ergebnis des vorigen Paragraphen können wir für $r - r_k \geqq 0$ setzen

$$g_k = g_{k0} + g_{k1}\, x + \cdots + g_{k,r-r_k}\, x^{r-r_k}\,,$$

wo die g_{ki} beliebige Konstante sind. Es enthält also für $r - r_k \geqq 0$ die Funktion g_k genau $r - r_k + 1$ linear unabhängige Konstanten. Die $r - r_k + 1$ Funktionen

$$\zeta_k\,,\quad x\,\zeta_k\,,\quad x^2\,\zeta_k\,,\,\ldots\; x^{r-r_k}\,\zeta_k$$

sind linear unabhängig und sind Vielfache von $\mathfrak{t}^{-1}$, die für $x = \infty$ höchstens die Ordnung r haben. Solcher Funktionen gibt es also genau

$$\sum_k{}'\,(r - r_k + 1)$$

linear unabhängige, wo die Summe über alle k zu erstrecken ist, für die r größer oder gleich r_k ist, woran der Akzent am Summenzeichen erinnern soll. Wir können aber die Summe auch erstrecken über alle k, für die $r \geqq r_k - 1$, da jeder Summand, in dem $r = r_k - 1$ ist, den Wert Null hat. Nach dem Anfang des vorigen Paragraphen ist aber die Zahl der linear unabhängigen Vielfachen von $\mathfrak{t}^{-1}$, die für $x = \infty$ höchstens die Ordnung r haben, gleich der Dimension der Klasse $(\mathfrak{t}\mathfrak{l}^r)$. Wir haben also:

Satz I. Ist (ζ) eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{t}^{-1}$, die für $x = \infty$ normal ist, und ist r_i die Ordnung von ζ_i, so ist die Dimension der Klasse $(\mathfrak{t}\mathfrak{l}^r)$, wo $\mathfrak{l}$ der Nenner von x ist.

$$\{\mathfrak{t}\mathfrak{l}^r\} = \sum{}'\,(r - r_k + 1)\,, \tag{13}$$

wo die Summe über alle k zu erstrecken ist, für die $r - r_k + 1 \geqq 0$.

Wir betrachten zwei besondere Fälle. Es sei erstens r so groß, daß $r - r_k + 1 \geqq 0$ für alle k. Dann folgt aus (13)

$$\{\mathfrak{t}\mathfrak{l}^r\} = \sum_{k=1}^{m}(r - r_k + 1) = m\,(r+1) - \sum_{k=1}^{m} r_k$$

oder wegen (12)

$$\{\mathfrak{t}\mathfrak{l}^r\} = m\,(r+1) + t - \frac{w}{2}\,. \tag{14}$$

Nach (6), Kap. VI, § 6 gilt aber für das Geschlecht p des Körpers die Gleichung

$$p = \frac{w}{2} - m + 1\,, \tag{15}$$

so daß aus (14) folgt:

Satz II. Ist $\mathfrak{t}$ ein Divisor der Ordnung t und $\mathfrak{l}$ der Nenner von x, so ist bei genügend großem r

$$\{\mathfrak{t}\mathfrak{l}^r\} = t + m\,r - p + 1\,, \tag{16}$$

wo p das Geschlecht des Körpers ist.

Wir wählen zweitens $r = 0$. Dann folgt aus (13)

$$\{\mathfrak{t}\} = \sum{}'\,(1 - r_k)\,, \tag{17}$$

wo die Summe über alle r_k zu erstrecken ist, die kleiner als 2 sind. Wir haben hiermit die Möglichkeit, die Dimensionen irgendeiner Klasse zu berechnen. Eine einfache Formel erhalten wir aber nicht. Wenn wir in (17) die Summe über alle r_k erstrecken, so wird die rechte Seite höchstens zu klein, da nur negative Summanden hinzukommen können. Wir können daher schreiben

$$\{\mathfrak{t}\} = \sum_{k=1}^{m}(1 - r_k) + i = m - \sum r_k + i\,, \tag{18}$$

wo $i \geqq 0$ ist. Wegen (15) und (18) haben wir also

Satz III. Ist $(\mathfrak{t})$ eine Klasse der Ordnung t und p das Geschlecht des Körpers, so gilt für die Dimension der Klasse die Gleichung

$$\{\mathfrak{t}\} = t - p + 1 + i\,, \tag{19}$$

wo $i \geqq 0$.

Definition III. Wenn $i = 0$, heißt die Klasse $(\mathfrak{t})$ regulär oder nichtspeziell, im andern Falle nicht regulär oder speziell. Die Zahl i heißt der Index der Speziellität.

Dieser Satz ist der Riemannsche Satz. Die Bedeutung von i hat Roch erkannt. Wir leiten sie im nächsten Paragraphen her.

§ 3. Der Riemann-Rochsche Satz.

Zunächst definieren wir:

Definition IV. Ist $\mathfrak{k}$ ein Divisor der kanonischen Klasse, so heißen zwei Divisoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ Ergänzungsdivisoren, wenn

$$\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}' = \mathfrak{k} \tag{20}$$

und es heißen die Klassen $(\mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{t}')$ Ergänzungsklassen, wenn

$$(\mathfrak{t})\,(\mathfrak{t}') = (\mathfrak{k})\,. \tag{21}$$

Für $\mathfrak{k}$ können wir wählen (§ 6, Kap. VI)

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{z}\,\mathfrak{l}^{-2}\,.$$

wo $\mathfrak{z}$ wieder der Verzweigungsdivisor in bezug auf x ist und $\mathfrak{n}$ der Nenner von x. Es sind also die Klassen

$$(\mathfrak{t}) \text{ und } (\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{z}\,\mathfrak{n}^{-2})$$

Ergänzungsklassen. Die Divisoren $\mathfrak{t}^{-1}$ und $\mathfrak{t}\,\mathfrak{z}^{-1}$ sind aber komplementär (Def. VI, Kap. VIII, § 13). Ist daher (ζ) wieder eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{t}^{-1}$, so ist die komplementäre Basis (ζ') eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{t}\,\mathfrak{z}^{-1}$. Es sei (ζ) wieder normal für $x = \infty$ und die Ordnung von ζ_i sei r_i. Nach § 1 haben wir dann

$$(22)\qquad (\zeta_{kl}) = (\mathfrak{P}_{kl})\,A\,,$$

wo A das Multiplikationssystem mit der Diagonale

$$x^{r_1}\,,\ x^{r_2}\,,\ \ldots\ x^{r_m}$$

ist, während $(\mathfrak{P}_{kl})$ eine Einheit für $x = \infty$ ist. Das komplementäre System A' zu A ist das Multiplikationssystem mit der Diagonale

$$x^{-r_1}\,,\ x^{-r_2}\,,\ \ldots\ x^{-r_m}\,.$$

Das zu $(\mathfrak{P}_{kl})$ komplementäre System $(\mathfrak{P}'_{kl})$ ist ebenso wie $(\mathfrak{P}_{kl})$ eine Einheit für $x = \infty$. Aus (22) folgt

$$(\zeta'_{kl}) = (\mathfrak{P}'_{kl})\,A'$$

und daraus, daß auch (ζ') normal für $x = \infty$ ist und daß die Ordnungszahl von ζ'_i gleich $-r_i$ ist.

Dann aber folgt aus Satz 1, § 2, indem wir ersetzen

$$\mathfrak{t}\,,\qquad r\,,\qquad r_k$$

durch

$$\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{z}\,,\qquad -2\,,\qquad -r_k$$

$$(23)\qquad \{\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{z}\,\mathfrak{n}^{-2}\} = \sum{}''\,(-2 + r_k + 1) = \sum{}''\,(r_k - 1)\,,$$

wo die Summe über alle k zu erstrecken ist, für die $r_k > 1$. Aus (17) und (23) folgt

$$\{\mathfrak{t}\} - \{\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{z}\,\mathfrak{n}^{-2}\} = \sum{}'\,(1 - r_k) + \sum{}''\,(1 - r_k)$$

oder, wenn wir die Ergänzungsklasse von $(\mathfrak{t})$ mit $(\mathfrak{t}')$ bezeichnen

$$\{\mathfrak{t}\} - \{\mathfrak{t}'\} = \sum{}'\,(1 - r_k) + \sum{}''\,(1 - r_k)\,.$$

Die erste Summe ist über alle $r_k \leqq 1$ und die zweite über alle $r_k > 1$ zu erstrecken. Daher ist auch

$$\{\mathfrak{t}\} - \{\mathfrak{t}'\} = \sum\,(1 - r_k) = m - \sum r_k$$

oder wegen (12) und (15)

$$(24)\qquad \{\mathfrak{t}\} - \{\mathfrak{t}'\} = t - p + 1\,.$$

Durch Vergleich mit (19) haben wir also den Satz von Roch:

Satz IV. Der Index der Speziellität einer Klasse ist gleich der Dimension ihrer Ergänzungsklasse.

Bezeichnen wir die Ordnung von $(\mathfrak{t}')$ mit t', so folgt aus (21), da die kanonische Klasse nach Definition die Ordnung $2p-2$ hat,

(25) $$t' = 2p - 2 - t\,.$$

Daher können wir (24) auch in der symmetrischen Form schreiben

$$\{\mathfrak{t}\} - \frac{t}{2} = \{\mathfrak{t}'\} - \frac{t'}{2}\,.$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so haben wir den Riemann-Rochschen Satz:

Satz V. Zwischen den Dimensionen zweier Ergänzungsklassen $(\mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{t}')$ der Ordnungen t und t' besteht die Gleichung

(26) $$\{\mathfrak{t}\} = t - p + 1 + \{\mathfrak{t}'\}\,,$$

wo p das Geschlecht des Körpers ist. Die Gleichung läßt sich auch in der Form schreiben

(27) $$\{\mathfrak{t}\} - \frac{t}{2} = \{\mathfrak{t}'\} - \frac{t'}{2}\,.$$

Wir können hiernach die Dimension einer Klasse sehr einfach bestimmen, wenn wir die Dimension ihrer Ergänzungsklasse kennen. Auf einen Fall sei besonders hingewiesen. Wenn die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{t}')$ negativ ist, wenn also die Ordnung von $(\mathfrak{t})$ größer als $2p-2$ ist, so kann $(\mathfrak{t}')$ keinen ganzen Divisor enthalten, so daß dann $\{\mathfrak{t}'\} = 0$. Also haben wir:

Satz VI. Wenn die Ordnung t einer Klasse $(\mathfrak{t})$ größer ist als $2p-2$, so ist ihre Dimension

$$\{\mathfrak{t}\} = t - p + 1\,,$$

wo p das Geschlecht des Körpers ist.

§ 4. Zahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung.

Wir wenden den Riemann-Rochschen Satz auf die kanonische Klasse $(\mathfrak{t})$ an. Die Ergänzungsklasse ist die Hauptklasse (1). Deren Dimension ist aber 1, da sie den einen und nur den einen ganzen Divisor 1 enthält. Da die Ordnung von $(\mathfrak{t})$ nach Definition (vgl. Kap. VI, § 6) gleich $2p-2$ ist, so folgt aus (26)

$$\{\mathfrak{t}\} = 2p - 2 - p + 1 + 1 = p$$

oder:

Satz VII. Die Dimension der Differential- oder kanonischen Klasse ist gleich dem Geschlechte des Körpers.

Diesen Satz können wir in gewissem Sinne umkehren. Zunächst besteht (vgl. den Schluß von § 5, Kap. VI) der

Satz VIII. Ist die Ordnung einer Klasse 0, so ist ihre Dimension i. a. gleich 0 und nur dann gleich 1, wenn die Klasse die Hauptklasse ist.

Hat aber eine Klasse die Ordnung $2p-2$, so hat wegen (25) ihre Ergänzungsklasse die Ordnung 0. Unter Benutzung des eben angegebenen Satzes folgt aus (26):

Satz IX. Die Dimension einer Klasse der Ordnung $2p-2$ ist i. a. gleich $p-1$ und nur dann gleich p, wenn die Klasse die Differentialklasse ist.

Dem Satze VII dieses Paragraphen können wir noch eine andere wichtige Form geben. Ist $\mathfrak{r}$ ein Divisor der kanonischen Klasse $(\mathfrak{l})$, so ist (vgl. Kap. VI, § 6)

$$\mathfrak{r}\,\frac{\mathfrak{l}^2}{\mathfrak{z}}\,dx = R\,dx$$

ein Differential des Körpers (xy). Da dx genau so Null und unendlich wird wie $\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{-2}$, so wird Rdx genau so Null und unendlich wie $\mathfrak{r}$. Es wird also Rdx dann und nur dann nirgends unendlich, wenn $\mathfrak{r}$ ein ganzer Divisor der Differentialklasse ist. Wenn wir definieren:

Definition V. Ein Differential des Körpers, das nirgends unendlich wird, heißt ein Differential erster Gattung,

so haben wir wegen Satz VII den

Satz X. Die Zahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung ist gleich dem Geschlechte p des Körpers.

Dies ist historisch die ursprüngliche Definition des Geschlechtes.

Es ergibt sich nebenbei, daß p immer eine ganze Zahl ist, die nicht negativ sein kann. Es ist also, wie schon in Kap. VI, § 6 angegeben, $2p-2$ immer eine grade Zahl und aus der Gleichung (6) an derselben Stelle folgt dann, daß auch die Verzweigungszahl $w_{\mathfrak{z}}$ in bezug auf irgendeine veränderliche Größe des Körpers immer grade ist.

§ 5. Funktionen mit gegebenen Unendlichkeitsstellen.

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_p$ p linear unabhängige ganze Divisoren der Differentialklasse $(\mathfrak{l})$. Dann läßt sich jeder andere ganze Divisor $\mathfrak{a}$ dieser Klasse in der Form darstellen

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + a_p\mathfrak{a}_p\,, \tag{28}$$

wo die a_i konstant sind. Diese Gleichung besagt nach unsern Festsetzungen in Kap. VI, § 5 folgendes. Es sei $\mathfrak{q}$ irgendein Divisor der Klasse ($\mathfrak{k}$). Dann soll zwischen den Funktionen

$$A = \mathfrak{a}\,\mathfrak{q}^{-1}, \quad A_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}^{-1}, \ldots \quad A_p = \mathfrak{a}_p\mathfrak{q}^{-1} \tag{29}$$

des Körpers die Gleichung bestehen

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_p A_p. \tag{30}$$

Dabei muß man, um die Funktionen A_i, die ja durch (29) nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, vollkommen zu bestimmen, etwa vorschreiben, daß sie den Wert 1 an einer fest gewählten Stelle annehmen sollen, die natürlich von den Null- und Unendlichkeitsstellen der A_i verschieden sein muß. Bei der Funktion A kommt es auf einen konstanten Faktor nicht an.

Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_g \tag{31}$$

ein ganzer Divisor der Ordnung $g \leqq p$. Es seien also die $\mathfrak{p}_i$ Primteiler. Wir fragen uns, ob wir einen ganzen Divisor $\mathfrak{a}$ der kanonischen Klasse ($\mathfrak{k}$) so bestimmen können, daß er durch $\mathfrak{g}$ teilbar wird. Es muß dann die Funktion A in (29) an den g Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_g$ Null werden. Bezeichnen wir A_i als Funktion einer Stelle $\mathfrak{p}$ der Riemannschen Fläche mit $A_i(\mathfrak{p})$, so ergeben sich die g Gleichungen

$$\begin{array}{c} a_1 A_1(\mathfrak{p}_1) + a_2 A_2(\mathfrak{p}_1) + \cdots + a_p A_p(\mathfrak{p}_1) = 0, \\ a_1 A_1(\mathfrak{p}_2) + a_2 A_2(\mathfrak{p}_2) + \cdots + a_p A_p(\mathfrak{p}_2) = 0, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — — —} \\ a_1 A_1(\mathfrak{p}_g) + a_2 A_2(\mathfrak{p}_g) + \cdots + a_p A_p(\mathfrak{p}_g) = 0, \end{array} \tag{32}$$

wobei wir annehmen, daß die g Stellen $\mathfrak{p}_i$ voneinander verschieden sind. Diese g Gleichungen sind, wenn nicht die g Stellen $\mathfrak{p}_i$ eine besondere Lage haben, voneinander linear unabhängig, wie wir auf folgende Art einsehen.

Es seien die Gleichungen (32) bei beliebiger Wahl der g Stellen $\mathfrak{p}_i$ linear abhängig. Dann ist der Rang der Matrix

$$\left|\begin{array}{cccc} A_1(\mathfrak{p}_1), & A_2(\mathfrak{p}_1), & \ldots & A_p(\mathfrak{p}_1) \\ A_1(\mathfrak{p}_2), & A_2(\mathfrak{p}_2), & \ldots & A_p(\mathfrak{p}_2) \\ — & — & — & — \\ A_1(\mathfrak{p}_g), & A_2(\mathfrak{p}_g), & \ldots & A_p(\mathfrak{p}_g) \end{array}\right| \tag{33}$$

bei beliebiger Wahl der $\mathfrak{p}_i$ kleiner als g. Er sei gleich r. Dann ist eine der Determinanten r-ter Ordnung der Matrix von Null verschieden. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß

$$\left|\begin{array}{cccc} A_1(\mathfrak{p}_2), & A_2(\mathfrak{p}_2), & \ldots & A_r(\mathfrak{p}_2) \\ A_1(\mathfrak{p}_3), & A_2(\mathfrak{p}_3), & \ldots & A_r(\mathfrak{p}_3) \\ — & — & — & — \\ A_1(\mathfrak{p}_{r+1}), & A_2(\mathfrak{p}_{r+1}), & \ldots & A_r(\mathfrak{p}_{r+1}) \end{array}\right| \neq 0 \tag{34}$$

Wir denken uns die Stellen $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots \mathfrak{p}_{r+1}$ fest gewählt, so daß die Ungleichheit (34) besteht. Alle Determinanten $(r+1)$-ter Ordnung der Matrix (33) sind identisch Null, also ist z. B. die Determinante, die aus den ersten $r+1$ Zeilen und Spalten besteht, identisch Null. Entwickeln wir diese nach Unterdeterminanten der ersten Zeile und schreiben $\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}_1$, so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 A_1(\mathfrak{p}) + \lambda_2 A_2(\mathfrak{p}) + \cdots + \lambda_{r+1} A_{r+1}(\mathfrak{p}) = 0$$

und hierin sind die λ_i Konstante, da die Stellen $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots \mathfrak{p}_{r+1}$ fest gewählt sind, und es ist wegen (34) $\lambda_1 \neq 0$. Daraus würde aber folgen, daß die p Funktionen A_i und also auch die p ganzen Divisoren $\mathfrak{a}_i$ nicht linear unabhängig sind. Da das nicht geht, so ist unsere Annahme falsch und es sind die g Gleichungen (32) bei nicht besonderer Wahl der g Stellen $\mathfrak{p}_i$ linear unabhängig.

Es gibt also bei nicht besonderer Wahl der g Stellen $\mathfrak{p}_i$ genau $p-g$ linear unabhängige ganze Divisoren der Klasse $(\mathfrak{k})$, die durch $\mathfrak{g}$ teilbar sind. Dies gilt für $g \leqq p$. Ist $g > p$, so ist die Zahl der Gleichungen (32) größer als die Zahl der Unbekannten a_i, und da dann die Matrix der Koeffizienten den Rang p hat, so haben die Gleichungen keine Lösung. Es ist also für $g > p$ die Zahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{k})$, die durch $\mathfrak{g}$ teilbar sind, gleich Null. Wenn $g > 2p-2$, so ist die Zahl natürlich immer Null, da die Klasse $(\mathfrak{k})$ ja die Ordnung $2p-2$ hat.

Die Zahl, die wir bestimmt haben, hat eine einfache Bedeutung. Ist nämlich $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{g}$ teilbar, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}\mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a}'$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{a}\mathfrak{g}^{-1}) = (\mathfrak{k}\mathfrak{g}^{-1})$ und umgekehrt, wenn $\mathfrak{a}'$ ein ganzer Divisor dieser Klasse ist, so ist $\mathfrak{a}'\mathfrak{g}$ ein ganzer durch $\mathfrak{g}$ teilbarer Divisor der Klasse $(\mathfrak{k})$. Die bestimmte Zahl ist also die Dimension der Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{g}^{-1})$ und wir haben:

Satz XI. *Ist $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor der Ordnung g, so ist*

$$\{\mathfrak{k}\mathfrak{g}^{-1}\} \geqq p-g, \quad \text{wenn } g \leqq p \tag{35}$$
$$\geqq 0 \quad , \quad ,, \quad g > p$$
$$= 0 \quad , \quad ,, \quad g > 2p-2 \tag{36}$$

und es gilt in (35) das Gleichheitszeichen, wenn $\mathfrak{g}$ nicht besonders gewählt ist.

Da $(\mathfrak{k}\mathfrak{g}^{-1})$ die Ergänzungsklasse von $(\mathfrak{g})$ ist, so haben wir nach der Definition einer speziellen Klasse:

Satz XII. *Ist $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor der Ordnung g, so ist die Klasse $(\mathfrak{g})$ für $g < p$ immer speziell, für $g > 2p-2$ immer regulär und für $p \leqq g \leqq 2p-2$ bei nicht besonderer Wahl von $\mathfrak{g}$ regulär.*

Wir fragen uns jetzt, ob es Funktionen des Körpers gibt, die den Nenner $\mathfrak{g}$ haben, oder genauer höchstens den Nenner $\mathfrak{g}$, die also die Form haben

$$\frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{g}},$$

wo $\mathfrak{g}'$ auch ein ganzer Divisor ist. Es muß $\mathfrak{g}' \sim \mathfrak{g}$ sein, aber von $\mathfrak{g}$ verschieden, wenn wir von dem trivialen Fall absehen, wo die gesuchte Funktion konstant ist. Es muß also die Klasse $(\mathfrak{g})$ mindestens zwei linear unabhängige ganze Divisoren enthalten, d. h. es muß sein $\{\mathfrak{g}\} \geqq 2$. Aus dem Riemann-Rochschen Satze folgt wegen Satz XI

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{g}\} &\geqq 1, \quad \text{wenn } g \leqq p, \\ &\geqq 2, \quad \text{,,} \quad\; g > p. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Satz XIII. *Ist $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor der Ordnung g, so gibt es für $g \leqq p$ im allgemeinen keine Funktion des Körpers, die höchstens den Nenner $\mathfrak{g}$ hat, abgesehen von der Konstanten. Ist $g > p$, so gibt es immer Funktionen der gewünschten Art.*

Es sei jetzt $g > p$ und es sei $\mathfrak{g}$ nicht besonders gewählt; dann wird nach dem Riemann-Rochschen Satz

$$\{\mathfrak{g}\} = g - p + 1.$$

Es seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \ldots \mathfrak{g}_{g-p}$ $g - p + 1$ linear unabhängige ganze Divisoren der Klasse $(\mathfrak{g})$. Wir setzen

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}} = 1, \quad \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}} = G_1, \;\ldots\; \frac{\mathfrak{g}_{g-p}}{\mathfrak{g}} = G_{g-p}.$$

Dann hat jede Funktion

$$G = c_0 + c_1 G_1 + c_2 G_2 + \cdots + c_{g-p} G_{g-p},$$

wo die c_i konstant sind, höchstens den Nenner $\mathfrak{g}$ und andere Funktionen dieser Art gibt es nicht. Da wir $g - p + 1$ linear homogen vorkommende Konstanten c_i zur Verfügung haben, können wir noch $g - p$ Nullstellen willkürlich vorschreiben. Außer diesen Nullstellen hat G noch $g - (g - p) = p$ Nullstellen, da die Zahl der Nullstellen gleich der der Unendlichkeitsstellen sein muß. Wir haben also

Satz XIV. *In einem algebraischen Körper vom Geschlechte p kann man für $g > p$ immer eine Funktion finden, die g gegebene Unendlichkeitsstellen und $g - p$ gegebene Nullstellen hat. Die Funktion ist bei nicht besonderer Wahl der Null- und Unendlichkeitsstellen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Die übrigen p Nullstellen sind also durch die Angabe der g Unendlichkeits- und $g - p$ Nullstellen i. a. eindeutig mitbestimmt.*

Im Falle $p = 0$ kann man also die Null- und Unendlichkeitsstellen sämtlich willkürlich vorschreiben.

§ 6. Körper vom Geschlechte $p=0$. Der Lürothsche Satz.

Wie wir in Kap. IV, § 6 gesehen haben, nimmt jede Funktion des Körpers $(x\,y)$ jeden Wert gleich oft an, und zwar so oft, wie ihre Ordnung angibt. Es sei ξ eine Funktion der Ordnung $n > 0$. Dann können wir ξ als unabhängige Veränderliche wählen. Jede Funktion η des Körpers genügt dann einer unzerlegbaren Gleichung, deren Grad entweder n ist oder ein Teiler von n. Ist der Grad n, so lassen sich alle Funktionen des Körpers als rationale Funktionen von ξ, η darstellen. (Satz II, § 5, Kap V.) Wählen wir ξ von möglichst niedriger Ordnung, so erhalten wir zur Definition des Körpers statt der Gleichung $f(x, y) = 0$ eine Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$, die in η von möglichst niedrigem Grade ist.

Ist das Geschlecht $p = 0$, so gibt es nach dem vorigen Paragraphen immer eine Funktion ξ erster Ordnung. Wir können sogar Null- und Unendlichkeitsstelle beliebig wählen. Nehmen wir diese Funktion ξ als unabhängige Veränderliche, so genügt jede andere Funktion einer Gleichung ersten Grades, deren Koeffizienten rational in ξ sind. D. h. aber, es wird jede Funktion des Körpers eine rationale Funktion von ξ.

Lassen sich umgekehrt alle Funktionen des Körpers als rationale Funktionen einer Größe λ darstellen, so ist der Körper vom Geschlechte Null. Dabei braucht λ dem Körper keineswegs anzugehören. Es gibt nämlich in einem solchen Körper kein Differential erster Gattung. Irgendein Differential läßt sich immer auf die Form bringen $r(\lambda)d\lambda$, wo $r(\lambda)$ eine rationale Funktion von λ ist. Soll dies Differential nirgends unendlich werden, so muß $r(\lambda)$ überall endlich, also konstant sein. Dieser konstante Wert muß aber Null sein, da das Differential sonst für unendliches λ doch unendlich würde. Es ist also, wie behauptet, $p = 0$. Also:

Satz XV. In einem Körper vom Geschlechte $p = 0$ gibt es immer Funktionen erster Ordnung. Ist ξ eine solche, so sind alle andern Funktionen des Körpers rationale Funktionen von ξ. Im besondern sind alle Funktionen erster Ordnung lineare (ganze oder gebrochene) Funktionen von ξ.

Satz XVI. Sind die Funktionen eines Körpers alle als rationale Funktionen eines Parameters λ darstellbar, so ist sein Geschlecht Null.

Man nennt die Körper vom Geschlechte Null daher auch rationale Körper. Wir können jetzt den Lürothschen Satz*) beweisen:

*) Lüroth, Math. Ann. 9, S. 163.

Satz XVII. Sind x, y rationale Funktionen von λ, so ist entweder λ eine rationale Funktion von x, y oder es läßt sich eine rationale Funktion μ von x, y finden, so daß x, y auch rationale Funktionen von μ werden.

Zum Beweise betrachten wir die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von x, y, die einen algebraischen Körper bildet. Die Funktionen dieses Körpers sind aber nach Voraussetzung rational durch λ darstellbar, so daß das Geschlecht des Körpers Null ist. Wir brauchen für μ nur irgendeine Funktion ersten Grades dieses Körpers zu wählen. Dann werden alle seine Funktionen, also auch x, y, rational durch μ darstellbar. Andererseits ist μ als Funktion des Körpers rational in x, y.

§ 7. Beispiel 1 und 2.

Beispiel 1.

$$f(x, y) = y^3 - 3xy + 2x^2 = 0 .$$

Wegen der Bezeichnungen vergleiche man das Beispiel III in § 12, Kap. VIII. Es ist der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{z} = \mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3^2$, seine Ordnung $w = 4$. Da $m = 3$, so ist $p = \frac{w}{2} - m + 1 = 0$. Es gibt also im Körper (xy) Funktionen erster Ordnung, und wenn ξ eine solche ist, so werden x und y rationale Funktionen von ξ. Wir können die Nullstelle und Unendlichkeitsstelle von ξ willkürlich vorschreiben. Bei $x = 0$ liegt ein gewöhnlicher Punkt $\mathfrak{p}$ und ein Verzweigungspunkt $\mathfrak{v}_1$. Wir wollen $\xi = \mathfrak{v}_1\mathfrak{p}^{-1}$ wählen. Zur Bestimmung von ξ bilden wir eine Basis (ζ) für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{v}_1\mathfrak{p}^{-1}$. Nach der Methode des Kap. VIII finden wir

$$\zeta_1 = x, \quad \zeta_2 = y, \quad \zeta_3 = \frac{4}{9} - \frac{3}{x} + \frac{2}{3}\,\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} .$$

Bei $x = \infty$ liegt nur der eine Punkt $\mathfrak{v}_3$, der ein Verzweigungspunkt zweiter Ordnung ist. Die dort für y geltende Entwicklung können wir aus Beispiel IV in § 3, Kap. II entnehmen. Ersetzen wir dort nämlich x durch $\frac{4}{27}\,x$ und y durch $-\frac{2}{9}\,y$, so erhalten wir die hier betrachtete Gleichung zwischen x und y. Wir finden

$$y = -\sqrt[3]{2}\, x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\, x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{12}\sqrt[3]{2}\, x^{-\frac{1}{3}} + \cdots .$$

Daher sind die Ordnungen der ζ für $x = \infty$

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{2}{3}, \quad r_3 = 0 .$$

Die Ordnungszahlen sind also nicht ganz, wie wir es bei unseren allgemeinen Betrachtungen der Einfachheit halber angenommen haben. Wir werden sehen, daß das gar nichts ausmacht. Die Diskriminante $|\zeta_{kl}|^2$ ist bis auf einen konstanten Faktor $x^2 - x$, ihre Ordnung ϱ also gleich 2. Es ist daher

$$2\sum_1^3 r_k = \frac{10}{3} > \varrho,$$

so daß die Basis (ζ) für $x = \infty$ nicht normal ist. Wenn es auch zur Bestimmung von ξ nicht notwendig ist, (ζ) in eine normale Basis für $x = \infty$ zu verwandeln, so wollen wir es doch der Übung halber tun. Es bedeute ε eine primitive dritte Einheitswurzel und es sei mit (α) eine Summe von Gliedern bezeichnet, die nur solche Potenzen von x^{-1} enthalten, deren Exponenten mindestens gleich α sind. Dann ist in der Umgebung von $x = \infty$

$$(\zeta_{kl}) = \left\{\begin{array}{lll} x & -\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{4}{9} - \sqrt[3]{2}\,x^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right) \\ x & -\varepsilon^2\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{4}{9} - \varepsilon^2\sqrt[3]{2}\,x^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right) \\ x & -\varepsilon\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{4}{9} - \varepsilon\sqrt[3]{2}\,x^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right) \end{array}\right\}.$$

Hieraus ersehen wir, daß die Ordnungszahl von

$$\zeta_1' = \zeta_1 - \frac{9}{4}\zeta_3 x$$

kleiner ist als die von ζ_1. Es sind nämlich ζ_{11}', ζ_{12}', ζ_{13}' gleich

$$\frac{9}{4}\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right), \quad \frac{9}{4}\varepsilon^2\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right), \quad \frac{9}{4}\varepsilon\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right),$$

so daß die Ordnungszahl von ζ_1' gleich $\frac{2}{3}$ ist. Wir sehen weiter, daß die Ordnungszahl von

$$\zeta_2' = \zeta_2 + \frac{4}{9}\zeta_1' = \zeta_2 + \frac{4}{9}\zeta_1 - \zeta_3 x$$

kleiner ist als die von ζ_2. Es beginnen nämlich die Entwicklungen von ζ_{21}', ζ_{22}', ζ_{23}' mit $x^{\frac{1}{3}}$, so daß die Ordnungszahl von ζ_2' gleich $\frac{1}{3}$ ist. Die Funktionen

$$\zeta_1' = \zeta_1 - \frac{9}{4}x\,\zeta_3, \quad \zeta_2' = \frac{4}{9}\zeta_1 + \zeta_2 - x\,\zeta_3, \quad \zeta_3' = \zeta_3$$

bilden auch eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{v}_1 \mathfrak{p}^{-1}$; ihre Ordnungszahlen sind

$$r_1' = \frac{2}{3}, \quad r_2' = \frac{1}{3}, \quad r_3' = 0 .$$

Es ist $2\sum r' = 2 = \varrho$, so daß die Basis (ζ') normal für $x = \infty$ ist. Eine Funktion

$$R = g_1 \zeta_1' + g_2 \zeta_2' + g_3 \zeta_3'$$

ist also dann und nur dann ein Vielfaches von $\mathfrak{v}_1 \mathfrak{p}^{-1}$ und hat höchstens die Ordnungszahl r, wenn die g ganze rationale Funktionen von x sind und ihr Grad höchstens gleich $\left[r - \frac{2}{3}\right]$, $\left[r - \frac{1}{3}\right]$, $[r]$ ist, wo unter $[a]$ die größte in a enthaltene ganze Zahl zu verstehen ist.

Die gesuchte Funktion ξ soll nur an der Stelle $\mathfrak{p}$ unendlich werden, im Unendlichen also die Ordnungszahl Null haben. Es muß daher bis auf einen konstanten Faktor, der naturgemäß willkürlich bleibt, $\xi = \zeta_3'$ sein. Diese Funktion ist, wie man leicht sieht, nicht konstant. Wir wollen noch zeigen, daß sich x und y wirklich als rationale Funktionen von ξ darstellen lassen. Wir eliminieren zu diesem Zwecke aus den beiden Gleichungen

$$(37) \qquad \xi = \frac{4}{9} - \frac{3}{x} + \frac{2}{3}\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \qquad f(x, y) = y^3 - 3xy + 2x^2 = 0$$

erst x und dann y. Bezeichnen wir $\frac{y}{x}$ mit z, so lassen sich die Gleichungen (37) schreiben

$$(38) \qquad \frac{3}{x} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3}z + z^2 - \xi, \qquad x z^3 = 3z - 2,$$

woraus durch Multiplikation folgt

$$3z^3 = (3z - 2)\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}z + z^2 - \xi\right)$$

oder

$$z = \frac{2}{27}\,\frac{9\xi - 4}{\xi}.$$

Setzen wir diesen Wert von z in die zweite der Gleichungen (38) ein, so erhalten wir x und dann y aus $y = zx$. Es ergibt sich

$$x = \frac{3 \cdot 27^2 \xi^2}{(4 - 9\xi)^3}, \qquad y = -\frac{6 \cdot 27\,\xi}{(4 - 9\xi)^2}.$$

Beispiel II. In der Integralrechnung werden gewisse Integrale, die außer der Veränderlichen x noch eine Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion von x enthalten, dadurch berechnet, daß man x sowohl wie auch die Quadratwurzel als rationale Funktionen einer neuen Veränderlichen ξ darstellt. Es komme außer x noch $\sqrt{G(x)}$ vor. Wir können die unter dem Wurzelzeichen stehende Funktion $G(x)$ als ganze rationale Funktion annehmen. Ist sie nicht von vornherein ganz, so erweitern wir sie mit ihrem Nenner, so daß sich aus dem neuen Nenner die Wurzel ausziehen läßt. Ferner können wir annehmen, daß $G(x)$ keinen quadratischen Faktor hat, weil wir aus einem solchen die Wurzel ziehen können. Wir setzen also voraus, daß $G(x)$ nur einfache Nullstellen hat. Wir setzen

$$\sqrt{G} = y .$$

Die Aufgabe besteht dann darin, x und y als rationale Funktionen einer Größe ξ darzustellen, während zwischen x und y die Gleichung

$$f(x, y) = y^2 - G(x) = 0 \tag{39}$$

besteht. Wir wissen, daß das dann und nur dann möglich ist, wenn der durch die Gleichung (39) definierte Körper vom Geschlechte Null ist. Der Grad von G sei l. Verzweigungspunkte in bezug auf x sind die l Nullstellen von G und, wenn l ungrade ist, die unendlich ferne Stelle. Es ist daher das Geschlecht

$$(40) \qquad \begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(l-2), \text{ wenn } l \text{ grade,} \\ p &= \frac{1}{2}(l-1), \text{ wenn } l \text{ ungrade,} \end{aligned}$$

also nur im Falle $l = 1$ oder $l = 2$ gleich Null, so daß es nur in diesen beiden Fällen möglich ist, x und y als rationale Funktionen einer neuen Größe ξ darzustellen. Eine passende Größe ξ findet man, indem man im Körper (xy) eine Funktion bestimmt, die nur eine Null- und eine Unendlichkeitsstelle hat. Das kann so geschehen, wie in Beispiel 1 auseinandergesetzt. Es sei dem Leser empfohlen, die in der Integralrechnung gebräuchlichen Substitutionen mit der allgemeinen Theorie zu vergleichen.

§ 8. Körper vom Geschlechte 1 und 2.

Wenn das Geschlecht $p > 0$, so kann es im Körper keine Funktion erster Ordnung geben, wie aus § 6 folgt. Wenn $p = 1$ oder 2, so gibt es im Körper immer Funktionen zweiter Ordnung. Für $p = 1$ folgt dies aus den Ergebnissen des § 5 und man kann die Unendlichkeitstellen einer Funktion zweiter Ordnung und eine Nullstelle noch beliebig wählen. Ist $p = 2$, so hat die Differentialklasse zwei linear unabhängige ganze Divisoren $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ von der Ordnung $2p - 2 = 2$. Es ist also $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'^{-1}$ eine Funktion zweiter Ordnung. Ist $p > 2$, so können zwar Funktionen zweiter Ordnung vorhanden sein, sind es aber im allgemeinen nicht.

Es sei ξ eine Funktion zweiter Ordnung und η eine Funktion, die einer unzerlegbaren Gleichung zweiten Grades

$$a\eta^2 + 2b\eta + c = 0 \tag{41}$$

genügt, wo a, b und c ganze rationale Funktionen von ξ sind. Dann ist der Körper $(x\,y)$ gleich dem Körper $(\xi\,\eta)$. Die Diskriminante von (41) ist

$$D(\xi) = b^2 - a\,c\,.$$

Wir können sie in der Form schreiben

$$D(\xi) = H^2 G\,,$$

wo H und G ganze rationale Funktionen von ξ sein sollen, und zwar soll G nur einfache Nullstellen haben. Wir setzen

$$\zeta = \sqrt{G}\,.$$

Es folgt dann aus (41)

$$\eta = -\frac{1}{a}\{b + H\zeta\}.$$

Daher wird η eine rationale Funktion von ξ, ζ und umgekehrt ζ eine ebensolche Funktion von ξ, η. Der Körper $(x\,y)$ ist daher auch identisch mit dem Körper $(\xi\,\zeta)$, der definiert ist durch die reine Gleichung

$$\zeta^2 - G(\xi) = 0\,. \tag{42}$$

Ist der Grad von G in ξ gleich l, so ist das Geschlecht des Körpers $(\xi\,\zeta)$, wie wir schon in § 7, Beispiel II bestimmt haben,

$$p = \frac{1}{2}(l - 2), \text{ wenn } l \text{ grade,}$$

$$p = \frac{1}{2}(l - 1), \text{ wenn } l \text{ ungrade.}$$

Daher ist G für $p = 1$ vom dritten oder vierten und für $p = 2$ vom fünften oder sechsten Grade.

Körper vom Geschlechte 1 heißen auch elliptisch. Körper vom Geschlechte $p \geq 2$, die eine Funktion zweiter Ordnung enthalten, sich also immer durch eine Gleichung der Form (42) definieren lassen, heißen hyperelliptisch. Es sind also Körper vom Geschlechte 2 immer hyperelliptisch.

Wir beweisen noch:

Satz XVIII. Sind ξ und ξ_1 zwei Funktionen zweiter Ordnung eines Körpers vom Geschlechte 2, so ist die eine eine lineare Funktion der andern.

Wir beweisen den Satz auf zwei Arten.

Erste Art. Da ξ von zweiter Ordnung ist, so genügt ξ_1 nach Satz III, Kap. IV, § 2 einer Gleichung zweiten Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von ξ sind.

$$a\xi_1^2 + 2b\xi_1 + c = 0\,. \tag{43}$$

Ebenso genügt aber auch ξ einer Gleichung ersten oder zweiten Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von ξ_1 sind. Daher sind in (43) die Koeffizienten a, b, c ganze rationale Funktionen von ξ vom ersten oder zweiten Grade. Ist a nicht identisch Null, so ist nach Satz II, § 5, Kap. V der Körper identisch mit dem Körper $(\xi\,\xi_1)$, also mit dem Körper $(\xi\,\zeta)$, wo $\zeta = \sqrt{b^2 - ac}$. Aber der Grad von $b^2 - ac$ ist höchstens gleich vier, so daß $p \leq 1$ sein würde. Daher ist $a = 0$ und ebenso folgt, daß die Gleichung (43) auch in ξ linear sein muß. Damit ist aber Satz XVIII bewiesen.

Zweite Art. Es seien

$$\xi = \frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{g}}\,, \quad \xi_1 = \frac{\mathfrak{g}_1'}{\mathfrak{g}_1} \tag{44}$$

zwei Funktionen zweiter Ordnung, wo $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1'$ ganze Divisoren zweiter Ordnung sein sollen. Dann ist die Dimension der Klasse $(\mathfrak{g})$ mindestens gleich zwei, da sie ja die beiden linear unabhängigen ganzen Divisoren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ enthält. Wir finden also mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes, da $p = 2$,

$$\{\mathfrak{g}\} = 1 + \{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{-1}\} \geq 2\,,$$

oder

$$\{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{-1}\} \geq 1\,. \tag{45}$$

Die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{-1})$ ist aber $(2p - 2) - 2 = 0$. Nach Satz VIII, § 4 folgt also wegen (45), daß sie die Hauptklasse sein muß, daß also $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ der Differentialklasse $(\mathfrak{f})$ angehören. Geradeso ergibt sich, daß auch $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_1'$ der Klasse $(\mathfrak{f})$ angehören. Da aber $(\mathfrak{f})$ nur zwei linear unabhängige ganze Divisoren enthält, so bestehen Gleichungen der Form

$$\mathfrak{g}_1 = \alpha\,\mathfrak{g} + \beta\,\mathfrak{g}'\,, \quad \mathfrak{g}_1' = \gamma\,\mathfrak{g} + \delta\,\mathfrak{g}'\,,$$

wo α, β, γ, δ konstant sind. Wegen (44) folgt daraus

$$\xi_1 = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\,,$$

also die Behauptung.

§ 9. Beispiel 3 und 4.

Beispiel III. $f(x, y) = y^4 + 2(1 - x - x^3)\,y^2 + (1 + x - x^3)^2 = 0$. Die Diskriminante dieser Gleichung vierten Grades in y ergibt sich nach der allgemeinen Formel für die Diskriminante einer Gleichung vierten Grades zu $\quad D(x) = 64^2\,x^2\,(1 - x^3)^2\,(1 + x - x^3)^2\,.$

Es können daher im endlichen Verzweigungspunkte nur liegen bei $x = 0$, bei den Nullstellen von $1 - x^3$ und bei denen von $1 + x - x^3$. Das findet man bestätigt, wenn man die Gleichung $f = 0$ nach y auflöst. Das ergibt

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}\,. \tag{46}$$

Hieraus sehen wir, daß bei $x = 0$, $x = \infty$ und bei den Nullstellen von $1 - x^3$ je zwei Verzweigungspunkte erster Ordnung liegen. Daher ist die Verzweigungszahl in bezug auf x gleich $w = 10$ und das Geschlecht des Körpers (xy)

$$p = \frac{1}{2}\,w - m + 1 = 5 - 4 + 1 = 2\,.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Funktion ξ zweiter Ordnung zu bestimmen und die Funktionen des Körpers rational durch ξ und durch die Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion von ξ darzustellen. Zu diesem Zwecke müssen wir zwei linear unabhängige ganze Divisoren der Differentialklasse bestimmen. Dazu haben wir eine Basis für die Vielfachen desjenigen Teiles $\mathfrak{z}'$ des Verzweigungsdivisors $\mathfrak{z}$ aufzusuchen, der sich auf die im Endlichen liegenden Stellen bezieht. Eine solche Basis finden wir bequemer, wenn wir erst eine Basis für die ganzen Funktionen, also für die Vielfachen des Divisors 1, aufsuchen und dazu die komplementäre Basis bestimmen. Wir wollen in dieser Weise verfahren.

Wir gehen aus von der Basis

$$(\xi_k) = (1, y, y^2, y^3)\,.$$

Die Diskriminante dieser Basis ist

$$|\xi_{kl}|^2 = D(x) = 64^2\,x^2\,(1 - x^3)^2\,(1 + x - x^3)^2\,. \tag{47}$$

Da

$$N\mathfrak{I}\,(\mathfrak{z}') = x^2\,(1 - x^3)^2\,, \tag{48}$$

und die ξ_{kl} für endliches x endlich sind, so folgt durch Vergleich von (47), mit (48), daß die Basis (ξ_k) nur für die Nullstellen von $1 + x - x^3$ nicht nicht normal ist. Wir bezeichnen die drei Nullstellen mit α, β, γ und setzen

$$g\,(x) = 1 + x - x^3 = -(x - \alpha)\,(x - \beta)\,(x - \gamma)\,.$$

Wir betrachten die Basis (ξ_k) zunächst in der Umgebung von $x = \alpha$. Bei $x = \alpha$ liegen vier gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche übereinander. Wir erhalten also vier nach ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende Potenzreihen für y, nämlich

$$y_1 = 2\sqrt{\alpha} + \frac{1 + 3\,\alpha^2}{2\sqrt{\alpha}}\,(x - \alpha) + \cdots,$$

$$y_2 = \frac{1 - 3\,\alpha^2}{2\sqrt{\alpha}}\,(x - \alpha) + \cdots, \quad y_3 = -\,y_1\,, \quad y_4 = -\,y_2\,,$$

wie man am einfachsten aus (46) herleitet, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß α der Gleichung $1 + \alpha - \alpha^3 = 0$ genügt, daß also $\alpha^3 - 1 = \alpha$ ist. Bezeichnen wir mit (s) eine Summe von Gliedern, die mindestens durch die s-te Potenz von $x - \alpha$ teilbar sind, so ist hiernach in der Umgebung von $x = \alpha$

$$(\xi_{kl}) = \left|\begin{matrix} 1, & 2\sqrt{\alpha} + (1), & 4\alpha + (1), & 8\alpha\sqrt{\alpha} + (1) \\ 1, & (1), & (2), & (3) \\ 1, & -2\sqrt{\alpha} + (1), & 4\alpha + (1), & -8\alpha\sqrt{\alpha} + (1) \\ 1, & (1), & (2), & (3) \end{matrix}\right|.$$

Dies System haben wir durch eine passende Substitution a' in eine Einheit für $x = \alpha$ zu verwandeln. Wir subtrahieren zunächst das 4α-fache der zweiten Vertikalreihe von der vierten und dividieren dann die letzte Vertikalreihe durch $x - \alpha$. Das neue System sei mit (ξ'_{kl}) und die neue Basis mit (ξ'_k) bezeichnet. Wie wir schon oben festgestellt haben (vgl. 47), ist $|\xi_{kl}|$ genau durch die erste Potenz von $x - \alpha$ teilbar. Daher ist die Determinante des neuen Systems für $x = \alpha$ endlich und von Null verschieden. Da ferner die ξ'_{kl} für $x = \alpha$ endlich sind, so ist (ξ'_{kl}) eine Einheit für $x = \alpha$. Die Substitution, durch die die Basis (ξ'_k) aus der Basis (ξ_k) hervorgeht, ist

$$a' = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-\alpha)^{-1} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\alpha(x-\alpha)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-\alpha)^{-1} \end{matrix}\right|.$$

Diese Substitution ist nicht die einzige, die aus der Basis (ξ_k) eine neue hervorgehen läßt, die für $x = \alpha$ in bezug auf den Divisor 1 normal ist, und die auch überall da normal ist, wo es (ξ_k) ist. Wir können z. B. die Konstante -4α durch irgendeine ganze rationale Funktion von x ersetzen, die für $x = \alpha$ den Wert -4α annimmt. Wir nehmen die Funktion $-4x$. Wir dürfen ferner $x - \alpha$ ersetzen durch eine rationale Funktion $h(x)$, die den Faktor $x - \alpha$ in der ersten Potenz enthält, wenn wir nur dafür sorgen, daß die Substitution eine Einheit bleibt für alle Stellen, für die (ξ_k) normal ist. Daher darf die Funktion $h(x)$, die wir an Stelle von $x - \alpha$ nehmen wollen, nur Null oder unendlich werden an den Nullstellen von $g(x)$, da (ξ_k) nur für diese Stellen nicht normal ist. Wir wollen $x - \alpha$ durch $g(x)$ ersetzen. Die Substitution, durch die wir uns aus der Basis (ξ_k) eine neue Basis (ζ) herleiten wollen, ist daher

$$a = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4xg^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{-1} \end{matrix}\right|.$$

Durch diese Änderung erreichen wir einmal, daß wir die Wurzel α der Gleichung $g(x) = 0$ nicht zu berechnen brauchen, dann aber wegen der Symmetrie von (ξ) und a in bezug auf die drei Wurzeln α, β, γ von $g(x) = 0$, daß die neue Basis (ζ) nicht nur für $x = \alpha$, sondern auch für $x = \beta$ und $x = \gamma$ normal ist in bezug auf den Divisor 1. Man kann in dieser Weise bei der Bestimmung einer Basis für die ganzen Funktionen immer mit den Zahlen des Zahlkörpers auskommen, zu dem die Koeffizienten der Gleichung $f = 0$ gehören. Darauf soll aber hier nicht näher eingegangen werden. Die Basis (ζ) ist für alle Stellen im Endlichen normal in bezug auf den Divisor 1; sie ist also eine Basis für die ganzen Funktionen. Ihre Diskriminante ist

$$|\zeta_{\kappa\lambda}|^2 = |\xi_{\kappa\lambda}|^2 \, |a_{\kappa\lambda}|^2 = D(x)\, g^{-2} = 64^2 x^2 (1 - x^3)^2 . \tag{49}$$

Die komplementären Basen von (ζ) und (ξ) seien (η') und (η''). Es ist $(\zeta_{\kappa\lambda}) = (\xi_{\kappa\lambda})\, a$. Bezeichnen wir mit b das komplementäre System von a, so ist also

$$(\eta') = (\eta'')\, b. \tag{50}$$

Da in der Gleichung $f = 0$ nur grade Potenzen von y vorkommen, so ist gleichzeitig mit y auch $-y$ eine Wurzel von $f = 0$. Wir wählen, wie schon oben, die Bezeichnung so, daß $y_3 = -y_1$, $y_4 = -y_2$. Dann ist

$$|\xi_{\kappa\lambda}| = z = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & -y_1 & y_1^2 & -y_1^3 \\ 1 & -y_2 & y_2^2 & -y_2^3 \end{vmatrix} = -4\, y_1 y_2 (y_1^2 - y_2^2)^2 .$$

Ferner sind die Unterdeterminanten der ersten Zeile von z

$$z_{11} = 2 y_1 y_2^3 (y_1^2 - y_2^2), \qquad z_{21} = 2 y_2^3 (y_1^2 - y_2^2),$$
$$z_{31} = -2 y_1 y_2 (y_1^2 - y_2^2), \qquad z_{41} = -2 y_2 (y_1^2 - y_2^2),$$

so daß

$$\eta''_{11} = -\frac{y_1 y_2^2}{2 y_1 (y_1^2 - y_2^2)}, \qquad \eta''_{21} = -\frac{y_2^2}{2 y_1 (y_1^2 - y_2^2)},$$

$$\eta''_{31} = \frac{y_1}{2 y_1 (y_1^2 - y_2^2)}, \qquad \eta''_{41} = \frac{1}{2 y_1 (y_1^2 - y_2^2)}.$$

Faßt man die Gleichung $f = 0$ auf als quadratische Gleichung für y^2, so ergibt sich aus ihr $y_1^2 + y_2^2 = -2(1 - x - x^3)$.
Da ferner

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = (y_1 - y_2)(y_1 + y_1)(y_1 + y_2)$$
$$= 2 y_1 (y_1^2 - y_2^2),$$

so folgt, wenn wir zum Schluß y_1 durch y ersetzen,

$$
(51)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y}\eta_1'' = y\left[y^2 + 2(1 - x - x^3)\right], &\qquad& \frac{\partial f}{\partial y}\eta_2'' = y^2 + 2(1 - x - x^3),\\
&\frac{\partial f}{\partial y}\eta_3'' = y, && \frac{\partial f}{\partial y}\eta_4'' = 1.
\end{aligned}
$$

Als komplementäres System zu a findet man

$$
b = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4x & 0 & g \end{Bmatrix}
$$

so daß aus (50) und (51) folgt

$$
(52)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y}\eta_1' = y\left[y^2 + 2(1 - x - x^3)\right], &\qquad& \frac{\partial f}{\partial y}\eta_2' = y^2 + 2(1 + x - x^3),\\
&\frac{\partial f}{\partial y}\eta_3' = y, && \frac{\partial f}{\partial y}\eta_1' = 1 + x - x^3.
\end{aligned}
$$

Es ist (η') eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{z}'$.

Wir sehen zu, ob (η') für $x = \infty$ normal ist. Es ist in der Umgebung von $x = \infty$, wie am einfachsten aus (46) folgt,

$$
y_1 = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \cdots, \qquad y_2 = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + \cdots, \qquad y_3 = -y_1, \qquad y_4 = -y_2.
$$

Hiermit findet man zunächst als Ordnungszahl von $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ den Wert $\dfrac{7}{2}$ und dann als Ordnungszahlen der η'

$$
r_1' = \frac{2}{2}, \quad r_2' = -\frac{1}{2}, \quad r_3' = -\frac{4}{2}, \quad r_4' = -\frac{1}{2}.
$$

Da das System (η'_{ι}) komplementär ist zu (ζ_{ι}), so ist die Diskriminante von (η') reziprok zu der von (ζ), also nach (49)

$$
|\eta'_{\iota k}|^2 = 64^{-2}\, x^{-2}\, (1 - x^3)^{-2}.
$$

Ihr Grad ϱ ist -8 und daher

$$
2 \sum r_k' = -4 > \varrho,
$$

sodaß die Basis (η') für $x = \infty$ nicht normal ist. Wir wollen sie in eine normale verwandeln. Es ist in der Umgebung von $x = \infty$, wie aus (46) folgt,

$$
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta'_{\iota}\right) = \begin{Bmatrix}
-x^{\frac{9}{2}} + x^{\frac{7}{2}} + \left(-\frac{5}{2}\right), & -x^3 + 2x^2 + (-1), & x^{\frac{3}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right), & -x^3 + (-1) \\
-x^{\frac{9}{2}} - x^{\frac{7}{2}} + \left(-\frac{5}{2}\right), & -x^3 - 2x^2 + (-1), & x^{\frac{3}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right), & -x^3 + (-1) \\
x^{\frac{9}{2}} - x^{\frac{7}{2}} + \left(-\frac{5}{2}\right), & -x^3 + 2x^2 + (-1), & -x^{\frac{3}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right), & -x^3 + (-1) \\
x^{\frac{9}{2}} + x^{\frac{7}{2}} + \left(-\frac{5}{2}\right), & -x^3 - 2x^2 + (-1), & -x^{\frac{3}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right), & -x^3 + (-1)
\end{Bmatrix}.
$$

wo wieder mit (s) Glieder bezeichnet sind, die mindestens die s-te Potenz von x^{-1} enthalten. Hieraus ersehen wir, daß die Funktionen

$$\eta_1 = \eta_1' + x^3 \eta_3', \quad \eta_2 = \eta_2' - \eta_4'$$

kleinere Ordnungszahlen haben als η_1' und η_2', und zwar 0 und $-\frac{3}{2}$. Die Funktionen

$$\eta_1 = \eta_1' + x^3 \eta_3', \quad \eta_2 = \eta_2' - \eta_4', \quad \eta_3 = \eta_3', \quad \eta_4 = \eta_4' \tag{53}$$

bilden auch eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{z}'$; ihre Ordnungszahlen sind

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{3}{2}, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = -\frac{1}{2},$$

so daß

$$2 \sum r_k = -8 = \varrho .$$

Die Basis (η_i) ist daher normal für $x = \infty$. Demnach ist eine Funktion des Körpers

$$R = g_1 \eta_1 + g_2 \eta_2 + g_3 \eta_3 + g_4 \eta_4$$

dann und nur dann ein Vielfaches von $\mathfrak{z}'$ und hat höchstens die Ordnungszahl r, wenn die g ganze rationale Funktionen von x sind, deren Grade höchstens gleich

$$[r], \quad \left[r + \frac{3}{2}\right], \quad [r+2], \quad \left[r + \frac{1}{2}\right]$$

sind, wo wieder $[a]$ die größte in a enthaltene ganze Zahl bedeuten soll. Soll das Differential $R dx$ auch für unendliches x nicht unendlich werden, so muß die Ordnungszahl von R kleiner als -1 sein. Es müssen also g_1 und g_4 identisch Null sein, während g_2 und g_3 konstant sein müssen. Daher erhalten wir, wie es sein muß, zwei linear unabhängige Differentiale erster Gattung

$$R_1 dx = (y^2 + 1 + x - x^3) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad R_2 dx = y \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{54}$$

Ihr Quotient liefert uns die gesuchte Funktion ξ zweiter Ordnung

$$\xi = \frac{y^2 + 1 + x - x^3}{y}. \tag{55}$$

Die Funktion ξ hat eine sehr einfache Bedeutung. Aus der Gleichung $f = 0$ folgt nämlich

$$(y^2 + 1 + x - x^3)^2 = 4\, x\, y^2$$

und daraus

$$\xi = 2\sqrt{x}. \tag{56}$$

Es ist also, in Primteiler zerlegt,

$$\xi = \frac{\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2}{\mathfrak{v}_3 \mathfrak{v}_4},$$

wenn mit $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ die bei $x = 0$ liegenden und mit $\mathfrak{v}_3$, $\mathfrak{v}_4$ die bei $x = \infty$ liegenden Verzweigungspunkte und Primteiler bezeichnet werden. Aus (46) und (56) folgt

$$x = \frac{1}{4}\xi^2, \qquad y = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{8}\sqrt{\xi^6 - 64}\,, \tag{57}$$

so daß sich x und y und damit alle Funktionen des Körpers (xy) rational durch ξ und die Quadratwurzel aus $\xi^6 - 64$ ausdrücken lassen. Damit ist die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, gelöst.

Beispiel IV. Besonders einfach ist die Bestimmung einer Basis für die ganzen Funktionen und für die Vielfachen von $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{z}'$ in einem hyperelliptischen Körper. Nehmen wir die den Körper definierende Gleichung in der Form an

$$y^2 = G(x)\,,$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist mit nur einfachen Nullstellen, so ist schon $(1, y)$ eine Basis für die in bezug auf x ganzen Funktionen. Denn die Funktionen der Basis werden für endliches x nicht unendlich und die Diskriminante der Basis, nämlich $4y^2$ ist im wesentlichen gleich der Idealnorm $G(x)$ von $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{z}'$.

Der Grad von $G(x)$ sei $l = 2p + 2$ oder $2p + 1$, je nachdem l grade oder ungrade ist. Als komplementäre Basis zu $(1, y)$ ergibt sich, wenn wir den Faktor $\frac{1}{2}$ fortlassen,

$$\left(\frac{1}{y},\ 1\right).$$

Diese Basis ist normal für $x = \infty$. Die Ordnungszahlen ihrer Funktionen sind $r_1 = -\frac{1}{2}l$, $r_2 = 0$, so daß alle und nur die Differentiale des Körpers, die im Endlichen nicht unendlich werden und für unendliches x höchstens von der Ordnung $r + 2$, sich darstellen lassen in der Form

$$\left(\frac{g_1}{y} + g_2\right)dx\,,$$

wo g_1 und g_2 ganze rationale Funktionen von x sind, und zwar höchstens vom Grade $r + \frac{1}{2}l$ und r. Wollen wir im besonderen die Differentiale erster Gattung haben, so muß $r \leqq -2$ sein, also g_2 identisch Null und g_1

höchstens vom Grade $\frac{1}{2}\,l - 2$ sein; wir erhalten so folgende p linear unabhängigen Differentiale erster Gattung

$$\frac{dx}{y}, \quad \frac{x\,dx}{y}, \quad \frac{x^2 dx}{y}, \; \ldots \; \frac{x^{n-1}\,dx}{y}. \tag{58}$$

§ 10. Weierstraßpunkte.

Es sei $\mathfrak{p}$ eine Stelle des Körpers. Den zugehörigen Primteiler bezeichnen wir auch mit $\mathfrak{p}$. Ferner sei g eine positive ganze Zahl. Wir fragen, ob es im Körper Funktionen gibt, die an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der g-ten Ordnung unendlich werden und sonst nirgends, die also die Form haben

$$\frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{p}^g}, \tag{59}$$

wo $\mathfrak{g}'$ ein ganzer Divisor ist. Es ist dies dieselbe Frage wie in § 5, nur daß die vorgeschriebenen Unendlichkeitsstellen hier alle zusammenfallen sollen. Es ist der dort mit $\mathfrak{g}$ bezeichnete Divisor gleich $\mathfrak{p}^g$. Wenn $g \geqq p + 1$, so gibt es immer eine Funktion der gewünschten Art. Denn nach dem Riemann-Rochschen Satz ist wegen $g \geqq p + 1$

$$\{\mathfrak{p}^g\} \geqq g - p + 1 \geqq 2,$$

so daß es einen ganzen zu $\mathfrak{p}^g$ äquivalenten Divisor $\mathfrak{g}'$ gibt, der von $\mathfrak{p}^g$ linear unabhängig ist. Dagegen wird es für $g \leqq p$ im allgemeinen eine solche Funktion nicht geben. Wir wollen sogar beweisen, daß die Zahl der Stellen $\mathfrak{p}$, für die eine Funktion der Art (59) mit $g \leqq p$ existiert, endlich ist. Wir definieren:

Definition VI. Gibt es eine Funktion des Körpers, die nur an der Stelle $\mathfrak{p}$ unendlich wird und von einer Ordnung, die größer als Null und kleiner als $p + 1$ ist, so heißt die Stelle ein Weierstraßpunkt.

Der Satz, den wir beweisen wollen, lautet dann:

Satz XIX. Die Anzahl der Weierstraßpunkte ist endlich.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Weierstraßpunkt; es sei (59) eine Funktion des Körpers und es sei $g \leqq p$. Dann hat die Klasse $(\mathfrak{p}^p)$ zwei linear unabhängige ganze Divisoren, nämlich $\mathfrak{p}^p$ und $\mathfrak{p}^{p-g}\mathfrak{g}'$. Hat umgekehrt die Klasse $(\mathfrak{p}^p)$ zwei linear unabhängige ganze Divisoren $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{p}^p$, so ist die Stelle $\mathfrak{p}$ ein Weierstraßpunkt, weil $\mathfrak{g}'\mathfrak{p}^{-p}$ eine Funktion des Körpers ist, die nur an der Stelle $\mathfrak{p}$ unendlich wird und dort von geringerer als $(p + 1)$-ter Ordnung.

Nach § 5 ist aber $\{\mathfrak{p}^p\} \geqq 2$ dann und nur dann, wenn es in der kanonischen Klasse einen ganzen Divisor gibt, der durch $\mathfrak{p}^p$ teilbar ist. Es habe x an der Stelle $\mathfrak{p}$ den Wert ξ und es sei $\mathfrak{p}$ kein Verzweigungspunkt und keine der Unendlichkeitsstellen der Funktionen A_i in (29), § 5. Dann lassen sich die Funktionen A_i und A in (29), § 5 nach ganzen positiven Potenzen von $x-\xi$ entwickeln, und wenn der A entsprechende ganze Divisor $\mathfrak{a}$ der kanonischen Klasse durch $\mathfrak{p}^p$ teilbar sein soll, so muß diese Entwicklung mit der p-ten Potenz von $x-\xi$ beginnen. Daraus ergeben sich nach dem Taylorschen Satze die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&a_1 A_1(\xi) + a_2 A_2(\xi) + \cdots + a_p A_p(\xi) = 0\,,\\
&a_1 A_1'(\xi) + a_2 A_2'(\xi) + \cdots + a_p A_p'(\xi) = 0\,,\\
&-----------------------\\
&a_1 A_1^{(p-1)}(\xi) + a_2 A_2^{(p-1)}(\xi) + \cdots + a_p A_p^{(p-1)}(\xi) = 0\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die Determinante der Koeffizienten der a_i gleich Null sein muß. Diese Determinante ist aber die Wronskische Determinante der p Funktionen $A_i(\xi)$. Wäre sie identisch Null, so würden die A_i linear abhängig sein, was nicht der Fall ist. Dann aber kann die Determinante nur für eine endliche Zahl von Werten ξ Null werden, da sie eine algebraische Funktion von ξ ist. Damit ist aber unser Satz bewiesen, da die beim Beweise ausgeschlossenen Stellen nur in endlicher Zahl vorhanden sind.

Wenn das Geschlecht $p=0$, so hat es keinen Sinn, von Weierstraßpunkten zu sprechen. Wenn $p=1$, so gibt es keine Weierstraßpunkte, da aus deren Existenz das Vorhandensein von Funktionen erster Ordnung folgen würde. Wenn $p>1$, gibt es immer Weierstraßpunkte. Wir gehen darauf aber nicht ein*).

Man vergleiche zu diesem Paragraphen Kap. XIII, § 8.

Zehntes Kapitel.

Die Kurve $f(x,y)=0$.

§ 1. Die mehrfachen Punkte.

Wir können die den Körper definierende Gleichung $f(x,y)=0$ als Gleichung einer Kurve deuten, indem wir x und y als kartesische Koordinaten in einer Ebene betrachten. Die so definierte Kurve heißt eine **algebraische Kurve**. Wir bezeichnen sie mit f. Der Grad (l, m) von $f(x,y)$ heißt die **Ordnung der Kurve**. Es sei $P = (a, b)$ ein Punkt von f. Wenn a oder b unendlich ist, so hat man die Gleichung $f(x,y)=0$ durch die Substitution $x=\frac{1}{x'}$, oder $y=\frac{1}{y'}$ umzuformen und dann die neue Glei-

*) Man sehe etwa H.-L. 28. Vorlesung, § 2 und § 3.

chung in der Umgebung von $x' = 0$ oder $y' = 0$ zu betrachten. Wir können also im folgenden a und b endlich annehmen, da wir die Fälle, wo dies nicht der Fall auf diesen Fall in der angegebenen Weise zurückführen. Wollen wir die Kurve f in der Nähe von P betrachten, so werden wir $f(x,y)$ nach Potenzen von $x - a$, $y - b$ entwickeln. Diese Entwicklung sei, nach homogenen Funktionen von $x - a$, $y - b$ geordnet,

$$f(x, y) = u_\nu + u_{\nu+1} + \cdots,$$

wo u_k eine homogene Funktion vom Grade k in $x - a$, $y - b$ bedeuten soll. Wir nehmen an, daß die Glieder niedrigster Dimensionen, die in der Entwicklung vorkommen, die Dimension ν haben. Da der Punkt (a, b) auf f liegt, so ist $\nu \geq 1$. Der Punkt P heißt ein ν-facher Punkt der Kurve. Ist $\nu > 1$, so heißt er ein mehrfacher Punkt, für $\nu = 2$ auch im besonderen ein Doppelpunkt. Nach dem Taylorschen Satze ist

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Soll $\nu > 1$ sein, so muß u_1 identisch verschwinden, es müssen also die Koordinaten a, b den drei Gleichungen genügen

$$(1) \qquad f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend. Wir haben also:

Ein Punkt P ist dann und nur dann ein mehrfacher Punkt der Kurve f, wenn seine Koordinaten den Gleichungen genügen

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Da f keine mehrfachen Faktoren enthält, so können die drei Funktionen f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ keinen gemeinsamen Faktor haben, und die Gleichungen (1) haben höchstens eine endliche Zahl von gemeinsamen Lösungen. Also:

Eine algebraische Kurve hat höchstens eine endliche Zahl von mehrfachen Punkten.

Es sei wie früher

$$(2) \qquad f = a_0(x)\, y^m + a_1(x)\, y^{m-1} + \cdots + a_m(x),$$

wo die $a(x)$ ganze rationale Funktionen vom Grade l in x sind. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} = m a_0\, y^{m-1} + (m-1)\, a_1 y^{m-2} + \cdots + a_{m-1}.$$

Es wird also $\frac{\partial f}{\partial y}$ für unendlich große Werte von x unendlich wie x^l. Für unendlich große Werte von y wird $\frac{\partial f}{\partial y}$ nur unendlich wie y^{m-2}, wie man sieht, wenn man bedenkt, daß $f = 0$ und daß daher

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{m}{y} f = -a_1 y^{m-2} - 2a_2 y^{m-3} - \dots - \frac{m a_m}{y}.$$

Außer für unendliches x und y wird $\frac{\partial f}{\partial y}$ als ganze rationale Funktion von x, y nicht unendlich. Bezeichnen wir den Nenner von x mit $\mathfrak{l}$ und den von y mit $\mathfrak{m}$, so können wir also setzen, wenn wir noch bedenken, daß ganz ähnliche Überlegungen für $\frac{\partial f}{\partial x}$ gelten,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{l}^l\,\mathfrak{m}^{m-2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{l}^{l-2}\,\mathfrak{m}^m}, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ ganze Divisoren sind.

Da ein Punkt von f dann und nur dann ein mehrfacher Punkt ist, wenn in ihm $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwinden, so können wir sagen: wenn $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{g}$ und in $\mathfrak{h}$ enthaltener Primteiler ist und wenn x und y an der Stelle $\mathfrak{p}$ die Werte a und b annehmen, so ist (a, b) ein mehrfacher Punkt von f und umgekehrt muß einem mehrfachen Punkt von f mindestens ein Primteiler $\mathfrak{p}$ entsprechen, der sowohl in $\mathfrak{g}$ wie in $\mathfrak{h}$ aufgeht. Der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ liefert uns also die mehrfachen Punkte von f.

Bezeichnen wir den Verzweigungsdivisor in bezug auf x mit $\mathfrak{z}_x$ und den in bezug auf y mit $\mathfrak{z}_y$, so besteht nach (7) Kap. VI, § 6 die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{z}_y\,\mathfrak{l}^2}{\mathfrak{z}_x\,\mathfrak{m}^2}. \tag{4}$$

Andererseits ist nach (3)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\mathfrak{g}\,\mathfrak{l}^2}{\mathfrak{h}\,\mathfrak{m}^2}.$$

Es sind also die Divisoren $\mathfrak{g}\,\mathfrak{z}_y^{-1}$ und $\mathfrak{h}\,\mathfrak{z}_x^{-1}$ einander gleich. Wir bezeichnen diesen Divisor mit $\mathfrak{d}$. Wir haben dann die Darstellungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{z}_y}{\mathfrak{l}^{l-2}\,\mathfrak{m}^m}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{l}^l\,\mathfrak{m}^{m-2}}. \tag{5}$$

Wir werden weiter unten sehen, daß der Divisor $\mathfrak{d}$ immer ganz ist. Wir bezeichnen den größten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{z}_x$ und $\mathfrak{z}_y$ mit $\mathfrak{r}$. Dann ist der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ gleich $\mathfrak{d}\,\mathfrak{r}$. Der Divisor $\mathfrak{d}\,\mathfrak{r}$ liefert uns also die mehrfachen Punkte von f. Wir werden aber sehen, daß $\mathfrak{d}$ immer durch $\mathfrak{r}$, sogar durch $\mathfrak{r}^2$ teilbar ist, so daß uns schon der Divisor $\mathfrak{d}$ alle mehrfachen Punkte von f liefert. Er heißt daher der **Divisor der mehrfachen Punkte** oder auch wohl der **Doppelpunkt-Divisor** von f.

§ 2. Die Kurvenzweige.

Um die Beschaffenheit von f in der Umgebung von P kennenzulernen, benutzen wir die Reihenentwicklungen, die für y in der Umgebung von $x = a$ gelten. Da der Punkt (a, b) auf f liegt, so muß unter den Reihen mindestens eine vorkommen, die für y den Wert b liefert, wenn man $x = a$ setzt. Eine solche Entwicklung sei

$$(6) \qquad y = y_1 = b + b_0 (x-a)^{\frac{\mu}{\lambda}} + b_1 (x-a)^{\frac{\mu+1}{\lambda}} + \cdots, \quad (b_0 \neq 0).$$

Sie schreite also nach ganzen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ fort, und die Entwicklung von $y - b$ beginne mit der μ-ten Potenz von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$. Es ist $\mu \geq 1$. Der zu der Entwicklung (6) gehörende Primteiler sei $\mathfrak{p}$. Er ist ein Verzweigungsprimteiler der Ordnung $\lambda - 1$ in bezug auf x und, da $y - b$ durch $\mathfrak{p}^{\mu}$ teilbar ist, ein Verzweigungsprimteiler der Ordnung $\mu - 1$ in bezug auf y. Es ist also $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{z}_x$ und $\mathfrak{z}_y$ genau in den Potenzen $\lambda - 1$ und $\mu - 1$ enthalten. Bezeichnen wir mit α die kleinere der beiden Zahlen $\lambda - 1$, $\mu - 1$ oder, wenn sie gleich sind, die Zahl $\lambda - 1 = \mu - 1$, so ist $\mathfrak{p}$ in dem größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{z}_x$ und $\mathfrak{z}_y$ genau in der Potenz α enthalten.

Aus der Funktion y_1, gehen, wenn $\lambda > 1$, noch andere hervor, indem x den Punkt a einmal oder mehrere Male umkreist. Wir wollen sie bezeichnen mit $y_2, y_3, \ldots y_\lambda$. Die Bezeichnung soll so gewählt werden, daß y_1 übergeht in y_2, y_2 in $y_3, \ldots y_\lambda$ in y_1, wenn x den Punkt a einmal in positivem Sinne umkreist. Lassen wir x alle Werte in der Umgebung von a durchlaufen, wobei ein einmaliges oder mehrmaliges Umkreisen von a gestattet sein soll, so durchläuft der Punkt (x, y) ein Stück der Kurve f. Wir nennen ein so definiertes Stück einen durch P gehenden **Kurvenzweig** und nennen P den Mittelpunkt des Zweiges. Wir wollen den durch $y = y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ definierten Zweig mit p bezeichnen. Es können durch P noch andere Zweige gehen. Soll ausdrücklich hervorgehoben werden, daß P als auf einem bestimmten Zweige liegend betrachtet werden soll, so sprechen wir nicht vom Punkte P, sondern von der **Stelle** P. Ein

Punkt P von f zerfällt also gewissermaßen in so viel Stellen, wie Zweige durch ihn gehen.

Das Produkt

$$f_1(x, y) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_\lambda)$$

ist eine ganze rationale Funktion vom Grade λ in y. Die Koeffizienten sind symmetrische ganze rationale Funktion von $y_1, y_2, \dots y_\lambda$ und daher gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$. Die Funktion $f_1(x,y)$ wird in der Umgebung von P Null nur für die Punkte des Zweiges p. Wir nennen f_1 die zu p gehörige Funktion. Es kommt bei der Funktion f_1 nicht an auf einen Faktor, der eine Einheit für die Stelle (a, b) ist. Wir nennen daher auch jede Funktion, die sich von f_1 nur um einen solchen Faktor unterscheidet, zu p gehörig. Das Wesentliche für eine solche Funktion ist, daß sie in der Umgebung von (a, b) nur für die Punkte von p Null wird. Es ist also auch nicht notwendig, daß sie eine rationale Funktion von y ist.

§ 3. Gestalt reeller Kurvenzweige.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir uns von der Gestalt des reellen Teiles eines Kurvenzweiges eine Vorstellung machen. Ist t eine Funktion, die an der Stelle p von der ersten Ordnung Null wird, so können wir den Zweig p auch statt durch die Entwicklung (6) durch die Gleichungen

$$x - a = A_0 t^\lambda + A_1 t^{\lambda+1} + \cdots, \qquad y - b = B_0 t^\mu + B_1 t^{\mu+1} + \cdots$$

definieren, wo A_0 und B_0 von Null verschieden sind. Für das Folgende ist es zweckmäßig, diese Entwicklungen etwas anders zu schreiben. Es sei α die kleinere der beiden Zahlen λ, μ, wenn $\lambda \neq \mu$ und $\alpha = \lambda = \mu$, wenn $\lambda = \mu$. Dann können wir schreiben

$$x - a = c_0 t^\alpha + c_1 t^{\alpha+1} + \cdots, \quad y - b = e_0 t^\alpha + e_1 t^{\alpha+1} + \cdots, \tag{7}$$

wo jetzt c_0 und e_0 nicht beide Null sind. Setzen wir diese Entwicklungen in eine ganze rationale Funktion $g(x,y)$ von x und y ein, so wird sie eine gewöhnliche Potenzreihe von t und wir können setzen

$$g(x, y) = t^\gamma E(t),$$

wo $E(t)$ eine Einheit für $t = 0$ ist. Es ist dann nach früheren Festsetzungen g durch $\mathfrak{p}^\gamma$ teilbar. Deuten wir $g = 0$ als Kurve, so wird diese durch P dann und nur dann gehen, wenn $\gamma > 0$, und je größer γ ist, desto stärker werden die Kurve $g = 0$ und der Zweig p sich berühren. Wir wollen sagen, die Kurve $g = 0$ und der Zweig p haben γ Schnittpunkte an der Stelle P. Wir werden weiter unten auf diese Definition zurückkommen und ihre volle Berechtigung nachweisen.

Wir betrachten die geraden Linien, die durch den Punkt p gehen. Die Gleichung einer solchen Geraden ist

$$g(x, y) = A(x - a) + B(y - b) = 0,$$

wo A und B konstant sind. Setzen wir die Entwicklungen (7) in die linke Seite dieser Gleichung ein, so erhalten wir

$$g(x, y) = (A c_0 + B e_0) t^\alpha + (A c_1 + B e_1) t^{\alpha+1} + \cdots.$$

Da c_0 und e_0 nicht beide Null sind, so hat eine beliebige gerade Linie durch P mit p in P α Schnittpunkte. Da im allgemeinen λ und μ und also auch α gleich 1 sind, so ist im allgemeinen die Zahl der Schnittpunkte gleich 1. Es gibt nur eine endliche Zahl von Zweigen der Kurve f, für die $\alpha > 1$. Wollen wir eine Gerade durch P haben, die mehr als α Schnittpunkte mit p in P hat, so müssen wir A und B so bestimmen, daß

$$A c_0 + B e_0 = 0. \tag{8}$$

Hierdurch ist das Verhältnis von A und B eindeutig bestimmt. Es gibt also immer eine und nur eine gerade Linie, die p in P in mehr Punkten schneidet als eine beliebige durch P gehende Gerade. Diese Gerade wird sich dem Zweige p von allen durch P gehenden Geraden am stärksten anschmiegen. Sie ist die **Tangente des Zweiges im Punkte** P. Jeder Kurvenzweig hat also in seinem Mittelpunkte eine ganz bestimmte Tangente. Die Zahl der Schnittpunkte der Tangente mit p in P wird im allgemeinen $\alpha + 1$ sein. Sie ist nur größer, etwa gleich $\alpha + \beta$, wenn gleichzeitig mit (8) auch noch die Gleichungen bestehen

$$A c_1 + B e_1 = 0, \ldots \quad A c_{\beta-1} + B e_{\beta-1} = 0,$$

während $A c_\beta + B e_\beta \neq 0$. Die Gestalt des Zweiges hängt, wie wir jetzt sehen werden, wesentlich von den Zahlen α und β ab.

Wir setzen a und b und die Koeffizienten c und e als reell voraus und ebenso t. Dann sind auch x und y reell. Wir machen durch eine Koordinatentransformation den Punkt P zum Anfangspunkt, die Tangente zur ξ- und die Normale zur η-Achse eines neuen Koordinaten-Systems. Wir haben dann die Entwicklungen

$$\xi = g_0 t^\alpha + g_1 t^{\alpha+1} + \cdots, \qquad \eta = h_0 t^{\alpha+\beta} + h_1 t^{\alpha+\beta+1} + \cdots.$$

Um einen bestimmten Fall zu haben, nehmen wir g_0 und h_0 positiv an. Wir betrachten zunächst die einfachsten Fälle, nämlich folgende vier:

I. $\alpha = 1, \quad \beta = 1$; II. $\alpha = 2, \quad \beta = 1$; III. $\alpha = 1, \quad \beta = 2$;

IV. $\alpha = 2, \beta = 2$.

I. $\alpha = 1, \quad \beta = 1. \qquad \xi = g_0 t + \cdots, \quad \eta = h_0 t^2 + \cdots.$

Für hinlänglich kleine Werte von t können wir uns auf die Anfangsglieder beschränken. η ist dann positiv, während ξ positiv oder negativ ist je nach dem Vorzeichen von t. Der Zweig liegt in der Umgebung von P ganz auf einer Seite der Tangente $\eta = 0$ (Abb. 30).

II. $\alpha = 2, \quad \beta = 1. \qquad \xi = g_0 t^2 + \cdots, \quad \eta = h_0 t^3 + \cdots.$

Für kleine Werte von t ist ξ positiv, η positiv oder negativ je nach dem Vorzeichen von t. Der Zweig liegt auf beiden Seiten der Tangente $\eta = 0$ (Abb. 31). Der Zweig hat in P, wie man sagt, eine Spitze. Fassen wir t als Zeit auf und lassen wir t die Werte eines kleinen den Nullpunkt enthaltenden Intervalles durchlaufen, so durchläuft der Punkt (ξ, η) den Zweig. Die Richtung der Bewegung ändert sich in P um 180°. Der Punkt (ξ, η) kehrt in P um. Der Punkt heißt daher auch **Rückkehrpunkt**. Die Geschwindigkeit des Punktes (ξ, η) muß in P gleich Null sein, da die Bewegung stetig erfolgt und daher (ξ, η) die entgegengesetzte Richtung erst einschlagen kann, wenn seine Geschwindigkeit Null geworden ist. Der Punkt P heißt daher auch **stationärer Punkt**. Die Tangente im Punkte (ξ, η) dreht sich immer in demselben Sinne, wenn (ξ, η) den Zweig durchläuft.

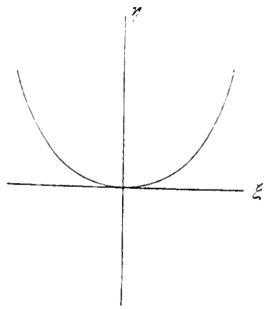


Abb. 30.

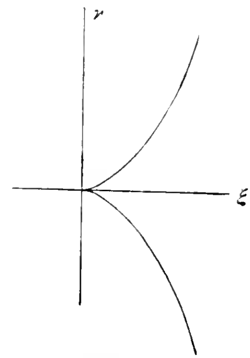


Abb. 31.

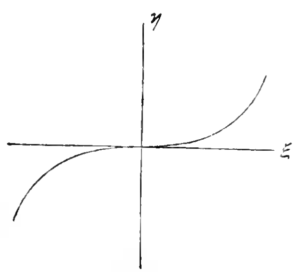


Abb. 32.

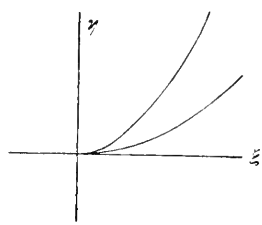


Abb. 33.

III. $\alpha = 1, \quad \beta = 2. \qquad \xi = g_0 t + \cdots, \quad \eta = h_0 t^3 + \cdots.$

Für kleine Werte von t sind ξ und η positiv und negativ, je nachdem t positiv oder negativ ist. Der Zweig liegt auf beiden Seiten der Tangente und auf beiden Seiten der Normale (Abb. 32). Fassen wir wieder t als Zeit auf, so durchläuft der Punkt (ξ, η) bei wachsender Zeit den Zweig ohne in P anzuhalten, aber die Tangente in (ξ, η) ändert beim Durchgange des

Punktes (ξ, η) durch P ihren Drehungssinn. Sie hält daher in P einen Augenblick an. Die Tangente in P heißt daher **stationäre Tangente** oder auch wegen der Änderung des Drehungssinnes **Wendetangente** und P ein **Wendepunkt**.

IV. $\alpha = 2$, $\beta = 2$. $\qquad \xi = g_0 t^2 + g_1 t^3 + \cdots, \quad \eta = h_0 t^4 + h_1 t^5 + \cdots.$

Wir können uns hier nicht auf die Anfangsglieder beschränken. Es würden dann die beiden Stücke des Zweiges, die positiven und negativen Werten von t entsprechen, zusammenfallen. Für kleine Werte von t überwiegen aber die Anfangsglieder, so daß ξ und η beide positiv sind für positive und negative kleine Werte von t. Der Zweig liegt ganz im ersten Quadranten. Die auf die Anfangsglieder folgenden Glieder bewirken ein Abweichen des Zweiges von der durch $\xi = g_0 t^2$, $\eta = h_0 t^4$ für reelles t dargestellten Kurve (einer halben Parabel), und zwar ist das Abweichen verschieden, je nachdem t positiv oder negativ ist (Abb. 33). Man nennt den Punkt P eine **Schnabelspitze**. Lassen wir den Punkt (ξ, η) den Zweig durchlaufen, so ändert er in P seine Bewegungsrichtung um 180°, seine Geschwindigkeit ist also in P Null. Ebenso ist die Drehgeschwindigkeit der Tangente des Punktes (ξ, η) in P Null, da die Tangente dort den Drehungssinn ändert. Der Punkt P ist also stationär und die Tangente in P auch.

Bei beliebigem α und β hängt die Gestalt des Zweiges davon ab, ob α und β grade oder ungrade sind. Es sind so folgende vier Fälle zu unterscheiden.

$$\text{I. } \alpha \equiv 1, \ \beta \equiv 1; \qquad \text{II. } \alpha \equiv 2, \ \beta \equiv 1; \qquad \text{III. } \alpha \equiv 1, \ \beta \equiv 2;$$
$$\text{IV. } \alpha \equiv 2, \ \beta \equiv 2; \quad (mod\ 2).$$

In roher Annäherung ist das Aussehen des Zweiges in jedem dieser vier Fälle so wie in dem eben betrachteten Falle mit derselben Nummer. Es wird dem Leser empfohlen, für verschiedene Werte von α und β die Zweige genau zu zeichnen. Man sieht dadurch am besten, wie die Gestalt von den Zahlen α und β abhängt.

Wenn $\alpha > 1$, so heißt P stationär von der Ordnung $\alpha - 1$, und wenn $\beta > 1$, so heißt die Tangente in P stationär von der Ordnung $\beta - 1$. Wir bilden zwei Divisoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{i}$. In $\mathfrak{r}$ nehmen wir jeden Primteiler in der Potenz auf, die angibt, von welcher Ordnung die zugehörige Stelle stationär ist, und in $\mathfrak{i}$ in der Potenz, die angibt, von welcher Ordnung die Tangente an der zugehörigen Stelle stationär ist. Der zur Stelle P gehörende Primteiler ist also in $\mathfrak{r}$ in der Potenz $\alpha - 1$ und in $\mathfrak{i}$ in der Potenz $\beta - 1$ enthalten. Der Divisor $\mathfrak{r}$ ist identisch mit dem gemeinsamen Divisor von $\mathfrak{z}_x$ und $\mathfrak{z}_y$, in dem ja auch $\mathfrak{p}$ in der Potenz $\alpha - 1$ enthalten ist. Die Ordnungen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{i}$ bezeichnen wir mit r und i. Wenn nur Rückkehrpunkte und

Wendetangenten erster Ordnung vorkommen, so sind r und i die Anzahl dieser Punkte und Tangenten. Im allgemeinen Falle können wir ihnen dieselbe Bedeutung beilegen, wenn wir übereinkommen, jeden Rückkehrpunkt und jede Wendetangente so oft zu zählen, wie ihre Ordnung angibt.

§ 4. Zahl der Schnittpunkte zweier Kurvenzweige.

Wir betrachten außer p noch einen zweiten durch P gehenden Kurvenzweig q. Es braucht q nicht derselben Kurve anzugehören wie p. Die Zweige p und q seien in der Umgebung von P definiert durch die Entwicklungen

$$(9)\begin{cases} y = y_1 = b + b_0(x-a)^{\frac{\mu}{\lambda}} + b_1(x-a)^{\frac{\mu+1}{\lambda}} + \cdots, & (b_0 \neq 0) \\ y = \eta_1 = \beta + \beta_0(x-a)^{\frac{\varrho}{\tau}} + \beta_1(x-a)^{\frac{\varrho+1}{\tau}} + \cdots, & (\beta_0 \neq 0, \quad \beta = b). \end{cases}$$

Sind λ und τ größer als 1, so bezeichnen wir die adjungierten Entwicklungen mit $y_2, y_3, \ldots y_\lambda$ und $\eta_2, \eta_3, \ldots \eta_\tau$. Die zu p und q gehörenden Funktionen sind

$$(10)\qquad \begin{aligned} g(x, y) &= (y - y_1)(y - y_2)\ldots(y - y_\lambda), \\ h(x, y) &= (y - \eta_1)(y - \eta_2)\ldots(y - \eta_\tau). \end{aligned}$$

Diese Funktionen lassen sich darstellen als gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$, $y - b$. Setzen wir in $g(x, y)$ für y die Entwicklung η_1 und entwickeln nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\tau}}$, so mögen wir erhalten

$$(11)\qquad g(x, \eta_1) = (\eta_1 - y_1)(\eta_1 - y_2)\ldots(\eta_1 - y_\lambda) = (x-a)^{\frac{\varrho}{\tau}} E_1,$$

wo E_1 eine Einheit für $x = a$ sei. Wir wollen dann sagen, die Zweige p und q haben ϱ Schnittpunkte miteinander in P gemeinsam. Wir bezeichnen die Zahl dieser Schnittpunkte mit (p, q) oder (q, p). Um die Berechtigung dieser Definition nachzuweisen, haben wir zu zeigen, daß sie symmetrisch von p und q abhängt. Lassen wir x den Punkt a in positivem Sinne umkreisen, so gehen aus der Gleichung (11) folgende Gleichungen hervor:

$$g(x, \eta_k) = (\eta_k - y_1)(\eta_k - y_2)\ldots(\eta_k - y_\lambda) = (x-a)^{\frac{\varrho}{\tau}} E_k, \quad (k = 1, 2, \ldots \tau),$$

wo die E_k sämtlich Einheiten für $x = a$ sind. Durch Multiplikation dieser Gleichungen folgt

$$\prod_{k=1}^{\tau} g(x, \eta_k) = \prod_{k,l} (\eta_k - y_l) = (x-a)^\varrho E,$$

wo $E = E_1 E_2 \ldots E_\tau$ eine Einheit für $x = a$ ist. Wir können daher (p, q)

$= (q, p)$ definieren als den Exponenten der Potenz von $x - a$, durch die das Produkt $\prod (\eta_k - y_\lambda)$ teilbar ist. Es ist aber, wie aus

$$\prod_{k,l} (\eta_k - y_l) = \prod_k g(x, \eta_k) = (-1)^{\lambda\tau} \prod_l h(x, y_l)$$

folgt, $\prod\limits_{k,l} (\eta_k - y_l)$ im wesentlichen symmetrisch abhängig von p und q. Hieraus folgt auch, daß $h(x, y_l)$ genau durch $(x - a)^{\frac{\varrho}{\lambda}}$ teilbar sein muß.

Es ist für das Folgende zweckmäßig, auch noch das Symbol (p, p) in folgender Weise zu definieren. Es sei

$$(12) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y_1) \quad (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_\lambda) = (x - a)^{\frac{\omega}{\lambda}} E_1,$$

wo E_1 eine Einheit für $x = a$ sei. Es ist für $k = 2, 3, \ldots \lambda$ nach (9)

$$(13) \qquad y_1 - y_k = b_0 (x - a)^{\frac{\mu}{\lambda}} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \mu k}\right) + \cdots,$$

so daß $y_1 - y_k$ mindestens teilbar ist durch $(x - a)^{\frac{\mu}{\lambda}}$. Wenn aber μk durch λ teilbar ist, also z. B. dann, wenn $\mu = \lambda$ ist, ist $y_1 - y_k$ sogar mindestens teilbar durch $(x - a)^{\frac{\mu + 1}{\lambda}}$. Es ist daher

$$\omega \geqq \mu(\lambda - 1), \text{ wenn } \lambda \neq \mu; \quad \omega \geqq (\mu + 1)(\lambda - 1) = \mu^2 - 1, \text{ wenn } \lambda = \mu.$$

Es ist jedenfalls $\omega \geqq \lambda - 1$. Wir definieren (p, p) durch die Gleichung $\omega = (p, p) + \lambda - 1$, so daß

$$(p, p) \geqq (\mu - 1)(\lambda - 1), \text{ wenn } \lambda \neq \mu; \quad (p, p) \geqq \mu(\mu - 1), \text{ wenn } \lambda = \mu.$$

Wenn $\mu = 1$, so ist in der Gleichung (13) kein μk durch λ teilbar, also genau $\omega = \lambda - 1$, und $(p, p) = 0$. Ist ferner $\lambda = 1$, so ist die Funktion (12) identisch gleich 1 und daher ω und damit (p, p) gleich Null. Es ist also (p, p) nur dann von Null verschieden, und dann immer positiv, wenn λ und μ beide größer als 1 sind.

Wir wollen die Definition für (p, p) noch umformen. Dabei werden wir auch sehen, daß die Definition gleichmäßig von x und y abhängt. Es ist für $y = y_1$ identisch $g(x, y) = 0$, also $\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$ oder mit Benutzung von (6) und (12)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = -(x - a)^{\frac{\omega}{\lambda}} E_1 \left[\frac{\mu}{\lambda} b_0 (x - a)^{\frac{\mu - \lambda}{\lambda}} + \cdots\right].$$

Setzen wir also
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y_1) = (x - a)^{\frac{\varepsilon}{\lambda}} E',$$

wo E' eine Einheit für $x = a$ ist, so ist $\varepsilon = \omega + \mu - \lambda = (p, p) + \mu - 1$, während $\omega = (p, p) + \lambda - 1$ ist. Wir ersehen hieraus, daß die Zahl (p, p) symmetrisch von x und y abhängt.

Die Zahl (p, p) ist, wie wir jetzt zeigen, immer grade. Aus der Gleichung (12) gehen noch andere hervor, dadurch daß wir x den Punkt a umkreisen lassen. Wir erhalten so die Gleichungen

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y_k) \quad (y_k - y_1) \ldots (y_k - y_{k-1})(y_k - y_{k+1}) \ldots (y_k - y_\lambda)$$
$$= (x - a)^{\frac{\omega}{\lambda}} E_k,$$

wo E_k wieder eine Einheit für $x = a$ ist. Durch Multiplikation folgt

$$\prod_{k, l}^{\lambda}{}_{1} (y_k - y_l) = (x - a)^{\omega} E = (x - a)^{(p, p) + \lambda - 1} E,$$

wo $E = E_1 E_2 \ldots E_k$ eine Einheit für $x = a$ und außerdem eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$ ist. Durch Ausziehen der Quadratwurzel folgt

$$(14) \qquad \sqrt{\prod_{k,l} (y_k - y_l)} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \ldots y_1^{\lambda-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 \ldots y_2^{\lambda-1} \\ - & - & - - - - - \\ 1 & y_\lambda & y_\lambda^2 \ldots y_\lambda^{\lambda-1} \end{vmatrix} = (x - a)^{\frac{1}{2}[(p, p) + \lambda - 1]} E',$$

wo $E' = \sqrt{E}$ eine Einheit für $x = a$ ist und nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitet. Lassen wir x den Punkt a einmal in positivem Sinne umlaufen, so geht y_1 in y_2, y_2 in $y_3, \ldots y_\lambda$ in y_1 über. Es ändert daher in der Gleichung (14) die Determinante hierbei ihr Zeichen oder sie bleibt ungeändert, je nachdem λ grade oder ungrade ist. Dasselbe muß von $(x - a)^{\frac{1}{2}[(p, p) + \lambda - 1]}$ gelten, da E' als gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$ ungeändert bleibt. Also folgt

$$(p, p) + \lambda - 1 \equiv \begin{matrix} 0, \\ 1, \end{matrix} \; (mod\ 2) \qquad \begin{matrix} \text{wenn } \lambda \equiv 1 \\ \text{wenn } \lambda \equiv 0 \end{matrix} \; (mod\ 2)$$

oder es ist immer, wie behauptet, $(p, p) \equiv 0\ (mod\ 2)$.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

Es sei p ein Kurvenzweig einer algebraischen Kurve. Der zugehörige Primteiler sei $\mathfrak{p}$. Er sei ein Verzweigungsprimteiler der Ordnung $\lambda - 1$ in bezug auf x und der Ordnung $\mu - 1$ in bezug auf y. Es sei ferner $g(x, y)$ die zu p gehörige Funktion und es seien $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ genau teilbar durch $\mathfrak{p}^{\omega_1}$ und $\mathfrak{p}^{\omega_2}$. Dann sind die Zahlen $\omega_1 - (\mu - 1)$ und $\omega_2 - (\lambda - 1)$ einander gleich und sollen mit (p, p) bezeichnet werden. Für (p, p) gelten folgende Sätze.

Es ist $(p, p) = 0$, wenn auch nur eine der Zahlen λ, μ gleich 1 ist, wenn also $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{r}$ enthalten ist. Im übrigen ist $(p, p) > 0$ und genauer

$$(15) \qquad \begin{aligned} (p, p) &\geqq (\lambda - 1)(\mu - 1), \quad \text{wenn} \quad \lambda \neq \mu, \\ &\geqq \lambda(\lambda - 1) = \mu(\mu - 1), \quad \text{wenn} \quad \lambda = \mu. \end{aligned}$$

Schließlich ist noch (p, p) immer grade.

§ 5. Der Divisor der mehrfachen Punkte.

Wir gehen dazu über, den Divisor $\mathfrak{d}$ der mehrfachen Punkte genauer zu untersuchen. Er ist definiert durch die Gleichungen (5), von denen jede zu seiner Definition ausreicht. Wir benutzen die Gleichung

$$(16) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{l}^2\,\mathfrak{m}^{m-2}}.$$

Es sei $P \equiv (a, b)$ ein Punkt der Kurve f. Durch ihn mögen die Zweige $p_1, p_2, \ldots p_r$ gehen. Wir nennen den Punkt dann r-zweigig. Die zu p_k gehörende Funktion sei $f_k(x, y)$. Jede der Funktionen f_k besteht aus Faktoren der Form $y - y_\alpha$, wo y_α eine der Wurzeln der Gleichung $f = 0$ ist. Es ist daher f durch das Produkt der f_k teilbar:

$$(17) \qquad f = f_1 f_2 \ldots f_r\, E,$$

wo E eine ganze rationale Funktion von y ist, deren Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ sind. Da aber f in der Umgebung von P nur längs der Zweige p_k Null wird, so muß E eine Einheit für $P \equiv (a, b)$ sein. Es sei p_1 definiert durch die Entwicklung

$$y = y_1 \equiv b + b_0 (x - a)^{\frac{\mu}{\lambda}} + b_1 (x - a)^{\frac{\mu + 1}{\lambda}} + \cdots$$

und es sei $\mathfrak{p}_1$ der zugehörige Primteiler. Er ist ein Verzweigungsprimteiler der Ordnung $\lambda - 1$ in bezug auf x, also genau in der Potenz $\lambda - 1$ in $\mathfrak{z}_x$ enthalten. Es ist ferner

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y_1)\, f_2(x, y_1) \ldots f_r(x, y_1)\, E(x, y_1).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist genau teilbar durch die

$$[\lambda - 1 + (p_1, p_1) + (p_1, p_2) + \cdots + (p_1, p_r)]\text{-te}$$

Potenz von $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$. Durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}_1$ ist also $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ teilbar. Da $\mathfrak{z}_x$ genau durch $\mathfrak{p}_1^{\lambda - 1}$ teilbar ist, so ist wegen (5) $\mathfrak{d}$ genau teilbar durch die

$$[(p_1, p_1) + (p_1, p_2) + \cdots + (p_1, p_r)]\text{-te}$$

Potenz von $\mathfrak{p}_1$. Ähnliches gilt für die zu den anderen Zweigen gehörenden Primteiler. Also:

Gehen durch einen Punkt P einer algebraischen Kurve r Zweige $p_1, p_2, \ldots p_r$ und sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$ die zu diesen Zweigen gehörenden Primteiler, und bezeichnen wir den Beitrag, den P zu dem Divisor $\mathfrak{d}$ der mehrfachen Punkte liefert mit

$$\mathfrak{p}_1^{\delta_1}\,\mathfrak{p}_2^{\delta_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{\delta_r},$$

so ist

(18) $$\delta_k = (p_k, p_1) + (p_k, p_2) + \cdots + (p_k, p_r),$$

und der Beitrag, den P zu der Ordnung $2d$ von $\mathfrak{d}$ liefert, ist

(19) $$\sum_{k=1}^{r} \delta_k = \sum_{k,l}^{k \gtreqless l} (p_k, p_l) = \sum_{k} (p_k, p_k) + 2 \sum_{k,l}^{k > l} (p_k, p_l),$$

also immer eine grade Zahl.

Das letzte folgt daraus, daß (p_k, p_k) immer grade ist.

Wir zeigen noch, daß $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{r}^2$ teilbar ist. Ist wieder α die kleinere der Zahlen λ, μ, wenn $\lambda \neq \mu$ und $\alpha = \lambda = \mu$, wenn $\lambda = \mu$, so ist $\mathfrak{p}_1$, wie wir wissen, in $\mathfrak{r}$ genau in der Potenz $\alpha - 1$ enthalten. Es ist aber $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{d}$ enthalten in der Potenz δ_1 und es ist, da die $(p_k, p_l) \geqq 0$, und nach (15. 18)

$$\begin{aligned} \delta_1 \geqq (p_1, p_1) &\geqq (\lambda - 1)(\mu - 1), \quad \text{wenn} \quad \lambda \neq \mu \\ &\geqq \lambda(\lambda - 1), \quad \text{wenn} \quad \lambda = \mu. \end{aligned}$$

Wenn $\lambda \neq \mu$ und $\alpha > 1$, so ist die kleinere der Zahlen λ, μ gleich α und die größere mindestens gleich 3. Also $(\lambda - 1)(\mu - 1) \geqq 2(\alpha - 1)$. Dies ist aber für $\alpha = 1$ auch richtig, da λ und μ mindestens gleich 1 sind. Wenn $\lambda = \mu = \alpha$, so ist für $\alpha > 1$ $\lambda(\lambda - 1) = \alpha(\alpha - 1) \geqq 2(\alpha - 1)$ und dies ist auch richtig für $\alpha = 1$. Also ist immer

$$\delta_1 \geqq 2(\alpha - 1).$$

Während also $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{r}$ genau in der Potenz $\alpha - 1$ enthalten ist, ist $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{d}$ mindestens in der Potenz $2(\alpha - 1)$ enthalten. Da das aber für jeden der Primteiler $\mathfrak{p}_k$ gilt, und auch für alle anderen Primteiler, die in $\mathfrak{r}$ enthalten sind, so folgt:

Der Divisor $\mathfrak{d}$ der mehrfachen Punkte ist durch das Quadrat des Divisors $\mathfrak{r}$ der Rückkehrpunkte teilbar.

Wir setzen

(20) $$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_0\,\mathfrak{r}^2,$$

und nennen $\mathfrak{d}_0$ den eigentlichen Divisor der mehrfachen Punkte. Die Ordnungen von $\mathfrak{d}_0$ bezeichnen wir mit $2d_0$, so daß

(21) $$d = d_0 + r.$$

§ 6. Beispiele.

1. $y^2 = x^2(x + a)$. Die Kurve hat im Punkte $x = y = 0$ einen Doppelpunkt mit reellen verschiedenen Tangenten für $a > 0$, mit imaginärem für $a < 0$ (isolierter Punkt), und einen Doppelpunkt mit zusammenfallenden Tangenten für $a = 0$.

2. $y^2 = \dfrac{(x^2 - a^2)^2}{1 - x^2}$, $a^2 < 1$. Die Kurve hat für $a \neq 0$ in den Punkten $x = a$, $y = 0$ und $x = -a$, $y = 0$ Doppelpunkte mit getrennten Tangenten. Die Geraden $x = 1$ und $x = -1$ sind Asymptoten. Die Doppelpunkte fallen zusammen für $a = 0$ und gehen über in einen Selbstberührungspunkt.

3. $y^2 = \dfrac{x^2(x^2 - a^2)^2}{1 - x^2}$, $a^2 < 1$. Die Kurve hat die Geraden $x = 1$ und $x = -1$ zu Asymptoten und liegt ganz zwischen diesen. Die Punkte $x = 0$, $y = 0$; $x = a$, $y = 0$; $x = -a$, $x = 0$ sind Doppelpunkte mit getrennten Tangenten. Für $a = 0$ fallen sie zusammen in einen Selbstberührungspunkt zweiter Ordnung. Es wird dem Leser empfohlen, die Kurven der Beispiele 1 bis 3 für verschiedene Werte von a zu zeichnen.

4. Es habe $f = 0$ im Nullpunkt einen ν-fachen Punkt. Es sei also, nach homogenen Funktionen von x, y geordnet,

$$f = u_\nu + u_{\nu+1} + \cdots.$$

Durch Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt können wir erreichen, daß in u_ν das Glied mit y^ν vorkommt, wenn es nicht von vornherein vorhanden sein sollte. Für kleine Werte von x, y ist für die Punkte der Kurve annähernd

$$u_\nu(x, y) = x^\nu u_\nu\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Gleichung ν-ten Grades

$$u_\nu(1, z) = 0$$

lauter verschiedene Wurzeln hat. Sie seien $m_1, m_2, \ldots m_\nu$. Dann ist

$$u_\nu(x, y) = \text{konst} \cdot (y - m_1 x)(y - m_2 x) \ldots (y - m_\nu x).$$

Es ist also in der Umgebung des Nullpunktes die Kurve $f = 0$ annähernd gleich den ν durch ihn gehenden Geraden $y = m_k x$. Wir schließen daraus, daß durch den Nullpunkt ν Zweige gehen, $p_1, p_2, \ldots p_\nu$, deren Tangenten die Geraden $y = m_k x$ sind. Die Entwicklung, die p_k definiert, ist bei passender Wahl der Bezeichnung

$$y = y_k = m_k x + \cdots.$$

Es wird $(p_k, p_k) = 0$ und $(p_k, p_l) = 1$, wenn $k \neq l$. Ist $\mathfrak{p}_k$ der zu p_k gehörende Primteiler, so ist der Beitrag, den P zu $\mathfrak{d}$ liefert,

$$\mathfrak{p}_1^{\nu-1}\,\mathfrak{p}_2^{\nu-1} \ldots \mathfrak{p}_\nu^{\nu-1}$$

und der Beitrag, den P zu $2d$ liefert, $\nu(\nu-1)$. Man nennt P einen ν-fachen Punkt mit getrennten Tangenten. Er zählt, da er zu d den Beitrag $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ liefert, für $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Doppelpunkte. Er kann auch entstehen dadurch, daß $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Doppelpunkte zusammenfallen. Am einfachsten sieht man das, wenn man die zerfallende Kurve betrachtet, die aus ν geraden Linien besteht. Liegen die Geraden allgemein, so haben sie $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Schnittpunkte und jeder von ihnen ist ein Doppelpunkt der Kurve. Fallen die Schnittpunkte alle zusammen, gehen also die Geraden alle durch einen Punkt, bleiben aber voneinander verschieden, so hat die Kurve einen ν-fachen Punkt mit getrennten Tangenten.

5. $f \equiv y^3 - xy^2 - x^3y + 1 + x^4 = 0$. Welchen Beitrag liefert der Punkt $P \equiv (x = \infty, y = \infty)$ zu $\mathfrak{d}$ und zu $2d$? Wir haben zu setzen $x = x'^{-1}$, $y = y'^{-1}$. Wir erhalten dann statt $f = 0$ die Gleichung

$$f' \equiv x'^4 - x'^3y' - x'y'^2 + (1 + x'^4)\,y'^3 = 0$$

und wir haben bei dieser Gleichung den Punkt $x' = 0$, $y' = 0$ zu betrachten. Wir finden nach den Methoden des Kap. II die Entwicklungen

$$y' = y_1 = x'^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x'^6 + \cdots, \qquad y' = \eta_1 \equiv x' - x'^5 + \cdots.$$

Der Punkt P ist also zweizweigig. Die zu den beiden Zweigen p_1 und p_2 gehörenden Funktionen sind

$$f_1(x',y') \equiv (y' - y_1)(y' - y_2) = \left(y' - x'^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x'^6 - \cdots\right)\left(y' + x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x'^6 - \cdots\right)$$
$$= y'^2 - (x'^6 + \cdots)\,y' - (x'^3 + \cdots)$$

$$f_2(x',y') \equiv y' - \eta_1 = y' - x' + x'^5 - \cdots.$$

Es wird

$$(p_1, p_1) = 2, \quad (p_1, p_2) = 2, \quad (p_2, p_2) = 0.$$

Sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ die zu den Zweigen p_1, p_2 gehörenden Primteiler, so liefert P zu $\mathfrak{d}$ den Beitrag $\mathfrak{p}_1^4\mathfrak{p}_2^2$, also zu d den Beitrag 3.

§ 7. Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven.

Zunächst definieren wir die Zahl der Schnittpunkte, die zwei algebraische Kurven $G = 0$ und $H = 0$ in einem Punkt $P \equiv (a, b)$ haben. Durch P mögen die Zweige $p_1, p_2, \ldots p_r$ von G und die Zweige $q_1, q_2, \ldots q_s$ von H gehen. Die zu p_k, q_k gehörenden Funktionen seien $g_k(x, y)$ und $h_k(x, y)$. Es ist dann in der Umgebung von P

$$G = g_1 g_2 \ldots g_r E_1, \quad H = h_1 h_2 \ldots h_s E_2,$$

wo E_1 und E_2 Einheiten für die Stelle $(x = 0, y = 0)$ sind. Wir setzen die Zahl der Schnittpunkte von $G = 0$ und $H = 0$ in P gleich der Summe der Zahl der Schnittpunkte, die die Zweige p_k mit den Zweigen q_k haben, also gleich

$$\sum_{k,\, l} (p_k, q_l).$$

Diese Zahl ist, da $(p_k, q_l) = (q_l, p_k)$ ist, symmetrisch von G und H abhängig. Als Beispiel nehmen wir an, G habe in P einen ν-fachen Punkt mit getrennten Tangenten und H einen μ-fachen, auch mit getrennten Tangenten. Außerdem sollen die Tangenten von G in P verschieden sein von den Tangenten von H in P. G hat dann ν Zweige $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ in P und H hat μ Zweige $q_1, q_2, \ldots q_\mu$. Jeder Zweig von G schneidet jeden Zweig von H in einem Punkt. Also ist $(p_k, q_l) = 1$. Die Zahl der Schnittpunkte von G und H in P ist also $\nu\mu$.

Es seien $G(x, y)$ und $H(x, y)$ vom Grade (l, m) und (l', m'). In dem durch $G = 0$ definierten algebraischen Körper seien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ die Nenner von x und y. Dann können wir H in der Form schreiben

$$H = \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{l}^{l'}\, \mathfrak{m}^{m'}}, \tag{22}$$

wo $\mathfrak{h}$ ein ganzer Divisor ist. Wir betrachten H in der Umgebung von P. Die zu den Zweigen $p_1, p_2, \ldots p_r$ gehörenden Primteiler des Körpers $G = 0$ seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$. Die p_k definierende Entwicklung $y = y_1$ schreite nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ fort. Dann ist nach der Definition von (p_1, q_l)

$$h_l(x, y_1) = (x - a)^{\frac{(p_1, q_l)}{\lambda}} E,$$

wo E eine Einheit für $x = a$ ist. Es wird also

$$H(x, y_1) = (x - a)^{\frac{1}{\lambda}[(p_1, q_1) + (p_1, q_2) + \cdots + (p_1, q_s)]} E',$$

wo E' eine Einheit für $x = a$ ist. Das heißt aber, es enthält $\mathfrak{h}$ den Primteiler $\mathfrak{p}_1$ genau in der Potenz

$$(p_1, q_1) + (p_1, q_2) + \cdots + (p_1, q_s).$$

Von den anderen Primteilern $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots \mathfrak{p}_r$ gilt Entsprechendes. Der Punkt P liefert also zu $\mathfrak{h}$ den Beitrag $\mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}$, wenn

$$\alpha_k = (p_k, q_1) + (p_k, q_2) + \cdots + (p_k, q_s).$$

Zu der Ordnung von $\mathfrak{h}$ liefert also P den Beitrag $\sum \alpha_k = \sum (p_k, q_i)$, also einen Beitrag, der gleich der Zahl der Schnittpunkte von G und H in P ist. Daher ist die Ordnung von $\mathfrak{h}$ gleich der Gesamtzahl der Schnittpunkte von G und H. Es ist aber zufolge (22)

$$\mathfrak{h} \sim \mathfrak{l}^{l'} \mathfrak{m}^{m'}.$$

Da die Ordnung von $\mathfrak{l}$ gleich m und die von $\mathfrak{m}$ gleich l, so ist die Ordnung von $\mathfrak{h}$ gleich $lm' + l'm$. Also:

Zwei algebraische Kurven der Ordnung (l, m) und (l', m') haben $lm' + l'm$ Schnittpunkte.

Beispiele.

1. $G \equiv 2x - 3y = 0, \quad H \equiv x + y = 0. \quad (l, m) = (1, 1), \quad (l', m') = (1, 1).$

Die Zahl der Schnittpunkte der Geraden $2x - 3y = 0$, $x + y = 0$ ist also $lm' + l'm = 2$. Wir können das leicht bestätigen. Die Geraden haben einen Schnittpunkt im Punkt $x = y = 0$ und einen im Punkt $x = y = \infty$. Setzen wir nämlich $x = x'^{-1}$, $y = y'^{-1}$, so erhalten wir die Gleichungen

$$2y' - 3x' = 0, \quad y' + x' = 0$$

und die hierdurch dargestellten Kurven schneiden sich im Punkte $x' = y' = 0$; also schneiden sich nach unserer Definition $G = 0$ und $H = 0$ im Punkte $x = y = \infty$.

2. $G \equiv x - 3 = 0, \quad H \equiv x + 4 = 0. \quad (l, m) = (l', m') = (1, 0).$

Die Zahl der Schnittpunkte ist $lm' + l'm = 0$.

3. $G \equiv x - 4 = 0, \quad H \equiv y + 3 = 0. \quad (l, m) = (1, 0), \quad (l', m') = (0, 1).$

Zahl der Schnittpunkte ist 1.

Die Beispiele zeigen, daß die hier besprochene Art, die Schnittpunkte zweier Kurven zu bestimmen, mit der in der analytischen Geometrie üblichen nicht übereinstimmt. Es liegt das daran, daß wir die unendlich fernen Punkte anders definiert haben. Wir haben nämlich als unendlich ferne Punkte

1. die Punkte, wo $x = \infty$, y beliebig,
2. die Punkte, wo $y = \infty$, x beliebig.

Wir haben also in der xy-Ebene zwei unendlich ferne Gerade, die erste parallel zur y-Achse, die zweite zur x-Achse. Sie schneiden sich in dem

Punkte $x = y = \infty$. Es gibt also nur einen Punkt, wo x und y gleichzeitig unendlich werden.

In der analytischen Geometrie dagegen pflegt man festzusetzen, daß alle unendlich fernen Punkte der Ebene auf einer Geraden, der sogenannten unendlich fernen Geraden liegen. Wie sich die Verhältnisse bei dieser Definition der unendlich fernen Punkte gestalten, darüber sehe man das nächste Kapitel.

§ 8. Eine Formel für das Geschlecht des Körpers.

Ist $\mathfrak{k}$ ein Divisor der kanonischen Klasse, so ist nach Kap. VI, § 6

$$\mathfrak{k} \sim \frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{l}^2} \sim \frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{m}^2}\,.$$

Aus den Gleichungen (5) folgt aber, daß auch

(23) $$\mathfrak{k} \sim \mathfrak{l}^{l-2}\,\mathfrak{m}^{m-2}\,\mathfrak{d}^{-1}\,.$$

Da die Ordnung eines jeden Divisors der kanonischen Klasse gleich $2p-2$ ist, so folgt

$$2p - 2 = (l-2)\,m + (m-2)\,l - 2d$$

oder der Satz:

Ist die Ordnung des Divisors der mehrfachen Punkte einer Kurve der Ordnung (l, m) gleich $2d$, so ist ihr Geschlecht

(24) $$p = (l-1)\,(m-1) - d\,.$$

Elftes Kapitel.

Ebene algebraische Kurven in homogenen Koordinaten*).

§ 1. Definition der Kurve.

Es seien

(1) $$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3$$

drei äquivalente teilerfremde ganze Divisoren. Ihre Ordnung sei n. Ferner sei $\mathfrak{a}_0$ ein von ihnen linear abhängiger ganzer Divisor, also

(2) $$\mathfrak{a}_0 = \lambda_1\,\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\,\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\,\mathfrak{a}_3\,,$$

wo die λ_i konstant sind. Wir setzen

(3) $$x_1 = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_0}\,,\qquad x_2 = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_0}\,,\qquad x_3 = \frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{a}_0}\,.$$

*) H.-L. 26. Vorlesung S. 439 f.

Fassen wir die x_i, die Funktionen des Körpers (xy) sind, als homogene Koordinaten eines Punktes (x) einer Ebene auf, so bildet die Gesamtheit dieser Punkte (x) eine algebraische Kurve F, deren Gleichung sei

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{4}$$

wo $F(x)$ eine homogene ganze rationale Funktion der x_i ist. Der Grad von $F(x)$ ist, wie wir sehen werden, gleich n und heißt die Ordnung der Kurve F.

Setzen wir

$$\frac{x_1}{x_3} = \xi, \qquad \frac{x_2}{x_3} = \eta, \tag{5}$$

so besteht zwischen ξ, η die Gleichung

$$F(\xi, \eta, 1) = 0 \tag{6}$$

und der hierdurch definierte algebraische Körper $(\xi\eta)$ soll mit dem Körper (xy) identisch sein. Wäre er das nicht, so würden wir anstatt vom Körper (xy) vom Körper $(\xi\eta)$ ausgehen.

Ist umgekehrt durch die Gleichung (4) eine algebraische ebene Kurve F in homogenen Punktkoordinaten definiert, so wird gleichzeitig unter Benutzung von (5) ein algebraischer Körper $(\xi\eta)$ definiert. Zerlegen wir in diesem ξ, η in Primteiler, so erhalten wir

$$\xi = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_3}, \qquad \eta = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_3},$$

wo $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ als ganze Divisoren ohne gemeinsamen Teiler angenommen werden können. Wir erhalten also wegen (5)

$$x_1 : x_2 : x_3 = \mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a}_3,$$

und kommen auf unsere erste Definition der Kurve F zurück.

Es sei $\mathfrak{p}$ eine Stelle des Körpers (xy) und t eine Funktion, die dort von erster Ordnung Null wird. Ist für die Umgebung von $\mathfrak{p}$

$$x_i = t^{-\lambda}\,\mathfrak{P}_i(t),$$

wo die $\mathfrak{P}_i$ gewöhnliche Potenzreihen von t sein sollen, die nicht alle für $t = 0$ verschwinden, so setzen wir*)

$$\mathfrak{a}_0 = t^{\lambda}, \quad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{P}_1(t), \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{P}_2(t), \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{P}_3(t).$$

Es sollen also an jeder Stelle die $\mathfrak{a}_i$ gewöhnliche Potenzreihen einer Größe t des Körpers sein, die an der Stelle von erster Ordnung Null wird. Diese

*) Hierdurch werden die Betrachtungen gegenüber denen bei H.-L. 26. Vorlesung S. 439 f. formal etwas vereinfacht.

Potenzreihen $\mathfrak{a}_i(t)$ sollen nur bestimmt sein, bis auf einen Faktor, der eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist, die für $t = 0$ nicht verschwindet. Diese Unbestimmtheit müssen wir deshalb zulassen, weil die Größe t selbst diese Unbestimmtheit enthält.

Wir können dann an jeder Stelle $\mathfrak{p}$ geradezu setzen

$$x_1 = \mathfrak{a}_1(t)\,, \quad x_2 = \mathfrak{a}_2(t)\,, \quad x_3 = \mathfrak{a}_3(t)\,, \tag{7}$$

da es bei den homogenen Koordinaten x_i auf einen gemeinsamen Faktor nicht ankommt. Wir können auch die Differentiale $d\mathfrak{a}_i$, $d^2\mathfrak{a}_i$ usw. der Divisoren $\mathfrak{a}_i$ bilden. Ist

$$d\mathfrak{a}_i = t^{a_i} e(t)\, dt\,,$$

wo e eine Einheit für $t = 0$ ist, so sagen wir $d\mathfrak{a}_i$ ist durch $\mathfrak{p}^{a_i}$ teilbar. Wir können also für jeden Primteiler bestimmen, wie oft er in $d\mathfrak{a}_i$ enthalten ist und können daher von dem Divisor $d\mathfrak{a}_i$ sprechen. Aber diese Divisoren $d\mathfrak{a}_i$ und entsprechend $d^2\mathfrak{a}_i$, $d^3\mathfrak{a}_i$ haben keinen bestimmten Sinn, weil $\mathfrak{a}_i$ für jede Stelle nur bis auf eine Einheit als Faktor bestimmt ist. Ist z. B. an der Stelle $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{a}_1 = 1 + t\,,$$

so ist $d\mathfrak{a}_1 = dt$ und $d\mathfrak{a}_1$ enthält $\mathfrak{p}$ nicht. Wählen wir aber, was ja erlaubt ist,

$$\mathfrak{a}_1 = (1 + t)(1 - t) = 1 - t^2\,,$$

so wird $d\mathfrak{a}_1 = -2t\,dt$ und $d\mathfrak{a}_1$ enthält $\mathfrak{p}$ in der ersten Potenz. Wählen wir

$$\mathfrak{a}_1 = (1 + t)(1 + t)^{-1} = 1\,,$$

so wird $d\mathfrak{a}_1 = 0 \cdot dt$ und es enthält $d\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{p}$ sogar in beliebig hoher Potenz.

Daraus sehen wir, daß wir nur solche Differentialausdrücke benutzen dürfen, die auch nur eine Einheit als Faktor aufnehmen, wenn wir die $\mathfrak{a}_i$ mit einer Einheit multiplizieren. Derartige Differentialausdrücke kommen aber im folgenden auch nur vor und es können auch nur solche eine geometrische Bedeutung haben.

§ 2. Die Reziprokalkurve.

Es sei wieder $\mathfrak{p}$ eine Stelle des Körpers $(x\,y)$ und t eine dort von erster Ordnung Null werdende Funktion. In der Umgebung von $\mathfrak{p}$ entspricht dann jedem Werte von t eine Stelle der Kurve F und umgekehrt, so daß wir kurz von der Stelle t sprechen können. Die Tangente von F an der Stelle t geht durch die Punkte mit den Koordinaten $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_i + d\mathfrak{a}_i$. Ihre Gleichung ist also

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ d\mathfrak{a}_1 & d\mathfrak{a}_2 & d\mathfrak{a}_3 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{8}$$

Die Divisoren $\mathfrak{a}_\alpha d\mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{a}_\beta d\mathfrak{a}_\alpha$ können einen gemeinsamen Faktor haben, den wir mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen. Wir setzen

(9) $$\mathfrak{a}_\alpha d\mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{a}_\beta d\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{r}\mathfrak{a}'_\gamma,$$

wo $\alpha\beta\gamma$ eine grade Permutation von 123 sein soll. Die Divisoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}'_i$ sind eindeutig bestimmt. Ersetzen wir nämlich die $\mathfrak{a}_i$ durch $e\mathfrak{a}_i$, wo e eine Einheit ist, so geht $\mathfrak{r}\mathfrak{a}'_\gamma$ über in

$$e\mathfrak{a}_\alpha(ed\mathfrak{a}_\beta + \mathfrak{a}_\beta de) - e\mathfrak{a}_\beta(ed\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{a}_\alpha de) = e^2\mathfrak{r}\mathfrak{a}'_\gamma,$$

wird also nur mit der Einheit e^2 multipliziert.

Mit Benutzung von (9) geht die Gleichung (8) der Tangente über in

(10) $$y_1\mathfrak{a}'_1 + y_2\mathfrak{a}'_2 + y_3\mathfrak{a}'_3 = 0.$$

Es sind daher die $\mathfrak{a}'_i$ proportional zu den Linienkoordinaten der Tangente. Bezeichnen wir diese mit x'_1, x'_2, x'_3, so können wir setzen

(11) $$x'_1 = \mathfrak{a}'_1, \quad x'_2 = \mathfrak{a}'_2, \quad x'_3 = \mathfrak{a}'_3.$$

Die Divisoren $\mathfrak{a}'_i$ sind zueinander äquivalent. Setzen wir nämlich

(12) $$\xi = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_3}, \qquad \eta = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_3},$$

so wird

$$\mathfrak{a}_3^2 d\xi = \mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{r}\mathfrak{a}'_2, \quad \mathfrak{a}_3^2 d\eta = \mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{a}_3 = -\mathfrak{r}\mathfrak{a}'_1,$$

also

$$\frac{\mathfrak{a}'_1}{\mathfrak{a}'_2} = -\frac{d\eta}{d\xi},$$

so daß $\mathfrak{a}'_1/\mathfrak{a}'_2$ eine Funktion des Körpers ist, da dasselbe von ξ und η gilt. Daher ist $\mathfrak{a}'_1 \sim \mathfrak{a}'_2$ und ebenso folgt $\mathfrak{a}'_1 \sim \mathfrak{a}'_3$. Setzen wir also

(13) $$\xi' = \frac{\mathfrak{a}'_1}{\mathfrak{a}'_3}, \qquad \eta' = \frac{\mathfrak{a}'_2}{\mathfrak{a}'_3},$$

so besteht zwischen ξ' und η' eine algebraische Gleichung, also zwischen x'_1, x'_2, x'_3 eine homogene Gleichung

(14) $$F'(x') = F'(x'_1, x'_2, x'_3) = 0.$$

Dies ist die Gleichung von F in Ebenenkoordinaten. Deutet man die x'_i als Punktkoordinaten, so nennt man die durch (14) definierte Kurve die **Reziprokalkurve** von F.

Die Divisoren $\mathfrak{a}'_i$ sind linear unabhängig. Bestände zwischen ihnen eine Gleichung

$$c_1\mathfrak{a}'_1 + c_2\mathfrak{a}'_2 + c_3\mathfrak{a}'_3 = 0,$$

so würde das aussagen, daß alle Tangenten von F durch den Punkt (c_1, c_2, c_3) gehen. Wenn wir von den trivialen Fällen absehen, wo F eine Gerade oder ein Punkt ist, ist das nicht möglich. Wir können zur Definition der Kurve F auch von ihren Tangenten statt von ihren Punkten ausgehen, also von den Gleichungen (11) und (14) statt (3) und (4). Dann werden die Determinanten $\mathfrak{a}'_\alpha d\mathfrak{a}'_\beta - \mathfrak{a}'_\beta d\mathfrak{a}'_\alpha$ proportional zu den Punktkoordinaten $\mathfrak{a}_i$ von F. Bezeichnen wir also ihren größten gemeinsamen Teiler mit $\mathfrak{r}'$, so haben wir dual zu (9)

$$\mathfrak{a}'_\alpha d\mathfrak{a}'_\beta - \mathfrak{a}'_\beta d\mathfrak{a}'_\alpha = \mathfrak{r}'\mathfrak{a}_\gamma\,. \tag{15}$$

Wir bestimmen noch die Tangenten der Kurve, die durch drei aufeinander folgende Stellen gehen. Sollen die drei aufeinander folgenden Stellen mit den Koordinaten $(\mathfrak{a}_i)$, $(\mathfrak{a}_i + d\mathfrak{a}_i)$, $(\mathfrak{a}_i + d\mathfrak{a}_i + \frac{1}{2} d^2\mathfrak{a}_i)$ auf einer Geraden liegen, so muß die aus diesen Koordinaten gebildete Determinante dritter Ordnung Null sein. Setzen wir also

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ d\mathfrak{a}_1 & d\mathfrak{a}_2 & d\mathfrak{a}_3 \\ d^2\mathfrak{a}_1 & d^2\mathfrak{a}_2 & d^2\mathfrak{a}_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{v}\,, \tag{16}$$

so liefern zu dem Divisor $\mathfrak{v}$ die und nur die Stellen einen Beitrag, deren Tangenten durch drei aufeinander folgende Punkte gehen.

Dual ergibt sich: Setzen wir

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}'_1 & \mathfrak{a}'_2 & \mathfrak{a}'_3 \\ d\mathfrak{a}'_1 & d\mathfrak{a}'_2 & d\mathfrak{a}'_3 \\ d^2\mathfrak{a}'_1 & d^2\mathfrak{a}'_2 & d^2\mathfrak{a}'_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{v}'\,, \tag{17}$$

so liefern zu dem Divisor $\mathfrak{v}'$ die und nur die Stellen einen Beitrag, die Berührungspunkte zu drei aufeinander folgenden Tangenten sind.

Die Divisoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ sind eindeutig bestimmt, da z. B. $\mathfrak{v}$ den Faktor e^3 annimmt, wenn wir die $\mathfrak{a}_i$ durch $\mathfrak{a}_i e$ ersetzen.

Sind c'_1, c'_2, c'_3 Konstante, so wird die Funktion

$$c'_1\mathfrak{a}_1 + c'_2\mathfrak{a}_2 + c'_3\mathfrak{a}_3 \tag{18}$$

an den Stellen von F Null, wo die Gerade (c'_i) mit der Gleichung

$$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + c'_3 y_3 = 0$$

die Kurve F trifft. Der (18) entsprechende Divisor ist aber von der Ordnung n, enthält daher n Primteiler und wird an den Stellen Null, zu denen diese Primteiler gehören. Eine Gerade schneidet also die Kurve F in n

Punkten, wenn n die Ordnung der Divisoren $\mathfrak{a}_i$ ist. Daraus folgt aber auch, daß die Funktion $F(x)$ vom n-ten Grade in den x_i ist, da sich aus den Gleichungen

$$F(x) = 0\,,\ c_1' x_1 + c_2' x_2 + c_3' x_3 = 0$$

eine Gleichung n-ten Grades zur Bestimmung der Verhältnisse der x_i ergeben muß.

Ebenso folgt, daß die Gleichung $F'(x') = 0$ der Kurve F in Linienkoordinaten vom Grade n' ist, wenn n' die Ordnung der Divisoren $\mathfrak{a}_i'$ ist. Und es ist n' dual zu der Bedeutung von n gleich der Zahl der Tangenten von F, die durch einen Punkt gehen. Es ist also n' die Klasse von F.

§ 3. Die Divisoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$.

Wenn wir statt der x_i durch eine Koordinatentransformation neue homogene Koordinaten ξ_i einführen, so werden die Determinanten

$$x_\alpha d x_\beta - x_\beta d x_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha d \mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{a}_\beta d \mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{r}\mathfrak{a}_i'$$

auch nur linear homogen transformiert. Ihr größter gemeinsamer Teiler bleibt also unverändert. Dasselbe ergibt sich für $\mathfrak{r}'$. Um also die Bedeutung von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ zu erkennen, können wir von einer passenden Koordinatentransformation Gebrauch machen.

Es sei $\mathfrak{p}$ eine Stelle von F. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß an der Stelle $\mathfrak{p}$ $x_1 = x_2 = 0$ ist. Es ist dann $x_3 = \mathfrak{a}_3$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ eine Einheit. Wir dürfen also die $\mathfrak{a}_i$ mit $\mathfrak{a}_3$ dividieren, d. h. wir können $\mathfrak{a}_3 = 1$ annehmen. Ist wieder t eine Größe des Körpers, die an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung Null wird, so werden $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beide durch t teilbar. Sie mögen beide den Faktor t^α haben, aber nicht beide eine höhere Potenz von t enthalten. Wir können dann annehmen $\mathfrak{a}_2 = t^\alpha e(t)$, wo e eine Einheit für $t = 0$ ist. Wir setzen

$$t^\alpha e(t) = \tau^\alpha\,,\ t\{e(t)\}^{\frac{1}{\alpha}} = \tau\,,$$

woraus t als gewöhnliche Potenzreihe von τ folgt, die mit der ersten Potenz von τ beginnt. Es ist dann $\mathfrak{a}_2 = \tau^\alpha$, und es sei

$$\mathfrak{a}_3 = c_1 \tau^\alpha + c_2 \tau^{\alpha+1} + \cdots .$$

Indem wir ein passendes Vielfaches von $\mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{a}_3$ subtrahieren, also durch Koordinatentransformation, erreichen wir, daß die Entwicklung von $\mathfrak{a}_3$ mindestens mit der $(\alpha + 1)$-ten Potenz von τ beginnt. Wir haben also für die Umgebung von $\mathfrak{p}$

$$\text{(19)} \qquad \mathfrak{a}_1 = 1\,,\quad \mathfrak{a}_2 = \tau^\alpha\,,\quad \mathfrak{a}_3 = a_0 \tau^{\alpha+\beta} + a_1 \tau^{\alpha+\beta+1} + \cdots,$$
$$(\alpha > 0\,,\quad \beta > 0)\,.$$

Hierdurch wird ein durch $\mathfrak{p}$ gehender Kurvenzweig p von F definiert. Ist

$$c_2\,y_2 + c_3\,y_3 = 0$$

irgendeine durch $\mathfrak{p}$ gehende Gerade, so wird

$$c_2\,\mathfrak{a}_2 + c_3\,\mathfrak{a}_3 = \tau^{\alpha}\,(c_2 + c_3\,a_0\,\tau^{\beta} + \cdots)$$

durch $\mathfrak{p}^{\alpha}$ teilbar. Die Gerade hat also α zusammenfallende Schnittpunkte mit p in $\mathfrak{p}$. Es ist also nach der Definition in Kap. X, § 3 $\mathfrak{p}$ ein Rückkehrpunkt der Ordnung $\alpha - 1$. Eine und nur eine Gerade hat mehr als α Schnittpunkte in $\mathfrak{p}$ mit p, nämlich die Gerade $y_3 = 0$. Sie hat $\alpha + \beta$, so daß $\mathfrak{p}$ ein Wendepunkt der Ordnung $\beta - 1$ ist. Außerdem ist die Gerade $y_3 = 0$ nach früherer Definition (vgl. Kap. X, § 3) und nach § 2 Tangente des Zweiges p in $\mathfrak{p}$.

Es wird wegen (19)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_2 d\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_2 &= \{\beta\,a_0\,\tau^{2\alpha+\beta-1} + \cdots\}\,d\tau = \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1',\\
\mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{a}_3 &= -\{(\alpha + \beta)\,a_0\,\tau^{\alpha+\beta-1} + \cdots\}\,d\tau = \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_2',\\
\mathfrak{a}_1 d\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{a}_1 &= \alpha\,\tau^{\alpha-1}\,d\tau = \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_3'.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{r}$ genau durch $\mathfrak{p}^{\alpha-1}$ teilbar ist. Es ist also $\mathfrak{r}$ der Divisor der Rückkehrpunkte.

Ferner ergibt sich

$$\mathfrak{a}_1' = \frac{\beta}{\alpha}\,a_0\,\tau^{\alpha+\beta} + \cdots, \quad \mathfrak{a}_2' = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,a_0\,\tau^{\beta} + \cdots, \quad \mathfrak{a}_3' = 1$$

und daraus wegen (15), daß der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{r}'$ der Divisoren $\mathfrak{a}_\alpha'\,d\mathfrak{a}_\beta' - \mathfrak{a}_\beta'\,d\mathfrak{a}_\alpha'$ genau durch $\mathfrak{p}^{\beta-1}$ teilbar ist. Es ist daher $\mathfrak{r}'$ nach Kap. X, § 3 der Divisor der Wendepunkte. Wir haben also:

Die sich dual entsprechenden Divisoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ sind die Divisoren der stationären Punkte und stationären Tangenten.

Die Ordnungen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ bezeichnen wir mit r und r'. Im einfachsten Falle ist r die Zahl der Rückkehrpunkte und r' die Zahl der Wendetangenten von F.

Aus (16) folgt wegen (19)

$$\mathfrak{v} = \begin{vmatrix} 1, & \tau^{\alpha}, & a_0\,\tau^{\alpha+\beta} + \cdots \\ 0, & \alpha\,\tau^{\alpha-1}, & (\alpha+\beta)\,a_0\,\tau^{\alpha+\beta-1} + \cdots \\ 0, & \alpha\,(\alpha-1)^{\alpha-2}, & (\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta-1)\,a_0\,\tau^{\alpha+\beta-2} + \cdots \end{vmatrix}\,d\tau^3$$

$$= \{\alpha\,\beta\,(\alpha+\beta)\,a_0\,\tau^{2(\alpha-1)+\beta-1} + \cdots\}\,d\tau^3,$$

so daß $\mathfrak{v}$ den Primteiler $\mathfrak{p}$ genau in derselben Potenz enthält wie $\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{r}'$. Da das für alle Stellen gilt, so folgt, daß $\mathfrak{v} = \mathfrak{r}^2\,\mathfrak{r}'$. Nehmen wir das dual entsprechende Ergebnis hinzu, so haben wir

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{r}^2\,\mathfrak{r}', \qquad \mathfrak{v}' = \mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'^2. \tag{20}$$

§ 4. Der Divisor der mehrfachen Punkte und der der mehrfachen Tangenten.

Aus der in t identischen Gleichung

$$F(\mathfrak{a}) \equiv F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 0 \tag{21}$$

folgt wegen des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen und durch Differentiation, wenn wir Ableitungen nach $\mathfrak{a}_i$ durch den Index i bezeichnen,

$$\begin{aligned} F_1 \mathfrak{a}_1 + F_2 \mathfrak{a}_2 + F_3 \mathfrak{a}_3 &= n F = 0 \\ F_1 \, d\mathfrak{a}_1 + F_2 \, d\mathfrak{a}_2 + F_3 \, d\mathfrak{a}_3 &= 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Es sind daher die F_i proportional zu den Determinanten $\mathfrak{a}_\beta \, d\mathfrak{a}_\gamma - \mathfrak{a}_\gamma \, d\mathfrak{a}_\beta$, so daß wir haben

$$F_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r} \, \bar{\mathfrak{d}} \, \mathfrak{a}'_\alpha\,, \tag{23}$$

wo der Divisor $\bar{\mathfrak{d}}$ durch diese Gleichungen definiert ist.

Ebenso findet man dual

$$F'_\alpha(\mathfrak{a}') = \mathfrak{r}' \, \bar{\mathfrak{d}}' \, \mathfrak{a}_\alpha\,. \tag{24}$$

Um die Bedeutung von $\bar{\mathfrak{d}}$ und $\bar{\mathfrak{d}}'$ kennenzulernen, wollen wir unhomogene Koordinaten einführen. Wir wählen diesen Weg, um zugleich den Zusammenhang von $\bar{\mathfrak{d}}$ mit dem in (5) Kap. X, § 1 definierten Divisor $\mathfrak{d}$ kennenzulernen. Wir setzen

$$x = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_3} = \frac{\mathfrak{l}_0}{\mathfrak{l}}\,, \qquad y = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_3} = \frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}}\,. \tag{25}$$

Dabei sollen $\mathfrak{l}_0$ und $\mathfrak{l}$ ganze Divisoren ohne gemeinsamen Teiler sein und ebenso $\mathfrak{m}_0$ und $\mathfrak{m}$. Setzen wir

$$F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right) = F(x, y, 1) = f(x, y)\,, \tag{26}$$

so ist $f = 0$ die neue Gleichung der Kurve F oder f.

Aus (26) folgt

$$F(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_3^n f(x, y) \tag{27}$$

und daraus

$$F_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_3^n \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{a}_1} = \mathfrak{a}_3^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x}\,. \tag{28}$$

Wegen (23) und (5) Kap. X, § 1 ergibt sich

$$\mathfrak{r} \, \bar{\mathfrak{d}} \, \mathfrak{a}'_1 = \mathfrak{a}_3^{n-1} \frac{\mathfrak{d} \, \mathfrak{z}_y}{\mathfrak{l}^{l-2} \, \mathfrak{m}^m}\,. \tag{29}$$

Aus (9) und (25) folgt aber

$$\mathfrak{r} \, \mathfrak{a}'_1 = \mathfrak{a}_2 \, d\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_3 \, d\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_3^2 \, dy = \mathfrak{a}_3^2 \frac{\mathfrak{z}_y}{\mathfrak{m}^2}\,, \tag{30}$$

so daß wir aus (29) schließen

$$\bar{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}_3^{n-3} \, \mathfrak{d}}{\mathfrak{l}^{l-2} \, \mathfrak{m}^{m-2}}\,. \tag{31}$$

Wir ersehen hieraus, daß $\bar{\mathfrak{d}}$ der Divisor der mehrfachen Punkte von F ist. Daß $\bar{\mathfrak{d}}$ nicht vollkommen mit $\mathfrak{d}$ übereinstimmt, kommt daher, daß bei der früheren und der jetzigen Betrachtung die unendlich fernen Punkte verschieden definiert sind. (Vgl. Beispiel 1 und 2 in § 10.)

Wir nehmen noch zwei besondere Fälle.

1. Es seien $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ teilerfremd und ebenso $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$. Dann ist nach (25) $\mathfrak{a}_3 : \mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ und $n = l \cdot m$, also

$$\bar{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}_3^{n-1}}. \tag{32}$$

2. Es seien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ teilerfremd. Dann wird $\mathfrak{a}_3$ als Hauptnenner der Nenner $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ gleich $\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}$, also $n = l + m$ und

$$\bar{\mathfrak{d}} = \mathfrak{l}^{m-1}\,\mathfrak{m}^{l-1}\,\mathfrak{d}. \tag{33}$$

Dual ergibt sich, daß $\bar{\mathfrak{d}}'$ der Divisor der mehrfachen Tangenten ist. Die halben Ordnungen $\bar{d}$ und $\bar{d}'$ von $\bar{\mathfrak{d}}$ und $\bar{\mathfrak{d}}'$ sind im einfachsten Falle die Zahl der Doppelpunkte und die Zahl der Doppeltangenten von F.

Geradeso, wie in Kap. X, § 5 folgt, daß $\bar{\mathfrak{d}}$ durch $\mathfrak{r}^2$ und $\bar{\mathfrak{d}}'$ durch $\mathfrak{r}'^2$ teilbar ist. Wir setzen

$$\bar{\mathfrak{d}} = \mathfrak{r}^2\,\bar{\mathfrak{d}}_0, \quad \bar{\mathfrak{d}}' = \mathfrak{r}'^2\,\bar{\mathfrak{d}}_0'. \tag{34}$$

Bezeichnen wir die Ordnungen von $\bar{\mathfrak{d}}_0$ und $\bar{\mathfrak{d}}_0'$ mit $2\,\bar{d}_0$ und $2\,\bar{d}_0'$, so ist

$$\bar{d} = \bar{d}_0 + r, \quad \bar{d}' = \bar{d}_0' + r'. \tag{35}$$

§ 5. Die Hessesche Kurve.

Wir setzen

$$H(x) = |F_{kl}(x)|, \qquad H'(x') = |F_{kl}'(x')|, \tag{36}$$

wo die Indizes die Ableitungen nach x_k, x_l und x_k', x_l' bedeuten sollen. Die Kurve $H(x) = 0$ heißt die Hessesche Kurve von F und $H'(x') = 0$ ist die zu $H(x) = 0$ duale Kurve.

Um zu bestimmen, wo $H(x) = 0$ die Kurve F trifft, haben wir in $H(x)$ einzusetzen $x_i = \mathfrak{a}_i(t)$ und zu sehen, für welche Werte von t $H(\mathfrak{a})$ verschwindet. Mit andern Worten, wir haben den Divisor $H(\mathfrak{a})$ zu bestimmen.

Wir setzen, unter ξ_1, ξ_2, ξ_3 unbestimmte Größen verstehend,

$$F_{\alpha 1}\,\xi_1 + F_{\alpha 2}\,\xi_2 + F_{\alpha 3}\,\xi_3 = \xi_\alpha'. \tag{37}$$

Aus (23) folgt wegen der Eulerschen Satzes über homogene Funktionen und durch Differentiation

$$\begin{aligned} F_{\alpha 1}\,\mathfrak{a}_1 + F_{\alpha 2}\,\mathfrak{a}_2 + F_{\alpha 3}\,\mathfrak{a}_3 &= (n-1)\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}_\alpha', \\ F_{\alpha 1}\,d\mathfrak{a}_1 + F_{\alpha 2}\,d\mathfrak{a}_2 + F_{\alpha 3}\,d\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{r}\,\mathfrak{d}\,d\mathfrak{a}_\alpha' + \mathfrak{a}_\alpha' d(\mathfrak{r}\mathfrak{d}). \end{aligned} \tag{38}$$

Ferner ergibt sich aus (9)

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ d\mathfrak{a}_1 & d\mathfrak{a}_2 & d\mathfrak{a}_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{r} \sum \xi_i \mathfrak{a}'_i .$$

Hieraus und aus (36), (37), (38) folgt nach dem Multiplikationssatz von Determinanten

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} H(\mathfrak{a}) \sum \xi_i \mathfrak{a}'_i &= |\xi'_\alpha,\ (n-1)\,\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{a}'_\alpha,\ \mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{d}}\,d\mathfrak{a}'_\alpha + \mathfrak{a}'_\alpha\, d(\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{d}})| \\ &= (n-1)\,\mathfrak{r}^2\,\bar{\mathfrak{d}}^2\, |\xi'_\alpha,\ \mathfrak{a}'_\alpha,\ d\mathfrak{a}'_\alpha| = (n-1)\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{r}'\,\bar{\mathfrak{d}}^2 \sum \xi'_i \mathfrak{a}_i . \end{aligned} \tag{39}$$

Aus (37) ergibt sich aber in Verbindung mit (38) wegen $F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}$

$$\sum \xi'_i \mathfrak{a}_i = (n-1)\,\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{d}} \sum \xi_i \mathfrak{a}'_i .$$

Hiermit folgt aus (39)

$$H(\mathfrak{a}) = (n-1)^2\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{r}'\,\bar{\mathfrak{d}}^3 . \tag{40}$$

Dual hierzu folgt

$$H'(\mathfrak{a}') = (n'-1)^2\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'^2\,\bar{\mathfrak{d}}'^3 . \tag{41}$$

Aus (40) und (41) folgt:

Die Hessesche Kurve von F geht nur durch die Rückkehrpunkte, die Wendepunkte und die mehrfachen Punkte von F.

Die zur Hesseschen Kurve duale Kurve hat die Tangenten in den Rückkehrpunkten von F, die Wende- und mehrfachen Tangenten von F zu Tangenten und sonst keine Tangenten mit F gemeinsam.

Weiter wollen wir hierauf nicht eingehen.

§ 6. Plückersche Formeln.

Ist ξ eine Größe des Körpers $(x\,y)$, so ist der $d\xi$ entsprechende Divisor ein Divisor der Differentialklasse und daher von der Ordnung $2p-2$, wenn p das Geschlecht des Körpers ist. Ist η irgendeine andere Funktion des Körpers, so ist auch $\frac{d\xi}{d\eta}$ und also auch $\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right) = \frac{d^2\xi}{d\eta^2}$ eine Funktion des Körpers, der ihr entsprechende Divisor also von der Ordnung Null. Daher hat $d^2\xi$ dieselbe Ordnung wie $(d\eta)^2$, also $4p-4$.

Nun ist

$$\mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_2\,d\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^2\, d\left(\frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1}\right),$$

wo $\mathfrak{a}_2/\mathfrak{a}_1$ eine Funktion des Körpers ist. Daher ist die Ordnung der Divisoren $\mathfrak{a}_\alpha\,d\mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{a}_\beta\,d\mathfrak{a}_\alpha$ gleich $2n+2p-2$ und die der Divisoren $\mathfrak{a}'_\alpha\,d\mathfrak{a}'_\beta - \mathfrak{a}'_\beta\,d\mathfrak{a}'_\alpha$ gleich $2n'+2p-2$.

Ferner ist

$$\mathfrak{v} = |\mathfrak{a}_\alpha,\ d\mathfrak{a}_\alpha,\ d^2\mathfrak{a}_\alpha| = \mathfrak{a}_0^3 \left|\frac{\mathfrak{a}_\alpha}{\mathfrak{a}_0},\ d\left(\frac{\mathfrak{a}_\alpha}{\mathfrak{a}_0}\right),\ d^2\left(\frac{\mathfrak{a}_\alpha}{\mathfrak{a}_0}\right)\right|,$$

also, da die $\mathfrak{a}_\alpha/\mathfrak{a}_0$ Funktionen des Körpers sind, von der Ordnung $3n + 6p - 6$. Entsprechend ist $\mathfrak{v}'$ von der Ordnung $3n' + 6p - 6$.

Vergleichen wir jetzt in den Gleichungen (9), (15), (20), (23), (24) die Ordnungen der links und rechts stehenden Divisoren, so erhalten wir folgende Gleichungen, die die Plückerschen genannt werden:

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} 2p-2 &= r+n'-2n = r'+n-2n', \\ 6p-6 &= 2r+r'-3n = 2r'+r-3n', \\ n(n-1) &= r+2\bar d+n' = 3r+2\bar d_0+n', \\ n'(n'-1) &= r'+2\bar d'+n = 3r'+2\bar d_0'+n'. \end{aligned}\right.$$

Von den beiden ersten Gleichungspaaren sind nur drei Gleichungen voneinander unabhängig. Aus (42) folgen noch die Gleichungen

$$(43)\qquad p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \bar d = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - \bar d'.$$

§ 7. Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven.

Es sei durch
$$G(x) = G(x_1, x_2, x_3) = 0$$
eine zweite algebraische Kurve definiert. Sie sei von der m-ten Ordnung. In der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{p}$ wird $G(\mathfrak{a})$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t, wenn wieder t eine in $\mathfrak{p}$ von erster Ordnung verschwindende Funktion ist. Es sei
$$G(\mathfrak{a}) = t^\lambda e(t),$$
wo e eine Einheit für $t = 0$ sein soll. Es ist dann der Divisor $G(\mathfrak{a})$, d. h. der Zähler der Funktion $G(x)$ durch $\mathfrak{p}^\lambda$ teilbar. Wie in Kap. X, § 7 sagen wir, die Kurven F und G haben λ gemeinsame Schnittpunkte in $\mathfrak{p}$. Daß diese Definition symmetrisch von F und G abhängt, ist geradeso wie a. a. O. zu zeigen. Daraus folgt dann, daß die Gesamtzahl der Schnittpunkte gleich der Ordnung des Divisors $G(\mathfrak{a})$ ist. Da $G(x)$ vom Grade m und die $\mathfrak{a}_i$ von der Ordnung n, so ist $G(\mathfrak{a})$ von der Ordnung $m\,n$. Also haben wir den Bezoutschen Satz:

Zwei algebraische Kurven der Ordnungen m und n haben $m\,n$ Schnittpunkte.

§ 8. Unendlich ferne Punkte.

Wir wollen zu nicht homogenen Koordinaten übergehen und setzen

$$(44)\qquad x = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_3}, \quad y = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_3},$$

$$(45)\qquad F(x, y, 1) = g(x, y),$$

so daß

$$(46)\qquad g(x, y) = 0$$

die die Kurve F oder g definierende Gleichung ist. Es ist g ein Polynom n-ten Grades und g eine Kurve n-ter Ordnung. Wenn $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so ist x von der n-ten Ordnung und die Gleichung $g = 0$ ist nach Kap. IV, § 2 in y vom n-ten Grade, d. h. es kommt dann in $g(x, y)$ das Glied mit y^n vor. Wir können immer erreichen, daß das der Fall ist, und zwar durch einfache Drehung des x, y Koordinatensystems. Da einer solchen Transformation auch nur eine Koordinatentransformation der ursprünglichen homogenen Koordinaten entspricht, so bleibt dabei der Divisor $\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{d}}$ als größter gemeinsamer Teiler der $F_k(\mathfrak{a})$ ungeändert. Da aber $\mathfrak{r}$ nach § 3 sich nicht ändert, so bleibt auch $\bar{\mathfrak{d}}$ ungeändert.

Die Art, die Kurve g zu definieren, unterscheidet sich von der früheren Definition der Kurve f in Kap. X, § 1 durch eine andere Definition der unendlich fernen Stellen. Hier gelten als unendlich fern die Stellen, die einen Beitrag zu dem Hauptnenner $\mathfrak{a}_3$ von x und y liefern, also die Punkte der Geraden $y_3 = 0$ bei Verwendung der homogenen Koordinaten. Um also g in der Umgebung eines unendlich fernen Punktes zu untersuchen, haben wir hier folgendermaßen zu verfahren. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß der Punkt $y_1 = y_3 = 0$ nicht auf der Kurve liegt, was ja durch eine Koordinatentransformation immer zu erreichen ist.

Ist dann P ein auf der Geraden $y_3 = 0$ liegender Punkt von F, so hat in P y_2/y_1 einen endlichen Wert a. Wir führen dann statt y_2 durch die Transformation

$$\bar{y}_2 = y_2 - a\, y_1$$

eine neue Koordinate ein. Es ist dann P die Ecke $\bar{y}_2 = 0$, $y_3 = 0$ des neuen Koordinatendreiecks. Um die Gestalt von F oder g in der Umgebung dieses Punktes zu bestimmen, setzen wir dann

$$\frac{\bar{y}_2}{y_1} = \xi, \qquad \frac{y_3}{y_1} = \eta$$

und erhalten eine Gleichung zwischen ξ und η, die in der Umgebung von $\xi = \eta = 0$ zu untersuchen ist. Gehen wir zu nicht homogenen Koordinaten über, so haben wir folgendes:

Um die Kurve g in der Umgebung eines ihrer unendlich fernen Punkte zu untersuchen, setze man zunächst

$$x = \frac{y_1}{y_3}, \qquad y = \frac{y_2}{y_3},$$

wodurch $g = 0$ übergehen möge in $F(y) = 0$, und bestimme die Werte, die sich aus $F(y) = 0$, $y_3 = 0$ für

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{y}{x}$$

ergeben. Durch Koordinatentransformation kann man erreichen, daß diese sämtlich endlich sind. Ist a einer der Werte, so setze man

$$x = \frac{1}{\eta}, \quad y = \frac{a + \xi}{\eta} \tag{47}$$

und untersuche die aus $g = 0$ hervorgehende Gleichung zwischen ξ und η in der Umgebung von $\xi = \eta = 0$.

Will man im Falle, wo sich für $\frac{y}{x}$ aus $F(y) = 0$, $y_3 = 0$ der Wert ∞ ergibt, die Koordinatentransformation vermeiden, so benutzt man an Stelle von $\frac{y}{x}$ umgekehrt $\frac{x}{y}$, was dann den Wert 0 annimmt. Man hat dann entsprechend (47) unter Vertauschen von x und y zu setzen (da jetzt $a = 0$)

$$x = \frac{\xi}{\eta}, \quad y = \frac{1}{\eta}. \tag{48}$$

Es ist klar, daß das Verhalten einer Kurve f oder g im Unendlichen ganz verschieden ist, je nach der Definition der unendlich fernen Punkte. Man vergleiche die Beispiele in § 10.

§ 9. Der Noethersche Satz. Adjungierte Funktionen.

Wir nennen jetzt eine Funktion des Körpers ganz, wenn sie nur unendlich wird in den unendlich fernen Punkten von g, wenn sie also in der Form dargestellt werden kann

$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}_3^{r}},$$

wo $\mathfrak{r}$ ein ganzer Divisor ist. Diese Definition hängt also ab von der Wahl des Divisors $\mathfrak{a}_3$.

Unter den ganzen Funktionen sind alle Funktionen enthalten, die sich als ganze rationale Funktionen von x, y darstellen lassen. Aber es gilt keineswegs das Umgekehrte, wie schon folgendes einfache Beispiel zeigt. Es sei

$$g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$$

die g definierende Gleichung. Da $y = x^{\frac{2}{3}}$, so haben wir sowohl bei $x = 0$ wie bei $x = \infty$ einen Verzweigungspunkt zweiter Ordnung. Die zugehörigen Primteiler seien $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}$. Dann wird

$$x = \frac{\mathfrak{p}_0^3}{\mathfrak{p}^3}, \quad y = \frac{\mathfrak{p}_0^2}{\mathfrak{p}^2} = \frac{\mathfrak{p}_0^2\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}^3},$$

also

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{p}_0^3, \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p}_0^2\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{p}^3.$$

Es wird
$$\frac{x}{y} = \frac{\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}^2}{\mathfrak{p}^3} = \frac{\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}^2}{\mathfrak{a}_3},$$
so daß nach unserer Definition x/y ganz ist. Es läßt sich aber x/y nicht als ganze rationale Funktion von x, y darstellen, auch nicht unter Benutzung der Gleichung $g = 0$.

Ein einfaches Kriterium dafür, wann eine ganze Funktion sich als ganze rationale Funktion von x, y darstellen läßt, gibt es nicht. Wohl aber gibt es eine hinreichende Bedingung, die besonders wichtig ist. Es gilt nämlich der Satz:

Ist $\bar{\mathfrak{d}}$ der Divisor der mehrfachen Punkte einer Kurve g und ist $\mathfrak{a}_3$ der Hauptnenner von x und y in dem durch $g = 0$ definierten algebraischen Körper, so läßt sich jede Funktion der Form

(49) $$R = \frac{\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{a}_3^{\nu}},$$

wo $\mathfrak{r}$ ein ganzer Divisor ist, als ganze rationale Funktion ν-ten Grades von x, y darstellen.

Eine ganze Funktion läßt sich also dann sicher als ganze rationale Funktion von x, y darstellen, wenn ihr Zähler durch $\bar{\mathfrak{d}}$ teilbar ist.

Ehe wir zum Beweise schreiten, sind einige Vorbetrachtungen nötig.

Aus (44), (45) folgt

(50) $$\mathfrak{a}_3^n\, g(x, y) = F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = F(\mathfrak{a})$$

und daraus durch Differentiation nach $\mathfrak{a}_2$ und wegen (23)

(51) $$\mathfrak{a}_3^{n-1}\frac{\partial g}{\partial y} = F_2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{a}_2'.$$

Es war aber

(52) $$\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_2' = \mathfrak{a}_3\,d\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_3^2\,d\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_3} = \mathfrak{a}_3^2\,dx.$$

Der dx entsprechende Divisor ist nach Kap. VI, § 6 $\mathfrak{z}_x \mathfrak{l}^{-2}$, wenn $\mathfrak{z}_x$ der Verzweigungsdivisor in bezug auf x ist und $\mathfrak{l}$ der Nenner von x. Wir wollen annehmen, daß in $g(x, y)$ das Glied mit y^n vorkommt, daß also $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ keinen gemeinsamen Teiler haben. Dann ist $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_3$ und der dx entsprechende Divisor $\mathfrak{z}_x \mathfrak{a}_3^{-2}$, so daß nach (52) $\mathfrak{r}\mathfrak{a}_2' = \mathfrak{z}_x$. Aus (51) folgt also

(53) $$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{a}_3^{n-1}}.$$

Die Voraussetzung, daß y^n in $g(x, y)$ vorkommen soll, ändert an dem zu beweisenden Satze nichts, da sie durch Koordinatentransformation zu erreichen ist, und da durch eine solche $\bar{\mathfrak{d}}$ nicht geändert wird und eine ganze rationale Funktion wieder in eine solche Funktion desselben Grades übergeht.

Der Beweis unseres Satzes stützt sich auf folgenden Hilfssatz:

Hat die Funktion φ des Körpers die Form

$$\varphi = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}_x \mathfrak{a}_3^\mu}, \tag{54}$$

wo $\mathfrak{q}$ ein ganzer Divisor ist, und sind $y_1, y_2, \ldots y_n$ die konjugierten Funktionen von y, so ist die Spur von φ, nämlich

$$S(\varphi) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2) + \cdots + \varphi(x, y_n) \tag{55}$$

eine ganze rationale Funktion von x höchstens vom Grade μ.

Zunächst ist $S(\varphi)$ als symmetrische Funktion der y_i rational in x. Dann kann $S(\varphi)$ wegen (54) unendlich werden:

erstens für unendliches x, und zwar höchstens von μ-ter Ordnung;

zweitens für solche Werte von x, wo ein Verzweigungspunkt liegt. Ist $x = a$ ein derartiger Wert, so kann dort φ und also auch $S(\varphi)$ höchstens unendlich werden wie eine echt gebrochene negative Potenz von $x - a$. Aber $S(\varphi)$ kann als rationale Funktion von x nur unendlich werden wie eine ganze negative Potenz von $x - a$.

Daher wird $S(\varphi)$ nur für unendliches x unendlich und höchstens von der μ-ten Ordnung, ist also, wie behauptet, eine ganze rationale Funktion von x höchstens vom Grade μ.

Es habe jetzt R die Form (49). Zunächst können wir R in der Gestalt schreiben

$$R = r_0 + r_1 y + \cdots + r_{n-1} y^{n-1}, \tag{56}$$

wo die r_i rationale Funktionen von x sind. Wir haben zu zeigen, daß es ganze Funktionen sind und daß r_h höchstens vom Grade $\nu - h$ ist.

Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel ist, wenn wieder $y_1, y_2, \ldots y_n$ die konjugierten Werte von y sind,

$$R(x,y) = g(x,y)\left\{\frac{R(x, y_1)}{(y - y_1)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y_1)} + \cdots + \frac{R(x, y_n)}{(y - y_n)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y_n)}\right\}.$$

Setzen wir also

$$r(u) = r_0 + r_1 u + \cdots + r_{n-1} u^{n-1} \tag{57}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{g(x, u)}{u - y} \frac{R(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}, \tag{58}$$

so wird

$$r(u) = S(\varphi). \tag{59}$$

Als Funktion des Körpers $(x\,y)$ wird, da $g(x,y)$ identisch Null ist,

$$\frac{g(x,u)}{u-y} = \frac{g(x,u) - g(x,y)}{u-y}$$

oder, wenn wir setzen

$$g = g_0 + g_1 y + \cdots + g_n y^n,$$

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{g(x,u)}{u-y} &= g_1 + g_2(y+u) + g_3(y^2+yu+u^2) + \cdots \\ &\qquad + g_n(y^{n-1} + y^{n-2}u + \cdots + u^{n-1}) \\ &= (g_1 + g_2 y + \cdots + g_n y^{n-1}) + (g_2 + g_3 y + \cdots \\ &\qquad + g_n y^{n-2})\,u + \cdots \\ &= h_0 + h_1 u + \cdots + h_{n-1} u^{n-1}, \end{aligned}\right.$$

wo h_i eine ganze rationale Funktion von x, y höchstens vom Grade $n - i - 1$ ist. Es hat daher h_i die Form

$$(61)\qquad h_i = \frac{\mathfrak{b}_i}{\mathfrak{a}_3^{n-i-1}},$$

wo $\mathfrak{b}_i$ ein ganzer Divisor ist.

Setzen wir

$$(62)\qquad h_k \frac{R(x,y)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)} = \varphi_k,$$

so wird nach (57) bis (60)

$$r_k = S(\varphi_k).$$

Wegen (49), (53), (61) und (62) ist aber

$$\varphi_k = \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_3^{n-k-1}} \cdot \frac{\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{a}_3^{n-1}}{\mathfrak{a}_3^{\nu}\,\mathfrak{z}_x\,\bar{\mathfrak{d}}} = \frac{\mathfrak{b}_k\,\mathfrak{r}}{\mathfrak{z}_x\,\mathfrak{a}_3^{\nu-k}}.$$

Nach dem Hilfssatz ist daher r_k eine ganze rationale Funktion von x höchstens vom Grade $\nu - k$. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Dieser Satz kann an Stelle des Noetherschen Fundamentalsatzes die Grundlage der Noetherschen Theorie der algebraischen Funktionen bilden*). Der Noethersche Satz selbst gibt für drei ganze rationale Funktionen A, B, C von x, y die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich eine der Funktionen, etwa C, in der Form darstellen läßt

$$C = gA + hB,$$

wo g und h auch ganze rationale Funktionen von x sind. Der hier bewiesene Satz gibt hierfür eine hinreichende Bedingung. Die gewünschte Darstellung ist nämlich dann sicher möglich, wenn die Funktion C/B

*) Man vergleiche hierzu H.-L. 25. Vorlesung, § 4. S. 434 f.

durch den Divisor der mehrfachen Punkte der Kurve $A = 0$ teilbar ist. Dann läßt sich nämlich C/B unter der Voraussetzung $A = 0$ als ganze rationale Funktion h von x und y darstellen, d. h. es besteht eine Identität der Form

$$\frac{C}{B} = h + rA\,,$$

wo r eine rationale Funktion von x, y ist, deren Nenner sicher zu A teilerfremd ist. Setzt man $rB = g$, so folgt die zu beweisende Gleichung. Denn aus dieser Gleichung, die identisch in x, y besteht, folgt, daß gA ganz ist und also, da der Nenner von g sicher teilerfremd zu A ist, daß auch g ganz ist.

Man nennt ganze Funktionen, die den Faktor $\mathfrak{d}$ haben, adjungierte Funktionen. Sie lassen sich also immer als ganze rationale Funktionen von x, y darstellen. Setzt man eine solche Funktion gleich Null, so nennt man die dadurch definierte Kurve eine adjungierte Kurve von g.

Die adjungierten Funktionen werden benutzt zur Darstellung der Differentiale des Körpers, die für endliche Werte von x, y nirgends unendlich werden. Ist $R\,dx$ ein Differential dieser Art, das für unendliches x, y höchstens von der μ-ten Ordnung unendlich wird, so muß R die Form haben

$$R = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{z}_x\,\mathfrak{a}_3^{\mu-2}}\,,$$

wo $\mathfrak{r}$ ein ganzer Divisor ist, da dx Null und unendlich wird wie $\mathfrak{z}_x\,\mathfrak{a}_3^{-2}$. Daraus folgt wegen (53)

$$R\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}_3^{n+\mu-3}}\,,$$

so daß $R\dfrac{\partial g}{\partial y}$ eine adjungierte Funktion $\varphi(x, y)$ der Ordnung $n + \mu - 3$ wird. Wir haben also im besonderen für $\mu = 0$:

Ein Differential erster Gattung läßt sich in der Form darstellen

$$\text{(63)}\qquad \frac{\varphi(x, y)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}\,dx\,,$$

wo φ eine adjungierte Funktion $(n-3)$-ten Grades ist. Und umgekehrt ist jedes solche Differential von der ersten Gattung.

§ 10. Beispiele.

1. Wir betrachten zunächst zwei Beispiele für das Verhalten von Kurven im Unendlichen. Unter a) benutzen wir die in Kap. X, § 1 gegebene Definition der unendlich fernen Stellen und unter b) die in § 8 gegebene.

Es sei die Kurve f definiert durch

$$f(x, y) = y^3 - x^2 y + x^2 - 1 = 0 .$$

a) Zur Untersuchung der unendlich fernen Stellen haben wir folgende drei Substitutionen auszuführen:

$$\text{I. } x = \frac{1}{x'}, \; y = y, \qquad \text{II. } x = x, \; y = \frac{1}{y'}, \qquad \text{III. } x = \frac{1}{x'}, \; y = \frac{1}{y'} .$$

Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & (y - 1) - x'^2 - x'^2 y^3 = 0 , \\ \text{II:}\quad & 1 + y'^3 - x^2 y'^2 + x^2 y'^3 = 0 , \\ \text{III:}\quad & x'^2 - y'^2 + y'^3 + x'^2 y'^3 = 0 . \end{aligned}$$

Es geht also f durch die unendlich fernen Punkte

$$1.\ x = \infty ,\ y = 1 ; \quad 2.\ x = \infty ,\ y = \infty$$

und hat in dem zweiten einen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten.

b) Da y^3 in der Gleichung $f = 0$ vorkommt, haben wir nur zu setzen (vgl. § 8)

$$x = \frac{1}{\eta} , \qquad y = \frac{\xi}{\eta}$$

und erhalten

$$\eta - \xi + \xi^3 + \eta^3 = 0 .$$

Hieraus folgt für $\eta = 0$: $\xi = 0,\ 1,\ -1$. Es geht also f bei dieser Betrachtungsart durch die unendlich fernen Punkte, die definiert sind durch

$$1.\ \lim \frac{y}{x} = 0 , \qquad 2.\ \lim \frac{y}{x} = 1 , \qquad 3.\ \lim \frac{y}{x} = -1 .$$

Durch jeden dieser Punkte geht f nur einfach.

2. Es sei

$$g = y^3 - x y^2 - x^3 y + 1 + x^4 = 0$$

die Gleichung von g.

a) In der Umgebung des Punktes $x = \infty$, $y = \infty$ haben wir diese Kurve schon in Kap. X, § 6 Beispiel 5 untersucht. Durch andere unendlich ferne Punkte geht die Kurve nicht. Der Beitrag des Punktes $x = y = \infty$ zu $\mathfrak{d}$ ist gefunden zu $\mathfrak{p}_1^4 \mathfrak{p}_2^2$. Ferner werden x und y nur an diesen Stellen unendlich. Aus den Entwicklungen für y' ergibt sich für die Nenner $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ von x und y

(64) $$\mathfrak{l} = \mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_2 , \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1^3 \mathfrak{p}_2 .$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\mathfrak{a}_3$ von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ ist also

(65) $$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1^3 \mathfrak{p}_2 .$$

b) Da g vom vierten Grade ist und das Glied mit x^4 in g vorkommt, so benutzen wir die Substitution (48)

$$x = \frac{\xi}{\eta}, \qquad y = \frac{1}{\eta}$$

und erhalten

$$\bar{g}(\xi, \eta) = \eta - \eta\xi - \xi^3 + \eta^4 + \xi^4 = 0.$$

Für $\eta = 0$ folgt hieraus

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \xi = 1 .$$

1. $\xi = 0, \eta = 0$. Dies ist ein einfacher Punkt der Kurve. Man findet

$$\eta = \xi^3 + \cdots,$$

so daß der Punkt ein Wendepunkt ist.

2. $\xi = 1, \eta = 0$. Setzen wir $\xi - 1 = \xi'$, so erhalten wir

$$\xi' + 3\xi'^2 + 3\xi'^3 + \xi'^4 - \eta\xi' + \eta^4 = 0 .$$

Es ist also auch dieser Punkt ein einfacher Punkt. Es ergibt sich

$$\xi' = -\eta^4 + \cdots .$$

Der Punkt ist also ein Wendepunkt zweiter Ordnung.

Die unendlich fernen Punkte liefern zu $\bar{\mathfrak{d}}$ also keinen Beitrag. Da endliche Stellen zu $\mathfrak{d}$ und $\bar{\mathfrak{d}}$ denselben Beitrag liefern, so ist

$$\bar{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}\,\mathfrak{p}_1^{-4}\,\mathfrak{p}_2^{-2}. \tag{66}$$

Andererseits ist nach (31)

$$\bar{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}_3^{n-3}\,\mathfrak{d}}{\mathfrak{l}^{l-2}\,\mathfrak{m}^{m-2}} .$$

Setzen wir hierin die Werte für $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ aus (64) und (65) ein, so erhalten wir wegen $l = 4$, $m = 3$, $n = 4$ tatsächlich (66).

3. Es sei

$$F(x) = 4(x_1^2 + x_2^2)^3 - 4(x_1^2 + x_2^2)^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^4 = 0 . \tag{67}$$

Wählen wir $x_3 = 0$ als unendlich ferne Gerade und x_1, x_2 als rechtwinklige kartesische Koordinaten, so ist F die zweiblättrige Rosenkurve. (Vgl. G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven [B. G. Teubner 1910] Bd. I, Tafel XI, Fig. 81.)

Wir bestimmen zunächst die mehrfachen Punkte. In diesen werden $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ gleichzeitig Null. Setzen wir zur Abkürzung

$$x_1^2 + x_2^2 = z ,$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} F_1 &= 12\,z^2\cdot 2x_1 - 8z\cdot 2x_1 x_3^2 \equiv 8z\,x_1(3z - 2x_3^2) = 0 ,\\ F_2 &= 12\,z^2\cdot 2x_2 - 8z\cdot 2x_2 x_3^2 + 2x_2 x_3^4 \equiv 2x_2\{4z(3z - 2x_3^2) + x_3^4\} = 0,\\ F_3 &= -8z^2 x_3 + 4x_2^2 x_3^3 \equiv -4x_3(2z^2 - x_2^2 x_3^2) = 0 . \end{aligned}\right. \tag{68}$$

Als gemeinsame Nullstellen ergeben sich hieraus

$$\mathrm{I}: x_1 = x_2 = 0;\ \mathrm{II}: x_1 = 0,\ x_2 : x_3 = 1 : \sqrt{2};\ \mathrm{III}: x_1 = 0,\ x_2 : x_3 = -1 : \sqrt{2};$$
$$\mathrm{IV}: x_1 : x_2 = i : 1,\ x_3 = 0;\quad \mathrm{V}: x_1 : x_2 = -i : 1,\ x_3 = 0.$$

I. Setzen wir $\frac{x_1}{x_3} = \xi$, $\frac{x_2}{x_3} = \eta$, so ergeben sich die Entwicklungen

$$\eta = 2\xi^2 + \cdots \quad \text{und} \quad \eta = -2\xi^2 + \cdots.$$

Es gehen also durch I zwei Zweige p_1 und p_2, die sich berühren. Der Punkt $x_1 = x_2 = 0$ ist ein Selbstberührungspunkt. Die Tangente in ihm ist $y_2 = 0$. Die zugehörigen Primteiler seien $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Man findet nach Kap. X, § 4 und § 5

$$(p_1, p_1) = (p_2, p_2) = 0, \quad (p_1, p_2) = 2.$$

Der Beitrag von I zu $\mathfrak{d}$ ist $\mathfrak{p}_1^2\,\mathfrak{p}_2^2$.

II. Hier setzen wir, wie in I $\frac{x_1}{x_3} = \xi$, $\frac{x_2}{x_3} = \eta$ und finden die Entwicklungen

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\xi}{2} + \cdots \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\xi}{2} + \cdots$$

Es gehen also auch durch II zwei Zweige p_3, p_4, die sich schneiden. Die zugehörigen Primteiler seien $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$. Es wird

$$(p_3, p_3) = (p_4, p_4) = 0, \quad (p_3, p_4) = 1,$$

so daß der Beitrag von II zu $\mathfrak{d}$ gleich $\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_4$ ist.

III. Die Ergebnisse für diesen Punkt erhalten wir aus denen für II, da statt $\sqrt{2}$ nur $-\sqrt{2}$ zu schreiben ist. Es gehen also durch III zwei Zweige p_5, p_6. Sind $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$ die zugehörigen Primteiler, so ist der Beitrag von III zu $\mathfrak{d}$ gleich $\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_6$.

IV. Wir setzen $\frac{x_3}{x_1} = \xi$, $\frac{x_2}{x_1} = \eta$ und erhalten

$$\eta = -i - \frac{1}{4}\sqrt[3]{2i}\,\xi^{\frac{4}{3}} + \cdots.$$

Durch IV geht ein Zweig p_7 von F. Der zugehörige Primteiler sei $\mathfrak{p}_7$. Man findet $(p_7, p_7) = 6$, so daß $\mathfrak{p}_7$ in $\mathfrak{d}$ in der sechsten Potenz enthalten ist.

V. In den Betrachtungen IV ist i durch $-i$ zu ersetzen. Durch V geht ein Zweig p_8 von F und der zugehörige Primteiler $\mathfrak{p}_8$ liefert zu $\mathfrak{d}$ den Beitrag $\mathfrak{p}_8^6$.

Es wird also

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2^2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_6\mathfrak{p}_7^6\mathfrak{p}_8^6, \quad 2\bar{d} = 20. \tag{69}$$

Nach (43) wird also das Geschlecht p von F

$$(70)\qquad p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 10 = 0\,.$$

Bedeutet t eine Größe, die an der betreffenden Stelle von der ersten Ordnung Null wird, so haben wir folgende Darstellungen an den einzelnen Stellen

$$(71)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_1: & \mathfrak{a}_1 = t\,, & \mathfrak{a}_2 = 2t^2 + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = 1\,; \\ \mathfrak{p}_2: & \mathfrak{a}_1 = t\,, & \mathfrak{a}_2 = -2t^2 + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = 1\,; \\ \mathfrak{p}_3: & \mathfrak{a}_1 = t\,, & \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}t + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = 1\,; \\ \mathfrak{p}_4: & \mathfrak{a}_1 = t\,, & \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}t + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = 1\,; \\ \mathfrak{p}_5: & \mathfrak{a}_1 = t\,, & \mathfrak{a}_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}t + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = 1\,; \\ \mathfrak{p}_6: & \mathfrak{a}_1 = t\,, & \mathfrak{a}_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}t + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = 1\,; \\ \mathfrak{p}_7: & \mathfrak{a}_1 = 1\,, & \mathfrak{a}_2 = -i - \frac{1}{4}\sqrt[3]{2i}\,t^4 + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = t^3\,; \\ \mathfrak{p}_8: & \mathfrak{a}_1 = 1\,, & \mathfrak{a}_2 = i + \frac{1}{4}\sqrt[3]{2i}\,t^4 + \cdots, & \mathfrak{a}_3 = t^3\,. \end{cases}$$

Da der Divisor der Rückkehrpunkte $\mathfrak{r}$ auch gemeinsamer Teiler von $F_1(\mathfrak{a})$, $F_2(\mathfrak{a})$, $F_3(\mathfrak{a})$ ist, so können in $\mathfrak{r}$ nur die Primteiler $\mathfrak{p}_1$ bis $\mathfrak{p}_8$ enthalten sein. Um $\mathfrak{r}$ zu bestimmen, brauchen wir den größten gemeinsamen Teiler der Divisoren $\mathfrak{a}_\alpha d\mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{a}_\beta d\mathfrak{a}_\alpha$ also nur für die acht Stellen $\mathfrak{p}_1$ bis $\mathfrak{p}_8$ zu berechnen. Wir finden so

$$(72)\qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{p}_7^2\mathfrak{p}_8^2\,,\quad r = 4\,.$$

Aus den Plückerschen Gleichungen (42) ergibt sich wegen $p = 0$, $n = 6$, $r = 4$, $d = 10$

$$(73)\qquad r' = 4\,,\ d' = 10\,,\ d_0' = d' - r' = 6\,,\ n' = 6\,.$$

Die Kurve hat also vier Wendepunkte und sechs Doppeltangenten. Aus der Form der Kurve sieht man, daß die Wendepunkte imaginär sind, während die Doppeltangenten alle reell sind. Dabei muß man bedenken, daß die Tangente in dem Selbstberührungspunkt doppelt zählt unter den Doppeltangenten. Denkt man sich nämlich die beiden Kurvenzweige, die sich im Selbstberührungspunkt berühren, etwas voneinander entfernt, so hat die Kurve zwei Doppeltangenten, die so liegen wie die inneren Tangenten zweier Kreise. Läßt man dann die Kurvenzweige sich nähern, bis sie einander berühren, so fallen diese beiden Doppeltangenten zusammen.

Da $p = 0$ ist, so können wir die x_i als rationale Funktionen eines Parameters darstellen. Z. B. auf folgende Art. Setzen wir

$$(74) \qquad x_1^2 + x_2^2 = z x_3^2, \quad x_2 = x_3 y, \quad x_1 = x x_3,$$

also $x^2 + y^2 = z$, so lautet die Gleichung (67) von F

$$4z^3 - 4z^2 + y^2 = 0.$$

Hierin setzen wir $y = 2zu$ und finden zunächst $z = 1 - u^2$. Dann folgt aus $y = 2zu$, daß $y = 2u(1 - u^2)$ und unter Verwendung der für y und z gefundenen Werte ergibt sich x aus $x^2 + y^2 = z$. Wir haben also

$$(75) \qquad x = (1 - 2u^2)\sqrt{1 - u^2}, \quad y = 2u(1 - u^2), \quad z = 1 - u^2.$$

Um die in x noch vorkommende Wurzel fortzuschaffen, setzen wir

$$(76) \qquad \sqrt{1 - u^2} = 1 - uv.$$

Wir erhalten dann

$$x = \frac{x_1}{x_3} = \frac{(1 - v^2)(1 - 6v^2 + v^4)}{(1 + v^2)^3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3} = \frac{4v(1 - v^2)^2}{(1 + v^2)^3},$$

so daß wir setzen können

$$(77) \quad x_1 = (1 - v^2)(1 - 6v^2 + v^4), \quad x_2 = 4v(1 - v^2)^2, \quad x_3 = (1 + v^2)^3.$$

Der Parameter v ist eine Funktion des Körpers. Das folgt schon daraus, daß die x_i rationale Funktionen sechster Ordnung mit demselben Nenner — nämlich 1 — sind und die Gleichung zwischen den x_i auch vom sechsten Grade ist. Wir können aber auch leicht unmittelbar zeigen, daß v dem Körper angehört. Aus (75) folgt

$$u = \frac{y}{2z}, \quad \sqrt{1 - u^2} = \frac{x}{2z - 1},$$

so daß wegen (76) v eine rationale Funktion von x, y, z wird. Es sind aber x, y, z nach (74) Funktionen des Körpers.

Es entspricht also jeder Stelle des Körpers ein Wert von v und umgekehrt. Die Werte, die v an den Stellen $\mathfrak{p}_i$ hat, sind folgende:

$$(78) \quad \mathfrak{p}_1\colon 1, \quad \mathfrak{p}_2\colon -1, \quad \mathfrak{p}_3\colon -1 + \sqrt{2}, \quad \mathfrak{p}_4\colon 1 + \sqrt{2}, \quad \mathfrak{p}_5\colon -1 - \sqrt{2},$$
$$\mathfrak{p}_6\colon 1 - \sqrt{2}, \quad \mathfrak{p}_7\colon -i, \quad \mathfrak{p}_8\colon i.$$

Es ist also z. B. $\mathfrak{p}_1$ der Zähler von $v - 1$, $\mathfrak{r}$ gleich dem Zähler von $(v + i)^2 (v - i)^2 = (1 + v^2)^2$. Wenn wir v also auf endliche Werte beschränken, können wir geradezu setzen

$$(79) \qquad \mathfrak{r} = (1 + v^2)^2$$

und wegen (69)

$$(80)\qquad \begin{cases} \mathfrak{D} = (1-v^2)^2(1-6v^2+v^4)(1+v^2)^6\,, \\ \mathfrak{r}^{-2}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 = (1-v^2)^2(1-6v^2+v^4)(1+v^2)^2\,. \end{cases}$$

Für endliches v wird wegen (77)

$$(81)\qquad \mathfrak{a}_1 = (1-v^2)(1-6v^2+v^4)\,,\quad \mathfrak{a}_2 = 4v(1-v^2)^2\,,\quad \mathfrak{a}_3 = (1+v^2)^3\,.$$

Ist v_0 ein endlicher Wert von v und will man an der entsprechenden Stelle $\mathfrak{p}$ die Kurve F untersuchen, so hat man zu setzen

$$(82)\qquad v = v_0 + t$$

und es ist dann t eine Größe, die in $\mathfrak{p}$ von erster Ordnung Null wird. Aus (82) folgt $dv = dt$, so daß an allen endlichen Stellen dv nicht Null oder unendlich wird. Für unendliches v hat man zu setzen

$$v = \frac{1}{t}\,.$$

Für die Umgebung der diesem Werte entsprechenden Stelle hat man — nach Multiplikation mit t^6 —

$$(83)\qquad \mathfrak{a}_1 = -(1-t^2)(1-6t^2+t^4)\,,\quad \mathfrak{a}_2 = 4t(1-t^2)^2\,,\quad \mathfrak{a}_3 = (1+t^2)^3\,.$$

Diese Darstellung ist nur zu benutzen für kleine Werte von t. Da für $t = 0$, $\mathfrak{a}_1 = -1$, $\mathfrak{a}_2 = 0$, $\mathfrak{a}_3 = 1$, so hat der $v = \infty$ entsprechende Punkt die Koordinaten $(-1, 0, 1)$. Es ist ein regulärer Punkt und auch die Tangente in ihm hat keine Besonderheiten. Wir werden uns daher im folgenden auf endliche Werte von v beschränken.

Wir bestimmen zunächst die Divisoren $\mathfrak{a}_i'$. Zur bequemeren Rechnung führen wir folgende Abkürzungen ein

$$(84)\qquad 1 + v^2 = \lambda\,,\quad 1 - v^2 = \mu\,,$$

so daß

$$(85)\qquad 2 = \lambda + \mu\,,\quad 2v^2 = \lambda - \mu\,.$$

Von diesen Gleichungen werden wir öfter Gebrauch machen. Es wird

$$(86)\qquad \mathfrak{a}_1 = \mu(2\mu^2 - \lambda^2)\,,\quad \mathfrak{a}_2 = 4v\mu^2\,,\quad \mathfrak{a}_3 = \lambda^3\,.$$

Daraus folgt

$$(87)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{a}_1}{dv} = 2v(\lambda^2 - 2\lambda\mu - 6\mu^2)\,, \\ \dfrac{d\mathfrak{a}_2}{dv} = 4\mu(3\mu - 2\lambda)\,, \qquad \dfrac{d\mathfrak{a}_3}{dv} = 6\lambda^2 v\,. \end{cases}$$

Aus (86), (87) ergibt sich wegen (9), § 2 unter Fortlassung des Faktors 2

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1' = 2\lambda^2\mu(2\lambda^2 - 3\mu^2)\,,\quad \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_2' = 2v\lambda^2(\lambda^2 - 6\mu^2)\,,\quad \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_3' = 2\lambda^3\mu^2\,,$$

also

$$(88)\qquad \mathfrak{r} = 2\lambda^2\,,\quad \mathfrak{a}_1' = \mu(2\lambda^2 - 3\mu^2)\,,\quad \mathfrak{a}_2' = v(\lambda^2 - 6\mu^2)\,,\quad \mathfrak{a}_3' = \lambda\mu^2\,.$$

Der gefundene Wert für $\mathfrak{x}$ stimmt mit dem in (79) gegebenen überein, da es bei Divisoren auf einen konstanten Faktor ja nicht ankommt. Führen wir statt λ, μ wieder v ein, so wird

$$(89) \qquad \mathfrak{a}_1' = (1 - v^2)(1 - 10\,v^2 + v^4)\,, \quad \mathfrak{a}_2' = v(5 - 14\,v^2 + 5\,v^4)\,,$$
$$\mathfrak{a}_3' = (1 + v^2)(1 - v^2)^2\,.$$

Diese Darstellung gilt für endliches v. Für die Umgebung von $v = \infty$ hätten wir statt v einzuführen t^{-1}.

Um die Gleichung von F in Linienkoordinaten herzuleiten, setzen wir

$$(90) \qquad \xi = \left(\frac{\mathfrak{a}_1'}{\mathfrak{a}_3'}\right)^2 = \left(\frac{x_1'}{x_3'}\right)^2, \quad \eta = 4\left(\frac{\mathfrak{a}_2'}{\mathfrak{a}_3'}\right)^2 = 4\left(\frac{x_2'}{x_3'}\right)^2.$$

Hieraus folgt wegen (85) und (88)

$$\xi = \frac{(2\lambda^2 - 3\mu^2)^2}{\lambda^2\mu^2}\,, \quad \eta = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - 6\mu^2)^2}{\lambda^2\mu^4}$$

oder, wenn wir

$$(91) \qquad \lambda^2 = \varrho\,\mu^2$$

setzen

$$(92) \qquad \xi = \frac{(2\varrho - 3)^2}{\varrho}\,, \quad \eta = \frac{(\varrho - 1)(\varrho - 6)^2}{\varrho}\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist ϱ zu eliminieren. Die Gleichung für ξ, η, die sich ergibt, sei $h(\xi, \eta) = 0$. Da ξ und η Funktionen dritter Ordnung mit demselben Nenner sind, so ist h vom dritten Grade in ξ, η. Da ξ nur von zweiter Ordnung ist, so ist h in η nur vom zweiten Grade. Da aber η nur unendlich wird, wenn ξ es wird, nämlich für $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$, so ist der Faktor von η^2 konstant, d. h. es fehlt das Glied $\xi\,\eta^2$. Daher hat h die Form

$$(93) \qquad h(\xi, \eta) = a\,\xi^3 + b\,\xi^2\eta + c\,\xi^2 + \partial\,\xi\eta + e\,\eta^2 + f\,\xi + g\,\eta + k\,.$$

Für $\varrho = 0$ werden ξ, η beide unendlich und wegen (92) $\lim \dfrac{\xi}{\eta} = -4$. Setzen wir also die Glieder höchster Ordnung von h gleich Null,

$$a\,\xi^3 + b\,\xi^2\eta = 0\,,$$

so muß hieraus unter anderem $\eta = -4\,\xi$ folgen. Es ist daher

$$(94) \qquad a = 4\,b\,.$$

Es wird $\eta = 0$ für $\varrho = 1$ und zweimal für $\varrho = 6$. Die zugehörigen Werte von ξ sind $\xi = 1$ und $\xi = \dfrac{27}{2}$. Diese müssen sich für $\eta = 0$ aus $h(\xi, \eta) = 0$ ergeben. Daher wird

$$(95)\qquad h(\xi, 0) = a\,\xi^3 + c\,\xi^2 + f\,\xi + k = a\,(\xi - 1)\left(\xi - \frac{27}{2}\right)^2 .$$

Es wird $\xi = 0$ zweimal für $\varrho = \dfrac{3}{2}$. Der zugehörige Wert von η ist $\dfrac{27}{4}$. Daher wird

$$(96)\qquad h(0, \eta) = e\,\eta^2 + g\,\eta + k = e\left(\eta - \frac{27}{4}\right)^2 .$$

Aus (95) und (96) folgt unter anderem

$$(97)\qquad k = -a\,\frac{27^2}{4} = e\,\frac{27^2}{16} .$$

Wählen wir $a = 4$, so haben wir wegen (94) und (97)

$$a = 4\,,\quad b = 1\,,\quad e = -16\,,\quad k = -27^2$$

und es wird wegen (95) und (96)

$$h(\xi, \eta) = h(\xi, 0) + h(0, \eta) - k + b\,\xi^2\eta + \partial\,\xi\,\eta$$
$$= 4\,(\xi - 1)\left(\xi - \frac{27}{2}\right)^2 - 16\left(\eta - \frac{27}{4}\right)^2 + 27^2 + \xi^2\eta + \partial\,\xi\,\eta$$

oder

$$(98)\quad h(\xi, \eta) = (\xi - 1)\,(2\xi - 27)^2 - 8\eta\,(2\eta - 27) + \xi^2\eta + \partial\,\xi\,\eta = 0 .$$

Um endlich ∂ zu bestimmen, betrachten wir die Umgebung von $\varrho = 6$. Setzen wir $\varrho = 6 + 6t$, so wird

$$(2\varrho - 3)^2 = (9 + 12t)^2 = 81 + 216t + \cdots,\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{6}\,(1 - t + \cdots)$$

und wegen (92)

$$2\,\xi - 27 = 45t + \cdots,\quad \eta = 30t^2 + \cdots .$$

Daher ist für $\varrho \to 6$

$$(99)\qquad \frac{(2\xi - 27)^2}{\eta} = \frac{45^2}{30} = \frac{5\cdot 27}{2}\,,\qquad \xi = \frac{27}{2}\,,\quad \eta = 0 .$$

Dividieren wir (98) durch η und bedenken, daß die entstehende Gleichung identisch besteht, so folgt wegen (99) für $\varrho \to 6$

$$\frac{25}{2}\cdot\frac{5\cdot 27}{2} + 8\cdot 27 + \frac{27^2}{4} + \partial\cdot\frac{27}{2} = 0 .$$

also

$$\partial = -92 .$$

Es ist daher endgültig

$$(100)\quad h(\xi, \eta) = (\xi - 1)\,(2\xi - 27)^2 - 8\eta\,(2\eta - 27) + \xi^2\eta - 92\,\xi\,\eta = 0$$

die Gleichung zwischen ξ und η.

Wegen (90) folgt

(101) $$F'(x') = F'(x'_1, x'_2, x'_3) = x_3'^6\, h\left(\frac{x_1'^2}{x_3'^2},\ 4\,\frac{x_2'^2}{x_3'^2}\right)$$

oder

(102) $$F'(x') = (x_1'^2 - x_3'^2)(2\,x_1'^2 - 27\,x_3'^2)^2 - 32\,x_1'^2\,x_3'^2\,(8\,x_2'^2 - 27\,x_3'^2) + 4\,x_1'^4\,x_2'^2 - 368\,x_1'^2\,x_2'^2\,x_3'^2\,.$$

Um die Wende- und Doppeltangenten zu bestimmen, könnten wir so verfahren, wie wir es bei den Rückkehr- und Doppelpunkten getan haben. Wir wollen aber einen anderen Weg einschlagen.

Aus (88) folgt

$$\frac{d\mathfrak{a}'_1}{dv} = -2\,v\,(2\,\lambda^2 - 4\,\lambda\,\mu - 9\,\mu^2)\,, \quad \frac{d\mathfrak{a}'_3}{dv} = 2\,v\,\mu\,(\mu - 2\,\lambda)\,.$$

Daher wird nach (15), § 2

$$\mathfrak{r}'\,\mathfrak{a}_2 = 4v\mu^2\,(2\lambda^2 + 3\,\mu^2)\,,$$

wobei von der Gleichung $\lambda + \mu = 2$ Gebrauch gemacht ist. Da $\mathfrak{a}_2 = 4v\mu^2$, so folgt

(103) $$\mathfrak{r}' = 2\lambda^2 + 3\mu^2 = \mu^2\,(2\varrho + 3) = 5 - 2v^2 + 5v^4\,.$$

Durch Auflösen der Gleichung vierten Grades $\mathfrak{r}' = 0$ erhalten wir die Stellen, wo unsere Kurve F Wendepunkte hat. Es ergeben sich die Werte

$$\sqrt{3 + i\sqrt{2}}\,, \quad -\sqrt{3 + i\sqrt{2}}\,, \quad \sqrt{3 - i\sqrt{2}}\,, \quad -\sqrt{3 - i\sqrt{2}}\,.$$

Sie sind also voneinander verschieden. Da wir wissen, daß nur vier Wendepunkte vorhanden sind ($r' = 4$), so sind sie von der ersten Ordnung.

Aus (101) folgt

$$F'_2(\mathfrak{a}') = 8\,\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_3'^4\,\frac{\partial h}{\partial \eta} = 8\,\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_3'^4\,\{-32\,\eta + 216 + \xi^2 - 92\,\xi\}$$
$$= -\frac{8\,\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_3'^4}{\varrho^2}\,\{16\,\varrho^4 + 48\,\varrho^3 - 108\,\varrho - 81\}\,.$$

Es muß aber $F'_2(\mathfrak{a}')$ durch $\mathfrak{r}'^3$, also wegen (103) durch $(2\varrho + 3)^3$ teilbar sein. Das ist tatsächlich der Fall. Es wird nämlich

$$F'_2(\mathfrak{a}') = -\frac{8\,\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_3'^4}{\varrho^2}\,(2\varrho + 3)^3\,(2\varrho - 3) = -\frac{8\,\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_3'^4}{\lambda^4\,\mu^4}\,(2\lambda^2 + 3\mu^2)^3(2\lambda^2 - 3\mu^2).$$

Wegen (24), § 4 und (88) folgt also

$$F'_2(\mathfrak{a}') = \mathfrak{r}'\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{r}'^3\,\mathfrak{d}'_0\,\mathfrak{a}_2 = -8\,\mathfrak{r}'^3\,v\,\mu^4\,(\lambda^2 - 6\,\mu^2)\,(2\,\lambda^2 - 3\,\mu^2)\,,$$

also wegen (86) und (84)

$$\mathfrak{d}'_0 = \mu^2\,(\lambda^2 - 6\,\mu^2)\,(2\,\lambda^2 - 3\,\mu^2)$$
$$= (1 - v^2)^2\,(5 - 14\,v^2 + 5\,v^1)\,(1 - 10\,v^2 + v^4)\,.$$

Die Gleichung $\mathfrak{d}'_0 = 0$ liefert uns die Berührungspunkte der Doppeltangenten von F.

Zwölftes Kapitel.

Die Art des Zusammenhangs einer Riemannschen Fläche.

§ 1. Definitionen.

Wir betrachten im folgenden solche Eigenschaften von Flächen, die ungeändert bleiben, wenn man die Flächen irgendwie stetig verändert, ohne sie zu zerreißen oder neue Verbindungen herzustellen. Man nennt diese Betrachtungsart Analysis situs. Die Flächen müssen, soll unsere Betrachtungsart anwendbar sein, mindestens eine Begrenzungslinie haben, sie müssen mit anderen Worten berandet sein. Hat eine Fläche keine Begrenzungslinie, wie z. B. eine Kugelfläche oder eine Riemannsche Fläche, so muß man ihr eine geben. Dies geschieht dadurch, daß man die Fläche mit einem kleinen Loch versieht, daß man die Fläche, wie man sagt, punktiert.

Es soll nicht ausgeschlossen sein, daß eine Fläche aus mehreren getrennten Stücken besteht.

Zunächst geben wir einige Definitionen.

Definition I. Ein Schnitt, der von einem Punkte der Begrenzung nach einem anderen Punkte der Begrenzung führt, soll Querschnitt heißen. Der schon ausgeführte Teil des Schnittes soll schon zur Grenze gehören, so daß ein Querschnitt in sich selbst zurücklaufen kann.

Definition II. Ein Schnitt, der von einem Punkte im Innern nach einem Punkte des Randes führt, soll Riß heißen. Auch der schon ausgeführte Teil eines Risses soll zur Grenze gehören. Es kann daher ein Riß in sich zurücklaufen; im besonderen kann er im Anfangspunkte enden, so daß eine geschlossene Linie entsteht.

Definition III. Ein Schnitt, der von einem im Innern liegenden Punkte nach einem anderen Punkte im Innern führt, soll ein Loch heißen. Dadurch, daß man die Ränder eines Loches auseinanderbiegt, kann man ihm z. B. die Gestalt eines Kreises geben. Wie schon oben gesagt, verwandeln wir durch Anbringung eines Loches, das beliebig klein gewählt werden kann, eine unberandete Fläche in eine berandete.

Definition IV. Eine aus einem Stück bestehende Fläche, die durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Teile zerlegt wird, heißt einfach zusammenhängend.

Definition V. Eine Fläche, die erst durch eine endliche Zahl von Querschnitten in eine oder mehrere einfach zusammenhängende Flächen zerlegt werden kann, heißt mehrfach zusammenhängend.

Beispiele für einfach zusammenhängende Flächen sind die Fläche eines Kreises oder eines Rechtecks oder ein von einer geschlossenen sich selbst nicht schneidenden oder berührenden Kurve begrenztes Stück einer Ebene oder Kugel. Schneiden wir in eine solche Fläche Löcher, so erhalten wir mehrfach zusammenhängende Flächen. Betrachten wir z. B. die Fläche, die aus demjenigen Teil einer Ebene besteht, der innerhalb eines Kreises K_0 und außerhalb zweier im Innern von K_0 liegender sich nicht schneidender oder berührender Kreise K_1 und K_2 liegt. Ziehen wir einen Querschnitt von K_0 nach K_1, so zerfällt die Fläche nicht in zwei getrennte Teile; sie ist daher nicht einfach zusammenhängend. Ziehen wir einen zweiten Querschnitt von K_0 nach K_2, so erhalten wir eine Fläche, die durch jeden weiteren Querschnitt in zwei getrennte Teile zerlegt wird, die also einfach zusammenhängend ist. Diese Fläche hat nur eine Begrenzungslinie und kann durch stetige Deformation z. B. in ein Rechteck verwandelt werden.

§ 2. Einfach zusammenhängende Flächen.

Wir beweisen eine Reihe von Sätzen.

Satz 1. Die Teile, in die eine einfach zusammenhängende Fläche durch einen Querschnitt zerfällt, sind einfach zusammenhängend.

Es zerfalle die einfach zusammenhängende Fläche T durch den Querschnitt $Q = AB$ in die beiden Teilflächen T_1 und T_2. Von diesen sei etwa T_1 nicht einfach zusammenhängend. Dann können wir in T_1 einen Querschnitt S ausführen, der T_1 nicht zerstückt, so daß es in T_1 einen Weg w gibt, der von der einen Seite von S auf die andere führt. Dieser Weg liegt auch innerhalb T. Liegen Anfang und Ende von S beide nicht auf Q, so ist S auch ein Querschnitt von T, muß also T in zwei getrennte Teile zerlegen. Andererseits führt der Weg w innerhalb T von der einen Seite von S auf die andere, was einen Widerspruch ergibt. Liegt ein Endpunkt C von S auf Q und der andere auf der Grenze von T, so bildet das Stück AC von Q zusammen mit S einen Querschnitt von T und wieder führt der Weg w von der einen Seite dieses Querschnittes innerhalb T auf die andere. Liegen endlich beide Endpunkte C, D von S auf Q, so sei die Bezeichnung so gewählt, daß man erst nach C kommt, wenn man Q von A nach B durchläuft. Es bildet dann der Teil AC von Q zusammen mit S und dem Teil DB von Q einen Querschnitt von T und es ist w wieder ein Weg, der innerhalb T von der einen Seite dieses Querschnittes zur anderen führt. Wir haben also in allen Fällen denselben Widerspruch, so daß unsere Annahme, T_1 sei nicht einfach zusammenhängend, falsch sein muß.

Satz II. Eine berandete einfach zusammenhängende Fläche hat nur eine Begrenzungslinie.

Die Fläche habe die Begrenzungslinien a und b und vielleicht noch irgendwelche andere. Wir zerschneiden die Fläche längs eines Querschnittes Q, der von einem Punkte von a nach einem von b führt. Durch Q muß die Fläche in zwei getrennte Teile T_1 und T_2 zerfallen. Der eine Rand des Querschnittes Q muß zum Rande von T_1, der andere zu dem von T_2 gehören. Andererseits bilden aber die Begrenzungslinie a, der eine Rand von Q, die Begrenzungslinie b und der andere Rand von Q in dieser Reihenfolge eine einzige geschlossene Kurve. Der Widerspruch, auf den wir so geführt werden, zeigt uns, daß eine berandete einfach zusammenhängende Fläche nicht mehr als eine Begrenzungslinie haben kann.

§ 3. Die Ordnung des Zusammenhangs einer Fläche.

Satz III. Wird eine Fläche das eine Mal durch q Querschnitte in n einfach zusammenhängende Flächen zerlegt und ein andermal durch q' Querschnitte in n' einfach zusammenhängende Flächen, so ist

$$q - n = q' - n'.$$

Die Fläche heiße T. Die das erstemal ausgeführten Querschnitte seien $Q_1, Q_2, \ldots Q_q$ und die das zweitemal benutzten $Q_1', Q_2', \ldots Q_{q'}'$. Man vergleiche Abb. 34, wo die Querschnitte Q ausgezogen und die Q' punktiert sind. Es ist in der Abb. $q = 6$, $n = 5$, $q' = 5$, $n' = 4$, also $q - n = q' - n' = 1$. Wir berechnen auf zwei Arten, in wie viele einfach zusammenhängende Flächen T zerfällt, wenn wir die Querschnitte Q und Q' zusammen ausführen. Wir nehmen an, daß keiner der Querschnitte Q mit einem der Q' ganz oder teilweise zusammenfällt. Sollte ein derartiges Zusammenfallen stattfinden, so verschieben wir die Querschnitte stetig so, daß unsere Annahme erfüllt ist, daß also die Querschnitte nur einzelne Punkte gemeinsam haben. Durch das stetige Verschieben der Querschnitte können die Zahlen n und n' nicht geändert werden, wenn nur darauf geachtet wird, daß die Querschnitte Querschnitte bleiben.

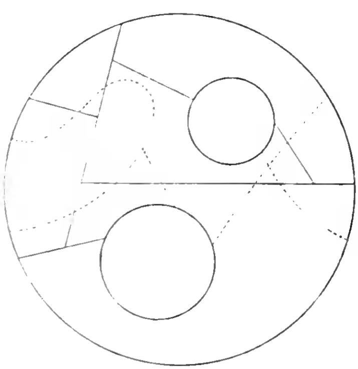


Abb. 34.

Zunächst werde T durch die q Querschnitte Q in n einfach zusammenhängende Teile $T_1, T_2, \ldots T_n$ zerlegt. Wir führen dann den Querschnitt Q_1' aus. Er beginne bei A und ende bei B; es sind A und B Punkte auf dem

Rande von T. Es möge $Q_1' = AB$ die Querschnitte Q der Reihe nach in den Punkten $A_1, A_2, \ldots A_h$ schneiden. Jedes der Stücke $A A_1, A_1 A_2, \ldots A_h B$ ist ein Querschnitt für eine der Teilflächen T_k. Der Querschnitt AA_1 zerlegt die Teilfläche, durch die er geht, in zwei einfach zusammenhängende Flächen, so daß die Zahl der einfach zusammenhängenden Teilflächen durch das Ziehen von AA_1 um 1 auf $n + 1$ erhöht wird. Ebenso wird durch das Ziehen von A_1A_2 die Zahl der nunmehr vorhandenen Teilflächen um 1 auf $n + 2$ vermehrt. Schließen wir so weiter, so sehen wir, daß durch den Querschnitt $Q_1' = AB$ die Zahl der einfach zusammenhängenden Teilflächen um $h + 1$ auf $n + h + 1$ erhöht wird; dabei bedeutet h die Zahl der Schnittpunkte von Q_1' mit den Querschnitten $Q_1, Q_2, \ldots Q_q$.

Die Fläche, die aus T durch Ziehen von Q_1' und der q Querschnitte Q entsteht, sei mit T' bezeichnet. T' besteht aus $n + h + 1$ einfach zusammenhängenden Stücken. Wir schließen genau so wie eben, daß durch Ziehen von Q_2' die Zahl der $n + h + 1$ Teilflächen um $k + 1$ auf $n + h + k + 2$ erhöht wird, wenn k die Zahl der Schnittpunkte von Q_2' mit den q Querschnitten Q ist. Dabei ist zu beachten, daß Q_1' und Q_2' einander ihrer Definition nach zwar treffen, aber nicht schneiden können. Schließen wir so weiter, so finden wir, daß durch die Querschnitte Q und Q' die Fläche T in

$$(1) \qquad n + s + q'$$

einfach zusammenhängende Flächen zerlegt wird, wenn s die Zahl der Schnittpunkte der Querschnitte Q mit den Querschnitten Q' ist.

Führen wir erst die Querschnitte Q' und dann die Querschnitte Q aus, so finden wir durch dieselben Überlegungen, daß T durch die zusammen ausgeführten Querschnitte Q und Q' in

$$(2) \qquad n' + s + q$$

einfach zusammenhängende Flächen zerfällt, wo s dieselbe Bedeutung hat wie oben. Die beiden Zahlen (1) und (2) müssen gleich sein und daraus folgt die Behauptung $q - n = q' - n'$.

Die Zahl $q - n$ ist also unabhängig davon, wie die Fläche T durch Querschnitte zerlegt wird, wenn nur die Teilflächen einfach zusammenhängend sind. Wir werden weiter unten sehen, daß jede aus einem Stück bestehende mehrfach zusammenhängende Fläche immer durch passende Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt werden kann. Wie das auch geschehen mag, die Zahl der dazu notwendigen Querschnitte ist nach dem eben bewiesenen Satze immer dieselbe. Sie sei mit r bezeichnet; es ist dann $r - 1 = q - n$. Die Zahl r und damit auch $q - n$ gibt uns ein Maß dafür, wievielfach die Fläche T zusammenhängt; denn je mehr Querschnitte notwendig sind, um T in eine einfach zusammenhangende Fläche zu verwandeln, desto größer wird ihr Zusammenhang sein. Damit sich für eine einfach zusammenhängende Fläche die Zahl 1 ergibt, nehmen wir als Maß für die Stärke des Zusammenhangs die Zahl $q - n + 2$ und nennen sie die Ordnung des Zusammenhangs der Fläche, und zwar auch dann, wenn die Fläche aus mehreren Stücken besteht. Besteht die Fläche aus einem Stück, so sagt man auch, sie ist $(q - n + 2)$-fach zusammenhängend. Da durch einen Querschnitt die Zahl der vorhandenen nicht miteinander zusammenhängenden Teilflächen höchstens um 1 vermehrt werden kann, so ist für eine aus einem Stück bestehende mehrfach zusammenhängende Fläche immer $n \leq q + 1$, also $q - n + 2 \geq 1$. Alles dies gilt zunächst nur für berandete Flächen, da wir auf einer unberandeten Fläche keinen Querschnitt ziehen können. Wir müssen eine unberandete Fläche erst punktieren und können dann unsere Definition anwenden. Wir definieren also:

Definition VI. Wird eine mehrfach zusammenhängende berandete Fläche durch q Querschnitte in n einfach zusammenhängende Flächen zerlegt, so heißt $q - n + 2$ die Ordnung des Zusammenhangs der Fläche. Besteht die Fläche aus einem Stück, so sagt man auch, sie ist $(q - n + 2)$-fach zusammenhängend. Die Zahl $q - n + 2$ ist nach Satz II unabhängig von der Wahl der Querschnitte. Sie ist für eine aus einem Stück bestehende Fläche immer positiv. Die Ordnung des Zusammenhangs einer unberandeten Fläche soll gleich der Ordnung der aus ihr durch Punktieren hervorgehenden Fläche sein.

§ 4. Beispiele.

1. Eine Kreisfläche mit zwei Löchern. Wie aus Abb. 35 hervorgeht, ist hier $q - n + 2 = 3$, so daß die Fläche dreifach zusammenhängend ist.

2. Der Mantel eines Kreiszylinders. Die Fläche hat zwei Ränder, die beiden Grundkreise. Zerschneiden wir den Mantel längs einer Seitenlinie, die zwei Punkte der Begrenzung verbindet und daher ein Querschnitt ist, so erhalten wir eine Fläche, die wir in ein Rechteck auseinanderbiegen können und die daher einfach zusammenhängend ist. Es ist $q = 1$, $n = 1$, $q - n + 2 = 2$, die Fläche also zweifach zusammenhängend.

3. Eine Ringfläche, wie sie z. B. entsteht, wenn ein Kreis um eine ihn nicht schneidende Achse rotiert. Diese Fläche hat keinen Rand, so daß wir sie erst punktieren müssen. Das geschehe durch Anbringung eines kleinen Loches. Wir ziehen dann einen Querschnitt von dem Rande des Loches bis wieder dahin zurück längs eines Meridianes und denken uns die Fläche längs des Querschnittes zerschnitten. Wir können den Ring dann auseinanderbiegen, so daß er die Gestalt eines Zylindermantels annimmt. Diesen können wir, wie wir in dem vorigen Beispiel gesehen haben,

durch einen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln. Es ist hier $q = 2$, $n = 1$, $q - n + 2 = 3$. Für die Analysis situs st mit der Ringfläche identisch eine mit einem Henkel versehene Kugel, da die beiden Flächen stetig ineinander übergeführt werden können.

Andere Beispiele sind eine Kugelfläche mit r Henkeln oder die Fläche, die entsteht, wenn man in eine Kugel r Löcher bohrt, die sich gegenseitig nicht treffen.

4. Wir betrachten noch ein Beispiel, das wir später benutzen. Die Fläche bestehe aus m untereinander nicht zusammenhängenden voneinander getrennten einfach zusammenhängenden Flächen. Es ist $n = m$, $q = 0$, die Ordnung des Zusammenhangs also $q - m + 2 = -m + 2$. Demnach kann die Ordnung des Zusammenhangs auch negativ werden.

§ 5. Zerlegung einer Fläche in eine einfach zusammenhängende.

Satz IV. Durch einen Querschnitt wird die Ordnung des Zusammenhangs um 1 vermindert.

Die Fläche heiße T. Die Fläche, die durch das Ziehen eines Querschnittes Q entsteht, heiße T'. Die Ordnung des Zusammenhangs der Flächen sei mit O und O' bezeichnet. Es werde T durch q Querschnitte $Q_1, Q_2, \ldots Q_q$ in n einfach zusammenhängende Flächen zerlegt, so daß

$$O = q - n + 2. \tag{3}$$

Zeichnen wir noch den Querschnitt Q, so wird T, wie wir beim Beweise von Satz III gesehen haben, in $n + h + 1$ einfach zusammenhängende Flächen zerlegt, wenn h die Zahl der Schnittpunkte von Q mit den q Querschnitten Q_k bedeutet. Es wird also auch die Fläche T' durch die q Linien Q_k in $n + h + 1$ einfach zusammenhängende Flächen zerlegt. Aber die Linien Q_k, die für T Querschnitte sind, brauchen es nicht zu sein für T', da zur Begrenzung von T' auch die beiden Ränder von Q gehören. Schneidet Q_k den Querschnitt Q in h_k Punkten, so zerfällt Q_k in $h_k + 1$ Stücke und jedes dieser Stücke ist ein Querschnitt von T'. Die Linien $Q_1, Q_2, \ldots Q_q$ bilden daher $(h_1 + 1) + (h_2 + 1) + \cdots + (h_q + 1) = h + q$ Querschnitte von T'. Es zerfällt also T durch $h + q$ Querschnitte in $n + h + 1$ einfach zusammenhängende Flächen, so daß $O' = (h + q) - (n + h + 1) + 2 = q - n + 1$. Vergleichen wir dies mit (3), so folgt die Behauptung $O' = O - 1$.

Satz V. Durch einen Riß wird die Ordnung des Zusammenhangs nicht geändert.

Die Fläche heiße wieder T und die aus ihr durch den Riß R entstehende Fläche T'. Die Ordnung des Zusammenhangs der beiden Flächen sei bezeichnet mit O und O'. Wir führen einen Schnitt Q von dem im Innern von T liegenden Ausgangspunkt von R nach einem Punkt der Grenze von T, der weder R noch die Grenze von T schneidet. Die dadurch aus T' entstehende Fläche sei mit T'' bezeichnet. Die Ordnung des Zusammenhangs von T'' sei O''. Es ist Q ein Querschnitt von T', so daß nach Satz IV

$$O'' = O' - 1. \tag{4}$$

Ferner ist der aus R und Q bestehende Schnitt ein Querschnitt von T, so daß nach Satz IV $O'' = O - 1$. Durch Vergleichen mit (4) folgt $O' = O$, also die Behauptung.

Satz VI. Durch ein Loch wird die Ordnung des Zusammenhangs einer berandeten Fläche um 1 erhöht.

Die Fläche heiße wieder T und die aus ihr durch Anbringung eines Loches L entstehende Fläche T', die Ordnungen des Zusammenhangs der Flächen O und O'. Wir verbinden den einen Endpunkt von L mit einem Punkte des Randes von T durch einen Schnitt Q, der weder L noch den Rand von T schneidet. Die dadurch aus T' entstehende Fläche heiße T'', die Ordnung ihres Zusammenhanges O''. Es ist Q ein Querschnitt von T', so daß nach IV.

$$O'' = O' - 1. \tag{5}$$

Ferner ist der aus L und Q bestehende Schnitt ein Riß von T, so daß nach V. $O'' = O$. Durch Vergleichen mit (5) finden wir die Behauptung $O' = O + 1$.

Satz VII. Jede einfach zusammenhängende Fläche wird durch eine geschlossene sich selbst und die Grenze nicht treffende Linie in zwei nicht miteinander zusammenhängende Teile zerlegt, von denen der eine einfach, der andere zweifach zusammenhängend ist. Wir nennen den einfach zusammenhängenden Teil das Innere, den anderen das Äußere der geschlossenen Linie.

Die Fläche heiße wieder T, die aus ihr durch Zerschneiden längs der geschlossenen Linie R hervorgehende Fläche T'; die Ordnungen ihrer Zusammenhänge seien O und O'. Nach Voraussetzung ist $O = 1$. Der Schnitt R ist ein Riß von T, so daß nach V. $O' = O = 1$ ist. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, es zerfalle T nicht in zwei getrennte Stücke. Dann können wir von der einen Seite von R nach der anderen gelangen, ohne T' zu verlassen oder die Grenze von T zu überschreiten. Es sei Q ein Weg, der von einem Punkte P von R wieder nach P führt, aber auf die andere Seite von R, und zwar ohne R oder die Grenze von T zu treffen. Q zerlegt T nicht in zwei getrennte Teile, da wir von der einen Seite von Q auf die andere kommen können, ohne Q oder die Grenze von T zu überschreiten; wir brauchen zu diesem Zwecke nur der Linie R entlang zu wandern. Die aus T' durch Zerschneiden längs Q entstehende

Fläche T'' besteht daher aus einem Stück und die Ordnung O'' ihres Zusammenhanges ist größer als Null. Es ist aber Q ein Querschnitt von T'' und daher nach IV. $O'' = O' - 1 = 0$, was dem eben gefundenen Ergebnis $O'' > 0$ widerspricht. Es muß daher T' durch R in zwei getrennte Teile zerfallen.

Die beiden Teile mögen T_1 und T_2 heißen, die Ordnungen ihrer Zusammenhänge O_1 und O_2. Zerfällt T_k $(k = 1, 2)$ durch q_k Querschnitte in n_k einfach zusammenhängende Flächen, so zerfällt T' durch $q_1 + q_2$ Querschnitte in $n_1 + n_2$ einfach zusammenhängende Flächen, so daß nach Definition

$$O_1 = q_1 - n_1 + 2\,, \qquad O_2 = q_2 - n_2 + 2\,, \qquad O' = (q_1 + q_2) - (n_1 + n_2) + 2\,,$$

woraus folgt

$$O' = O_1 + O_2 - 2\,. \tag{6}$$

Andererseits ist aber, wie wir schon bemerkt haben, $O' = O = 1$. Wir schließen daher aus (6)

$$O_1 + O_2 = 3\,. \tag{7}$$

Da die Flächen T_1 und T_2 jede aus einem Stück bestehen, so sind O_1 und O_2 beide größer als Null, so daß wir aus (7) folgern, daß, wie behauptet, die eine der beiden Zahlen O_1, O_2 gleich 1 und die andere gleich 2 ist.

Satz VIII. Eine aus einem Stück bestehende mehrfach zusammenhängende Fläche läßt sich durch eine endliche Zahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegen.

Da die Fläche nicht einfach zusammenhängend ist, so können wir in ihr einen Querschnitt ziehen, der sie nicht zerlegt. Dadurch wird nach IV. die Ordnung ihres Zusammenhanges um 1 erniedrigt. Ist die so erhaltene Fläche noch nicht einfach zusammenhängend, so können wir auch in ihr einen Querschnitt ziehen, der sie nicht zerlegt, wodurch wieder die Ordnung des Zusammenhangs um 1 verringert wird. Ist die so entstehende Fläche noch nicht einfach zusammenhängend, so können wir in derselben Weise fortfahren. Da die Ordnung des Zusammenhangs immer weiter, und zwar jedesmal um 1 erniedrigt wird, und die Ordnung eine positive ganze Zahl ist, so muß schließlich nach einer endlichen Zahl von Querschnitten eine einfach zusammenhängende Fläche entstehen.

§ 6. Ordnung des Zusammenhangs einer Riemannschen Fläche.

Satz IX. Die Ordnung des Zusammenhangs einer m-blättrigen Riemannschen Fläche ist

$$w - 2m + 3 = 2p + 1\,,$$

wenn w die Verzweigungszahl der Fläche und p das Geschlecht des zugehörigen algebraischen Körpers ist.

Zum Beweise zerlegen wir die Riemannsche Fläche, die mit T bezeichnet sei, in die m einfach zusammenhängenden Ebenen $E_1, E_2, \ldots E_m$, aus denen wir sie zusammengesetzt haben. Die Ebenen E_k sind einander kongruent und sind längs h Linien $l_1, l_2, \ldots l_h$ zerschnitten, die von einem Punkte $\mathfrak{B}_0$ nach den Punkten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ gehen, und sich weder selbst noch gegenseitig treffen. Die Fläche T entsteht aus diesen m Ebenen, indem man die Ränder der Schnitte l passend miteinander verbindet. Die Fläche T hat keinen Rand. Zerschneiden wir sie längs der Linien l, so erhalten wir wieder die m einfach zusammenhängenden Ebenen E. Wir wollen den Punkten $\mathfrak{B}_k$ und den Schnitten l_k einen Index anfügen, der angeben soll, in welcher Ebene der Punkt oder der Schnitt liegt. Jeder der Punkte $\mathfrak{B}_k$ und Schnitte l_k kommt ja m-mal vor, einmal in jeder Ebene. Die Punkte $\mathfrak{B}_{01}, \mathfrak{B}_{02}, \ldots \mathfrak{B}_{0m}$ liegen in T getrennt, während die anderen Punkte $\mathfrak{B}_{k\lambda}$ sich zum Teil zu Verzweigungspunkten vereinigen. Von jedem der Punkte $\mathfrak{B}_{0\lambda}$ gehen h Linien l aus, von $\mathfrak{B}_{0\lambda}$ die Linien $l_{1\lambda}, l_{2\lambda}, \ldots l_{h\lambda}$.

Wir bezeichnen die gesuchte Ordnung des Zusammenhangs von T mit O. Zunächst zerschneiden wir T von den m Punkten $\mathfrak{B}_{0\lambda}$ aus längs eines kleinen Stückes der Linien $l_{1\lambda}$, so daß in T m Löcher entstehen. Die dadurch aus T hervorgehende Fläche heiße T', die Ordnung ihres Zusammenhangs O'. Von den m Löchern, die T' hat, dient eins dazu, T in eine berandete Fläche zu verwandeln. Die durch dies Loch aus T entstehende Fläche hat nach Definition dieselbe Ordnung des Zusammenhangs wie T. Die anderen $m - 1$ Löcher sind aber in eine berandete Fläche geschnitten, so daß nach Satz VI durch jedes von ihnen die Ordnung um 1 erhöht wird. Daher ist $O' = O + m - 1$.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein α-facher Verzweigungspunkt von T. In ihm seien etwa die Punkte $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{12}, \ldots \mathfrak{B}_{1\alpha}$ vereinigt. Von $\mathfrak{p}$ aus gehen nach den Punkten $\mathfrak{B}_{01}, \mathfrak{B}_{02}, \ldots \mathfrak{B}_{0\alpha}$ die Linien $l_{11}, l_{12}, \ldots l_{1\alpha}$. Zerschneiden wir T längs dieser Linien, so ist der erste Schnitt ein Riß, da er von dem im Innern von T' liegenden Punkt $\mathfrak{p}$ nach einem Punkte der Grenze von T' geht, nämlich nach einem der kleinen Löcher von T'. Nach Satz V wird dadurch die Ordnung von T' nicht geändert. Der zuerst ausgeführte Schnitt ist ein Teil der Grenze der durch ihn aus T' entstehenden Fläche, so daß nunmehr $\mathfrak{p}$ ein Punkt der Grenze ist. Die anderen $\alpha - 1$ Schnitte sind daher Querschnitte, so daß nach Satz IV durch jeden von ihnen die Ordnung um 1 erniedrigt wird. Daher wird durch das Zerschneiden von T' längs der von einem α-fachen Verzweigungspunkt ausgehenden Linien l die Ordnung des Zusammenhangs um $\alpha - 1$ erniedrigt. Dies gilt auch, wenn $\alpha = 1$, wenn also $\mathfrak{p}$ ein gewöhnlicher Punkt der Fläche ist. Da für die anderen Verzweigungspunkte dasselbe gilt, so wird durch Zerschneiden von T' längs aller Linien l die Ordnung O' um $\sum(\alpha - 1) = w$ erniedrigt.

Die Ordnung der entstehenden Fläche ist daher $O' - w = O + m - 1 - w$. Die schließlich entstehende Fläche besteht aber, wie wir schon oben festgestellt haben, aus den m einfach zusammenhängenden Ebenen E, die untereinander nicht verbunden sind. Die Ordnung des Zusammenhangs dieser Fläche ist, wie wir schon in §4 berechnet haben, gleich $-m + 2$, so daß wir die Gleichung erhalten

$$O + m - 1 - w = -m + 2 ,$$

aus der sich die Behauptung ergibt.

§ 7. Kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche.

Eine Riemannsche Fläche ist also im Falle $p = 0$ einfach zusammenhängend, in allen anderen Fällen aber mehrfach, und zwar ist die Ordnung des Zusammenhangs immer ungrade. Zur Untersuchung der Integrale von Differentialen des zu einer Riemannschen Fläche gehörenden algebraischen Körpers ist es notwendig, die Fläche durch geeignete Quer-

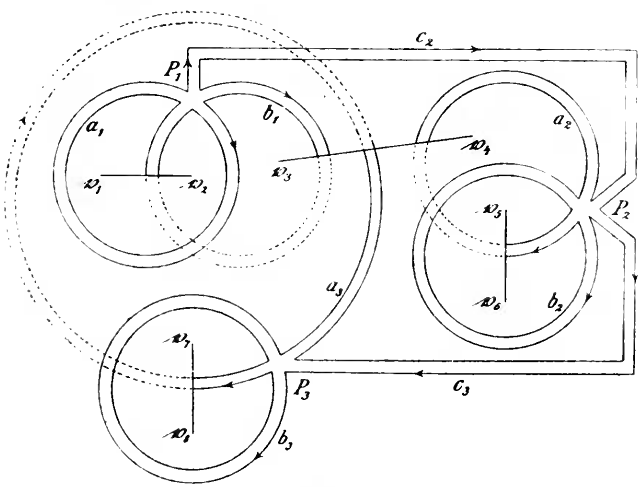


Abb. 35

schnitte in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Die Zahl der dazu notwendigen Querschnitte ist $2p$, also immer eine grade Zahl. Es ist am besten für unseren Zweck, die Fläche in folgender, der sogenannten **kanonischen**, Art zu zerschneiden. Man vergleiche die Abb. 35, in der die beiden Ränder der Schnitte der Deutlichkeit wegen getrennt gezeichnet sind.

Die Fläche heiße wieder T, die Ordnung ihres Zusammenhangs sei $O = 2p + 1$, und es sei $p > 0$. Wir punktieren T zunächst, und zwar bei einem gewöhnlichen Punkte P_1 der Fläche. Wir zerschneiden T dann längs eines Querschnittes a_1, der T nicht in zwei getrennte Teile zerlegt. Die entstehende Fläche heiße T_1. Der Querschnitt beginnt bei P_1 und wir können ihn auch in P_1 enden lassen. Wenn er nämlich nicht in P_1 endet, sondern in einem seiner Punkte, so können wir den Endpunkt auf a_1 stetig verschieben bis nach P_1. Durch diese stetige Änderung von a_1 kann T_1 nicht zerfallen. Der Querschnitt a_1 bildet zusammen mit dem kleinen bei A_1 angebrachten Loch eine geschlossene Kurve und wir wollen im folgenden unter a_1 diese geschlossene Kurve verstehen. Da T durch a_1 nicht in zwei Teile zerlegt wird, so gibt es einen Weg in T, der von irgendeinem Punkte zu irgendeinem anderen führt, ohne a_1 zu schneiden, also auch einen Weg b_1, der von P_1 nach P_1 führt, und dabei von der einen Seite von a_1 auf die andere. Wie zerschneiden T_1 längs b_1 und nennen die entstehende Fläche T_2. Der Querschnitt b_1 zerstückt T_1 nicht, da man von der einen Seite von b_1 auf die andere gelangen kann, ohne a_1 oder b_1 zu überschreiten. Man braucht zu diesem Zwecke nur den Querschnitt a_1 entlang zu gehen. Wir setzen für die Querschnitte a_1 und b_1 eine positive Richtung fest und unterscheiden zwischen ihrem rechten und linken Ufer. Wir bezeichnen die rechten Ufer mit $a_{1\varrho}$, $b_{1\varrho}$ und die linken mit $a_{1\lambda}$, $b_{1\lambda}$. Die Ufer der Schnitte a_1, b_1 schließen sich zu einer einzigen geschlossenen Kurve zusammen, und zwar, wenn man die Richtung von a_1 und b_1 so wählt wie in der Abb. 35, in der Reihenfolge $b_{1\lambda}$, $a_{1\varrho}$, $b_{1\varrho}$, $a_{1\lambda}$. Es hat demnach T_2 eine einzige Begrenzungslinie. Der Schnitt a_1 ist ein Querschnitt von T und der Schnitt b_1 einer von T_1, so daß die Ordnung des Zusammenhangs von T_2 um 2 kleiner ist als die von T, also gleich $2p-1$. Ist daher $p=1$, so ist T_2 einfach zusammenhängend. Beispiele liefern außer Abb. 35 auch die Abbildungen 26 und 29, die Riemannsche Flächen vom Geschlechte 1 darstellen, auf denen zwei geschlossene Kurven a und b gezeichnet sind, die sich nur in einem Punkte P schneiden.

Ist $p>1$, so ist T_2 noch mehrfach zusammenhängend. Es gibt also einen Querschnitt Q, der T_2 nicht in zwei getrennte Teile zerlegt. Da T_2 nur eine Begrenzungslinie hat und auf ihr der Anfangspunkt von Q liegt, so können wir durch stetige Änderung von Q erreichen, daß der Anfangspunkt mit P_1 zusammenfällt. Wenn der Endpunkt von Q nicht schon auf Q liegt, so können wir ihn durch stetige Verschiebung erst nach P_1 und dann nach einem Punkte von Q bringen, so daß Q ein Rückkehrschnitt wird. Der Endpunkt von Q heiße P_2. Wir bezeichnen das von P_1 bis P_2 reichende Stück von Q mit c_2 und das von P_2 bis wieder nach P_2 gehende Stück mit a_2. Die Fläche, die aus T_2 durch Zerschneiden längs c_2 und a_2 entsteht, heiße T_3. Da T_3 aus einem Stücke besteht, so gibt es in T_3 immer einen Weg, der von einem Punkte in T_3 nach irgendeinem anderen Punkte von T_3 führt, also auch einen Weg b_2, der von P_2 wieder nach P_2 geht, aber von der einen Seite von a_2 auf die andere. Zerschneiden wir T_3 längs b_2, so kann der so erhaltene Querschnitt die Fläche T_3 nicht zerstücken, da man innerhalb T_3 von der einen Seite von b_2 auf die andere kommen kann, ohne b_2 zu überschreiten. Man braucht zu diesem Zwecke nur die Linie a_2 entlang zu gehen. Die durch den Querschnitt b_2 aus T_3 hervorgehende Fläche heiße T_4. Wir setzen auch für die Linien c_2, a_2, b_2 eine positive Richtung fest und bezeichnen ihre rechten Ufer mit $c_{2\varrho}$, $a_{2\varrho}$, $b_{2\varrho}$, ihre linken mit $c_{2\lambda}$, $a_{2\lambda}$, $b_{2\lambda}$. Die Ufer der bisher ausgeführten Querschnitte bilden zusammen eine einzige geschlossene Kurve, und zwar, wenn man die positiven Richtungen wie in der Abb. 35 wählt, in der Reihenfolge $b_{1\lambda}$, $a_{1\varrho}$, $b_{1\varrho}$, $a_{1\lambda}$, $c_{2\lambda}$, $b_{2\lambda}$, $a_{2\varrho}$, $b_{2\varrho}$, $a_{2\lambda}$, $c_{2\varrho}$. Die Fläche T_4 hat daher nur eine Begrenzungslinie. Da sie aus T durch vier Querschnitte hervorgeht, so ist die Ordnung ihres Zusammenhanges um 4 kleiner als die von T, also gleich $2p - 3$, so daß T_4 einfach zusammenhängend ist, wenn $p = 2$.

Ist $p > 2$, so ist T_4 noch mehrfach zusammenhängend. Wir können dann in derselben Weise fortfahren und noch ein oder mehrere Male je drei Schnitte der Art wie die Schnitte c_2, a_2, b_2 ausführen, wodurch die Ordnung des Zusammenhangs jedesmal um 2 erniedrigt wird, so daß wir nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einer einfach zusammenhängenden Fläche kommen. Das im ganzen ausgeführte Querschnittsystem können wir folgendermaßen beschreiben. Auf der Riemannschen Fläche T vom Geschlechte p kann man p Paare von geschlossenen Kurven a_k, b_k finden, so daß die beiden Kurven eines Paares sich in einem und nur einem Punkte schneiden, während die Kurven verschiedener Paare keinen Punkt gemeinsam haben. Der Punkt, in dem a_k und b_k sich schneiden, heiße P_k. Man kann dann ferner noch $p - 1$ Linien $c_2, c_3, \ldots c_p$ in T zeichnen, die weder sich selbst noch sich gegenseitig noch die Linien a_k, b_k schneiden, und zwar so, daß c_l den Punkt P_{l-1} mit P_l verbindet. Zerschneidet man T längs der Linien a_k, b_k, c_l, so entsteht aus T eine einfach zusammenhängende Fläche, die mit T' bezeichnet werden soll. Diese Fläche hat wie jede berandete einfach zusammenhängende Fläche nur eine Begrenzungslinie. Wählen wir die positive Richtung der Schnitte a_k, b_k, c_l in passender Weise und bezeichnen die rechten Ufer von a_k, b_k, c_l mit $a_{k\varrho}$, $b_{k\varrho}$, $c_{k\varrho}$, die linken mit $a_{k\lambda}$, $b_{k\lambda}$, $c_{l\lambda}$, so ist die Begrenzungslinie von T' aus den Ufern der ausgeführten Schnitte in folgender Reihenfolge zusammengesetzt: $b_{1\lambda}$, $a_{1\varrho}$, $b_{1\varrho}$, $a_{1\lambda}$, $c_{2\lambda}$, $b_{2\lambda}$, $a_{2\varrho}$, $b_{2\varrho}$, $a_{2\lambda}$, $c_{3\lambda}$, $\ldots$ $b_{p\lambda}$, $a_{p\varrho}$, $b_{p\varrho}$, $a_{p\lambda}$, $c_{p\varrho}$, $c_{p-1\,\varrho}$, $\ldots$ $c_{2\varrho}$.

Dreizehntes Kapitel.

Die Integrale.

§ 1. Definition der Integrale.

Jedes Differential des Körpers läßt sich in der Form schreiben $R\,dx$, wo R eine rationale Funktion von x, y ist. Wie wir in § 6, Kap. VI gesehen haben, gehört zu jedem Differential ein Divisor der Differentialklasse, der angibt, wie das Differential Null und unendlich wird. Dieser Divisor heißt der Differentialteiler des Differentials. Umgekehrt gehört zu jedem Divisor der Differentialklasse ein bis auf einen konstanten Faktor bestimmtes Differential des Körpers.

Zur Definition und zur Untersuchung der Eigenschaften der Integrale von Differentialen des Körpers benutzen wir die über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche, die wir mit T bezeichnen wollen. Es seien $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}$ zwei Punkte von T und s ein Weg, der beide verbindet. Wir setzen voraus, daß weder $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}$ noch ein Punkt von s ein Verzweigungspunkt oder eine Unendlichkeitsstelle des Differentials $R\,dx$ ist. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

1. Es liege $\mathfrak{p}$ und der ganze Weg s in einer Umgebung U von $\mathfrak{p}_0$, die keine Unendlichkeitsstelle von $R\,dx$ enthält. Hat x in $\mathfrak{p}_0$ den Wert a, so ist innerhalb U

$$R = \mathfrak{P}(x-a),$$

wo $\mathfrak{P}(x-a)$ eine in U überall konvergierende gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$ ist. Wir können $\int \mathfrak{P}\,dx$ daher bestimmen, indem wir die Reihe gliedweise integrieren. Wir erhalten so eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$, die auch in U konvergiert; wir bezeichnen sie mit $P(x)$. Um sie vollkommen zu bestimmen, setzen wir fest, daß die Integrationskonstante so bestimmt werden soll, daß $P(x)$ in $\mathfrak{p}_0$ den Wert Null annimmt, daß also $P(a) = 0$. Es ist dann

$$\int_a^x \mathfrak{P}(x-a)\,dx = P(x).$$

Indem wir unter x den Wert verstehen, den x in $\mathfrak{p}$ hat, definieren wir

$$\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} {}_s\, R\,dx = \int_a^x \mathfrak{P}(x-a)\,dx = P(x)$$

und nennen das so definierte Integral $\int R\,dx$ das von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$ über s erstreckte Integral. Da bei der Definition von dem Wege s kein Gebrauch gemacht ist, so ist der Wert des Integrals in dem betrachteten Falle 1. von der Wahl des Weges unabhängig.

2. Ist die Voraussetzung des vorigen Falles nicht erfüllt, so wählen wir auf s eine Reihe von r Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$, daß für jedes Stück $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r\mathfrak{p}$ des Integrationsweges s die Voraussetzungen des Falles 1 erfüllt sind. Wir wollen der Gleichmäßigkeit wegen $\mathfrak{p}$ auch mit $\mathfrak{p}_{r+1}$ bezeichnen. Es lasse sich also eine Umgebung U_k des Punktes $\mathfrak{p}_k$ so angeben, daß $\mathfrak{p}_{k+1}$ und das zwischen $\mathfrak{p}_k$ und $\mathfrak{p}_{k+1}$ liegende Stück von s ganz in U_k liegt. Nimmt x in $\mathfrak{p}_k$ den Wert a_k an, so ist in U_k

$$R = \mathfrak{P}_k(x - a_k)\,,$$

wo $\mathfrak{P}_k(x - a_k)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$ ist. Das Integral $\int \mathfrak{P}_k\, dx$ können wir durch gliedweise Integration berechnen. Die dadurch erhaltene Reihe sei mit $P_k(x)$ bezeichnet; sie sei vollkommen bestimmt durch die Bedingung, daß sie für $k > 0$ in $\mathfrak{p}_k$ denselben Wert haben soll wie $P_{k-1}(x)$ und daß im besonderen $P_0(x)$ in $\mathfrak{p}_0$ verschwinden soll. Es soll also sein

$$P_0(a_0) = 0\,, \quad P_k(a_k) = P_{k-1}(a_k)\,, \quad (k > 0)\,. \tag{1}$$

Wir definieren dann

$$\underset{s}{\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}}} R\,dx = \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx + \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} R\,dx + \cdots + \int_{\mathfrak{p}_r}^{\mathfrak{p}_{r+1}} R\,dx = \int_{a_0}^{a_1} \mathfrak{P}_0\,dx + \int_{a_1}^{a_2} \mathfrak{P}_1\,dx + \cdots + \int_{a_r}^{a_{r+1}} \mathfrak{P}_r\,dx$$

$$= [P_0(a_1) - P_0(a_0)] + [P_1(a_2) - P_1(a_1)] + \cdots + [P_r(a_{r+1}) - P_r(a_r)]\,.$$

Unter Benutzung der Gleichungen (1) wird, wenn wir wieder unter x den Wert von x in $\mathfrak{p}$ verstehen, wenn wir also $a_{r+1} = x$ setzen,

$$\underset{s}{\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}}} R\,dx = P_r(x)\,.$$

In dem U_k und U_{k-1} gemeinsamen Gebiet, das mit G_k bezeichnet sei, ist

$$\frac{dP_k}{dx} = \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_{k-1} = \frac{dP_{k-1}}{dx}\,,$$

da $\mathfrak{P}_k$ und $\mathfrak{P}_{k-1}$ beide in G_k gleich R sind und R in der Riemannschen Fläche T eindeutig ist. Daher können sich $P_k(x)$ und $P_{k-1}(x)$ in G nur durch einen konstanten Summanden unterscheiden. Da sie aber nach (1) in $\mathfrak{p}_k$ übereinstimmen, so sind sie in dem ihnen gemeinsamen Konvergenzgebiet G_k miteinander identisch. Mit anderen Worten, es ist $P_k(x)$ die analytische Fortsetzung von $P_{k-1}(x)$ und damit $P_r(x)$ die analytische Fortsetzung von $P_0(x)$ längs des Weges s. Daraus schließen wir, daß der Wert des von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$ längs s erstreckten Integrals von $R\,dx$ wohl von s abhängen kann, aber nicht von der Wahl der Hilfspunkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$.

§ 2. Verhalten der Integrale in der Umgebung einer Stelle.

Während wir die untere Grenze $\mathfrak{p}_0$ festhalten wollen, nehmen wir die obere $\mathfrak{p}$ als beweglich an, betrachten also das Integral als Funktion der oberen Grenze und bezeichnen es in folgender Weise

$$\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} R\,dx = J(x,y) = J(\mathfrak{p})\,.$$

Wir wollen zunächst sehen, wie sich J in der Umgebung irgendeines Punktes der Riemannschen Fläche T verhält. Dazu müssen wir die Definition von J ein wenig erweitern. Es sei $\mathfrak{q}$ der Punkt von T, in dessen Umgebung wir das Verhalten von J untersuchen wollen. Es sei U eine solche Umgebung von $\mathfrak{q}$, in der, abgesehen vielleicht von $\mathfrak{q}$ selbst, keine Unendlichkeitsstelle von $R\,dx$ liegt. Wir nehmen an, daß die obere Grenze von J, nämlich der Punkt $\mathfrak{p}$, so nahe bei $\mathfrak{q}$ liegt, daß er sich innerhalb von U befindet. Es sei ferner $\mathfrak{p}_1$ ein in U liegender Punkt des Integrationsweges s. Wir lassen das Stück $\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}_1$ von s unverändert, während wir $\mathfrak{p}$ und das Stück $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}$ von s als veränderlich annehmen, aber so, daß es immer in U bleibt. Ist t eine Funktion des Körpers, die in $\mathfrak{q}$ von der ersten Ordnung Null wird, so ist in U

$$R\,dx = \left[c_\lambda t^{-\lambda} + c_{\lambda-1} t^{-\lambda+1} + \cdots + c_1 t^{-1} + \mathfrak{P}(t)\right] dt = Q(t)\,dt\,,$$

wo $\mathfrak{P}(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist. Wir haben dabei angenommen, daß $R\,dx$ in $\mathfrak{q}$ von der Ordnung λ unendlich wird. Wir setzen

$$J = {}_{(s)}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} R\,dx = {}_{s}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx + \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}} Q(t)\,dt\,.$$

Das erste Integral rechts in dieser Gleichung ist eine Konstante, das zweite können wir durch gliedweise Integration berechnen. Wir erhalten dadurch

$$(2) \qquad J = {}_{s}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} R\,dx = -\frac{c_\lambda}{\lambda-1}\,t^{-\lambda+1} - \frac{c_{\lambda-1}}{\lambda-2}\,t^{-\lambda+2} - \cdots - c_2 t^{-1}$$
$$+ c_1\,lg\,t + P(t)\,.$$

wo $P(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist, die in U konvergiert. Wir ersehen daraus, daß sich J in der Umgebung einer Stelle der Riemannschen Fläche ähnlich verhält wie die Funktionen des Körpers. Im allgemeinen läßt sich J in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{q}$ in eine nach steigenden ganzen Potenzen von t fortschreitende Potenzreihe entwickeln, wenn t eine Funktion des Körpers ist, die in $\mathfrak{q}$ von der ersten Ordnung Null wird. Nur wenn $\mathfrak{q}$ eine der in endlicher Zahl vorhandenen Unendlichkeitsstellen von Rdx ist, kann diese Entwicklung eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthalten. Das ist alles so wie bei den Funktionen des Körpers. Wenn aber das Residuum von $R\,dx$ an der Stelle $\mathfrak{q}$ von Null verschieden ist, so enthält die Entwicklung ein Glied mit $\log t$. Wir ersehen weiter aus (2), daß J für $\lambda > 1$ von der Ordnung $\lambda - 1$ unendlich wird in $\mathfrak{q}$, wenn $R\,dx$ dort von der Ordnung λ unendlich wird.

Es ist hiernach J in der Umgebung aller Stellen von T eindeutig, an denen $R\,dx$ kein Residuum hat. Hat dagegen $R\,dx$ an einer Stelle $\mathfrak{q}$ ein Residuum r, so ändert sich J um $2\pi i r$, wenn $\mathfrak{p}$ den Punkt $\mathfrak{q}$ einmal in positivem Sinne umkreist.

Es habe $R\,dx$ in $\mathfrak{q}$ kein Residuum, sodaß $J(\mathfrak{p})$ in U eindeutig ist. Es seien $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ zwei in U liegende Punkte und γ ein ganz in U verlaufender, $\mathfrak{q}_1$ mit $\mathfrak{q}_2$ verbindender Weg. Es sei ferner s_1 ein in U verlaufender Weg, der $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{q}_1$ verbindet. Dann ist nach der Definition von $J(\mathfrak{p})$,

$$J(\mathfrak{q}_2) = {}_{s}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx + {}_{s_1}\!\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{q}_1} R\,dx + {}_{\gamma}\!\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} R\,dx\,.$$

$$J(\mathfrak{q}_1) = {}_{s}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx + {}_{s_1}\!\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{q}_1} R\,dx\,.$$

so daß

$${}_{\gamma}\!\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} R\,dx = J(\mathfrak{q}_2) - J(\mathfrak{q}_1)\,.$$

Da $J(\mathfrak{p})$ eindeutig in U ist, so folgt hieraus, wenn wir im besonderen $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ annehmen, also unter γ einen in U verlaufenden geschlossenen Weg verstehen,

(3) $${}_{\gamma}\!\int R\,dx = 0\,.$$

§ 3. Verhalten der Integrale auf der Riemannschen Fläche.

Wir betrachten jetzt J in der ganzen Riemannschen Fläche T. Wir verwandeln zunächst T durch kanonische Zerschneidung, wie es am Ende des vorigen Kapitels auseinandergesetzt ist, in eine einfach zusammenhängende Fläche T'. Es möge $R\,dx$ an den Stellen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_\iota$ von Null verschiedene Residuen haben. Wir ziehen dann von diesen Punkten aus Linien $d_1, d_2, \ldots d_\iota$ nach P_1, die innerhalb T' verlaufen und sich weder selbst, noch untereinander schneiden. Wir zerschneiden T' längs dieser Linien und nennen die so entstehende Fläche T''. Da die Schnitte d_i nach der im vorigen Kapitel, § 1 angewandten Bezeichnung Risse sind, so wird durch sie die Ordnung des Zusammenhangs nicht geändert, so daß auch T'' einfach zusammenhängt. Wir betrachten zunächst das Verhalten von J in dieser einfach zusammenhängenden Fläche T''. Wir erhalten dann, da die obere Grenze in der unzerschnittenen Fläche T nicht frei beweglich ist, nicht die ganze Funktion $J(\mathfrak{p})$, sondern nur einen Teil, den wir weiter unten mit $J^*(\mathfrak{p})$ bezeichnen werden. Wir werden zeigen, daß J in dieser Fläche eine eindeutige analytische Funktion ist, die sich in ihrem Innern überall wie eine Funktion des Körpers verhält.

Aus der Definition von J ergeben sich folgende einfache Sätze. Es ist

$$\text{(4)} \qquad {}_{s}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx = - {}_{s}\!\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_0} R\,dx,$$

wenn die Integrale über denselben Weg s erstreckt werden, und es ist

$$\text{(5)} \qquad \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} R\,dx = \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx + \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} R\,dx + \cdots + \int_{\mathfrak{p}_r}^{\mathfrak{p}} R\,dx,$$

wenn die Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_r$ auf dem Wege s liegen, auf dem das links stehende Integral erstreckt wird, während die rechts stehenden Integrale über die zwischen den Punkten $\mathfrak{p}_k$ liegenden Teile von s zu erstrecken sind.

Wir beweisen den Satz von der Eindeutigkeit von $J(p)$ in T'' indirekt, nehmen also an, er sei falsch. Dann gibt es in T'' zwei Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ und zwei sie verbindende Wege s_1 und s_2, so daß die von $\mathfrak{p}_1$ nach $\mathfrak{p}_2$ über s_1 und s_2 erstreckten Integrale von $R\,dx$ einander nicht gleich sind, daß also

$${}_{s_1}\!\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} R\,dx - {}_{s_2}\!\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} R\,dx \neq 0.$$

Bezeichnen wir den aus s_1 und s_2 bestehenden geschlossenen Weg mit γ, so folgt nach (4) und (5) hieraus

$$\text{(6)} \qquad {}_{s_1}\!\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} R\,dx + {}_{s_2}\!\int_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx = {}_{\gamma}\!\int R\,dx \neq 0.$$

Ist daher der zu beweisende Satz falsch, so gibt es in T'' einen geschlossenen Weg γ, sodaß das über γ erstreckte Integral von $R\,dx$ von Null verschieden ist. Durch γ wird T'' in zwei Teile zerlegt, von denen nach Satz VII in Kap. XII, § 2 der eine, den wir das Innere von γ nennen, einfach zusammenhängend ist. Ziehen wir durch das Innere von γ einen Querschnitt q, so wird γ in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt, die mit G_1 und G_1' bezeichnet seien; ihre Grenzen seien mit γ_1 und γ_1' benannt. Es besteht γ_1 aus einem Teile γ' von γ und aus q; ebenso besteht γ_1' aus einem Teile γ'' von γ und aus q. Sind $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ die Endpunkte von q, so ist bei passender Wahl der Bezeichnung

$${}_{\gamma}\!\int R\,dx = {}_{\gamma'}\!\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} R\,dx + {}_{\gamma''}\!\int_{\mathfrak{q}_2}^{\mathfrak{q}_1} R\,dx = {}_{(\gamma')}\!\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} R\,dx + {}_{q}\!\int_{\mathfrak{q}_2}^{\mathfrak{q}^1} R\,dx + {}_{(\gamma'')}\!\int_{\mathfrak{q}_2}^{\mathfrak{q}_1} R\,dx$$
$$+ {}_{(q)}\!\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} R\,dx = {}_{(\gamma_1)}\!\int R\,dx + {}_{(\gamma_1')}\!\int R\,dx.$$

Zufolge der Annahme (6) ist hiernach mindestens eins der über γ_1 und γ_1' erstreckten Integrale von $R\,dx$ von Null verschieden. Es sei etwa das erste nicht Null, so daß

$$(7) \qquad {}_{\gamma_1}\!\int R\,dx \neq 0\,.$$

Die Ungleichheit (7) ist genau von derselben Form wie die Ungleichheit (6). Aber die Kurve γ_1 schließt nur einen Teil des Gebietes ein, das γ einschließt. Wir können in derselben Weise fortfahren und weitere geschlossene Kurven $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ herleiten, so daß jede von ihnen einen Teil des Gebietes einschließt, das die vorhergehende begrenzt, und daß das über irgendeine dieser Kurven erstreckte Integral von $R\,dx$ von Null verschieden ist. Hierdurch erhalten wir nach einer endlichen Zahl von Schnitten eine geschlossene Kurve γ_n, die mit ihrem Innern ganz in einer Umgebung U eines Punktes $\mathfrak{q}$ von T'' liegt, in der, abgesehen vielleicht von $\mathfrak{q}$ selbst, keine Unendlichkeitsstelle von $R\,dx$ liegt. Aber wir haben oben (vgl. (3)) gesehen, daß in diesem Falle das über γ_n erstreckte Integral von $R\,dx$ gleich Null sein muß. Es ergibt sich also ein Widerspruch, woraus wir schließen, daß unsere Annahme falsch ist, daß daher J in T'' eine eindeutige Funktion der oberen Grenze ist. Wir nennen diese Funktion den Hauptwert des Integrals

$$J(\mathfrak{p}) = \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} R\,dx$$

und bezeichnen sie mit $J^*(\mathfrak{p})$. Sie ist innerhalb T'' eine eindeutige analytische Funktion, die im Innern von T'' als singuläre Stellen höchstens eine endliche Zahl von Polen hat.

Es seien $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ irgend zwei Punkte in T'' und s ein in T'' liegender Weg, der beide verbindet. Ist s' irgendein Weg, der in T'' von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}_1$ führt, so ist

$$(8) \qquad {}_{s}\!\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} R\,dx = {}_{s'}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_2} R\,dx - {}_{s'}\!\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} R\,dx = J^*(\mathfrak{p}_2) - J^*(\mathfrak{p}_1)\,.$$

§ 4. Die Periodizitätsmoduln.

Die Funktion J^* ist in T'' überall stetig; sie ist es also auch im allgemeinen in der unzerschnittenen Fläche T. Nur an den Querschnitten a_k, b_k, c_k, d_k kann J^* zweideutig und unstetig sein. Das wollen wir genauer untersuchen. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Punkt von a_1. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{a}_\rho$ oder mit $\mathfrak{a}_\lambda$, je nachdem wir ihn als auf dem rechten oder dem linken Ufer von a_1 liegend betrachten. Wir setzen

$$J^*(\mathfrak{a}_\lambda) - J^*(\mathfrak{a}_\rho) = A_1$$

und zeigen zunächst, daß A_1 konstant ist. Es folgt dies daraus, daß R in der unzerschnittenen Fläche T eindeutig ist, daß daher $R(\mathfrak{a}_\lambda) = R(\mathfrak{a}_\varrho)$ ist und

$$\frac{dA_1}{dx} = \frac{dJ^*(\mathfrak{a}_\lambda)}{dx} - \frac{dJ^*(\mathfrak{a}_\varrho)}{dx} = R(\mathfrak{a}_\lambda) - R(\mathfrak{a}_\varrho) = 0\,.$$

Wir finden dasselbe Ergebnis, wenn wir A_1 in folgender Weise berechnen. Nach (8) ist A_1 gleich dem von $\mathfrak{a}_\varrho$ nach $\mathfrak{a}_\lambda$ erstreckten Integral von $R\,dx$, wenn wir den im übrigen beliebigen Integrationsweg in T'' wählen. Wir wählen ihn in folgender Weise. Wir gehen von $\mathfrak{a}_\varrho$ in negativer Richtung längs a_1 nach P_1, dann in negativer Richtung längs b_1 bis wieder nach P_1 und schließlich längs a_1 in positiver Richtung nach $\mathfrak{a}_\lambda$. Die Integrale über den ersten und letzten Teil dieses Weges heben einander auf, da sie sich nur in der Richtung des Integrationsweges unterscheiden. Es ist daher

$$A_1 = {}_{(-b_1)}\!\int R\,dx\,.$$

wo durch das Minuszeichen angegeben werden soll, daß über b_1 in negativer Richtung zu integrieren ist. Ganz ebenso beweisen wir allgemeiner, wenn $\mathfrak{a}_k$ ein Punkt von a_k ist,

$$J^*(\mathfrak{a}_{k\lambda}) - J^*(\mathfrak{a}_{k\varrho}) = A_k = {}_{(-b_k)}\!\int R\,dx\,. \tag{9}$$

Es sei ferner $\mathfrak{b}_k$ ein Punkt von b_k; wir unterscheiden wieder zwischen $\mathfrak{b}_{k\varrho}$ und $\mathfrak{b}_{k\lambda}$. Die Differenz

$$J^*(\mathfrak{b}_{k\lambda}) - J^*(\mathfrak{b}_{k\varrho}) = B_k$$

ist nach (8) gleich dem von $\mathfrak{b}_{k\varrho}$ nach $\mathfrak{b}_{k\lambda}$ erstreckten Integral, wenn wir den Integrationsweg in T'' wählen. Wir wählen ihn so: Wir gehen von $\mathfrak{b}_{k\varrho}$ längs b_k in positiver Richtung bis P_k, dann in positiver Richtung längs a_k wieder nach P_k und schließlich in negativer Richtung längs b_k nach $\mathfrak{b}_{k\lambda}$. Die Integrale über den ersten und letzten Teil des Weges heben einander wieder auf, da sie sich wieder nur durch die Richtung des Integrationsweges unterscheiden. Es ist daher

$$J^*(\mathfrak{b}_{k\lambda}) - J^*(\mathfrak{b}_{k\varrho}) = B_k = {}_{(+a_k)}\!\int R\,dx\,. \tag{10}$$

Es sei $\mathfrak{c}_k$ ein Punkt von c_k. Die Differenz

$$J^*(\mathfrak{c}_{k\lambda}) - J^*(\mathfrak{c}_{k\varrho}) = C_k$$

berechnen wir, indem wir von $\mathfrak{c}_{k\varrho}$ nach $\mathfrak{c}_{k\lambda}$ auf folgendem Wege integrieren. Wir integrieren von $\mathfrak{c}_{k\varrho}$ längs c_k in negativem Sinne nach P_{k-1}, dann längs der Ränder der Querschnitte a_l, b_l, c_l, deren Index l kleiner ist als k, in der Reihenfolge $b_{k-1\lambda}$, $a_{k-1\varrho}$, $b_{k-1\varrho}$, $a_{k-1\lambda}$, $c_{k-1,\varrho}$, $b_{k-2,\lambda}$, $a_{k-2,\varrho}$, $b_{k-2,\varrho}$, $a_{k-2,\lambda}$, $c_{k-2,\varrho}$, ... $b_{1\lambda}$, $a_{1\varrho}$, $b_{1\varrho}$, $a_{1\lambda}$, $c_{2\lambda}$, $c_{3\lambda}$, ... $c_{k-1,\lambda}$ bis wieder nach P_{k-1} und integrieren schließlich von P_{k-1} nach $\mathfrak{c}_{k\lambda}$ längs c_k in positivem Sinne.

Die Integrale über die einzelnen Teile des Integrationsweges heben einander paarweise auf, da zu jedem dieser Integrale ein anderes vorkommt, das sich von ihm nur durch die Richtung des Integrationsweges unterscheidet. Es ist daher $C_k = 0$, so daß die Funktion J^* in $\mathfrak{c}_{k\varrho}$ und $\mathfrak{c}_{k\lambda}$ denselben Wert hat, sich also stetig ändert, wenn $\mathfrak{p}$ den Querschnitt c_l überschreitet.

Es sei schließlich $\mathfrak{d}_k$ ein Punkt auf d_k. Wir berechnen die Differenz

$$J^*(\mathfrak{d}_{k\lambda}) - J^*(\mathfrak{d}_{k\varrho}) = D_k,$$

indem wir von $\mathfrak{d}_{k\varrho}$ nach $\mathfrak{d}_{k\lambda}$ integrieren auf folgendem Wege. Wir integireren von $\mathfrak{d}_{k\varrho}$ in positiver Richtung längs d_k bis nahe an $\mathfrak{r}_k$, dann über einen kleinen Kreis um $\mathfrak{r}_k$ in positivem Sinne und schließlich längs d_k in negativer Richtung bis $\mathfrak{d}_{k\lambda}$. Die Integrale über den ersten und letzten Teil des Weges heben einander wieder auf. Das Integral über den kleinen Kreis ist, wie wir schon oben gesehen haben, gleich $2\pi i r_k$, wenn wir wieder mit r_k das Residuum von $R\,dx$ an der Stelle $\mathfrak{r}_k$ bezeichnen. Also ist

$$(11) \qquad J^*(\mathfrak{d}_{k\lambda}) - J^*(\mathfrak{d}_{k\varrho}) = D_k = 2\pi i r_k.$$

Wir wollen jetzt die obere Grenze $\mathfrak{p}$ des Integrals $J(\mathfrak{p})$ einmal den Querschnitt a_1 überschreiten lassen, und zwar in positiver Richtung, d. h. vom linken Ufer nach dem rechten. Dann aber soll $\mathfrak{p}$ in T'' bleiben. Wir bezeichnen die Funktion, die wir auf diese Weise erhalten und die wieder wegen der Beschränkung, die wir der oberen Grenze $\mathfrak{p}$ auferlegen, nur ein Teil der Funktion $J(\mathfrak{p})$ ist, mit $J_1(\mathfrak{p})$. Diese Funktion steht in sehr einfacher Beziehung zu dem Hauptwerte des Integrals $J(\mathfrak{p})$. Es ist, wenn der Integrationsweg den Querschnitt a_1 bei $\mathfrak{a}$ überschreitet,

$$J_1(\mathfrak{p}) = \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{a}_\lambda} R\,dx + \int_{\mathfrak{a}_\varrho}^{\mathfrak{p}} R\,dx = J^*(\mathfrak{a}_\lambda) - J^*(\mathfrak{p}_0) + J^*(\mathfrak{p}) - J^*(\mathfrak{a}_\varrho),$$

also, da $J^*(\mathfrak{p}_0) = 0$ und wegen (9)

$$J_1(\mathfrak{p}) = J^*(\mathfrak{p}) + A_1.$$

Allgemeiner schließen wir hieraus, da für die anderen Querschnitte a_k und für die Querschnitte b_k und d_k Ähnliches gilt:

Überschreitet die obere Grenze des Integrals $J(\mathfrak{p})$ den Querschnitt a_k α_k-mal in positiver und α'_k-mal in negativer Richtung, den Querschnitt b_k β_k-mal in positiver und β'_k-mal in negativer Richtung und schließlich den Querschnitt d_k δ_k-mal in positiver und δ'_k-mal in negativer Richtung, so ist

$$(12) \qquad J(\mathfrak{p}) = J^*(\mathfrak{p}) + \sum_{k=1}^{p} \left[(\alpha_k - \alpha'_k) A_k + (\beta_k - \beta'_k) B_k\right] + \sum_{k=1}^{r} (\delta_k - \delta'_k) D_k.$$

Es ist also $J(\mathfrak{p})$ unendlich vieldeutig in T. Die verschiedenen Werte, die

$J(\mathfrak{p})$ an derselben Stelle $\mathfrak{p}$ annehmen kann, unterscheiden sich voneinander durch ganzzahlige Vielfache der Konstanten A_k, B_k, D_k. Diese Konstanten heißen die **Periodizitätsmoduln** oder auch kürzer die **Perioden** des Integrals $J(\mathfrak{p})$; im besonderen heißen die A_k, B_k **zyklische** und die D_k **logarithmische Perioden**.

Es sei noch bemerkt, daß ein Integral $J(\mathfrak{p})$, dessen Perioden alle gleich Null sind, eine Funktion des Körpers sein muß.

Zunächst kann dann nämlich $J(\mathfrak{p})$ kein Residuum haben, da es sonst logarithmische Perioden hätte. Daher verhält sich J in T überall wie eine Funktion des Körpers und da J außerdem wegen des Verschwindens aller Perioden in T eindeutig ist, so ist es nach Satz VIII, §7, Kap. IV eine Funktion des Körpers.

§ 5. Integrale erster Gattung.

Man unterscheidet drei Arten von Integralen:

1. Integrale, die an keiner Stelle unendlich werden. Sie heißen **Integrale erster Gattung**.

2. Integrale, die nur unendlich werden wie die Funktionen des Körpers. Sie heißen **Integrale zweiter Gattung**.

3. Integrale, die sich nicht überall wie die Funktionen des Körpers verhalten, die also an mindestens einer Stelle eine Entwicklung haben, die einen Logarithmus enthält. Sie heißen **Integrale dritter Gattung**.

Wir wollen die Integrale dieser drei Gattungen etwas genauer betrachten. Dabei nehmen wir wieder die untere Grenze $\mathfrak{p}_0$ als fest und die obere $\mathfrak{p}$ als beweglich an.

Ein Integral wird dann und nur dann nirgends unendlich, wenn das integrierte Differential nirgends unendlich wird, wenn also das Differential von der ersten Gattung ist. Solcher Differentiale gibt es p linear unabhängige. Es seien $du_1, du_2, \ldots du_p$ p linear unabhängige Differentiale erster Gattung; dann sind

$$u_1, u_2, \ldots u_p$$

p Integrale erster Gattung und sie sind in dem Sinne linear unabhängig, daß keine Gleichung zwischen ihnen bestehen kann von der Form

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_p u_p = c_0 ,$$

wo die c konstant sind. Ist u irgendein Integral erster Gattung und also du ein Differential erster Gattung, so ist du in der Form darstellbar

$$du = \lambda_1 du_1 + \lambda_2 du_2 + \cdots + \lambda_p du_p ,$$

wo die λ konstant sind. Es ist also u darstellbar in der Form

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p + \lambda_0 ,$$

wo auch λ_0 konstant ist.

Die Perioden eines Integrals erster Gattung können nur dann alle gleich Null sein, wenn es konstant ist, wenn also das zugehörige Differential identisch Null ist. Denn ein solches Integral würde eine Funktion des Körpers sein, die nirgends unendlich wird.

§ 6. Integrale zweiter Gattung.

Wir zeigen zunächst, daß es immer ein Integral J zweiter Gattung gibt, daß an irgendeiner gegebenen Stelle $\mathfrak{q}$ genau von gegebener Ordnung λ unendlich wird. Soll J in $\mathfrak{q}$ von der Ordnung λ unendlich werden, so muß das Differential von der Ordnung $\lambda + 1$ in $\mathfrak{q}$ unendlich werden, der zugehörige Differentialteiler also die Form haben

$$\mathfrak{g}\,\mathfrak{q}^{-(\lambda+1)},$$

wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist. Da jeder Differentialteiler der kanonischen Klasse $(\mathfrak{k})$ angehört, so ist $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{q}^{\lambda+1})$. Die Zahl der linear unabhängigen Differentiale, die nur in $\mathfrak{q}$ und dort höchstens von der Ordnung $\lambda + 1$ unendlich werden, ist daher gleich der Zahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{q}^{\lambda+1})$, also gleich der Dimension dieser Klasse. Diese Dimension, die mit n_λ bezeichnet sei, ist für $\lambda \geqq 0$ nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$n_\lambda = \left\{\mathfrak{k}\mathfrak{q}^{\lambda+1}\right\} = 2p - 2 + \lambda + 1 - p + 1 = \lambda,$$

da die Ergänzungsklasse von negativer Ordnung und ihre Dimension daher Null ist.

Da für $\lambda > 1$

$$n_\lambda - n_{\lambda-1} = \lambda - (\lambda - 1) = 1 > 0,$$

so schließen wir, daß es mindestens ein Differential geben muß, das nur in $\mathfrak{q}$ und dort genau von der Ordnung $\lambda + 1$ unendlich wird, und daraus folgt dann, daß es auch mindestens ein Integral gibt, das nur in $\mathfrak{q}$ und dort genau von der Ordnung λ unendlich wird. Wir bezeichnen mit $z_\mathfrak{q}^{(1)}$ ein Integral, das nur in $\mathfrak{q}$ und dort von der ersten Ordnung unendlich wird. Es habe x in $\mathfrak{q}$ den Wert a und es sei $\mathfrak{q}$ ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$. Wir setzen zur Abkürzung $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}} = t$. Durch Hinzufügen eines konstanten Faktors können wir erreichen, daß die Entwicklung von $z_\mathfrak{q}^{(1)}$ in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ folgende Gestalt hat

$$z_\mathfrak{q}^{(1)} = t^{-1} + \mathfrak{P}_1(t),$$

wo $\mathfrak{P}_1(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist. Es sei ferner z ein Integral, das nur in $\mathfrak{q}$ und dort genau von der zweiten Ordnung unendlich wird. Die Entwicklung von z in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ sei

$$z = a_1 t^{-2} + a_2 t^{-1} + \mathfrak{P}(t).$$

wo $\mathfrak{P}(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist. Wir bezeichnen dann das Integral $a_1^{-1}(z - a_2 z_{\mathfrak{q}}^{(1)})$ mit $z_{\mathfrak{q}}^{(2)}$. Die Entwicklung von $z_{\mathfrak{q}}^{(2)}$ in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ ist

$$z_{\mathfrak{q}}^{2} = t^{-2} + \mathfrak{P}_2(t),$$

wo $\mathfrak{P}_2(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir für jedes $\lambda > 0$ ein Integral $z_{\mathfrak{q}}^{(\lambda)}$, das nur in $\mathfrak{q}$ und dort genau von der Ordnung λ unendlich wird und dessen Entwicklung in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ so aussieht:

$$z_{\mathfrak{q}}^{(\lambda)} = t^{-\lambda} + \mathfrak{P}_\lambda(t),$$

wo $\mathfrak{P}_\lambda(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist. Diese Integrale sind nicht vollständig bestimmt. Ist z' ein Integral, das dieselben Eigenschaften hat wie $z_{\mathfrak{q}}^{(\lambda)}$, so ist $z' - z_{\mathfrak{q}}^{(\lambda)}$ ein Integral, das nirgends unendlich wird, also ein Integral erster Gattung. Es sind daher die Integrale $z_{\mathfrak{q}}^{(\lambda)}$ durch ihre Eigenschaften nur bestimmt bis auf Integrale erster Gattung, die man beliebig hinzufügen kann, ohne ihre wesentlichen Eigenschaften zu ändern.

§ 7. Elementarintegrale zweiter Gattung.

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_p$ irgend p Stellen der Riemannschen Fläche T, die nicht speziell liegen, d. h. nach § 4 und § 5, Kap. IX es soll keinen ganzen Divisor der Differentialklasse geben, der durch den Divisor $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_p$ teilbar ist. Wie wir in § 5, Kap. IX gesehen haben, folgt daraus, daß es keine Funktion des Körpers gibt, die nur an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_p$, und zwar höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird. Wir bezeichnen die p Integrale $z_{\mathfrak{p}_1}^{(1)}, z_{\mathfrak{p}_2}^{(1)}, \ldots z_{\mathfrak{p}_p}^{(1)}$ kürzer mit $v_1, v_2, \ldots v_p$. Solche Integrale, die also nur an einer Stelle und dort von der ersten Ordnung unendlich werden, heißen Elementarintegrale zweiter Gattung.

Man nennt s Integrale zweiter Gattung $J_1, J_2, \ldots J_s$ linear unabhängig, wenn zwischen ihnen keine Gleichung besteht von der Form

$$c_1 J_1 + c_2 J_2 + \cdots + c_s J_s = S(x, y) + u,$$

wo die c konstant sind und wo $S(x, y)$ eine Funktion des Körpers und u ein Integral erster Gattung ist. Wir behaupten, die p Elementarintegrale zweiter Gattung $v_1, v_2, \ldots v_p$ sind in diesem Sinne linear unabhängig. Es bestehe nämlich zwischen ihnen eine Gleichung der Form

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p = S(x, y) + u, \tag{13}$$

wo die c und S und u dieselbe Bedeutung haben wie eben, so würde $S(x, y)$, wie aus (13) folgt, eine Funktion des Körpers sein, die nur an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_p$, und zwar höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird, was nicht möglich ist.

Es sei v irgendein Integral zweiter Gattung. Wir wollen zeigen, daß wir es durch Subtraktion einer Funktion des Körpers verwandeln können in ein Integral, das nur noch an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_p$, und zwar höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird. Es sei $\mathfrak{q}$ eine Unendlichkeitsstelle von v. Wir unterscheiden zwei Fälle: a) $\mathfrak{q}$ sei keine der p Stellen $\mathfrak{p}_k$; b) $\mathfrak{q}$ sei eine der Stellen $\mathfrak{p}_k$, etwa $\mathfrak{p}_1$.

a) Wir zeigen zunächst, daß es eine Funktion des Körpers gibt, die an der Stelle $\mathfrak{q}$ genau von der gegebenen Ordnung λ und außerdem höchstens an den Stellen $\mathfrak{p}_k$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Es bedeute n_λ die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers, die in $\mathfrak{q}$ höchstens von der Ordnung λ und an den p Stellen $\mathfrak{p}_k$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden. Diese Funktionen sind von der Form $\mathfrak{g}\mathfrak{q}^{-\lambda}\mathfrak{p}^{-1}$, wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist und wo zur Abkürzung $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_p$ gesetzt ist. Die Zahl der linear unabhängigen dieser Funktionen ist daher gleich der Dimension der Klasse $(\mathfrak{q}^\lambda \mathfrak{p})$, also nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$(14) \qquad n_\lambda = \{\mathfrak{q}^\lambda \mathfrak{p}\} = \lambda + p - p + 1 + \{\mathfrak{t}\mathfrak{q}^{-\lambda}\mathfrak{p}^{-1}\}.$$

Die Ergänzungsklasse kann keinen ganzen Divisor enthalten; wäre nämlich $\mathfrak{g}'$ ein solcher, so wäre $\mathfrak{q}^\lambda \mathfrak{p}\mathfrak{g}'$ ein ganzer Divisor der Differentialklasse, der durch $\mathfrak{p}$ teilbar wäre. Wir haben aber ausdrücklich vorausgesetzt, daß es einen solchen nicht gibt. Daher ist die Dimension der Ergänzungsklasse Null und aus (14) folgt für $\lambda \geq 0$

$$n_\lambda = \lambda + 1$$

und hieraus für $\lambda \geq 1$

$$n_\lambda - n_{\lambda-1} = 1 > 0,$$

woraus wir schließen, daß es eine Funktion des Körpers geben muß, die in $\mathfrak{q}$ genau von der λ-ten und an den p Stellen $\mathfrak{p}_k$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird, während sie sonst überall endlich ist.

Wird v in $\mathfrak{q}$ von der Ordnung μ unendlich, so bestimmen wir eine Funktion R des Körpers, die in $\mathfrak{q}$ genau von der μ-ten und außerdem höchstens an den Stellen $\mathfrak{p}_k$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Es sei $\mathfrak{q}$ eine Verzweigungsstelle der Ordnung $\alpha - 1$ und es habe x in $\mathfrak{q}$ den Wert a. Sind die Anfangsglieder in den Entwicklungen von v und R in der Umgebung von $\mathfrak{q}$

$$a\,(x-a)^{-\frac{\mu}{\alpha}} \qquad \text{und} \qquad b\,(x-a)^{-\frac{\mu}{\alpha}},$$

so wird $v - \dfrac{a}{b} R$ ein Integral zweiter Gattung, das in $\mathfrak{q}$ von geringerer Ordnung unendlich wird als v. Ist also $\mathfrak{q}$ nicht eine von den p Stellen $\mathfrak{p}_k$, so können wir durch Subtraktion einer Funktion R des Körpers v in ein Integral zweiter Gattung verwandeln, das in $\mathfrak{q}$ von geringerer Ordnung unendlich wird als v und das als neue Unendlichkeitsstellen höchstens solche erster Ordnung in den p Punkten $\mathfrak{p}_k$ hat. Durch wiederholtes Anwenden dieses Verfahrens können wir v in ein Integral zweiter Gattung verwandeln, das nur noch an den Stellen $\mathfrak{p}_k$ unendlich wird. Es sei v' dies Integral und $S_1(x, y)$ die im ganzen von v subtrahierte Funktion. Dann ist

$$v - S_1(x, y) = v' .$$

b) Wir beweisen zunächst, daß es für $\lambda > 1$ immer eine Funktion des Körpers gibt, die in $\mathfrak{p}_1$ genau von der λ-ten und sonst nur an den übrigen Stellen $\mathfrak{p}_k$, und zwar höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird. Es bedeute m_λ die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers die in $\mathfrak{p}_1$ höchstens von der λ-ten und außerdem höchstens in den anderen Punkten $\mathfrak{p}_k$ von der ersten Ordnung unendlich werden. Solch eine Funktion ist von der Form $\mathfrak{g}\,\mathfrak{p}_1^{-\lambda-1}\,\mathfrak{p}^{-1}$, wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist. Es ist daher m_λ gleich der Dimension der Klasse $(\mathfrak{p}_1^{\lambda-1}\,\mathfrak{p})$, so daß nach dem Riemann-Rochschen Satze für $\lambda \geqq 1$

$$(15) \qquad m_\lambda = \{\mathfrak{p}_1^{\lambda-1}\,\mathfrak{p}\} = \lambda - 1 + p - \varrho + 1 + \{\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}_1^{1-\lambda}\,\mathfrak{p}^{-1}\} .$$

Die Ergänzungsklasse $(\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}_1^{1-\lambda}\,\mathfrak{p}^{-1})$ kann wieder keinen ganzen Divisor $\mathfrak{g}'$ enthalten, da sonst $\mathfrak{p}_1^{\lambda-1}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{g}'$ ein ganzer Divisor der Differentialklasse wäre, der durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Daher ist die Dimension der Ergänzungsklasse Null und nach (15) für $\lambda \geqq 1$

$$m_\lambda = \lambda$$

und für $\lambda \geqq 2$

$$m_\lambda - m_{\lambda-1} = \lambda - (\lambda - 1) = 1 > 0 ,$$

woraus wir schließen, daß es für $\lambda \geqq 2$ eine Funktion mit den verlangten Eigenschaften gibt.

Es werde v in $\mathfrak{p}_1$ von der Ordnung $\mu \geqq 2$ unendlich. Wir bestimmen dann eine Funktion Q des Körpers, die in $\mathfrak{p}_1$ genau von der μ-ten Ordnung unendlich wird. Es sei $\mathfrak{p}_k$ ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha_k - 1$ und x habe in $\mathfrak{p}_k$ den Wert a_k. Zur Abkürzung sei gesetzt $(x - a_k)^{\frac{1}{\alpha_k}} = t_k$. Sind die Anfangsglieder in den Entwicklungen von v' und Q in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$

$$a t_1^{-\mu} , \quad b t_1^{-\mu} ,$$

so ist $v' - \frac{a}{b} Q$ ein Integral zweiter Gattung, das in $\mathfrak{p}_1$ von geringerer Ordnung unendlich wird als v. Wir können also aus v' durch Subtraktion einer Funktion des Körpers ein Integral zweiter Gattung herleiten, das in $\mathfrak{p}_1$ von geringerer Ordnung unendlich wird, wenn v' dort von höherer als der ersten Ordnung unendlich wird. An neuen Unendlichkeitsstellen können höchstens solche erster Ordnung an den Stellen $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots \mathfrak{p}_p$ hinzukommen. Durch wiederholtes Anwenden dieses Verfahrens erhalten wir ein Integral zweiter Gattung J, das höchstens an den p Stellen $\mathfrak{p}_k$, und zwar höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird.

Die im ganzen von v subtrahierte Funktion sei mit $S(x, y)$ bezeichnet, so daß

$$v - S(x, y) = J \,. \tag{16}$$

Es sei in der Entwicklung von J in der Umgebung von $\mathfrak{p}_k$ der Koeffizient von t_k^{-1} gleich c_k. Dann wird das Integral

$$u = J - c_1 v_1 - c_2 v_2 - \cdots - c_p v_p \tag{17}$$

nirgends mehr unendlich, ist also von der ersten Gattung. Aus (16) und (17) folgt, daß wir jedes Integral zweiter Gattung mit Hilfe der p Elementarintegrale v_l in der Form darstellen können

$$v = S(x, y) + u + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p \,, \tag{18}$$

wo die c konstant sind und wo S eine Funktion des Körpers und u ein Integral erster Gattung bedeutet. Wir hatten oben gesehen, daß die p Integrale v_k linear unabhängig sind. Jetzt haben wir nachgewiesen, daß alle anderen Integrale zweiter Gattung von den p Integralen v_k linear abhängig sind. Es gibt also genau p linear unabhängige Integrale zweiter Gattung.

§ 8. Der Weierstraßsche Lückensatz.

Wir wollen zeigen, wie wir uns noch auf eine andere Art linear unabhängige Integrale zweiter Gattung herstellen können, von denen auch alle anderen Integrale zweiter Gattung linear abhängig sind. Ist r die Zahl dieser Integrale, so muß nach dem eben Bewiesenen $r = p$ sein. Wir werden auf diese Art zu einem interessanten Satze kommen.

Wir betrachten die Funktionen des Körpers, die nur an einer Stelle $\mathfrak{q}$ unendlich werden und sonst nirgends. Wird eine solche Funktion in $\mathfrak{q}$ von der Ordnung λ unendlich, so ist λ die Ordnung der Funktion. Es wird nicht zu jeder Zahl λ eine Funktion des Körpers geben, die nur in $\mathfrak{q}$ und dort genau von der Ordnung λ unendlich wird. So gibt es für $p > 0$ überhaupt keine Funktion erster Ordnung, also auch keine Funktion, die nur in $\mathfrak{q}$ und dort von der ersten Ordnung unendlich würde. Schreiben wir also die Ordnungszahlen aller derjenigen Funktionen des Körpers auf, die nur in $\mathfrak{q}$ unendlich werden, so werden in dieser Reihe für $p > 0$ nicht alle positiven ganzen Zahlen vorkommen, es werden einige Ordnungszahlen fehlen. Wir zeigen zunächst, daß die fehlenden Ordnungszahlen kleiner sind als $2p$, woraus dann folgt, daß ihre Anzahl endlich ist. Es bedeute n_λ die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers, die nur in $\mathfrak{q}$, und zwar höchstens von der Ordnung λ unendlich werden. Es ist nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$n_\lambda = \{\mathfrak{q}^\lambda\} = \lambda - p + 1 + \{\mathfrak{t}\,\mathfrak{q}^{-\lambda}\}.$$

Wenn also $\lambda > 2p - 2$, so ist die Ordnung der Ergänzungsklasse $\{\mathfrak{t}\,\mathfrak{q}^{-\lambda}\}$ negativ und daher ihre Dimension Null, so daß

$$n_\lambda = \lambda - p + 1. \qquad (\lambda > 2p - 2).$$

Daher wird für $\lambda \geqq 2p - 1$

$$n_\lambda - n_{\lambda-1} = 1 > 0,$$

woraus wir schließen, daß es für $\lambda \geqq 2p - 1$ immer eine Funktion des Körpers gibt, die nur in $\mathfrak{q}$ und dort genau von der Ordnung λ unendlich wird. Es kann also, wie behauptet, keine Zahl, die größer ist als $2p$ zu den fehlenden Ordnungszahlen gehören.

Die fehlenden Ordnungszahlen seien $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_r$. Ihre Anzahl sei also r. Dann sind die oben definierten Integrale

$$(19) \qquad z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_1)}, \quad z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_2)}, \dots, z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_r)}$$

linear unabhängig. Würde nämlich eine Gleichung der Form

$$c_1 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_1)} + c_2 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_2)} + \cdots c_r z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_r)} = S(x, y) + u$$

bestehen, wo die c konstant sind und wo S eine Funktion des Körpers und u ein Integral erster Gattung ist, so würde S eine Funktion sein, die nur in $\mathfrak{q}$ unendlich wird und ihre Ordnungszahl würde gleich einer der fehlenden Ordnungszahlen sein.

Wir zeigen weiter, daß jedes andere Integral zweiter Gattung linear von den r Integralen (19) abhängt. Es genügt, dies für die p Integrale v_k nachzuweisen, von denen ja alle anderen linear abhängen. Wir beweisen es für v_1; für die anderen v_k gilt dann dasselbe. Zunächst läßt sich immer eine Funktion Q des Körpers finden, die in $\mathfrak{p}_1$ genau von der ersten Ordnung und außerdem nur noch in $\mathfrak{q}$ unendlich wird. Es bedeute nämlich m_λ die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers, die in $\mathfrak{p}_1$ höchstens von der ersten und in $\mathfrak{q}$ höchstens von der λ-ten Ordnung unendlich werden, und n_λ sei die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers, die nur in $\mathfrak{q}$, und zwar höchstens von der Ordnung λ unendlich werden. Wir nehmen $\lambda > 2p - 2$ an, damit die Ergänzungsklassen von $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^\lambda)$ und $(\mathfrak{q}^\lambda)$ von negativer Ordnung sind. Nach den Riemann-Rochschen Satze ist dann

$$m_\lambda = \{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^\lambda\} = \lambda - 1 - p + 1 = \lambda - p + 2, \quad n_\lambda = \{\mathfrak{q}^\lambda\} = \lambda - p + 1$$

und also

$$m_\lambda - n_\lambda = 1 > 0,$$

woraus wir schließen, daß es eine Funktion Q des Körpers gibt, die in $\mathfrak{p}_1$ genau von der ersten Ordnung unendlich wird und außerdem nur noch in $\mathfrak{q}$. Ist a der Koeffizient von t^{-1} in der Entwicklung von Q in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1$, so ist

$$v_1 - \frac{1}{a} Q = J \tag{20}$$

ein Integral zweiter Gattung, das nur noch in $\mathfrak{q}$ unendlich wird.

Es sei $\mathfrak{q}$ etwa ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$ und x habe in $\mathfrak{q}$ den Wert a. Zur Abkürzung sei gesetzt $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} = t$. Es werde J in $\mathfrak{q}$ von der Ordnung μ unendlich. Das Anfangsglied in der Entwicklung von J in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ sei

$$a t^{-\mu}.$$

Wie unterscheiden zwei Fälle: 1. μ gehört nicht zu den fehlenden Ordnungszahlen; 2. μ gehört dazu. Im ersten Falle gibt es eine Funktion Q_1 des Körpers, die nur in $\mathfrak{q}$ und dort genau von der Oranung μ unendlich wird. Ist $bt^{-\mu}$ das Anfangsglied in der Entwicklung von Q_1 in der Umgebung von $\mathfrak{q}$, so ist $J - \frac{a}{b} Q_1$ ein Integral zweiter Gattung, das auch nur in $\mathfrak{q}$, aber von geringerer Ordnung als J unendlich wird. Ist zweitens μ eine der fehlenden Ordnungszahlen, so ist $J - a z_{\mathfrak{q}}^{(\mu)}$ ein Integral zweiter Gattung, das nur in $\mathfrak{q}$ und von geringerer Ordnung unendlich wird als J. Wir können also immer aus einem Integral J, das nur in $\mathfrak{q}$ unendlich wird, durch Subtraktion entweder einer Funktion des Körpers oder eines mit einer geeigneten Konstanten multiplizierten Integrals (19) ein neues Integral zweiter Gattung herleiten, das auch nur in $\mathfrak{q}$ unendlich wird, aber von geringerer Ordnung als J. Durch wiederholtes Anwenden dieses Verfahrens können wir J verwandeln in ein Integral u, das überhaupt nicht mehr unendlich wird, also von der ersten Gattung ist. Die im ganzen von J subtrahierte Funktion sei Q_2 und die subtrahierte lineare Kombination der Integrale (19) sei $e_1 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_1)} + e_2 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_2)} + \cdots + e_r z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_r)}$, so daß

$$J - Q_2 - (e_1 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_1)} + e_2 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_2)} + \cdots + e_r z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_r)}) = u\,. \tag{21}$$

Setzen wir $\frac{1}{a} Q + Q_2 = S$, so folgt aus (20) und (21), daß wir setzen können

$$v_1 = S(x, y) + u + e_1 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_1)} + e_2 z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_2)} + \cdots + e_r z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_r)}\,.$$

Allgemeiner bestehen Gleichungen von der Form

$$v_k = S_k(x, y) + u^{(k)} + e_{1k} z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_1)} + e_{2k} z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_2)} + \cdots + e_{rk} z_{\mathfrak{q}}^{(\sigma_r)}\,, \tag{22}$$

wo die e_{ik} konstant sind und wo die S_k Funktionen des Körpers und die $u^{(k)}$ Integrale erster Gattung sind. Wir haben oben bewiesen, daß wir jedes

Integral zweiter Gattung in der Form (18) linear durch die p Elementarintegrale v_k darstellen können. Durch Benutzung der Gleichungen (22) erhalten wir also für irgendein Integral zweiter Gattung v die Darstellung

$$v = P(x, y) + \bar{u} + c_1 z_{\mathfrak{q}}^{(\varrho_1)} + c_2 z_{\mathfrak{q}}^{(\varrho_2)} + \cdots + c_r z_{\mathfrak{q}}^{(\varrho_r)},$$

wo die c konstant sind und wo P eine Funktion des Körpers und $\bar{u}$ ein Integral erster Gattung ist. Damit ist gezeigt, daß die r Integrale (19) nicht nur linear unabhängig sind, wie wir oben festgestellt haben, sondern daß auch jedes andere Integral zweiter Gattung linear von ihnen abhängt. Daher ist die Zahl der linear unabhängigen Integrale zweiter Gattung genau gleich r. Wir haben aber oben gefunden, daß diese Zahl gleich p ist. Daher ist $r = p$ und wir haben damit den Weierstraßschen Lückensatz bewiesen:

In der Reihe der Ordnungszahlen derjenigen Funktionen des Körpers, die nur an einer Stelle unendlich werden, fehlen immer p Zahlen, wo p das Geschlecht des Körpers ist.

Die fehlenden Ordnungszahlen sind im allgemeinen die Zahlen 1, 2, ... p; nur für eine endliche Zahl von Stellen sind dies nicht die fehlenden Ordnungszahlen. Diese Stellen heißen Weierstraßpunkte. (Vgl. Kap. IX, § 10.)

§ 9. Integrale dritter Gattung.

Soll ein Integral an einer Stelle logarithmisch unendlich werden, so muß das Differential an der Stelle von der ersten Ordnung unendlich werden, also dort ein Residuum haben. Da die Summe der Residuen eines Differentials gleich Null ist, so kann es kein Differential geben, das nur an einer Stelle und dort von der ersten Ordnung unendlich wird, also auch kein Integral, das nur an einer Stelle und dort logarithmisch unendlich wird. Das einfachste Integral dritter Gattung ist daher eins, das nur an zwei Stellen und dort logarithmisch unendlich wird. Wir wollen zeigen, daß ein solches immer vorhanden ist. Es seien $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ irgend zwei Stellen. Soll ein Differential nur an diesen beiden Stellen, und zwar von der ersten Ordnung verschwinden, so muß der zugehörige Differentialteiler von der Form $\mathfrak{g}\mathfrak{q}_1^{-1}\mathfrak{q}_2^{-1}$ sein, wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist, und zwar ein Divisor der Klasse $(\mathfrak{f}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$, wenn wieder mit $(\mathfrak{f})$ die kanonische Klasse bezeichnet wird. Die Zahl m der linear unabhängigen Differentiale, deren Differentialteiler die Form $\mathfrak{g}\mathfrak{q}_1^{-1}\mathfrak{q}_2^{-1}$ hat, ist daher gleich der Dimension der Klasse $(\mathfrak{f}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$, so daß

$$m = \{\mathfrak{f}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\} = 2p - 2 + 2 - p + 1 = p + 1.$$

Es fragt sich, ob unter den $p + 1$ linear unabhängigen Differentialen, die nur in $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ unendlich werden, und zwar höchstens von der ersten

Ordnung, auch welche vorkommen, die wirklich sowohl in $\mathfrak{q}_1$ wie in $\mathfrak{q}_2$ unendlich werden. Nehmen wir an, das wäre nicht der Fall. Dann würden die $p+1$ linear unabhängigen Differentiale, da es Differentiale, die nur an einer Stelle von der ersten Ordnung unendlich werden, nicht gibt, überhaupt nicht unendlich werden, würden also von der ersten Gattung sein, und wir hätten $p+1$ linear unabhängige Differentiale erster Gattung. Es gibt daher immer ein Differential $d w_{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2}$, das nur an den beiden beliebig gegebenen Stellen $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$, und zwar genau von der ersten Ordnung unendlich wird. Durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor können wir erreichen, daß das Residuum von $d w_{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2}$ in $\mathfrak{q}_1$ gleich 1 ist. Da die Summe der Residuen gleich Null ist, so ist das Residuum von $d w_{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2}$ in $\mathfrak{q}_2$ gleich -1. Bedeutet t eine Funktion des Körpers, die an der Stelle $\mathfrak{q}_k$ von der ersten Ordnung Null wird, so ist in der Umgebung von $\mathfrak{q}_k$

$$w_{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2} = (-1)^{k+1}\, ln\, t + P(t)\,,$$

wo $P(t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von t ist. Das Integral $w_{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2}$ heißt Elementarintegral dritter Gattung.

Es sei w irgendein Integral des Körpers. Das Differential $d w$ habe Residuen an den Stellen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_\varrho$, und es sei das Residuum an der Stelle $\mathfrak{r}_k$ gleich r_k. Es besteht die Gleichung

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\varrho = 0\,, \tag{23}$$

da die Summe der Residuen eines jeden Differentials des Körpers Null ist. Ist $\mathfrak{r}_0$ irgend eine von den Stellen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_\varrho$ verschiedene Stelle, so hat das Differential

$$d v = d w - r_1\, d w_{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_0} - r_2\, d w_{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_0} - \cdots - r_\varrho\, d w_{\mathfrak{r}_\varrho \mathfrak{r}_0}$$

an den Stellen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_\varrho$ kein Residuum mehr, aber auch an der Stelle $\mathfrak{r}_0$ nicht. Denn dort würde das Residuum sein

$$(r_1 + r_2 + \cdots + r_\varrho)$$

was nach (23) gleich Null ist. Daher ist $d v$ ein Differential zweiter Gattung. Jedes Integral w des Körpers läßt sich also in der Form darstellen

$$w = v + \mathfrak{r}_1\, w_{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_0} + \mathfrak{r}_2\, w_{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_0} + \cdots + \mathfrak{r}_\varrho\, w_{\mathfrak{r}_\varrho \mathfrak{r}}\,,$$

wo v ein Integral zweiter Gattung ist. Benutzen wir noch die Sätze über die Darstellbarkeit der Integrale erster und zweiter Gattung, so haben wir:

Sind $u_1, u_2, \ldots u_p$ p linear unabhängige Integrale erster und $v_1, v_2, \ldots v_p$ p linear unabhängige Integrale zweiter Gattung.

so läßt sich jedes Integral w des Körpers in der Form darstellen

$$w = S(x, y) + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_p u_p + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_p v_p$$
$$+ r_1 w_{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_0} + r_2 w_{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_0} + \cdots + r_\varrho w_{\mathfrak{r}_\varrho \mathfrak{r}_0},$$

wo S eine Funktion des Körpers ist und wo die a, b, c Konstante sind. Dabei ist angenommen, daß das Differential dw nur an den ϱ Stellen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_\varrho$ Residuen hat und daß das Residuum in $\mathfrak{r}_k$ gleich r_k ist.

Als Beispiele für die Betrachtungen dieses Kapitels seien dem Leser die Integrale eines elliptischen oder hyperelliptischen Körpers vom Geschlechte 2 empfohlen.

Namen- und Sachregister.