

Teo Sturm

Einige Charakterisationen von Ketten

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 3, 375–391

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101178>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EINIGE CHARAKTERISATIONEN VON KETTEN*)

TEO STURM, Praha

(Eingegangen am 23. Dezember 1971)

Diese Arbeit knüpft direkt an den Artikel [7] an. Es zeigt sich u.a., dass ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Distributivität des Verbandes $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ und der Tatsache, dass (A, u) eine Kette ist, existiert. Es werden Ordnungen u auf A charakterisiert, für die irgendeine von den Gleichheiten $L(A, u) = E(A)$, $G(A, u) = E(A)$, $\bar{K}(A, u) = E(A)$, $L(A, u) = \bar{K}(A, u)$, $G(A, u) = \bar{K}(A, u)$ oder $L(A, u) = G(A, u)$ gilt. Es werden Ordnungen u auf A charakterisiert, für die der vollständige Verband $(G(A, u), \subseteq)$ oder $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$ abgeschlossen ist.

Meinem Lehrer, Herrn Prof. MIROSLAV NOVOTNÝ, möchte ich meinen Dank aussprechen – nicht nur für zahlreiche und ausführlich ausgearbeitete Ratschläge und Hinweise, sondern auch für freundschaftliche Aufmunterungen, ohne die ich mir meine Arbeit in diesem Gebiet nur schwer vorstellen kann.

1. Bezeichnungen. A ist eine nichtleere Menge. $\mathcal{U}(A)$ ist eine Menge aller Ordnungen auf A . $\mathcal{U}'(A)$ ist eine Menge aller linearen Ordnungen auf A . Wir übernehmen die Bezeichnungen und Konventionen von [7], mit den im ersten Absatz der Arbeit [8] erwähnten Modifikationen. Die Bezeichnung des Verbandsdurchschnittes \wedge , \bigwedge und der Verbandsvereinigung \vee , \bigvee wurden aus dem Buch [1] übernommen; aus dem Zusammenhang wird immer klar sein, in welchem Verband die gegebenen Durchschnitte und Vereinigungen betrachtet sind.

Es sei $u \in \mathcal{U}(A)$. Die Intervalle in (A, u) werden in der gleichen Weise bezeichnet wie in dem Buch [2], Kap. III, § 1, Abs. 15 (S. 161 der russischen Übersetzung), mit den folgenden Abweichungen: Die Symbole \leftarrow und \rightarrow werden ausgelassen; aus typographischen Gründen wird die Klammer \llbracket bzw. \rrbracket durch die Klammer \langle bzw. \rangle

*) Die Arbeit entstand im Rahmen eines von Herrn Prof. Jiří FÁBERA geleiteten Seminars über Boolesche Algebren.

ersetzt; bei der Bezeichnung der Intervalle $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b \rangle$ usw. wird lediglich $a, b \in A$ vorausgesetzt. Für $a, b \in A$ ist z.B. in (A, u)

$$\begin{aligned} \rangle a, b \rangle &=_{\text{Df}} \{x \mid x \in A, (a, x) \in u - \text{id}_A, (x, b) \in u\}, \\ \rangle a, \langle &=_{\text{Df}} \{x \mid x \in A, (a, x) \in u - \text{id}_A\}, \\ \rangle, a \langle &=_{\text{Df}} \{x \mid x \in A, (x, a) \in u - \text{id}_A\}, \\ \rangle, \langle &=_{\text{Df}} A. \end{aligned}$$

2. Definition. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Falls (A, u) ein Verband ist, bezeichnet $L(A, u)$ die Menge aller Kongruenzrelationen des Verbandes (A, u) . Ist (A, u) kein Verband, ist definitionsweise $L(A, u) =_{\text{Df}} \emptyset$.

3. Satz. (BIRKHOFF) Die geordnete Menge (A, u) sei ein Verband. Dann ist $(L(A, u), \subseteq)$ ein vollständiger Verband, der im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$ abgeschlossen ist.

Beweis. Siehe [9], Satz 68, S. 190.

4. Definition. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. ϱ wird genau dann eine u -konvexe Äquivalenz auf A genannt, wenn ϱ eine Äquivalenz auf A ist und wenn für alle $X \in A/\varrho$ und für alle $x, y \in X$ gilt: $\langle x, y \rangle \subseteq X$. Das Symbol $\bar{K}(A, u)$ bezeichnet die Menge aller u -konvexen Äquivalenzen auf A .

5. Satz. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Dann ist $\bar{K}(A, u)$ ein algebraisches System abgeschlossener Elemente im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$.

Beweis. Falls \mathcal{A} ein nichtleeres System u -konvexer Teilmengen in A ist, dann ist $\bigcap \mathcal{A}$ eine u -konvexe Teilmenge in A ; falls (\mathcal{A}, \subseteq) sogar eine Kette ist, ist $\bigcup \mathcal{A}$ eine u -konvexe Teilmenge in A . Hiervon und aus [7], Abs. 10, 5 und 7 folgt unmittelbar die Behauptung des Satzes.

6. Lemma. Es sei $u \in \mathcal{U}(A)$. Dann gilt

$$L(A, u) \subseteq G(A, u) \subseteq \bar{K}(A, u) \subseteq E(A).$$

Beweis. Die Inklusion $\bar{K}(A, u) \subseteq E(A)$ folgt direkt aus Abs. 4; hiervon und aus [7], Abs. 36 folgt, dass $G(A, u) \subseteq \bar{K}(A, u)$ ist. Ist $\sigma \in L(A, u)$, dann stellt σ den Kern eines auf dem Verband (A, u) definierten Homomorphismus φ dar. Danach ist φ speziell auch eine auf der geordneten Menge (A, u) isotone Abbildung und nach [7], Abs. 45 ist $\sigma = \ker \varphi \in G(A, u)$.

7. Lemma. Es sei $u \in \mathcal{U}(A)$ und B sei eine u -konvexe Teilmenge in A . Dann gilt

$$(B^2 \cup \text{id}_A) \in G(A, u).$$

Beweis. Nach [7], Abs. 17 u. 19 gilt $X^2 \in F(A, u)$ für alle Teilmengen X in A , speziell ist $B^2 \in F(A, u)$. Da B u -konvex in A ist, folgt $B = k(B)$ (siehe [7], Abs. 37). Nach [7], Abs. 38 u. 41 gilt dann auch $B^2 \cup \text{id}_A = \overline{B^2} \in G(A, u)$, w.z.b.w.

8. Lemma. *Es sei u eine lineare Ordnung auf A . Dann ist $L(A, u) = \overline{K}(A, u)$.*

Beweis. Wir wählen

$$\sigma \in \overline{K}(A, u), \quad X, Y \in A/\sigma, \quad x_1, x_2 \in X, \quad y_1, y_2 \in Y.$$

Es ist $u \in \mathcal{U}'(A)$ ($\mathcal{U}'(A)$ bezeichnet die Menge aller linearen Ordnungen auf A), und deshalb kann man bei geeigneter Wahl der Bezeichnung $(x_1, y_1) \in u$ voraussetzen. Ist $X = Y$, dann gilt (mit Bezug auf die Tatsache, dass (A, u) eine Kette ist)

$$x_1 \vee y_1 \in X, \quad x_2 \vee y_2 \in X, \quad x_1 \wedge y_1 \in X, \quad x_2 \wedge y_2 \in X.$$

Ist $X \neq Y$, dann folgt aus der Linearität der Ordnung u (siehe auch [8'], Abs. 2), aus der vorausgesetzten Relation $(x_1, y_1) \in u$ und aus der u -Konvexität der Äquivalenz σ auf A

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2) \in u - \text{id}_A.$$

Im Verband (A, u) gilt also

$$\begin{aligned} x_1 \vee y_1 &= y_1 \in Y, & x_2 \vee y_2 &= y_2 \in Y, & x_1 \wedge y_1 &= x_1 \in X, \\ x_2 \wedge y_2 &= x_2 \in X. \end{aligned}$$

Es ist $(x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2) \in \sigma$, $(x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2) \in \sigma$ und deshalb $\sigma \in L(A, u)$. Hiermit ist die Inklusion $\overline{K}(A, u) \subseteq L(A, u)$ hergeleitet; ihre Umkehrung gilt nach Lemma 6.

9. Satz. *Es sei u eine Ordnung auf A . Dann sind alle folgenden Behauptungen äquivalent.*

- (1) (A, u) ist eine Kette.
- (2) $L(A, u) = G(A, u)$.
- (3) $L(A, u) = \overline{K}(A, u)$.

Beweis. Die Implikation (1) \Rightarrow (3) gilt nach Lemma 8 und (3) \Rightarrow (2) folgt nach Abs. 6.

Es sei nun (A, u) keine Kette. Dann existieren u -unvergleichbare Elemente $a, b \in A$. Die aus a und b bestehende Menge $\{a, b\}$ ist eine u -konvexe Teilmenge in A und nach Lemma 7 ist also $\sigma =_{\text{Def}} (\{a, b\}^2 \cup \text{id}_A) \in G(A, u)$. Die Menge $\{a, b\} \in A/\sigma$ ist offensichtlich kein Teilverband in (A, u) , und deshalb ist $\sigma \notin L(A, u)$. Damit ist die Implikation (2) \Rightarrow (1) bewiesen.

10. Satz. Es sei u eine Ordnung auf A und $\text{card } A \geq 3$. $(H(A, u), \subseteq)$ sei der Äquivalenzverband auf A , der die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (4) Ist $\varrho, \sigma \in H(A, u)$, dann ist $\varrho \wedge \sigma = \varrho \cap \sigma$.
- (5) Ist $x, y \in A$ und $(x, y) \notin u \cup u^{-1}$, dann ist $(\{x, y\}^2 \cup \text{id}_A) \in H(A, u)$.
- (6) Ist $x \in A$, dann ist $(\rangle, x\rangle^2 \cup \text{id}_A) \in H(A, u)$ und $(\langle x, \langle^2 \cup \text{id}_A) \in H(A, u)$.

Ist ein solcher Verband $(H(A, u), \subseteq)$ distributiv, dann ist (A, u) eine Kette.

Beweis. Es sei (A, u) keine Kette und $\text{card } A \geq 3$. Dann existiert eine dreielementige Menge $\{a, b, c\} \subseteq A$, für die $(a, b) \notin u \cup u^{-1}$ ist. Wir wählen $\varrho =_{\text{Df}} \{a, b\}^2 \cup \text{id}_A$. Nach (5) ist $\varrho \in H(A, u)$.

Ist $(a, c), (b, c) \notin u \cup u^{-1}$, dann setzen wir

$$\sigma =_{\text{Df}} (\{a, c\}^2 \cup \text{id}_A), \quad \tau =_{\text{Df}} (\{b, c\}^2 \cup \text{id}_A).$$

Nach Bedingung (5) ist $\sigma, \tau \in H(A, u)$ und im Verband $(H(A, u), \subseteq)$ gelten laut (4) und in Bezug auf die Wahl von ϱ, σ, τ die Beziehungen

$$(\varrho \wedge \sigma) \vee (\varrho \wedge \tau) = \text{id}_A \vee \text{id}_A = \text{id}_A \subset \varrho = \varrho \cap (\{a, b, c\}^2 \cup \text{id}_A) \subseteq \varrho \wedge (\sigma \vee \tau).$$

In diesem Fall ist also der Verband $(H(A, u), \subseteq)$ nicht distributiv.

Ist $(a, c) \in u$ und $(b, c) \notin u \cup u^{-1}$, setzen wir

$$\sigma =_{\text{Df}} (\langle a, \langle^2 \cup \text{id}_A), \quad \tau =_{\text{Df}} (\{b, c\}^2 \cup \text{id}_A).$$

Nach Voraussetzungen (6) und (5) ist $\sigma, \tau \in H(A, u)$. Dann ist $(a, b) \in \sigma \vee \tau$ und in Bezug auf die Wahl von ϱ, σ, τ und auf (4) gelten dann im Verband $(H(A, u), \subseteq)$ die Beziehungen

$$(\varrho \wedge \sigma) \vee (\varrho \wedge \tau) = \text{id}_A \vee \text{id}_A = \text{id}_A \subset \varrho \wedge (\sigma \vee \tau);$$

der Verband $(H(A, u), \subseteq)$ ist also wieder nicht distributiv.

Im Falle $(a, c) \notin u \cup u^{-1}$ und $(b, c) \in u$ wird die Distributivität des Verbandes $(H(A, u), \subseteq)$ ähnlicherweise ausgeschlossen (durch Austausch der Bezeichnung der Elemente a und b), und in den Fällen $(c, a) \in u$ und $(c, b) \notin u \cup u^{-1}$ bzw. $(c, a) \notin u \cup u^{-1}$ und $(c, b) \in u$ sind die Erwägungen, die die Distributivität von $(H(A, u), \subseteq)$ ausschließen, u -dual zu den eben durchgeführten.

Ist $(a, c) \in u$ und $(b, c) \in u$, wählen wir

$$\sigma =_{\text{Df}} (\langle a, \langle^2 \cup \text{id}_A) \quad \text{und} \quad \tau =_{\text{Df}} (\langle b, \langle^2 \cup \text{id}_A).$$

Nach Bedingung (6) ist $\sigma, \tau \in H(A, u)$. Aus der Relation $c \in (\langle a, \langle) \cap (\langle b, \langle)$ folgt $(a, b) \in \sigma \vee \tau$, und in Bezug auf die Wahl von ϱ, σ, τ und auf die Forderung (4) gelten dann im Verband $(H(A, u), \subseteq)$ die Beziehungen

$$(\varrho \wedge \sigma) \vee (\varrho \wedge \tau) = \text{id}_A \vee \text{id}_A = \text{id}_A \subset \varrho \wedge (\sigma \vee \tau),$$

d.h. $(H(A, u), \subseteq)$ ist wiederum kein distributiver Verband. Auf duale Weise wird die Distributivität im Fall $(c, a) \in u$ und $(c, b) \in u$ ausgeschlossen.

Die beiden letzten Möglichkeiten $(a, c) \in u$ und $(c, b) \in u$ bzw. $(b, c) \in u$ und $(c, a) \in u$ stehen im Widerspruch mit der Transitivität der Relation u und mit der Voraussetzung $(a, b) \notin u \cup u^{-1}$.

11. Bemerkung. Es ist notwendig der Fall $\text{card } A < 3$ im Satz 10 auszuschließen, denn für $\text{card } A < 3$ sind die Verbände $(D(A), \subseteq)$ und $(E(A), \subseteq)$ distributiv. Distributiv sind deshalb in diesem Fall auch alle Teilsysteme $H(A, u)$, $H(A, u) \subseteq E(A)$ (und sogar $H(A, u) \subseteq D(A)$), die bei der Ordnung durch Inklusion Verbände darstellen. Z.B. für $\text{card } A = 2$, $A = \{a, b\}$ ist das Hassesche Diagramm des Verbandes $(E(A), \subseteq)$ auf Abb. 1 und des Verbandes $(D(A), \subseteq)$ auf Abb. 2 dargestellt. Für $\text{card } A = 1$ ist die Situation womöglich noch trivialer.

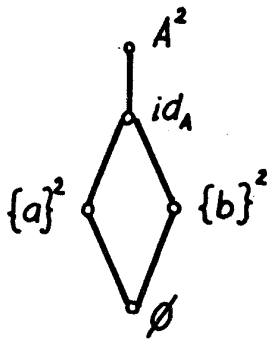


Abb. 2.



Abb. 1.

12. Lemma. Es sei $u \in \mathcal{U}(A)$. Dann genügen die Verbände $(G(A, u), \subseteq)$ und $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ den Bedingungen (4), (5) und (6).

Beweis. Für $(G(A, u), \subseteq)$ gilt (4) nach [7], Abs. 20. Die Menge $G(A, u)$ den Bedingungen (5) und (6) nach Lemma 7; für $\bar{K}(A, u)$ gelten (5) und (6) offensichtlich laut Definition von $\bar{K}(A, u)$ (siehe Abs. 4). Für $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ gilt (4) nach Satz 5.

13. Satz. (FUNAYAMA, NAKAYAMA) Die geordnete Menge (A, u) sei ein Verband. Dann ist der vollständige Verband $(L(A, u), \subseteq)$ unendlich-durchschnittsdistributiv*).

Beweis. Siehe [9], Satz 76, S. 208.

*) D.h. für ein beliebiges Element $q \in L(A, u)$ und für eine beliebige Menge M , $M \subseteq L(A, u)$, ist in $(L(A, u), \subseteq)$ $q \wedge (\bigvee_{\sigma \in M} \sigma) = \bigvee_{\sigma \in M} (q \wedge \sigma)$.

14. Folgerung. Es sei (A, u) eine geordnete, mindestens drei Elemente enthaltende Menge. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent.

- (1) (A, u) ist eine Kette.
- (7) Der Verband $(G(A, u), \subseteq)$ ist distributiv.
- (8) Der vollständige Verband $(G(A, u), \subseteq)$ ist unendlich-durchschnittsdistributiv.
- (9) Der Verband $(G(A, u), \subseteq)$ ist zu einem Mengenverband isomorph.

Beweis. Falls (A, u) eine Kette ist, ist $L(A, u) = G(A, u)$ nach Abs. 9 und es gilt (1) \Rightarrow (8) nach Satz 13. Die Behauptung (8) \Rightarrow (7) ist offensichtlich. Die Implikation (7) \Rightarrow (1) folgt direkt von Abs. 12 und 10. Die Äquivalenz (7) \Leftrightarrow (9) (BIRKHOFF) ist z.B. in [9] bewiesen: Satz 67 (S. 185) u. Beispiel 21 (S. 91).

15. Folgerung. Es sei (A, u) eine geordnete, mindestens drei Elemente enthaltende Menge. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent.

- (1) (A, u) ist eine Kette.
- (7') Der Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist distributiv.
- (8') Der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist unendlich-durchschnittsdistributiv.
- (9') Der Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist zu einem Mengenverband isomorph.

Beweis. Die Argumentation entspricht der des Beweises von Folgerung 14.

16. Bemerkung. Es gibt weitere Aussagen, die mit der Behauptung, dass ein Verband unendlich-durchschnittsdistributiv ist, logisch äquivalent sind; es sei erwähnt, dass solche Verbände topologisch sind (siehe [1], Kap. IV, § 9, u. Kap. IX, § 11, Satz 14) oder dass sie relativ pseudokomplementär sind (siehe [1], Kap. IX, § 12, Satz 15). Vgl. auch [3].

Es ist etwa bemerkenswert, dass die Verbände $(G(A, u), \subseteq)$ und $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ nicht distributiv sein können, ohne unendlich-durchschnittsdistributiv zu sein.

Weiter werden wir diejenigen Ordnungen u auf A charakterisieren, für die der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ bzw. $(G(A, u), \subseteq)$ eine Boolesche Algebra darstellt (siehe Abs. 19) oder für die diese vollständigen Verbände unendlich-vereinigungs-distributiv sind (vgl. Abs. 21); es ist zu bemerken, dass beide Forderungen auf die gleiche Bedingung (10) für u führen.

17. Definition. Eine geordnete Menge (A, u) heisst *diskrete* genau dann, wenn jede beschränkte Kette in (A, u) endlich ist*).

* Wenn (A, u) eine Kette ist, dann (A, u) ist diskret genau dann, wenn (A, u) zu einer auf natürliche Weise geordneten Menge ganzer Zahlen isoton isomorph ist.

18. Satz. (HASHIMOTO, JAKUBÍK) *Es sei (A, u) ein distributiver Verband; $(L(A, u), \subseteq)$ ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn der Verband (A, u) diskret ist.*

Beweis. Siehe [6], Satz 8.4, oder [5], § 2, Corollary 2. Siehe auch [10], Veta 4.

19. Folgerung. *Es sei (A, u) eine geordnete, mindestens drei Elemente enthaltende Menge. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent.*

(10) (A, u) ist eine Kette, die zu einer auf natürliche Weise geordneten Menge ganzer Zahlen isoton isomorph ist.

(11) $(G(A, u), \subseteq)$ ist eine Boolesche Algebra.

(12) $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist eine Boolesche Algebra.

Beweis. Gilt (10), dann ist nach Abs. 9 $L(A, u) = \bar{K}(A, u) = G(A, u)$, und nach Satz 18 gilt also $(10) \Rightarrow (11)$, $(10) \Rightarrow (12)$ (eine Kette ist ein distributiver Verband). Gilt (11) bzw. (12), dann ist (A, u) eine Kette nach Abs. 14 bzw. Abs. 15; aus Abs. 18 und 9 folgt also $(11) \Rightarrow (10)$ und $(12) \Rightarrow (10)$.

20. Satz. (GRÄTZER, SCHMIDT) *Es sei (A, u) ein distributiver Verband. Der vollständige Verband $(L(A, u), \subseteq)$ ist genau dann unendlich-vereinigungsdistributiv*, wenn (A, u) ein diskreter Verband ist.*

Beweis. Siehe [5], Satz 12.

21. Folgerung. *Es sei (A, u) eine geordnete, mindestens drei Elemente enthaltende Menge. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent.*

(10) (A, u) ist eine Kette, die zu einer auf natürliche Weise geordneten Menge ganzer Zahlen isoton isomorph ist.

(13) Der vollständige Verband $(G(A, u), \subseteq)$ ist unendlich-vereinigungsdistributiv.

(14) Der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist unendlich-vereinigungsdistributiv.

Beweis. Gilt (10), dann ist nach Abs. 9 $L(A, u) = \bar{K}(A, u) = G(A, u)$, und deshalb gilt nach Satz 20 $(10) \Rightarrow (13)$ und $(10) \Rightarrow (14)$ (eine Kette ist ein distributiver Verband). Gilt (13) bzw. (14), dann ist (A, u) eine Kette nach Abs. 14 bzw. abs.15; aus Abs. 20 und 9 folgt also $(13) \Rightarrow (10)$ und $(14) \Rightarrow (10)$.

22. Lemma. *Es sei (A, u) eine geordnete Menge, die die Bedingung (10) erfüllt. Dann gelten die folgenden Behauptungen.*

*) D.h. in $(L(A, u), \subseteq)$ gilt für ein beliebiges $q \in L(A, u)$ und für eine beliebige Menge M , $M \subseteq L(A, u)$

$$q \vee \left(\bigwedge_{\sigma \in M} \sigma \right) = \bigwedge_{\sigma \in M} (q \vee \sigma).$$

(15) Der Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist zu dem Verband aller Teilmengen einer Menge $B = B(A, u)$ isomorph (die entsprechende Verbandsordnung ist die Inklusion \supseteq).

(16) Der Verband $(G(A, u), \subseteq)$ ist zu dem Verband aller Teilmengen einer Menge $C = C(A, u)$ isomorph (die entsprechende Verbandsordnung ist die Inklusion \supseteq).

Beweis. Falls (10) gilt, ist für die Kette (A, u) nach Satz 9 $G(A, u) = \bar{K}(A, u)$. Darum genügt es zu zeigen, dass z.B. (10) \Rightarrow (15) gilt. Es sei $A \neq \emptyset$ (für $A = \emptyset$ ist die Behauptung trivial – es genügt $B = \emptyset$ zu wählen).

Nach (10) hat jedes Element in (A, u) – eine Ausnahme bilden eventuell das kleinste und grösste Element – einen oberen und einen unteren Nachbar. Für alle $\varrho \in \bar{K}(A, u)$ und für alle $X \in A/\varrho$ – eine Ausnahme bilden eventuell das grösste und kleinste Element X in $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ – existieren dann $a_X, b_X \in A$, so dass $X = \langle a_X, b_X \rangle$ ist. Für $\varrho \in \bar{K}(A, u)$ bezeichne $i(\varrho) =_{\text{Def}} \{a_X \mid X \in A/\varrho\} - \{\inf A\}$; falls $\inf A$ nicht existiert, ist natürlich $\{\inf A\} = \emptyset$. Die auf diese Weise definierte Abbildung $i: \bar{K}(A, u) \rightarrow B(A - \{\inf A\})$ (vgl. [7], Abs. 1: ist X eine Menge, bezeichnet $B(X)$ das System aller Teilmengen von X) ist offenbar der gesuchte Isomorphismus.

23. Satz. Es sei (A, u) eine geordnete, mindestens drei Elemente enthaltende Menge. Dann ist die Bedingung (10) mit den folgenden Behauptungen äquivalent:

- (17) $(G(A, u), \subseteq)$ ist eine vollständige Boolesche Algebra.
- (18) $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist eine vollständige Boolesche Algebra.
- (15) (Siehe Abs. 22.)
- (16) (Siehe Abs. 22.)

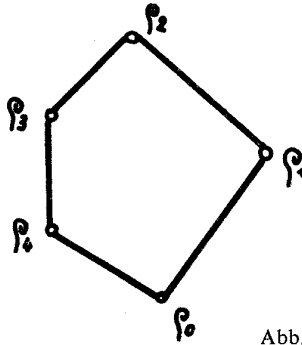


Abb. 3.

Beweis. Die Implikationen (10) \Rightarrow (15) und (10) \Rightarrow (16) gelten nach Abs. 22, die Implikationen (16) \Rightarrow (17) und (15) \Rightarrow (18) sind trivial. Die Implikationen (18) \Rightarrow (10) und (17) \Rightarrow (10) gelten nach Abs. 21, denn eine vollständige Boolesche Algebra ist auch unendlich-vereinigungsdistributiv (vgl. z.B. [9], Satz 43, S. 137).

24. Bemerkung. Nach Abs. 19, 21, 23 sind für die mindestens dreielementige geordnete Menge (A, u) die Behauptungen (10) – (18) äquivalent. Es ist beachtenswert, dass die Verbände $(G(A, u), \subseteq)$ und $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ keine Booleschen Algebren sein können, ohne vollständige Boolesche Algebren zu sein, u.ä.

Auf die Verbände $(F(A, u), \subseteq)$ können die Behauptungen der Abs. 19, 21, 23 allgemein nicht übertragen werden; dies zeigt z.B. die folgende Behauptung.

a. *Es sei (A, u) eine mindestens drei Elemente enthaltende Kette. Dann ist der Verband $(F(A, u), \subseteq)$ nicht modular; er enthält einen Teilverband, dessen Hasse'sches Diagramm auf Abb. 3 dargestellt ist.*

Beweis. Wir wählen dreielementige Menge $\{a, b, c\} \subseteq A$, so dass $(a, b) \in u - \text{id}_A$, $(b, c) \in u - \text{id}_A$ gilt. Weiter wählen wir $\varrho_0 = \{c\}^2$, $\varrho_1 = \{a, c\}^2$, $\varrho_2 = \{a, b, c\}^2$, $\varrho_3 = \{b, c\}^2$, $\varrho_4 = \{b\}^2 \cup \{c\}^2$. Dann ist $(\{\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4\}, \subseteq)$ ein Teilverband von $(F(A, u), \subseteq)$ mit dem auf Abb. 3 dargestellten Hasse'schen Diagramm; speziell ist also $(F(A, u), \subseteq)$ kein modularer Verband (nach [7], Abs. 36, ist vor allem $\{a, c\}^2 \cup \{b\}^2 \notin F(A, u)$ und die Relationen $\varrho_i \in F(A, u)$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4$ folgen direkt z.B. aus [7], Abs. 19 u. 17).

25. Bemerkung. Auf geordneten Mengen (A, u) definierte isotone Abbildungen – und also auch ihre Kerne – sind „natürliche Gebilde“ auf (A, u) . Man kann also eine enge Verwandtschaft der geordneten Menge (A, u) mit $(G(A, u), \subseteq)$ voraussetzen (weniger wahrscheinlich schon bei (A, u) und $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$). Es wäre also nicht ohne Interesse diese Aufgaben zu untersuchen:

a. Welche „Verbandsbedingung“ induziert in $(G(A, u), \subseteq)$ die in der Theorie der geordneten Mengen übliche und in (A, u) geforderte Bedingung?

b. Welche auf die geordnete Menge (A, u) gestellte Bedingung induziert die in der Verbandstheorie übliche und auf den Verband $(G(A, u), \subseteq)$ gestellte Bedingung?

Man kann sicher allgemein nicht voraussetzen, dass die „natürliche Bedingung“ in einer Theorie die übliche Bedingung der anderen Theorie induzieren wird – hier aber ist es uns gelungen, vor allem im Abs. 14. Nach Abs. 24/a sind die vollständigen Verbände $(F(A, u), \subseteq)$ zu diesem Zweck etwa weniger geeignet.

26. Bemerkung. Der folgende zweite Teil dieser Arbeit hat einen ergänzenden Charakter. Es werden vollständig diejenigen Probleme gelöst, die durch den Satz 9 induziert sind (d.h. diejenigen $u \in \mathcal{U}(A)$ zu charakterisieren, für die gilt: $\bar{K}(A, u) = E(A)$ – Abs. 27, $L(A, u) = E(A)$ – Abs. 28, $G(A, u) = E(A)$ – Abs. 30, und endlich $G(A, u) = \bar{K}(A, u)$ – Abs. 35) und auch durch den Satz 3 (d.h. diejenigen Ordnungen u auf A zu charakterisieren, für die der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ bzw. $(G(A, u), \subseteq)$ im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$ angeschlossen ist – Abs. 40 bzw. 43).

27. Satz. *Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Es ist $\bar{K}(A, u) = E(A)$ genau dann, wenn jede Kette in (A, u) höchstens zwei Elemente enthält.*

Beweis. Es sei $\{a, b, c\} \subseteq A$, $(a, b), (b, c) \in u - \text{id}_A$. Wählen wir $\sigma =_{\text{DF}} \{a, c\}^2 \cup \text{id}_A$, dann ist offenbar $\sigma \in E(A) - \bar{K}(A, u)$ (vgl. die Definition der u -konvexen Äquivalenz auf A in Abs. 4). Aus der Gleichheit $E(A) = \bar{K}(A, u)$ folgt also, dass jede Kette in (A, u) höchstens zwei Elemente enthält.

Es sei nun vorausgesetzt, dass jede Kette in (A, u) höchstens zwei Elemente enthält. Nach Abs. 6 ist $\bar{K}(A, u) \subseteq E(A)$; es genügt also, die Umkehrung dieser Inklusion zu beweisen. Es sei $q \in E(A)$, $X \in A/q$ und $x, y \in X$. Ist $(x, y) \notin u$, dann ist $\langle x, y \rangle = \emptyset \subset X$. Es sei also vorausgesetzt, dass $(x, y) \in u$ ist. Nach Voraussetzung ist dann $\langle x, y \rangle = \{x, y\}$ in (A, u) und deshalb ist $\langle x, y \rangle \subseteq X$. Das Element $X \in A/q$ wurde in A/q beliebig gewählt, und nach den obigen Überlegungen ist X eine u -konvexe Teilmenge in A . Also ist $q \in \bar{K}(A, u)$.

28. Folgerung. *Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Es ist $L(A, u) = E(A)$ genau dann, wenn (A, u) eine Kette von höchstens zwei Elementen ist.*

Beweis. Ist $L(A, u) = E(A)$, dann ist nach Abs. 6 $L(A, u) = \bar{K}(A, u) = E(A)$. Nach Satz 9 ist (A, u) eine Kette, und diese Kette enthält nach Satz 27 höchstens zwei Elemente.

Die umgekehrte Behauptung folgt direkt aus Abs. 9 u. 27.

29. Definition. (A, u) wird genau dann eine *fast-triviale geordnete Menge* genannt, wenn jede Kette in (A, u) aus höchstens zwei Elementen besteht und wenn jede zwei Ketten von zwei Elementen einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

30. Satz. *Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Es ist $G(A, u) = E(A)$ genau dann, wenn (A, u) eine fast-triviale geordnete Menge ist.*

Beweis. Es sei $G(A, u) = E(A)$. Nach Abs. 6 u. 27 besteht dann jede Kette in (A, u) aus höchstens zwei Elementen. Es seien $\{a, b\}, \{c, d\}$. Teilmengen von A , für die gilt

$$\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset, \quad (a, b), (c, d) \in u - \text{id}_A.$$

Wählen wir $\sigma =_{\text{DF}} \{a, d\}^2 \cup \{b, c\}^2 \cup \text{id}_A$; ist $\sigma \in E(A)$. Dabei gelten die Beziehungen

$$\{a, d\}, \{b, c\} \in A/\sigma, \quad \{a, d\} \cap \{b, c\} = \emptyset,$$

$$(\{a, d\}, \{b, c\}) \in \dot{u} \cap (\dot{u})^{-1}$$

(vgl. [7], Abs. 17 und [8], Abs. 1). Die Relation $\dot{u} \cap (A/\sigma)^2$ ist also nicht antisymmetrisch auf A/σ , und umso mehr gilt dies für ihre transitive Hülle $u_{A/q}$. Dann ist jedoch nach [7], Abs. 19, $\sigma \notin G(A, u)$. Dieser Widerspruch und die obigen Erwägungen implizieren, dass (A, u) eine fast-triviale geordnete Menge ist.

Nun sei umgekehrt (A, u) eine fast-trivial geordnete Menge. Nach Abs. 6 ist $G(A, u) \subseteq E(A)$; wir werden die Umkehrung dieser Inklusion beweisen. Es sei $\varrho \in E(A)$. Wir wählen $X, Y, Z \in A/\varrho$, so dass $(X, Y) \in \dot{u}$ und $(Y, Z) \in \dot{u}$. Ist dann existieren Elemente $x \in X, y_1 \in Y, y_2 \in Y$ und $z \in Z$, für die $(x, y_1) \in u$ und $(y_2, z) \in u$ ist. Ist $\{x, y_1\} \cap \{y_2, z\} = \emptyset$, ist – in Bezug auf die Fast-Trivialität der Ordnung von (A, u) – entweder $x = y_1$ oder $y_2 = z$, d.h. entweder $X = Y$ oder $Y = Z$. Ist $y_1 = y_2$, dann ist – in Bezug auf die Tatsache, dass jede Kette in (A, u) aus höchstens zwei Elementen besteht – entweder $x = y_1$ – d.h. $X = Y$, oder $y_2 = z$ – d.h. $Y = Z$, oder $x = z$, d.h. $X = Y = Z$. Für $X, Y, Z \in A/\varrho$ folgen aus den Relationen $(X, Y), (Y, Z) \in \dot{u}$ die Beziehungen $X = Y$ oder $Y = Z$, und deshalb ist die Beziehung $\dot{u} \cap (A/\varrho)^2$ antisymmetrisch und transitiv, d.h. $u_{A/\varrho} = \dot{u} \cap (A/\varrho)^2 \in \mathcal{U}(A/\varrho)$. Nach [7], Abs. 19 ist also $\varrho \in G(A, u)$. Für eine fast-trivial geordnete Menge (A, u) ist demnach $G(A, u) = E(A)$.

31. Bezeichnung. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Für $x, y \in A$ bezeichnen wir

$$[x, y] =_{\text{Def}} \langle x, y \rangle \cup \langle y, x \rangle \cup \{x, y\}.$$

32. Definition. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Wir sagen, dass in (A, u) die Bedingung (a) erfüllt ist, wenn für jede Teilmenge $\{a, b, c, d\}$ in A aus den Relationen

$$(a, b) \in u - \text{id}_A, \quad (c, d) \in u - \text{id}_A, \quad (a, c) \notin u \cup u^{-1}, \quad (b, d) \notin u \cup u^{-1}$$

die Beziehung $[a, d] \cap [b, c] \neq \emptyset$ folgt.

33. Lemma. Es sei $u \in \mathcal{U}(A)$. Für beliebige Elemente $x, y \in A$ ist dann $[x, y]$ eine u -konvexe Teilmenge in A .

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Abs. 31.

34. Lemma. Es sei $u \in \mathcal{U}(A)$ und es sei in (A, u) die Bedingung (a) erfüllt. Ist nun $\sigma \in \bar{K}(A, u)$, $n \neq 0$ natürlich, $X_0, \dots, X_n \in A/\sigma$, $(X_i, X_{i+1}) \in \dot{u}$ für alle $i = 0, \dots, n-1$ und $(X_n, X_0) \in \dot{u}$, ist $X_0 = X_1 = \dots = X_n$.

Beweis wird durch Induktion geführt. Es sei $n = 1$. Ist $X_0 = X_1$, gilt die Behauptung. Es sei deshalb vorausgesetzt, dass $X_0 \neq X_1$ ist; wir werden zeigen, dass diese Voraussetzung zu einem Widerspruch führt. Aus den Beziehungen $(X_0, X_1) \in \dot{u}$, $(X_1, X_0) \in \dot{u}$ folgt die Existenz von Elementen $a, d \in X_0$ und $b, c \in X_1$, für die gilt: $(a, b) \in u - \text{id}_A$, $(c, d) \in u - \text{id}_A$. Es ist $(c, d) \in u$; ist auch $(a, c) \in u$, dann folgt aus der u -Konvexität der Äquivalenz σ auf A , dass $c \in X_0$ ist, d.h. es ist $X_0 = X_1$. Die Beziehung $(a, c) \in u$ ist hiermit ausgeschlossen. Es ist $(a, b) \in u$; ist auch $(c, a) \in u$, folgt aus der u -Konvexität der Äquivalenz σ auf A wieder $a \in X_1$, d.h. wieder ist $X_0 = X_1$. Es ist also $(a, c) \notin u \cup u^{-1}$, und ähnlicherweise kann man herleiten, dass $(b, d) \notin u \cup u^{-1}$ ist. Nach Bedingung (a) existiert ein Element $e \in [a, d] \cap [b, c]$.

Aus der Voraussetzung $\sigma \in \bar{K}(A, u)$ folgt $[a, d] \subseteq X_0$, $[b, c] \subseteq X_1$, und deshalb ist $e \in X_0 \cap X_1$, d.h. $X_0 = X_1$. Im Widerspruch zur Voraussetzung $X_0 \neq X_1$ ist also $X_0 = X_1$, wodurch die Behauptung für $n = 1$ bewiesen ist.

Die Behauptung gelte nun für eine natürliche Zahl n , $n \geq 1$, und es sei $X_0, \dots, X_n, X_{n+1} \in A/\sigma$,

$$(X_0, X_1), (X_1, X_2), \dots, (X_n, X_{n+1}), (X_{n+1}, X_0) \in \dot{u}.$$

Ist $X_0 = X_1$ oder $X_{n+1} = X_0$, gelten die Gleichheiten $X_0 = X_1 = \dots = X_n = X_{n+1}$ nach Induktionsvoraussetzung. Es sei $X_0 \neq X_1$, $X_{n+1} \neq X_0$; wir werden zeigen, dass dies ausgeschlossen ist. Es existieren $a, d \in X_0$, $b \in X_1$, $c \in X_{n+1}$, so dass $(a, b) \in e \cup \text{id}_A$, $(c, d) \in u - \text{id}_A$ gilt. Die Ungleichungen $(b, d) \in u$ und $(a, c) \in u$ sind ausgeschlossen, da die Äquivalenz σ u -konvex auf A ist und $X_{n+1} \neq X_0 \neq X_1$ ist. Ist $(d, b) \in u$, dann ist $(X_{n+1}, X_1) \in \dot{u}$ und nach Induktionsvoraussetzung ist $X_0 = \dots = X_{n+1}$. Ähnlicherweise wird die Ungleichung $(c, a) \in u$ ausgeschlossen. Es ist also $(a, c) \notin u \cup u^{-1}$, $(b, d) \notin u \cup u^{-1}$ und nach Bedingung (a) existiert deshalb ein Element e , $e \in [a, d] \cap [b, c] \subseteq [a, d] \subseteq X_0$. Alle Möglichkeiten sind im folgenden zusammengefasst:

$a = e$. Im Falle $e \in \dot{>c}$, $b \dot{<}$ ist $(X_{n+1}, X_1) \in \dot{u}$ und dann ist laut Induktionsvoraussetzung $X_0 = \dots = X_{n+1}$. Der Fall $e \in \dot{>b}$, $c \dot{<}$ ist ausgeschlossen, da $(a, b) \in u - \text{id}_A$ ist. Durch die Beziehungen $X_{n+1} \neq X_0 \neq X_1$ ist die Eventualität $e \in \{b, c\}$ ausgeschlossen. Für $a = e$ ist also $e \notin \dot{>b}$, $c \dot{<} \cup \dot{>c}$, $b \dot{<} \cup \{b, c\} = [b, c]$ – das ist ein Widerspruch.

$d = e$. Hier ist alles wie im vorhergehenden Fall, mit Austausch von a und d .

$e \in \dot{>a}$, $d \dot{<}$. Aus der u -Konvexität von σ auf A und aus der Relation $e \in [b, c]$ folgt $e \in \dot{>b}$, $c \dot{<} \cup \dot{>c}$, $b \dot{<}$. Ist $e \in \dot{>b}$, $c \dot{<}$, folgt aus den Ungleichungen (e, c) , $(c, d) \in u$ und aus der u -Konvexität von σ auf A die Beziehung $c \in X_0$, d.h. $X_0 = X_{n+1}$. Ist $e \in \dot{>c}$, $b \dot{<}$, dann ist $(c, b) \in u$ und also $(X_{n+1}, X_1) \in \dot{u}$; nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $X_0 = \dots = X_{n+1}$.

$e \in \dot{>d}$, $a \dot{<}$. Dieser Fall wird wieder analogisch untersucht.

Hiermit ist die Behauptung durch Induktion bewiesen.

35. Satz. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Es ist $\bar{K}(A, u) = G(A, u)$ genau dann, wenn in (A, u) die Bedingung (a) erfüllt ist (vgl. Abs. 32).

Beweis. Falls (a) in (A, u) erfüllt ist, ist $\bar{K}(A, u) \subseteq G(A, u)$ nach Lemma 34 und [7], Abs. 17, 19. Die Inklusion $G(A, u) \subseteq \bar{K}(A, u)$ gilt nach Lemma 6, und die Bedingung (a) in (A, u) impliziert also die Gleichheit $G(A, u) = \bar{K}(A, u)$.

Es sei nun vorausgesetzt, dass (a) in (A, u) nicht gilt. Dann existieren Elemente $a, b, c, d \in A$, für die gilt:

$$(a, b), (c, d) \in u - \text{id}_A, \quad (a, c), (b, d) \notin u \cup u^{-1}, \quad [a, d] \cap [b, c] = \emptyset.$$

Wir setzen $\sigma =_{\text{Def}} [a, d]^2 \cup [b, c]^2 \cup \text{id}_A$. Nach Lemma 33 ist $\sigma \in \bar{K}(A, u)$. Die Mengen $[a, d]$, $[b, c]$ sind verschiedene Elemente der Zerlegung A/σ . Dabei ist $([a, d], [b, c]) \in \dot{u} \cap (\dot{u})^{-1}$ (denn $(a, b) \in u$ und $(c, d) \in \dot{u}$) und nach [7], Abs. 17 u. 19, ist $\sigma \notin G(A, u)$. Aus der Ungültigkeit von **(a)** in (A, u) folgt also die scharfe Inklusion $G(A, u) \subset \bar{K}(A, u)$ (vgl. Abs. 6).

36. Definition. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Wir sagen, dass in (A, u) die Bedingung **(b)** erfüllt ist, wenn in A keine Teilmenge $\{a, b, c, d\}$ existiert, deren Elemente den Relationen

$$(a, b) \in u - \text{id}_A, \quad (b, c) \in u - \text{id}_A, \quad (b, d) \notin u \cup u^{-1}.$$

genügen.

37. Lemma. Es sei $u \in \mathcal{U}(A)$. Die Bedingung **(b)** ist in (A, u) genau dann erfüllt, wenn in (A, u) mindestens eine von den folgenden Behauptungen gilt.

(19) Jede Kette in (A, u) besteht aus höchstens zwei Elementen (vgl. Abs. 27).

(20) (A, u) kann als Ordinalsumme $(A_1, u) \oplus (A_2, u) \oplus (A_3, u)$ ausgedrückt werden, wo (A_1, u) und (A_3, u) trivial geordnete Mengen sind und (A_2, u) eine nicht-leere Kette ist und wobei kein Element in A_2 maximal oder minimal in (A, u) ist.

Beweis. Falls (19) oder (20) gilt, gilt offenbar auch **(b)**.

Es sei nun in (A, u) die Bedingung **(b)** erfüllt und (19) gelte nicht. Dann existiert in (A, u) eine aus mindestens drei Elementen bestehende Kette X . Nach dem Hausdorffschen Satz ist X eine u -Teilkette der maximalen u -Kette Y in A im Sinne der Inklusion. Wir bezeichnen

$$A_2 = Y - (\{\sup_{(A, u)} Y\} \cup \{\inf_{(A, u)} Y\}),$$

wo natürlich $\{\sup_{(A, u)} Y\} = \emptyset$ bzw. $\{\inf_{(A, u)} Y\} = \emptyset$ ist, falls $\sup Y$ bzw. $\inf Y$ nicht existiert.

Nach den Voraussetzungen über X und Y ist $A_2 \neq \emptyset$, kein Element aus A_2 ist maximal oder minimal in (A, u) und (A_2, u) ist eine Kette. Es existiere ein Element $b \in A - Y$, so dass b weder maximal noch minimal in (A, u) ist; wir zeigen, dass diese Voraussetzung mit **(b)** im Widerspruch steht: Dann existieren Elemente $a, c \in A$, so dass $(a, b) \in u - \text{id}_A$, $(b, c) \in u - \text{id}_A$ ist. Es ist $b \in A - Y$ und Y ist die maximale u -Kette in A ; deshalb existiert ein Element $d \in Y$, für das $(b, d) \notin u \cup u^{-1}$ ist. Aus der Existenz einer solchen Menge $\{a, b, c, d\}$ aber folgt, dass (A, u) die Bedingung **(b)** nicht erfüllt. Jedes Element in $A - A_2$ ist also maximal oder minimal in (A, u) . A_1 bzw. A_3 definieren wir als Menge aller minimalen bzw. maximalen Elemente in (A, u) ; die Mengen (A_1, u) und (A_3, u) sind ex definitione trivial geordnet.

Es sei $x \in A_1$, $y \in A_2$ und $z \in A_3$. Ist $(x, y) \notin u$ bzw. $(y, z) \notin u$, kann man wieder leicht (aus der Definition der Menge A_2) herleiten, dass in (A, u) die Bedingung **(b)**

nicht erfüllt ist. Es ist also $(A, u) = (A_1, u) \oplus (A_2, u) \oplus (A_3, u)$, d.h. in (A, u) gilt Behauptung (20).

38. Lemma. Die geordnete Menge (A, u) erfülle (20). Ist $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und ist für alle $i = 0, \dots, n$ und $j = 0, \dots, n - 1$, $\sigma_i \in \bar{K}(A, u)$, $X_i \in A/\sigma_i$ und $X_j \cap X_{j+1} \neq \emptyset$, dann ist $\bigcup_{i=0}^n X_i$ eine u -konvexe Teilmenge in A .

Beweis. Für $n = 1$ nehmen wir $a, c \in X_0 \cup X_1$, $b \in A$, $(a, b) \in u - \text{id}_A$, $(b, c) \in u - \text{id}_A$. Dann ist $b \in A_2$ (siehe (20) in Abs. 37). Wir wählen $d \in X_0 \cap X_1$ und setzen voraus, dass $(d, b) \in u$ ist. Aus der u -Konvexität von σ_1 auf A folgt die Relation $b \in X_i \subseteq \subseteq X_0 \cup X_1$ ($i \in \{0, 1\}$, X_i ist diejenige Menge, für die $c \in X_i$ ist). Analogischerweise zeigt man $b \in X_j \subseteq X_0 \cup X_1$ im Falle $(b, d) \in u$ (es ist $a \in X_j$, $j \in \{0, 1\}$).

Bei $n \geq 1$ nehmen wir an, dass die Behauptung gilt; nun soll man beweisen, dass dieses Lemma auch für $n + 1$ gültig ist. Wir bezeichnen $\sigma = \left(\bigcup_{i=0}^n X_i\right)^2 \cup \text{id}_A$; nach der Induktionvoraussetzung ist aber $\sigma \in \bar{K}(A, u)$ und nach der Auswahl σ gilt $\left(\bigcup_{i=0}^n X_i\right) \in A/\sigma$. Aus der Voraussetzung $X_{n+1} \cap X_n \neq \emptyset$ folgt $X_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=0}^n X_i\right) \neq \emptyset$ deswegen (s. den Fall $n = 1$) ist die Menge $X_{n+1} \cup \left(\bigcup_{i=0}^n X_i\right) = \bigcup_{i=0}^{n+1} X_i$ u -konvex in A .

39. Lemma. Die geordnete Menge (A, u) erfülle (20). Für jede Teilmenge \mathcal{X} in $\bar{K}(A, u)$ ist dann $\sup_{(\bar{K}(A, u), \subseteq)} \mathcal{X} = \sup_{(E(A), \subseteq)} \mathcal{X}$.

Beweis. Der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist eine geordnete Teilmenge im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$. Um das Lemma zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass $\alpha =_{\text{df}} \left(\sup_{(E(A), \subseteq)} \mathcal{X}\right) \in \bar{K}(A, u)$ ist.

Es sei $(x, y) \in \alpha$, $z \in A$ und $(x, z), (z, y) \in u - \text{id}_A$. Dann existieren natürliche Zahl $n \geq 1$, Äquivalenzen $\sigma_0, \dots, \sigma_n \in \mathcal{X} \subseteq \bar{K}(A, u)$ und Mengen $X_0 \in A/\sigma_0, \dots, X_n \in A/\sigma_n$, so dass $x \in X_0$, $y \in X_n$ ist und dass für alle Indices j , $j = 0, \dots, n - 1$ gilt: $X_j \cap X_{j+1} \neq \emptyset$. Nach Lemma 38 ist $\bigcup_{i=0}^n X_i$ eine u -konvexe Teilmenge in A , und deshalb ist auch $z \in \bigcup_{i=0}^n X_i$, d.h. es ist $(x, z) \in \alpha$. Also ist $\alpha \in \bar{K}(A, u)$.

40. Satz. Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist genau dann abgeschlossen im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$, wenn in (A, u) die Bedingung **(b)** erfüllt ist (siehe Abs. 36).

Beweis. Es gelte **(b)** in (A, u) nicht, d.h. es existiere eine Teilmenge $\{a, b, c, d\}$, deren Elemente den Relationen $(a, b) \in u - \text{id}_A$, $(b, c) \in u - \text{id}_A$, $(b, d) \notin u \cup u^{-1}$

genügen. Wir setzen dann $\varrho =_{\text{Df}} [a, d]^2 \cup \text{id}_A$, $\sigma =_{\text{Df}} [d, c]^2 \cup \text{id}_A$. Nach Abs. 33 u. 7 $\varrho, \sigma \in \bar{K}(A, u)$. Im Verband $(E(A), \subseteq)$ ist

$$\tau =_{\text{Df}} \varrho \vee \sigma = ([a, d] \cup [d, c])^2 \cup \text{id}_A \in E(A);$$

die Äquivalenz τ ist dabei auf A nicht u -konvex, da $(a, b) \notin \tau$ auch wenn $(a, b) \in u$, $(b, c) \in u$. Wenn also **(b)** nicht erfüllt ist, $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$ nicht abgeschlossen.

Es sei nun vorausgesetzt, dass **(b)** in (A, u) erfüllt ist. Nach Lemma 37 gilt dann für die geordnete Menge (A, u) die Behauptung (19) oder (20). Gilt in (A, u) (19), ist laut Abs. 27 $\bar{K}(A, u) = E(A)$ und der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist also abgeschlossen im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$. Gilt in (A, u) (19) nicht, gilt nach Abs. 37 in (A, u) die Behauptung (20). Dann ist nach Lemma 39 der vollständige Vereinigungshalbverband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ abgeschlossen im vollständigen Vereinigungshalbverband $(E(A), \subseteq)$. Nach Abs. 5 ist auch der vollständige Durchschnittshalbverband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ abgeschlossen im vollständigen Durchschnittshalbverband $(E(A), \subseteq)$; der vollständige Verband $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ ist also abgeschlossen im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$.

41. Lemma. *Es sei (A, u) eine geordnete Menge, in der jede Kette höchstens zwei Elemente enthält, und weiter seien a, b, c, d Elemente aus A , für die gilt:*

$$(a, b), (c, d) \in u - \text{id}_A, \quad (a, c), (b, d) \notin u \cup u^{-1}.$$

Dann ist der Vereinigungshalbverband $(G(A, u), \subseteq)$ kein Vereinigungsteilhalbverband im Vereinigungshalbverband $(E(A), \subseteq)$.

Beweis. Wir setzen $\varrho =_{\text{Df}} [a, d]^2 \cup \text{id}_A$, $\sigma =_{\text{Df}} [b, c]^2 \cup \text{id}_A$. Nach Abs. 33 u. 7 ist $\varrho, \sigma \in G(A, u)$. Aus den Voraussetzungen und aus der Wahl von ϱ, σ folgt

$$\begin{aligned} ([a, d], [b, c]) &\in \dot{u} \cap (\dot{u})^{-1}, & [a, d] \cap [b, c] &= \emptyset \\ [a, d] &\in A/\varrho, & [b, c] &\in A/\sigma, \end{aligned}$$

und deshalb (vgl. [7], Abs. 17 u. 19) ist

$$\sup_{(E(A), \subseteq)} \{\varrho, \sigma\} = ([a, d]^2 \cup [b, c]^2 \cup \text{id}_A) \notin G(A, u).$$

42. Lemma. *Es sei (A, u) eine geordnete Menge und B sei die maximale Kette in (A, u) . Falls Elemente $a \in A$ und $b \in B$ existieren, so dass b weder maximal noch minimal in (B, u) und $(a, b) \notin u \cup u^{-1}$ ist, dann ist der Vereinigungshalbverband $(G(A, u), \subseteq)$ kein Vereinigungsteilhalbverband im Vereinigungshalbverband $(E(A), \subseteq)$.*

Beweis. Laut Voraussetzungen über b existieren Elemente $c, d \in B$ mit $(c, b), (b, d) \in u - \text{id}_A$. Wir wählen

$$\varrho =_{\text{Df}} [a, c]^2 \cup \text{id}_A, \quad \sigma =_{\text{Df}} [a, d]^2 \cup \text{id}_A;$$

es ist

$$b \notin [a, c] \cup [a, d],$$

und

$$[a, c] \in A/\varrho, \quad [a, d] \in A/\sigma, \quad \sup_{(E(A), \subseteq)} \{\varrho, \sigma\} = ([a, c] \cup [a, d])^2 \cup \text{id}_A.$$

Nach Abs. 33 und 7 ist $\varrho, \sigma \in G(A, u)$, und dabei ist nach Abs. 36 in [7]

$$\sup_{(E(A), \subseteq)} \{\varrho, \sigma\} \notin G(A, u)$$

(denn $\sup_{(E(A), \subseteq)} \{\varrho, \sigma\}$ liegt laut Eigenschaften von b, c, d sogar nicht in $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$).

43. Satz. *Es sei (A, u) eine geordnete Menge. Der vollständige Verband $(G(A, u), \subseteq)$ ist genau dann abgeschlossen im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$, wenn (A, u) eine fast-trivial geordnete Menge ist (vgl. Abs. 29) oder wenn in (A, u) Behauptung (20) gilt (vgl. Abs. 37).*

Beweis. Ist (A, u) eine fast-trivial geordnete Menge, ist (siehe Abs. 30) $E(A) = G(A, u)$, und deshalb ist der vollständige Verband $(G(A, u), \subseteq)$ abgeschlossen im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$. Falls in (A, u) (20) gilt, gilt offenbar in (A, u) auch **(a)** (siehe Abs. 32), und deshalb ist $\bar{K}(A, u) = G(A, u)$ (siehe Abs. 35). Nach Abs. 40 ist unter Voraussetzung **(b)** $(\bar{K}(A, u), \subseteq)$ abgeschlossen in $(E(A), \subseteq)$, aber nach Abs. 37 ist **(b)** durch Voraussetzung (20) impliziert. Aus (20) folgt also, dass $(G(A, u), \subseteq)$ in $(E(A), \subseteq)$ abgeschlossen ist.

Zum Gegenteil gelte nun in (A, u) weder (20), noch die Forderung der Fast-Trivialität. Wenn in (A, u) jede Kette höchstens zwei Elemente besitzt, ist nach Abs. 41 (dessen Voraussetzungen in diesem Fall offensichtlich erfüllt sind) der vollständige Verband $(G(A, u), \subseteq)$ nicht abgeschlossen im vollständigen Verband $(E(A), \subseteq)$. Es existiere nun in (A, u) eine Kette, die mindestens drei Elemente enthält. Da in (A, u) (20) nicht gilt, folgt, dass (A, u) die Voraussetzungen von Lemma 42 erfüllt, und auch in diesem Fall ist also $(G(A, u), \subseteq)$ nicht abgeschlossen in $(E(A), \subseteq)$.

Literaturverzeichnis

- [1] *Birkhoff, G.*: Lattice theory. New York, A.M.S.C. Publ. 25, 1948.
- [2] *Bourbaki, N.*: Théorie des ensembles, 3. chap. Paris, Hermann 1956.
- [3] *Bruns, G.*: Verbandstheoretische Kennzeichnung vollständiger Mengenringe. Arch. Math. 10 (1959), 109–112.

- [4] *Funayama, N. - Nakayama, T.*: On the distributivity of a lattice-congruences. Proc. Imp. Acad. Tokyo 18 (1942), 553—554.
- [5] *Grätzer, G. — Schmidt, E. T.*: Ideals and congruence relations in lattices. Acta Math. Acad. scient. Hung. IX (1958), 149—175.
- [6] *Hashimoto, J.*: Ideal theory for lattices. Math. Japonicae 2 (1952), 149—186.
- [7] *Sturm, T.*: Verbände von Kernen isotoner Abbildungen. Czech. Math. J. 22 (97), 1972, 126—144.
- [8] *Sturm, T.*: Äquivalenz- und Ordnungsrelationen. Czech. Math. J. 22 (97), 1972, 373—392.
- [8'] *Sturm, T.*: Zu Äquivalenz- und Ordnungsrelationen. Czech. Math. J. 23 (98), 1973, 362—374.
- [9] *Szász, G.*: Einführung in die Verbandstheorie. Leipzig, Teubner-Verlag 1962.
- [10] *Jakubík, J.*: Relácie kongruentnosti a slabá projektívnosť vo sväzoch. Čas. pro pěst. mat. 80 (1955), 206—216.

Anschrift des Verfassers: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2, ČSSR (České vysoké učení technické).