

# Einige Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen mit idealer Flüssigkeit, die sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen

H. STEPHANI

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Jena

Eingegangen am 1. März 1968

**Abstract.** All solutions of the Einstein equations for a perfect fluid are given, which are invariantly characterized by: embedding class one, Petrov type  $D$ , zero acceleration of matter. Among these solutions are inhomogeneous cosmological models and special solutions with spherical symmetry.

Ein Rechenfehler führte in einer früheren Arbeit [1] des Verfassers zu der Feststellung, daß es keine beschleunigungsfreien Lösungen (mit idealer Flüssigkeit) der Einbettungsklasse 1 und des Petrowtyps  $D$  gibt. Wir wollen diese Lösungen jetzt explizit bestimmen; man vergleiche zum folgenden die oben zitierte Arbeit.

Wenn sich Lösungen der Einsteinschen Gleichungen mit idealer Flüssigkeit

$$R_{in} - \frac{1}{2} R g_{in} = T_{in} = (\mu + p) u_i u_n + p g_{in} \quad (1)$$

in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen, existiert ein symmetrischer Tensor  $\Omega_{mn}$ , aus dem man den Krümmungstensor bilden kann

$$R_{in kl} = e(\Omega_{ik}\Omega_{nl} - \Omega_{il}\Omega_{kn}), \quad e = \pm 1 \quad (2)$$

und der den Gleichungen

$$\Omega_{in;k} = \Omega_{ik;n} \quad (3)$$

genügt. Hat der Krümmungstensor den Typ  $D$  ( $= I_e$ ), so gilt

$$\begin{aligned} p &= C^2, & \mu &= C(3C + 2D), & e &= +1 \\ \Omega_{in} &= 2C u_i u_n + C g_{in} + D v_i v_n \\ u_i u^i &= -1, & u_i v^i &= 0, & v_i v^i &= 1, \end{aligned} \quad (4)$$

und für beschleunigungsfreie Strömungen folgt aus (3) bei teilweiser Berücksichtigung von (2) das System

$$\begin{aligned} u_{m;n} &= a_1 v_m v_n + a_2 (w_m w_n + z_m z_n) \\ v_{m;n} &= a_1 u_m v_n + a_3 z_m v_n + a_4 w_m v_n \\ C_{,m} &= 2C a_2 u_m \\ D_{,m} &= [(2C + D) a_1 - 2C a_2] u_m + d v_m + C a_3 z_m + C a_4 w_m. \end{aligned} \quad (5)$$

Da die Vektorfelder  $u_i$  und  $v_i$  rotationsfrei sind und gleichzeitig auf die Normalform

$$u^i = -u_i = (0, 0, 0, 1), \quad v_i = (0, 0, v, 0) \tag{6}$$

gebracht werden können, kann man das Koordinatensystem (Ruhe-system der Flüssigkeit)

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^2(t) [dx^2 + H^2(x, y) dy^2] + v^2(x, y, r, t) dr^2 - dt^2 \\ z_i &= (f, 0, 0, 0); \quad v_i = (0, fH, 0, 0) \end{aligned} \tag{7}$$

eingeführen. Die Funktionen  $f, H$  und  $v$  lassen sich aus (2) und (5) bestimmen; man erhält zwei Lösungstypen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= t(dx^2 + dy^2) + v^2(x, y, z, t) dz^2 - dt^2 \\ v &= t\sqrt{t} h_1 + \sqrt{t} \left[ h_2 + \frac{3}{4} h_1(x^2 + y^2) + h_3 x + h_4 y \right] + h_5 \\ p(t) &= \frac{1}{4} t^{-2}, \quad \mu(x, y, z, t) = -\frac{4h_1 t \sqrt{t} + h_5}{2t^2 v} + 3p \\ h_i &= h_i(z) \end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned} ds^2 &= b^2 f^2 \left( dx^2 + \frac{\sinh^2 x}{\sin^2 x} dy^2 \right) + v^2 dr^2 - dt^2, \quad b \geq 0 \\ f^2(t) &= t^2 b^{-1} - eab; \quad e = \pm 1; \quad a, b = \text{const.} \\ v(x, r, t) &= f(t) d_1(x) d_2(r) + d_3(r) \int \frac{dt}{f(t)} + d_4(r) \\ p(t) &= eaf^{-4}; \quad \mu(x, r, t) = p + \frac{2e}{bv f^3} [ab d_1(x) d_2(r) + e d_3(r) t]. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Lösungen (8) hat man wohl als inhomogene Kosmos zu deuten. Ein einfacher Spezialfall entsteht für  $h_1 = h_3 = h_4 = 0$ :

$$ds^2 = t(dx^2 + dy^2) + [\sqrt{t} h_2(z) + h_5(z)]^2 dz^2 - dt^2. \tag{10}$$

Die Unterräume  $t = \text{const.}$  sind flach; der Druck hängt nur von der Zeit, die Ruhemassendichte auch von  $z$  ab. Für große Zeiten geht dieser Kosmos gegen einen Lichtkosmos  $\mu = 3p$ .

Bei der zweiten Lösungsklasse (9) handelt es sich für  $b < 0$  und  $d_1 = 0$  um spezielle kugelsymmetrische Räume.

Herrn Prof. Dr. SCHMUTZER und allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Relativitätstheorie danke ich für Anregungen und Diskussionen.

### Literatur

1. STEPHANI, H.: Commun. Math. Phys. **4**, 137 (1967).

H. STEPHANI  
Theoretisch-Physikalisches Institut  
der Friedrich-Schiller-Universität Jena  
X-69 Jena, Max-Wien-Platz 1