



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 51 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брагин М.Д., Криксин Ю.А.,
Тишкин В.Ф.

Обеспечение энтропийной
устойчивости разрывного
метода Галеркина в
газодинамических задачах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Обеспечение энтропийной устойчивости разрывного метода Галеркина в газодинамических задачах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 51. 22 с. doi:[10.20948/prepr-2019-51](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-51)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-51>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Д. Брагин, Ю.А. Криксин, В.Ф. Тишкин

**Обеспечение энтропийной устойчивости
разрывного метода Галеркина
в газодинамических задачах**

Москва — 2019

Криксин Ю. А., Тишкин В.Ф., Брагин М.Д.

Обеспечение энтропийной устойчивости разрывного метода Галеркина в газодинамических задачах

Предложен новый вариационный принцип вывода модифицированных уравнений разрывного метода Галеркина для решения одномерных уравнений идеальной газовой динамики, опирающийся, в частности, на выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства. В связи с предложенным принципом также разработан специальный энтропийный ограничитель наклонов, который обеспечивает неотрицательное производство энтропии в каждом конечном элементе. Проведены численные расчеты некоторых модельных задач, позволяющие оценить эффективность метода.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, разрывный метод Галеркина, ограничитель наклонов, энтропийное неравенство

Michael Dmitrievich Bragin, Yury Anatolievich Kriksin, Vladimir Fedorovich Tishkin

Ensuring the entropy stability of the discontinuous Galerkin method in gas-dynamics problems

A new variational principle for deriving the discontinuous Galerkin method modified equations is proposed for solving one-dimensional equations of ideal gas dynamics, based, in particular, on the implementation of a discrete analogue of entropic inequality. A special entropic tilt limiter has been developed in connection with the proposed principle, which ensures non-negative entropy production in each finite element. Numerical calculations of some model problems have been carried out in order to evaluate the efficiency of the method.

Key words: gasdynamic equations, the discontinuous Galerkin method, tilt limiter, entropic inequality

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-30014). Авторы благодарят центр информационных технологий университета Гронингена, Нидерланды (Center for Information Technology of the University of Groningen, the Netherlands) за предоставленную возможность проведения расчетов.

1. Введение

В последнее время активно развиваются энтропийно устойчивые методы и алгоритмы решения газодинамических и родственных им задач [1-10]. Такая тенденция связана со стремлением улучшить качество численных решений, включив в численные алгоритмы помимо традиционно учитываемых законов сохранения второе начало термодинамики, количественно выражающееся энтропийным неравенством. Второе начало термодинамики допускает не только необратимые процессы, но и обратимые (в этом случае неравенство превращается в равенство); тем не менее, оно запрещает убывание энтропии в частицах сплошной среды [11]. Эти методы включают также разрывный метод Галеркина (РМГ), показавший высокую эффективность в задачах механики сплошных сред [10, 12-18]. Подробный обзор научных работ, связанных с энтропийной устойчивостью численных методов, можно найти в [19].

Недавно нами был предложен метод вариационной энтропийной регуляризации [20], где уравнения РМГ определяются через решение некоторой задачи квадратичного программирования, в которой условная минимизация квадрата нормы невязки классических уравнений РМГ (для уравнений Эйлера) проводится на множестве, задаваемом линейным неравенством – дискретным аналогом энтропийного условия. Однако, как показало численное тестирование [19], такая энтропийная регуляризация не порождает устойчивый вычислительный алгоритм. В задачах с ударными волнами и волнами разрежения, распространяющимися в противоположные стороны, указанный метод не предотвращает появление отрицательных значений давления за конечное время, сколь бы ни была малой величина шага по времени. Таким образом, само по себе выполнение дискретных аналогов законов сохранения и энтропийного неравенства не является достаточной гарантией работоспособности алгоритмов, использующих РМГ.

Предшествующие исследования показали важную роль свойства монотонности в построении алгоритмов решения задач механики сплошных сред [21], в том числе использующих РМГ [13-17]. Целью настоящей работы является усовершенствование метода вариационной энтропийной регуляризации путем включения в него дополнительных линейных ограничений, связанных с монотонностью конечно-элементных (КЭ) аппроксимаций, на которых основан РМГ. Поэтому вариационный подход, развитый нами ранее, остается актуальным: квадрат нормы невязки уравнений РМГ по-прежнему минимизируется на множестве, задаваемом линейными неравенствами. В обновленной версии эти линейные неравенства включают как энтропийное неравенство, так и неравенства, связанные с условиями монотонности.

Изложение материала строится в соответствии со следующей последовательностью. Во втором разделе описана постановка задачи, устанавливаются некоторые свойства РМГ и формулируется обновленный

вариационный подход с учетом энтропийного условия и дополнительных неравенств. Третий раздел содержит результаты расчетов модельных задач и их обсуждение. В четвертом разделе приведены выводы.

2. Постановка задачи и описание алгоритма

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы одномерных уравнений газовой динамики (ГД) в консервативных переменных в приближении совершенного газа

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_0(x), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\rho, I, E)^T = (\rho, \rho u, (\gamma - 1)^{-1} p + \rho u^2 / 2)^T, \\ F(\mathbf{U}) &= (\rho u, \rho u^2 + p, [\gamma(\gamma - 1)^{-1} p + \rho u^2 / 2]u)^T = \\ &= (I, \rho^{-1} I^2 + p, [\gamma(\gamma - 1)^{-1} p + \rho^{-1} I^2 / 2] \rho^{-1} I)^T, \\ p &= (\gamma - 1)(E - \rho^{-1} I^2 / 2), \end{aligned} \quad (2)$$

с некоторыми граничными условиями, которые обеспечиваются включением в расчетную область дополнительных фиктивных ячеек слева и справа от ее границ.

В уравнениях (2) величины $\gamma = 1.4$, ρ , u , p обозначают соответственно показатель адиабаты плотность, скорость и давление газа. Величины I и E обозначают плотность импульса и плотность полной энергии (энергию единицы объема) соответственно. Реалистичная модель газодинамического течения должна также удовлетворять энтропийному неравенству [21]

$$\oint \rho s dx - I s dt \leq 0, \quad (3)$$

в котором безразмерная удельная энтропия определяется равенством

$$s = \ln \frac{p}{p_*} - \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_*}, \quad (4)$$

где в качестве стандартных значений p_* и ρ_* можно выбрать любые постоянные величины, имеющие размерности давления и плотности.

С использованием обозначений

$$S(\mathbf{U}) = \rho s, \quad H(\mathbf{U}) = I s \quad (5)$$

энтропийное неравенство (3) может быть переписано в дифференциальной форме

$$\frac{\partial S(\mathbf{U})}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial x} \geq 0, \quad (6)$$

понимаемой в обобщенном смысле, где $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$ есть скалярное произведение трехмерных векторов.

Для численного решения (1) будем использовать разрывный метод Галеркина [12]. С этой целью зададим в расчетной области $[a, b]$ сетку с $N+1$ узлами x_i , упорядоченными по возрастанию, причем $x_0 = a$, $x_N = b$. Граничные условия задаются с помощью дополнительных фиктивных ячеек, располагающихся слева от $x_0 = a$ и справа от $x_N = b$. Приближенное решение (1) в каждой расчетной ячейке $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ будем искать в виде конечной линейной комбинации ортогональных функций

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{U}_{ki}(t) \varphi_{ki}(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

В качестве системы ортогональных функций выберем полиномы Лежандра ($\varphi_{ki}(x) = P_k(z)$, $x = [(1-z)x_{i-1} + (1+z)x_i]/2$, $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, ... ; $z \in [-1, 1]$). В РМГ с численными потоками Годунова коэффициенты разложения $\mathbf{U}_{ki}(t)$ в правой части (7) определяются как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений [12, 13]

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} \varphi_{ki}(x) dx = (x_i - x_{i-1})^{-1} \{ [\varphi_{ki}(x_{i-1}) \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - \varphi_{ki}(x_i) \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i, t))] + \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) \frac{\partial \varphi_{ki}(x_i)}{\partial x} dx \}; \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad (8)$$

где обозначение $\mathbf{U}_G(x_i, t)$ применяется для значений консервативных переменных, являющихся решением задачи распада разрыва [21] $\mathbf{U}(x_i + 0, t) - \mathbf{U}(x_i - 0, t)$ в узле x_i в момент времени t .

2.2. Конечноэлементная аппроксимация, связанная с РМГ, и ее монотонность

Скалярное произведение и норму в пространстве $L_2(a, b)$ зададим следующим образом

$$(f, g) = \int_a^b f(z)g(z)dz, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}. \quad (9)$$

Исследуем свойства, относящиеся к монотонности, КЭ аппроксимации (7) для какой-нибудь скалярной компоненты функции $U(x, t)$. С этой целью рассмотрим оператор ортогонального проектирования на множестве функций $f(x) \in L_2(a, b)$, отображающий их на подпространство, определяемое множеством $N(n+1)$ ортогональных функций, каждая из которых равна одному из $n+1$ первых полиномов Лежандра $\varphi_{ki}(x) = P_k(z)$ в некоторой ячейке (x_{i-1}, x_i) и нулю в оставшихся ячейках. Этот оператор преобразует функцию $f(x)$ в кусочно-гладкую функцию $\tilde{f}_n(x) \in L_2(a, b)$, определяемую в каждой ячейке $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ равенством

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{k=0}^n f_{ik} P_k(z), \quad x = [(1-z)x_{i-1} + (1+z)x_i]/2, \quad z \in (-1, 1). \quad (10)$$

Коэффициенты f_{ik} в (10) приведены ниже:

$$f_{ik} = \|P_k\|^{-2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{1-z}{2}x_{i-1} + \frac{1+z}{2}x_i\right) P_k(z) dz, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (11)$$

Отметим, что функция (10) с коэффициентами (11) доставляет минимум норме $\|\tilde{f}_n - f\|$ на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) , а значит и на всем интервале (a, b) . Пусть далее проектируемая функция $f(x)$ является монотонно неубывающей на (a, b) . Кусочно-гладкая функция (10) с коэффициентами (11), вообще говоря, не является монотонной на (a, b) за исключением случая $n = 0$. Выясним условия монотонности КЭ аппроксимаций вида (10). Для простоты рассмотрим сначала случай $n = 1$ и установим для него условия монотонности разрывной кусочно-линейной функции

$$\tilde{f}_1(x) = f_{i,0} + f_{i,1}z, \quad x = [(1-z)x_{i-1} + (1+z)x_i]/2, \quad z \in [-1, 1] \quad (12)$$

заданной при $x \in (a, b)$.

Полагая далее, что коэффициенты $f_{i,0}$ в (12) определяются равенствами (11), выделим на указанном подпространстве выпуклое подмножество функций $\tilde{f}_1(x)$, удовлетворяющих системе линейных неравенств

$$|f_{i,1}| \leq \delta \min(\omega_i^L, \omega_i^R), \quad \delta \in [0, 2], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_i^L &= |f_{i,0} - f_{i-1,0}|/2, & \omega_i^R &= |f_{i+1,0} - f_{i,0}|/2, \\ f_{-1,0} &= f(a), & f_{N+1,0} &= f(b), \end{aligned} \quad (14)$$

и решим задачу условной минимизации нормы $\|\tilde{f}_1(x) - f(x)\|$ в $L_2(a, b)$ по переменным $f_{i,1}$ с линейными ограничениями (13). Указанная задача имеет единственное решение

$$\hat{f}_{i,1} = \min(\delta\omega_i^L, \delta\omega_i^R, f_{i,1}). \quad (15)$$

Отметим, что коэффициенты $f_{i,1}$ являются неотрицательными, в чем легко убедиться, интегрируя правую часть равенства (11) по частям.

Рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$\hat{f}_1(x) = f_{i,0} + \hat{f}_{i,1}z. \quad (16)$$

При замене функции (12) на функцию (16) исходный оператор ортогонального проектирования функции $f(x) \in L_2(a, b)$, определяемый равенствами (10) и (11) при $n=1$, трансформируется в нелинейный оператор выпуклого проектирования функции $f(x) \in L_2(a, b)$ на выпуклое множество кусочно-линейных функций, удовлетворяющих неравенствам (13). Этот нелинейный оператор задается равенствами (11) (при $n=0$), (15) и (16).

Нетрудно видеть, что критерием монотонности функции (16) в предположении монотонности проектируемой функции $f(x)$ является выполнение условия $\delta \in [0, 1]$. Наряду с монотонными КЭ аппроксимациями мы будем также рассматривать *квазимонотонные* аппроксимации (14), (16), для которых $\delta \in [1, 2]$. Под *квазимонотонной* КЭ аппроксимацией монотонно неубывающей функции $f(x) \in L_2(a, b)$ здесь понимается функция $\tilde{f}(x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\langle \tilde{f}(x) \rangle_i \leq \langle \tilde{f}(x) \rangle_{i+1}, \quad (17)$$

где

$$\langle \tilde{f}(x) \rangle_i = (x_i - x_{i-1})^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}(y) dy. \quad (18)$$

Разумеется, монотонная КЭ аппроксимация является также квазимоноотонной. Если же функция $f(x)$ является монотонно невозрастающей, то все вышеприведенные рассуждения проводятся в отношении монотонно неубывающей функции $-f(x)$.

Для КЭ аппроксимаций общего вида (10) можно предложить следующий способ выделения подмножеств монотонных аппроксимаций. Пусть равенства (16) определяют некоторую монотонную аппроксимацию монотонно неубывающей функции $f(x)$. Рассмотрим КЭ аппроксимацию вида

$$\hat{f}_n(x) = f_{i,0} + \hat{f}_{i,1}z + g_i(z) = f_{i,0} + \hat{f}_{i,1}z + \sum_{k=2}^n f_{ik}P_k(z). \quad (19)$$

Функция (19) является монотонно неубывающей в том случае, когда выполнены неравенства

$$|g'_i(z)| \leq |\hat{f}_{i,1}|, \quad |\hat{f}_{i,1} + g'_i(z)| \leq \min(\omega_i^L, \omega_i^R), \quad (20)$$

где ω_i^L и ω_i^R определены соотношениями (14). Для получения модифицированных уравнений РМГ применительно к задачам газовой динамики мы далее ограничимся только кусочно-линейными КЭ аппроксимациями (16), удовлетворяющими системе линейных неравенств (13).

2.3. Энтропийно устойчивый разрывный метод Галеркина

Предложенная ранее энтропийная регуляризация РМГ [20], обеспечивающая выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства в каждой ячейке, приводит к неудовлетворительному поведению старших коэффициентов РМГ, выражающемуся в появлении отрицательных значений давления [19]. Модифицируем процедуру энтропийной регуляризации РМГ, усилив ее условием монотонности (или квазимоноотонности) кусочно-линейных КЭ аппроксимаций искомого решения в смысле предыдущего раздела.

Классический РМГ допускает вариационную интерпретацию [19, 20], которая приводится ниже. Рассмотрим в ячейке K_i квадратичную функцию

$$W_0(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1) = \int_{-1}^1 |\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z - \mathbf{B}_0^{\min} - \mathbf{B}_1^{\min} z|_{\alpha, \beta}^2 dz, \quad (21)$$

где

$$|\mathbf{c}|_{\alpha, \beta} = (\alpha c_1^2 + \beta c_2^2 + c_3^2)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{E}^3, \quad (22)$$

$$\beta = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho dx \right)^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} E dx, \quad \alpha = \beta^2 \quad (23)$$

$$x = [(1-z)x_{i-1} + (1+z)x_i] / 2. \quad (24)$$

Точка минимума \mathbf{B}_k^{\min} ($k = 0, 1$) квадратичной функции (21) определяет систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) для коэффициентов классического РМГ

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} = \mathbf{B}_k^{\min}, \quad k = 0, 1; \quad (25)$$

где вектор правой части (25)

$$\mathbf{B}_0^{\min} = -(x_i - x_{i-1})^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t))], \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_1^{\min} = -3(x_i - x_{i-1})^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i, t)) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) dz] \quad (27)$$

может быть получен как частный случай равенств (8).

В целях выполнения дискретных аналогов законов сохранения массы, импульса и полной энергии в дальнейшем зафиксируем значения коэффициентов \mathbf{B}_0 равными правой части (26), как это предложено в [20]. Для определения новых регуляризованных значений производных $d\mathbf{U}_1(t)/dt$ поставим задачу условной минимизации в каждой ячейке K_i квадратичной функции

$$W(\mathbf{B}_1) = |\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1^{\min}|_{\alpha, \beta}^2 \quad (28)$$

с выполнением следующих условий:

1. Каждая скалярная компонента кусочно-линейной КЭ аппроксимации $\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1 z$ (для нее мы используем обозначение (12) в ячейке K_i) удовлетворяет неравенствам (13).

2. Для каждой ячейки K_i выполняется дискретный аналог энтропийного неравенства (6)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 S(\mathbf{U}(x, t)) dz + (x_i - x_{i-1})^{-1} [H(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t))] \geq 0. \quad (29)$$

После дифференцирования по времени интеграла в левой части (29), в котором значение переменной x определено в (24), получим

$$\mathbf{V}_0(t) \cdot \frac{d\mathbf{U}_0}{dt} + \mathbf{V}_1(t) \cdot \frac{d\mathbf{U}_1}{dt} + (x_i - x_{i-1})^{-1} [H(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t))] \geq 0, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{V}_0(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial S}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}(x, t)) dz, \quad \mathbf{V}_1(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial S}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}(x, t)) z dz. \quad (31)$$

С использованием обозначений

$$\mathbf{U}_k = (U_{ki}^1, U_{ki}^2, U_{ki}^3)^T, \quad \mathbf{B}_k^{\min} = (B_{ki}^{1,\min}, B_{ki}^{2,\min}, B_{ki}^{3,\min})^T, \quad (32)$$

относящихся к ячейке K_i , условия 1-2, сформулированные выше, могут быть записаны в виде системы линейных неравенств для нахождения точки \mathbf{B}_1^{\min} условного минимума квадратичной функции (28)

$$|U_1^j(t)| \leq \delta \min(|U_{0,i}^j(t) - U_{0,i-1}^j(t)|, |U_{0,i+1}^j(t) - U_{0,i}^j(t)|), \quad (33)$$

$$\delta \in [0, 2]; \quad j = 1, 2, 3;$$

и

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \geq \eta, \quad (34)$$

где

$$\eta = (x_i - x_{i-1})^{-1} \{ \mathbf{V}_0(t) \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t))] - [H(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t))] \}. \quad (35)$$

Наконец, сформулируем вариационный подход для получения регуляризованных уравнений РМГ, обеспечивающих энтропийную устойчивость. В момент времени t в каждой ячейке K_i :

- 1) вычисляем величины \mathbf{B}_0^{\min} согласно (26);
- 2) решаем задачу квадратичного программирования: найти точку минимума \mathbf{B}_1^{\min} квадратичной функции (28) трех переменных с учетом линейных ограничений (33) и (34);
- 3) численно интегрируем СОДУ (25) для коэффициентов регуляризованного РМГ, вычисляя приближенное решение задачи (1) при помощи соотношений (7) ($n = 1$).

2.4. Особенности реализации численного алгоритма

Задача минимизации квадратичной функции (28) при ограничениях (33), (34) связана с поведением решений СОДУ (25). До тех пор, пока интегральная кривая (25) находится внутри области (33), ограничения (33) никак себя не проявляют, и минимизация осуществляется только с учетом неравенства (34). Как только интегральная кривая выходит на границу области (33), соответствующие ограничения становятся активными.

Переход к разностной аппроксимации СОДУ (25) модифицирует условную минимизацию (28). Отметим, что качество численного решения СОДУ тесно взаимосвязано с выбором аппроксимации производных по времени искомым функций. В то же время главные особенности численного интегрирования СОДУ (25) можно понять на примере простейшей явной схемы первого порядка (схемы Эйлера), которая имеет вид

$$\tau^{-1}[\mathbf{U}_k(t + \tau) - \mathbf{U}_k(t)] = \mathbf{B}_k^{\min}, \quad k = 0, 1. \quad (36)$$

Коэффициенты $\mathbf{U}_0(t + \tau)$ вычисляются с использованием (26) и (36) при $k = 0$. Для вычисления коэффициентов РМГ $\mathbf{U}_1(t + \tau)$ на новом временном слое проведем замену переменных $\mathbf{V}_1 = \tau^{-1}[\mathbf{U}_1(t + \tau) - \mathbf{U}_1(t)]$ в правой части (28) и неравенстве (34), решая задачу условной минимизации квадратичной функции (28) $W(\tau^{-1}[\mathbf{U}_1(t + \tau) - \mathbf{U}_1(t)])$ по аргументу $\mathbf{U}_1(t + \tau)$ с ограничением (33) и преобразованным в соответствии с выполненной заменой переменных ограничением (34)

$$\mathbf{V}_1 \cdot [\mathbf{U}_1(t + \tau) - \mathbf{U}_1(t)] \geq \tau\eta. \quad (37)$$

В случае использования для численного интегрирования уравнений РМГ явных методов Рунге-Кутты (РК) более высоких порядков точности описанный выше способ замены переменных применяется на каждой стадии метода РК.

Несмотря на кажущуюся сложность системы линейных ограничений (33), (37), решение поставленной выше задачи квадратичного программирования для большинства ячеек может оказаться довольно простым. Отметим, что задача условной минимизации квадратичной функции (28) становится более сложной с учетом дискретного аналога энтропийного неравенства (37). Поэтому сначала целесообразно найти условный минимум (28) только с учетом линейных неравенств (33). Такая условная минимизация сводится к поиску минимума одномерных квадратичных функций на конечном отрезке и может быть проведена аналитически, поскольку минимум квадратичной функции достигается либо на концах указанного отрезка или внутри него в точке обращения в нуль ее первой производной. После того как соответствующие точки условного минимума найдены, необходимо проверить в них выполнение неравенства (37). Если последнее неравенство выполнено в рассматриваемой ячейке K_i , то задача квадратичного программирования для нее решена. В

противном случае следует численно решать поставленную задачу квадратичного программирования в полном объеме с учетом всех линейных ограничений (33) и (37). Такая задача также допускает аналитическое решение, но достаточно громоздкое. Альтернативный способ состоит в использовании численного метода решения задачи квадратичного программирования общего вида [22].

Отметим, что конечноразностная аппроксимация производных по времени вносит, вообще говоря, погрешность в выполнение дискретного аналога энтропийного условия. Эквивалентные с точностью множества меры нуль формы его записи (29) и (30) перестают быть таковыми при замене точных производных по времени на их конечные разности. Разностная форма (37) энтропийного неравенства (30), вообще говоря, включает в себя дополнительные источники нефизической природы (разностное производство энтропии). Поэтому, на наш взгляд, из физических соображений предпочтительнее использовать дискретный аналог энтропийного условия в консервативной форме (29). Проинтегрируем (29) по временному промежутку $[t, t + \tau]$ и разделим результат на τ

$$P_S = \frac{1}{2\tau} \left[\int_{-1}^1 S(\mathbf{U}(x, t + \tau)) dz - \int_{-1}^1 S(\mathbf{U}(x, t)) dz \right] + \\ + (x_i - x_{i-1})^{-1} \tau^{-1} \int_t^{t+\tau} [H(\mathbf{U}_G(x_i, t')) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t'))] dt' \geq 0. \quad (38)$$

Полученная интегральная форма (38) дискретного аналога энтропийного неравенства, левую часть которого в дальнейшем назовем *производством энтропии*, усредненным по промежутку времени $[t, t + \tau]$, можно переписать в виде

$$\int_{-1}^1 S(\mathbf{U}(x, t + \tau)) dz \geq C_S, \quad (39)$$

где

$$C_S = \int_{-1}^1 S(\mathbf{U}(x, t)) dz - 2(x_i - x_{i-1})^{-1} \int_t^{t+\tau} [H(\mathbf{U}_G(x_i, t')) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t'))] dt'. \quad (40)$$

Второй интеграл в правой части (40) может аппроксимироваться различными способами. В случае применения схемы Эйлера (36) следует положить

$$C_S = \int_{-1}^1 S(\mathbf{U}(x, t)) dz - 2\tau(x_i - x_{i-1})^{-1} H(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)). \quad (41)$$

Нетрудно проверить, что функция $-S(\mathbf{U})$ является выпуклой функцией консервативных переменных $\mathbf{U} = (\rho, I, E)^T$, поэтому левая часть неравенства (39), умноженная на -1, является выпуклой функцией коэффициентов РМГ $\mathbf{U}_1 = (U_{1,i}^1, U_{1,i}^2, U_{1,i}^3)^T$, если $\mathbf{U} = (\rho, I, E)^T$ является КЭ аппроксимацией (7) при $n=1$. В целях более точного выполнения дискретного аналога энтропийного условия (38) целесообразно заменить неравенство (37) на неравенство (39) в задаче условной минимизации квадратичной функции (28). При такой замене эта задача становится задачей выпуклого программирования [22] и имеет большую вычислительную сложность, чем первоначальная задача условной минимизации (28) с линейными ограничениями (33) и (37). Соответствующая точка условного минимума (28) $\mathbf{U}_1^{\min} = (U_{ki}^{1,\min}, U_{ki}^{2,\min}, U_{ki}^{3,\min})^T$ принимается в качестве значений старших коэффициентов РМГ на следующем временном слое $t + \tau$ и т.д.

2.5. Энтропийный ограничитель наклонов

Потенциально высокая вычислительная сложность обеспечения энтропийного условия вариационными методами, описанными в предыдущем разделе, побуждает рассмотреть упрощенные подходы, достигающие ту же цель, пусть и менее строго, но более простыми средствами. Один из возможных подходов предлагается ниже.

Как уже отмечалось выше, решение задачи условной минимизации (28) с линейными ограничениями (33) является простой задачей, сводящейся к серии минимизаций одномерных квадратичных функций на отрезках прямой. Поэтому первым шагом предлагаемого подхода является выбор конкретного значения параметра $\delta \in [0, 2]$ в (33) с последующим нахождением точек указанного условного минимума (28) для всех ячеек K_i .

Рассмотрим одну из ячеек и сохраним обозначения \mathbf{U}_0 и \mathbf{U}_1 для значений коэффициентов РМГ, соответствующих найденной точке условного минимума. Вычислим значение двух функций

$$\Phi^+(\lambda) = p(\mathbf{U}_0 + \lambda \mathbf{U}_1 z), \quad \Phi^-(\lambda) = p(\mathbf{U}_0 - \lambda \mathbf{U}_1 z), \quad (42)$$

где $p(\mathbf{U}) = (\gamma - 1)(E - I^2 / 2\rho)$ – давление в консервативных переменных, при значении $\lambda = 1$ в (42). Если $\min[\Phi^+(1), \Phi^-(1)] \geq p_{\min}$ ($p_{\min} > 0$ – заранее выбранное малое положительное число), то полагаем $\lambda_p = 1$. В противном случае принимаем в качестве λ_p ближайший к 1 слева корень уравнения

$$\min[\Phi^+(\lambda), \Phi^-(\lambda)] = p_{\min}. \quad (43)$$

Далее вычисляем функцию

$$\Psi(\mu) = \int_{-1}^1 S(\mathbf{U}_0 + \lambda_p \mu \mathbf{U}_1 z) dz \quad (44)$$

при $\mu = 1$. Если $\Psi(1) \geq C_s$ (см. (41)), то полагаем $\mu_s = 1$. В противном случае принимаем в качестве μ_s ближайший к 1 слева корень уравнения

$$\Psi(\mu) = C_s. \quad (45)$$

После определения значений числовых параметров λ_p и μ_s описанным выше способом полагаем значения коэффициентов РМГ в ячейке K_i равными

$$\mathbf{U}_0^* = \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{U}_1^* = \lambda_p \mu_s \mathbf{U}_1. \quad (46)$$

Только что сформулированную процедуру определения коэффициентов РМГ назовем *энтропийным ограничителем наклонов*.

Данная процедура исключает возможность получения отрицательных давлений в любой ячейке на новом временном слое и обеспечивает выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства в консервативной форме (38). Благодаря выпуклости вверх функций $\Phi^+(\lambda)$ и $\Psi(\mu)$ решение уравнений (43) и (45) удобно проводить методом Ньютона, выбирая начальное значение аргумента равным 1. Хотя предложенный метод не является оптимальным с точки зрения минимизации среднеквадратичной невязки уравнений РМГ при наложенных ограничениях на КЭ аппроксимацию, он достаточно легко реализуем и соответствует современным физическим представлениям о законах, управляющих газодинамическими течениями.

3. Результаты численных расчетов модельных задач

В данном разделе приводятся результаты численного тестирования упрощенной энтропийно устойчивой версии РМГ, использующей энтропийный ограничитель наклонов из раздела 2. Метод имеет второй порядок (классической) аппроксимации по x ($n=1$ в (7)). Алгоритм содержит два параметра δ и p_{\min} . Параметр $\delta \in [0, 2)$, регулирующий наклоны искоемых функций в каждой ячейке, определяет «степень монотонности» кусочно-линейной аппроксимации. В случае $\delta = 0$ алгоритм превращается в известную схему Годунова для уравнений Эйлера [21], а соответствующие КЭ аппроксимации становятся кусочно-постоянными функциями. При $\delta \in [0, 1]$ используемые кусочно-линейные аппроксимации, введенные в п. 2.2, являются монотонными отображениями функций $f(x) \in L_2(a, b)$ (т.е. преобразуют монотонную функцию в монотонную кусочно-линейную аппроксимацию того же направления монотонности). При $\delta \in (1, 2)$ кусочно-линейные

аппроксимации становятся квазимонотонными отображениями (в смысле п. 2.2). Параметр $p_{\min} = 10^{-6}$ определяет минимально допустимое значение давления в любой ячейке и связан с заданием таких начальных и граничных условий, что в рассматриваемых задачах вакуум в ячейках не образуется. Стандартные значения давления p_* и плотности ρ_* в (4) положены равными $p_* = 1.01324$ и $\rho_* = 1.2041$.

Чтобы оценить качество предложенного алгоритма были выбраны три модельные задачи.

1) Задача Эйнфельдта (Einfeldt problem [23]) о распространении двух симметричных волн разрежения в противоположные стороны. В процессе динамики в центре расчетной области значения плотности и давления газа становятся малыми, близкими к вакууму, а внутренняя энергия принимает конечное значение.

2) Задача Сода (Sod problem [24]) о течении в ударной трубе, когда в начальный момент времени газ слева и справа от центра расчетной области находится в состоянии покоя. Решение задачи Сода состоит из ударной волны, волны разрежения и контактного разрыва.

3) Задача «blast wave» [25]. На границах расчетной области ставятся условия отражения. В начальный момент времени газ находится в состоянии покоя, слева и справа от центра области располагаются зоны высокого давления, а в центре области находится зона низкого давления. Области с различными давлениями разделены между собой перегородками. В результате устранения перегородок образуются сильные ударные волны, движущиеся навстречу друг другу, и волны разрежения. Ударные волны сталкиваются и взаимодействуют друг с другом.

Начальные данные для задач 1-3 приводятся в таблице 1.

Таблица 1а

Задача	Левая область			Правая область			Расчетное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	
1	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
2	1	0	1	0.125	0	0.1	2.0

Таблица 1б

Задача	Левая область $0 \leq x < 0.1$			Средняя область $0.1 < x < 0.9$			Правая область $0.9 < x \leq 1.0$			Расчетное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	ρ	u	p	
3	1	0	10^3	1	0	10^{-2}	1	0	10^2	0.038

В Таблице 2 указаны параметры расчетной области для задач 1-3.

Таблица 2

Задача	Расчетная область	Положения точек разрыва
1	$0 \leq x \leq 1$	$x = 0.5$
2	$-5 \leq x \leq 5$	$x = 0$
3	$0 \leq x \leq 1$	$x = 0.1;$ $x = 0.9$

Каждая из областей содержит N одинаковых расчетных ячеек, где число N принимает значения 200, 1000, 5000 и 16000.

На рис.1 показаны распределения плотности (а), скорости (б) и давления (в) для задачи Эйфельдта в момент времени $t = 0.15$. На начальных итерациях существенную роль играют контроль неотрицательности давления и его коррекция, если это необходимо, выполняемые при помощи соотношений (42) и (43). Численные распределения плотности и давления хорошо аппроксимируют точное решение. Численная скорость также хорошо воспроизводит точное решение, но содержит незначительные осцилляции около нулевого значения в центре области.

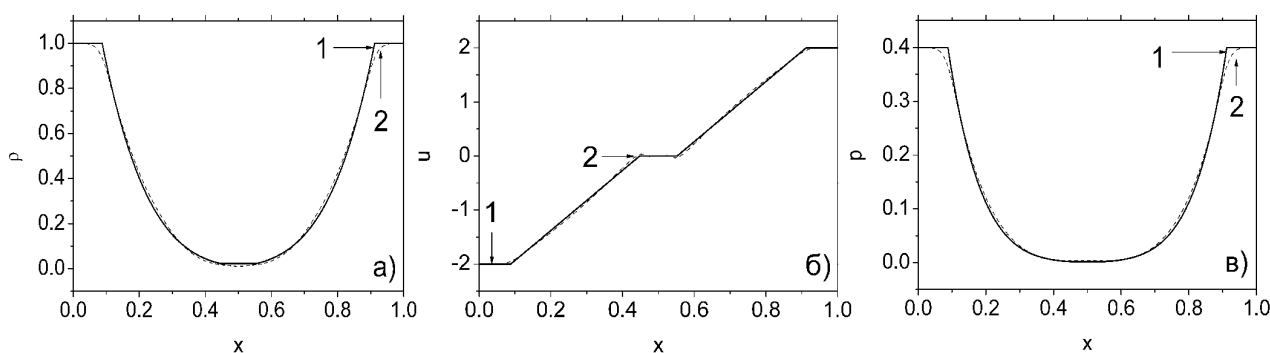


Рис. 1. Распределения а) плотности, б) скорости и в) давления для задачи Эйфельдта (задача 1) в момент времени $t = 0.15$: 1 – точное решение; 2 – численное решение с $N = 200$ расчетными ячейками. Используется энтропийный ограничитель наклонов при $\delta = 1$.

В области центра $0.4 < x < 0.6$ численное решение характеризуется всплеском удельных внутренней энергии и энтропии (см. рис. 2а, б). Отметим, что ширина всплеска указанных параметров и ошибка аппроксимации точного решения в норме $L_2(a,b)$ уменьшается с увеличением числа N расчетных ячеек. Применение энтропийного ограничителя наклонов обеспечивает неотрицательность производства энтропии (38). Если выполняется условие $\delta \in [0, 1]$ (см. (13)), то, как правило, неотрицательность производства энтропии обеспечивается даже в отсутствие энтропийной коррекции (44)-(46). При значениях параметра δ , превышающих 1, в некоторых областях численное решение имеет заметные отрицательные значения производства энтропии (см. рис. 2в). Хотя предлагаемый алгоритм обеспечивает формальное выполнение энтропийного условия, численное производство энтропии все же оказывается

избыточным за счет «размазывания» решения в пределах расчетной ячейки, что и приводит к формированию ложных всплесков на профилях внутренней энергии и энтропии. С другой стороны, исходная модель (1), (4) течения идеального газа характеризуется единственным источником производства энтропии за счет возникновения и распространения ударных волн. Если точное решение не содержит ударных волн, то производство энтропии для такого решения равно нулю. Поэтому, насколько точно численный алгоритм воспроизводит особенности исходной модели (1), (4), настолько точно будут аппроксимироваться внутренняя энергия и энтропия в задаче Эйнфельдта.

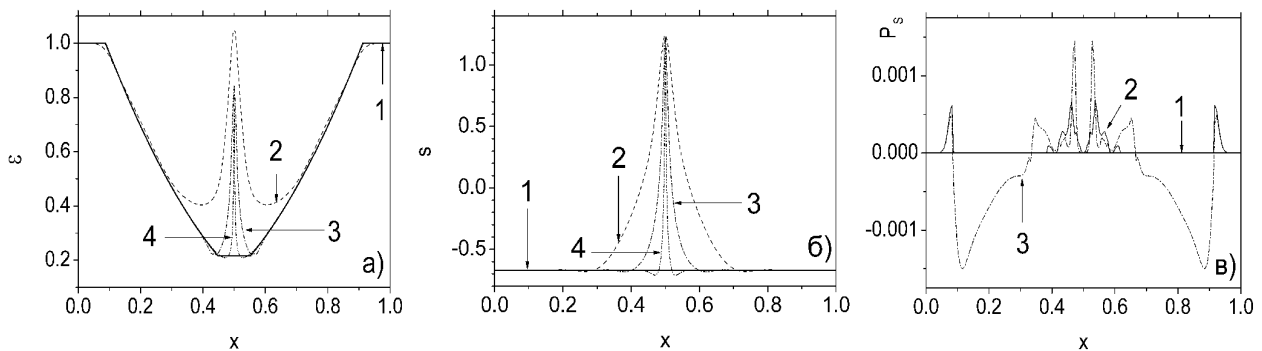


Рис. 2. Распределения а) удельной внутренней энергии ($\delta = 1$), б) удельной энтропии ($\delta = 1$) и в) производства энтропии ($\delta = 1.1$) для задачи Эйнфельдта (задача 1) в момент времени $t = 0.15$. В случаях а) и б) 1 – точное решение, 2 – 200 расчетных ячеек, 3 – 1000 расчетных ячеек, 4 – 5000 расчетных ячеек; в случае в) используется 200 расчетных ячеек: 1 – точное решение; 2 – применяется энтропийный ограничитель наклонов; 3 – без энтропийной коррекции.

На рис. 3 показаны распределения плотности (а), скорости (б), давления (в) и производства энтропии (г) для задачи Сода (задача 2) в момент времени $t = 2.0$. Профиль параметров точного решения достаточно хорошо аппроксимируется при числе расчетных ячеек $N = 200$. С увеличением числа последних до $N = 5000$ численное решение визуально совпадает с точным решением. Что касается производства энтропии, то пик максимальной амплитуды располагается вблизи фронта ударной волны ($x \approx 3.5$), слегка опережая его. С увеличением числа расчетных ячеек пик сужается, а опережение уменьшается. Избыточное производство энтропии наблюдается в области контактного разрыва ($x \approx 1.9$), что приводит к размазыванию его фронта. Отметим, что в задаче Сода неотрицательность производства энтропии при $1.0 \leq \delta \leq 1.2$ обеспечивается без энтропийной коррекции. Дальнейшее увеличение δ приводит к необходимости дополнительного энтропийного лимитирования (см. раздел 2.5) и появлению нефизических осцилляций в

численном решении. Таким образом, монотонность КЭ линейной аппроксимации во многом определяет выполнение дискретного аналога энтропийного условия (39), (41).

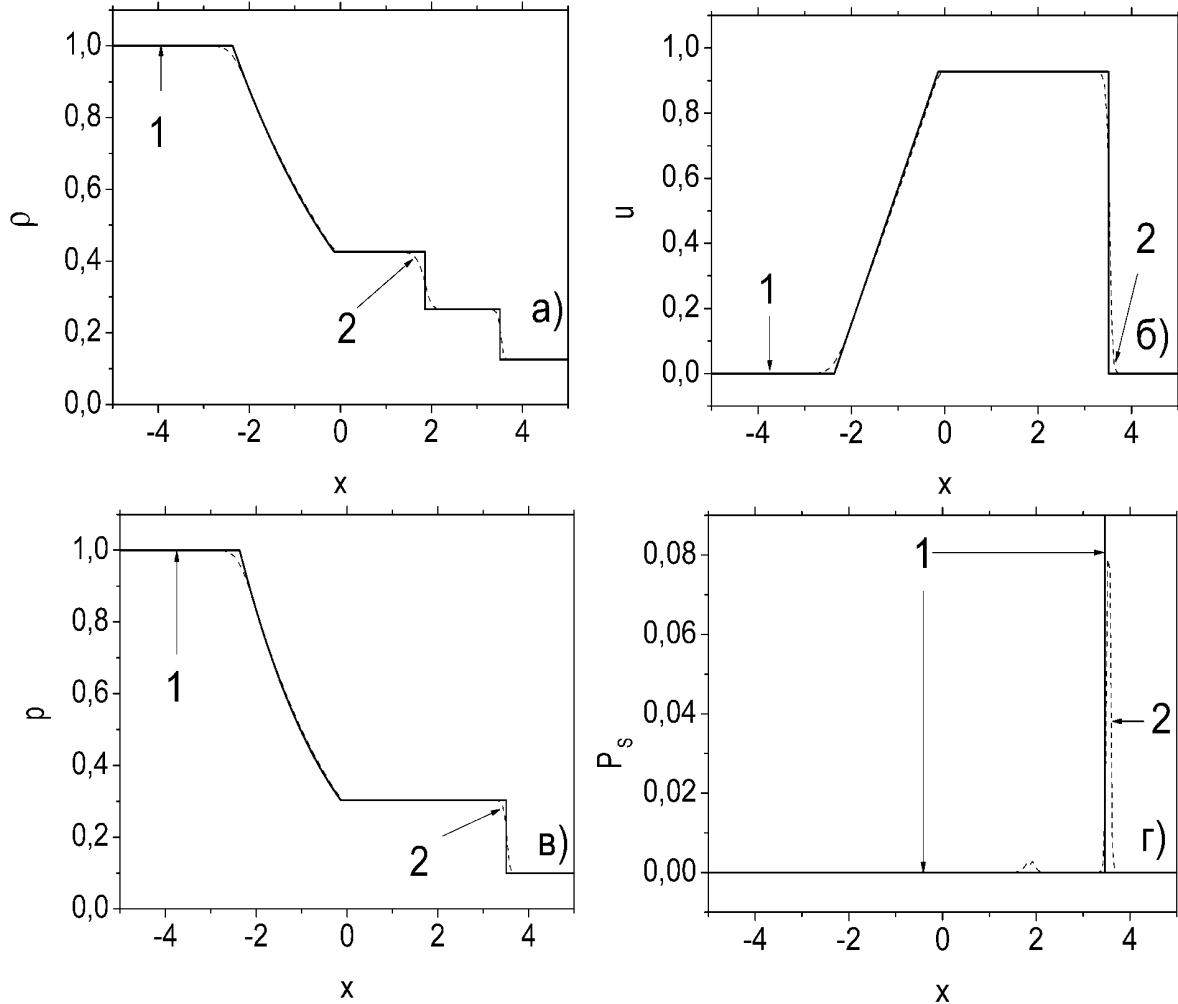


Рис. 3. Распределения ($\delta = 1$) а) плотности, б) скорости, в) давления и г) производства энтропии для задачи Сода (задача 2) в момент времени $t = 2.0$: 1 – точное решение, 2 – 200 расчетных ячеек.

На рис. 4 показаны распределения плотности (а), скорости (б), давления (в) и производства энтропии (г) для задачи “blast wave” (задача 3) в момент времени $t = 0.038$. В качестве «точного» решения было использовано «эталонное» решение, любезно предоставленное автором работы [26]. Численное решение с использованием энтропийного ограничителя наклонов и $N = 16000$ расчетных ячеек визуально точно аппроксимирует «эталонное» решение. Как это видно из рис. 4, при $N = 1000$ расчетных ячеек численное решение уже достаточно хорошо описывает профили газодинамических параметров. Рассмотрим профили производства энтропии, изображенные на рис. 4г. С увеличением числа расчетных ячеек профили все более соответствуют профилю суммы двух

δ -функций, локализованных на фронтах соответствующих ударных волн. В случае $N = 16000$ расчетных ячеек (кривая 1) ширина пиков становится меньше ширины используемых линий для графического представления, а их высота в несколько раз превышает представленный на рис. 4г диапазон ординаты.

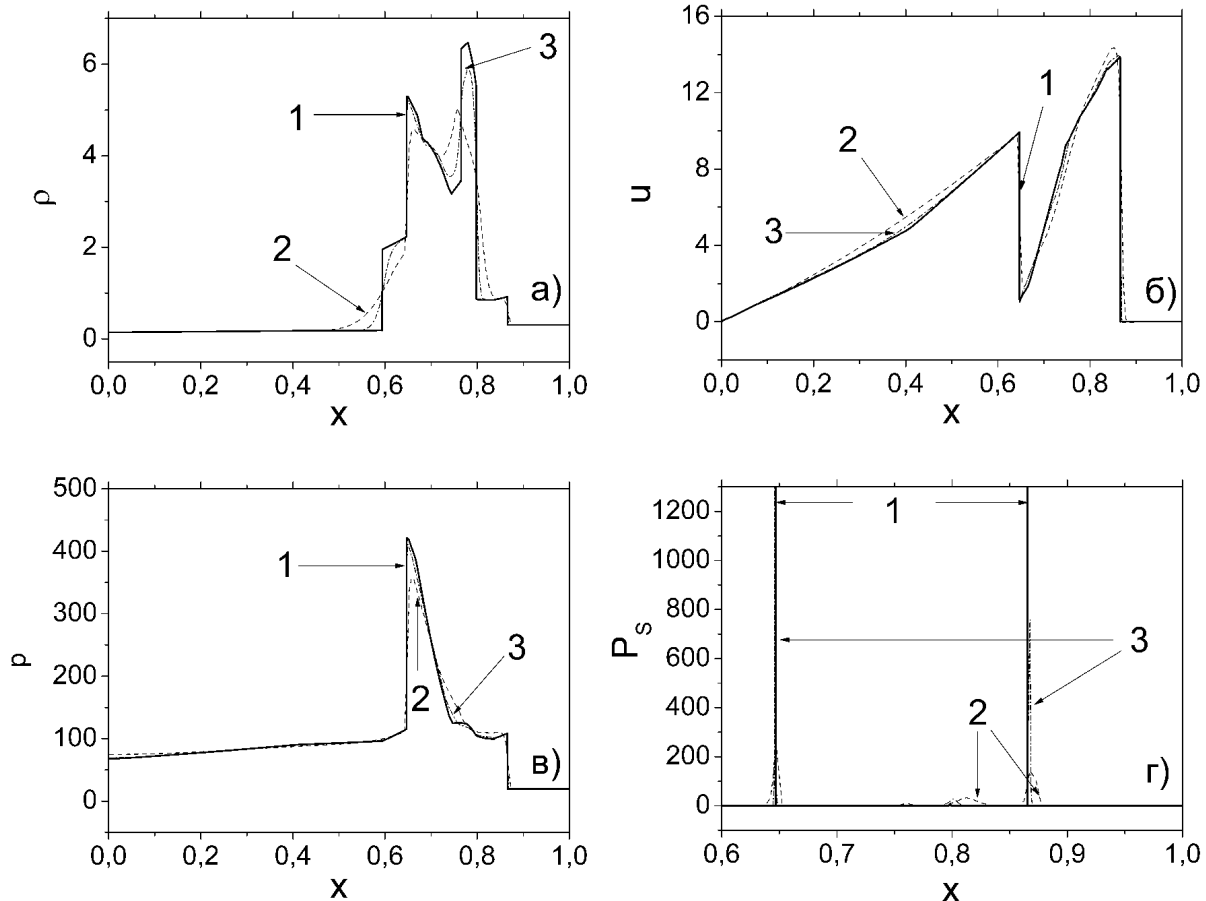


Рис. 4. Распределения ($\delta = 1$) а) плотности, б) скорости, в) давления и г) производства энтропии для задачи “blast wave” (задача 3) в момент времени $t = 0.038$: 1 – «эталонное» решение на $N = 16000$ расчетных ячейках, 2 – 200 расчетных ячеек, 3 – 1000 расчетных ячеек.

Отметим, что в задаче 3, как и в задаче Эйнфельдта, контроль и коррекция давления (см. (42) и (43)) также являются необходимыми процедурами.

4. Выводы

1. Уточнен вариационный принцип энтропийной регуляризации разрывного метода Галеркина применительно к системе одномерных уравнений газовой динамики путем включения в множество линейных ограничений (помимо условия неотрицательного производства энтропии) также условий монотонности используемых конечноэлементных аппроксимаций.

2. Предложена и численно апробирована упрощенная версия энтропийной регуляризации – метод энтропийного ограничителя наклонов.

3. Численно решены модельные задачи Эйнфельдта, Сода и “blast wave” для различных чисел расчетных ячеек. Установлено, что при выполнении условий монотонности конечноэлементных аппроксимаций энтропийное условие, как правило, выполняется автоматически.

4. Метод энтропийной регуляризации сформулирован таким образом, что допускает обобщение на многомерные уравнения газовой динамики.

Список литературы

1. Tadmor E. Entropy stable schemes // Handbook of Numerical Analysis. – 2016. – Vol. 17. — P. 467–493.
2. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations // SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – Vol. 21. – P. 217–235.
3. Bouchut F., Bourdarias C., Perthame B. A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities // Math. Comput. – 1996. – Vol. 65. – P. 1439–1461.
4. Tadmor E. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems // Acta Numerica. – 2003. – P. 451–512.
5. Ismail F., Roe P. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks // J. Comput. Phys. – 2009. – Vol. 228. – P. 5410–5436.
6. Chandrashekar P. Kinetic energy preserving and entropy stable finite volume schemes for compressible Euler and Navier–Stokes equations // Commun. Comput. Phys. – 2013. – Vol. 14, no. 5. – P. 1252–1286.
7. Fjordholm U.S., Mishra S., Tadmor E. Arbitrarily high order accurate entropy stable essentially nonoscillatory schemes for systems of conservation laws // SIAM J. Numer. Anal. – 2012. – Vol. 50, no. 2. – P. 544–573.
8. Cheng X., Nie Y. A third-order entropy stable scheme for hyperbolic conservation laws // J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2016. — Vol. 13, no. 1. – P. 129–145.
9. Злотник А.А. Энтропийно консервативная пространственная дискретизация многомерной квазигазодинамической системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2017. – Т. 57, № 4. – С. 710–729.
10. Gassner G.J., Winters A.R., Kopriva D.A. A well balanced and entropy conservative discontinuous Galerkin spectral element method for the shallow water equations // Appl. Math. Comput. – 2016. – Vol. 272. – P. 291–308.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 736 с.
12. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems // Lecture Notes in Mathematics, 1997, Vol. 1697. P. 150–268.

13. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 89. 32 с.
doi:10.20948/prepr-2017-89
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>
14. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 12. – С. 124–128.
15. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф., Утиралов Д.И. Реализация граничных условий прилипания для разрывного метода Галеркина / М.Е. Ладонкина [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 32. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-32>
16. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 899–907.
17. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О методах типа Годунова высокого порядка точности // Доклады академии наук. – 2015. – Т. 461, № 4. – С. 390-393.
18. Тишкин В.Ф., Жуков В.Т., Мышецкая Е.Е. К обоснованию схемы Годунова в многомерном случае // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 2. – С. 86–96.
19. Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 18. 25 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-18>
20. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 100. 22 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-100>
21. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976, 400 с.
22. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М.: Наука, 1983. 136 с.
23. Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjogren B. On Godunov-type methods near low densities // Journal of Computational Physics. 1991. V. 92, no. 2. P. 273–295.
24. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1978. Vol. 27, no. 1. P. 1–31.
25. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 54. P. 115–173.
26. Родионов А.В. Сопоставление схемы КАБАРЕ со схемами типа MUSCL // Матем. моделирование. 2013. Т. 25, № 9. С. 109–136.

Оглавление

1. Введение	3
2. Постановка задачи и описание алгоритма	4
2.1. Постановка задачи	4
2.2. Конечноэлементная аппроксимация, связанная с РМГ, и ее монотонность..	5
2.3. Энтропийно устойчивый разрывный метод Галеркина	8
2.4. Особенности реализации численного алгоритма.....	11
2.5. Энтропийный ограничитель наклонов.....	13
3. Результаты численных расчетов модельных задач.....	14
4. Выводы	19
Список литературы.....	20