O. R. Abib
Nagoya Math. J.
Vol. 73 (1979), 29-40

EQUATIONS DE LIE INVARIANTES PAR UN PSEUDOGROUPE DE LIE

ODINETE RENÉE ABIB

§ 0. Introduction

Soit $(\mathscr{L}, M)$ un pseudogroupe de Lie infinitésimal [4] transitif d'ordre h sur une variété M différentiable, $J^h\mathscr{L}$ son équation de définition et L son algèbre formelle au point a de M.

Dénotons par $I(L)$ l'ensemble des idéaux fermés de L et par $I(J^h\mathscr{L})$ l'ensemble des équations différentielles $R^m \subset J^m\mathscr{L}$, $m \geq h$, invariantes par Γ et formellement intégrables, Γ désignant le pseudogroupe de transformations associé à $\mathscr{L}$. L'un des buts de ce papier est de définir une application surjective de $I(J^h\mathscr{L})$ dans $I(L)$. La surjectivité implique en particulier que tout idéal fermé de L est l'espace des solutions formelles en a d'une équation de Lie appartenant à $I(J^h\mathscr{L})$, (§ 2, § 3). En plus, dans le cas analytique, cette équation est l'équation de définition d'un sous-pseudogroupe normal de $\mathscr{L}$ (Corollaire 2.2).

D'autre part, $F(L)$ étant l'ensemble des idéaux fermés de L définis par un feuilletage (§ 2), $F(J^h\mathscr{L})$ l'ensemble des équations différentielles R^m de $I(J^h\mathscr{L})$ pour lesquelles $\Pi_0(R^m) = E$ soit un sous-fibré intégrable de $T(M)$ invariant par l'action de $\mathscr{L}$ et $L \cap J_a^\infty E = \lim_\ell (R_a^m)^{+\ell}$, nous montrons (§ 3) que l'application précédente envoie $F(J^h\mathscr{L})$ sur $F(L)$.

Etant donné I un idéal fermé de L on lui associe toujours une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre $h \geq 1$ (§ 4). Inversement, nous montrons (Théorème 4.1) que à toute algèbre de Lie W^h normale tronquée d'ordre $h \geq 1$, satisfaisant certaines conditions cohomologiques, correspond un idéal fermé I de L ayant W^h comme algèbre tronquée d'ordre h. En plus I est unique à un isomorphisme près. Ce résultat généralise ainsi le Théorème 6 de [1] pour le cas non-transitif.

Il est à signaler que certains de nos résultats semblent concorder avec ceux obtenus indépendamment par H. Goldschmidt dans un tout

Received September 3, 1977.

autre formalisme (cf. [2], § 10).

§ 1. Notations

Etant donné $T = T(M)$ le fibré tangent d'une variété différentiable M, $J^kT(M)$ désigne l'ensemble de tous les jets d'ordre k des sections du fibré vectoriel T et $\underline{J^kT(M)}$ le faisceau des sections de $J^kT(M)$ qui est un faisceau de $\boldsymbol{R}$-algèbre de Lie [4]:

$$\underline{J^kT} \times \underline{J^kT} \to \underline{J^kT} ,$$

$[f \cdot j^kX, g \cdot j^hY] = f \cdot gj^h[X, Y] + f(X \cdot g)j^kY - g(Y \cdot f)j^hX$, où $[X, Y]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y, f et g sont des fonctions différentiables numériques.

Ce crochet induit un morphisme de fibrés vectoriels sur M, à savoir:

$$\begin{aligned}[\ ,\ ]' : J^{h+1}T \times J^{h+1}T &\to J^hT \\ (j^{h+1}X, J^{h+1}Y) &\to j^h[X, Y] .\end{aligned}$$

Considérons $D : \underline{J^{h+1}T} \to \underline{T^* \otimes J^hT}$ l'opérateur de Spencer défini par $D(f \cdot j^{h+1}X) = df \otimes j^hX$.

LEMME 1.1. (a) $[f \cdot j^hX, g \cdot j^hY] = [f \cdot j^{h+1}X, g \cdot j^{h+1}Y]' + D(g \cdot j^{h+1}Y) \cdot (f \cdot X) - D(f \cdot j^{h+1}X)(g \cdot Y)$.

(b) $D([f \cdot j^{h+1}X, g \cdot j^{h+1}Y]')(Z) = [D(f \cdot j^{h+1}X)(Z), g \cdot j^hY]' + [f \cdot j^{h+1}X, D(g \cdot j^{h+1}Y)(Z)]'$.

La démonstration de ce résultat découle des définitions précédentes.

Désignons par Π la projection naturelle de $J^{h+1}T$ sur J^hT; soit $a \in M$ et J^∞_aT la limite projective relative à ce morphisme des J^h_aT. Le crochet $[\ ,\ ]'$ définit alors sur cet ensemble une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie.

Etant donné un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif $\mathscr{L}$ sur M, dénotons par $J^h\mathscr{L}$ le fibré vectoriel de tous les jets d'ordre h des sections locales de $\mathscr{L}$ dont le faisceau des sections $\underline{J^h\mathscr{L}}$ est un sous-faisceau du faisceau d'algèbre de Lie J^hT. En particulier, le crochet $[\ ,\ ]'$ induit le crochet de $\underline{J^h\mathscr{L}}$ à valeurs dans $\underline{J^{h-1}\mathscr{L}}$:

$$[\ ,\ ]' : \underline{J^h\mathscr{L}} \times \underline{J^h\mathscr{L}} \to \underline{J^{h-1}\mathscr{L}} .$$

Désignons par $L \subset J^\infty_aT$ la limite projective des $J^h_a\mathscr{L}$ par rapport à la projection Π; L est une sous-algèbre de Lie de J^∞_aT qui sera dite l'algèbre formelle de $\mathscr{L}$ en $a \in M$. De plus L est une algèbre de Lie filtrée:

$$L = L_{-1} \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_h \supset \cdots$$

où L_h est le noyau de la projection Π_h de L sur $J_a^h \mathscr{L}$. Posons $g^h = L_{h-1}/L_h$, pour $h \geq 0$. On a naturellement les suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & g^h & \longrightarrow & J_a^h \mathscr{L} & \longrightarrow & J_a^{h-1} \mathscr{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S^h V^* \otimes V & \longrightarrow & J_a^h T & \longrightarrow & J_a^{h-1} T & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec $V = T_a(M) = L/L_0$.

§ **2.**

Soit I un idéal fermé de l'algèbre formelle L de $\mathscr{L}$ en $a \in M$. Posons $I_h = I \cap L_h$ pour $h \geq -1$ de sorte que $p^h = I_{h-1}/I_h$ s'identifie à un sous-espace de g^h; alors,

LEMME 2.1. (a) $[I^h, J_a^h \mathscr{L}]' \subset I^{h-1}$.
(b) $[p^h, J^h \mathscr{L}]' \subset p^{h-1}$.
(c) $[g^h, g^h]' = \{0\}$.
où $I^h = I/I_h$.

La deuxième inclusion et la transitivité de $\mathscr{L}$ nous donnent une injection:

$$\delta : p^{h+1} \to V^* \otimes p^h ,$$

$\delta(X)(v) = [X, y]'$ où y est un élément de $J_a^{h+1} \mathscr{L}$ qui se projette sur v; d'où une application

$$\delta : \wedge^j V^* \otimes p^{h+1} \to \wedge^{j+1} V^* \otimes p^h ,$$

défini par:

$$\delta(f)(v_1, v_2, \cdots, v_{j+1}) = \sum_{s=1}^{j+1} (-1)^{j+1-s} f(v_1, v_2, \cdots, \hat{v}_s, \cdots, v_{j+1}) \cdot v_s$$

pour $v_1, \cdots, v_{j+1}$ dans V.

On obtient ainsi un complexe:

$$0 \longrightarrow p^h \xrightarrow{\delta} V^* \otimes p^{h-1} \xrightarrow{\delta} \wedge^2 V^* \otimes p^{h-2} \longrightarrow \cdots$$

dont le groupe de cohomologie dans $\wedge^j V^* \otimes p^h$ sera dénoté par $H^{j,h}(I)$.

LEMME 2.2. *Soit* $(\mathscr{L}, M)$ *un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur* M *et* I *un idéal fermé de* L; *alors il existe un entier* h_0 *tel que* $H^{j,h}(I) = 0$ *pour tous* $j \geq 0$ *et* $h \geq h_0$.

Preuve. Ce résultat résulte du fait que $M = \prod_{h \geq 0} (p^h)^*$ est un $S(V)$-module gradué de type fini.//

DÉFINITION 2.1. Un idéal fermé I de L est défini par un feuilletage dans (L, L_0) si le seul idéal J de L vérifiant $I \subset J \subset I + L_0$ est I lui-même.

EXEMPLE. Soit E un sous fibré vectoriel integrable de $T(M)$ tel que $[E, \mathscr{L}] \subset \mathscr{L}$ et dénotons par $J_a^\infty E$ l'algèbre formelle en a associée à E; alors $I = L \cap J_a^\infty E$ est un idéal fermé de L défini par un feuilletage dans (L, L_0); (cf. démonstration du Théorème 2.1. (5.d)).

Remarque. Soient J et I deux idéaux de L définis par un feuilletage dans (L, L_0) tels $\Pi_0(I) = \Pi_0(J)$ où $\Pi_0 : L \to T_a(M)$ est la projection canonique; alors $I = J$: en effet, $\Pi_0(I) = \Pi_0(J)$ entraîne $I \subset J + L_0$ et $J \subset I + L_0$. On a $I \subset I + J \subset I + L_0$ et $I + J$ est un idéal fermé de L; d'où, $I \subset I + J$; ainsi $J \subset I$; de même, $I \subset J$; d'où, $I = J$.//.

PROPOSITION 2.1. *Soit* I *un idéal fermé de l'algèbre formelle* L. *Considérons* $h_0 \geq 0$ *un entier tel que* $H^{1,h}(I) = 0$ *pour* $h \geq h_0$; *alors* I *est un idéal défini par un feuilletage dans* (L, L_{h_0}).

Preuve. $H^{1,h}(I) = 0$ entraîne que p^{h+1} coïncide avec le premier prolongement $(p^h)^{+1}$ de p^h. Soit J un idéal fermé de L tel que $I \subset J \subset L + L_{h_0}$; alors $I/I_{h_0} = J/J_{h_0}$ et $p^{h_0} = q^{h_0} = J_{h_0-1}/J_{h_0}$; pour $h \geq h_0$, $q^{h+1} \subset (q^h)^{+1} = (p^h)^{+1} = p^{h+1}$; donc, $q^{h+1} = p^{h+1}$ pour $h \geq h_0$. Ainsi $I/I_h = J/J_h$, pour $h \geq h_0$; d'où, $J \subset I + I_h \subset I + L_h$, pour $h \geq h_0$; d'où, $J \subset \bigcap_{h \geq h_0} (I + L_h) = I$ car I est fermé; ainsi on obtient $I = J$. e.q.f.d.

THÉORÈME 2.1. *Soit* L *l'algèbre formelle d'un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif* $(\mathscr{L}, M)$ *et* I *un idéal fermé de* L.

(1) *Pour tout* $h \geq 1$ *il existe une équation de Lie* $R^h \subset J^h\mathscr{L}$ *telle que*

$$R_a^h = I/I_h = \Pi_h(I) .$$

(2) *Si* R^{h+1} *est l'équation de Lie qui correspond à* $\Pi_{h+1}(I)$, *on a*:

(a) $[\underline{R^{h+1}}, \underline{J^{h+1}\mathscr{L}}]' \subset R^h$.

(b) $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$ *le premier prolongement de* R^h.

(3) $[\underline{R^h}, \underline{J^h\mathscr{L}}] \subset \underline{R^h}$.

(4) *Soit* h_0 *l'entier tel que* $H^{1,h}(I) = 0$ *pour* $h \geq h_0$; *alors* R^{h_0} *est formellement intégrable et* $R^{h_0+\ell}$ *est le* ℓ*-ième prolongement* $(R^{h_0})^{+\ell}$ *de* R^{h_0} *pour* $\ell \geq 0$. *De plus,* I *coïncide avec* $\lim_h (R_a^h)$.

(5) *Il existe un sous-fibré vectoriel* E *de* T *tel que:*

(a) $E_a = \Pi_0(I)$.

(b) $[\underline{E}, \mathscr{L}] \subset \mathscr{L}$, *Ceci entraîne* $[\underline{E}, \underline{E}] \subset \underline{E}$.

(c) $R^h \subset J^h E$, *pour* $h \geq 1$.

(d) I *est défini par un feuilletage dans* (L, L_0) *si, et seulement si,* $I = L \cap J_a^\infty E$.

Preuve. Montrons d'abord l'existence de $E \subset T(M)$. L'inclusion, $[g^1, I/I_1]' \subset I/I_0$ entraîne I/I_0 sous-espace de $L/L_0 = V$ invariant par g^1. Ceci entraîne I/I_0 invariant par le groupe d'isotropie G^1 du pseudogroupe de transformations Γ associée à $\mathscr{L}$; donc, Γ déplace I/I_0 pour définir un sous-fibré vectoriel E de $T(M)$; par construction on a $[\underline{E}, \mathscr{L}] \subset \mathscr{L}$; $[\underline{E}, \underline{E}] \subset \underline{E}$: en effet, soient X, Y deux sections locales de E au voisinage U d'un point x de M; soient $j_x^1 X', j_x^1 Y'$ dans R^1 tels que $X'_x = X_x$ et $Y'_x = Y_x$; alors,

$[j_x^1 X', j_x^1 Y']' = [X', Y'](x)$ est dans E_x; On a $[X, Y] = [X - X', Y - Y'] + [X, Y'] + [X', Y] - [X', Y']$; En x, le deuxiéme membre est dans E_x; d'oú, le resultat; En plus, $[J_a^{h+1}\mathscr{L} \cap J_a^{h+1}E, J_a^{h+1}\mathscr{L}] \subset J_a^h\mathscr{L} \cap J_a^h E$ pour $h \geqslant 0$; ainsi $L \cap J_a^\infty E$, est un ideal de L.

La construction de R^h est presque analogue; l'inclusion, $[J_a^{h+1}\mathscr{L}, \Pi_{h+1}(I)]' \subset \Pi_h(I)$ implique que $\Pi_h(I)$ est invariant par le groupe d'isotropie d'ordre h de Γ; ainsi Γ déplace $\Pi_h(I)$ pour définir un sous-fibré vectoriel R^h de $J^h T(M)$. Par construction, $R^h \subset J^h\mathscr{L}$ pour $h \geq 1$, R^{h+1} *se projecte sur* R^h, $[\underline{R^{h+1}}, \underline{J^{h+1}\mathscr{L}}]' \subset \underline{R^h}$ et $[\underline{R^h}, \underline{J^h\mathscr{L}}] \subset \underline{R^h}$ pour $h \geq 1$; d'où, R^h est une équation de Lie d'ordre h sur $T(M)$. De plus, la projection $\Pi : J^1\mathscr{L} \to T(M)$ envoie R^1 sur E et $R_a^1 \subset J_a^1 E$. Par invariance on obtient $R^1 \subset J^1 E$. Supposons $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$; alors si $R^h \subset J^h E$ on a $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1} \subset (J^h E)^{+1} = J^{h+1}E$; d'où, $R^h \subset J^h E$ pour tout $h \geq 1$.

Montrons que $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$. Soit $\xi^{h+1} = f \cdot j^{h+1} X$ une section de R^{h+1} et Y dans $\mathscr{L}$; alors,

$$[f \cdot j^h X, j^h Y] = [f \cdot j^{h+1} X, j^{h+1} Y]' - D(f \cdot j^{h+1} X)(Y);$$

ainsi; $D(\xi^{h+1})(Y)$ est une section de R^h. On obtient que D envoie $\underline{R^{h+1}}$ dans $\underline{T^* \otimes R^h}$ et R^{h+1} se projecte sur R^h; d'où, $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$ par la caractérisation de prolongement d'équation différentielle.

Montrons (4). Soit h_0 l'entier tel que $p^{h+1} = (p^h)^{+1}$ pour $h \geq h_0$ (d'après le Lemme 2.2., h_0 existe toujours). Si t^h est le fibré vectoriel noyau de $\Pi : R^h \to R^{h-1}$ alors $t^h_a = p^h$ pour $h \geq 1$. On a $t^{h_0+1}_a = p^{h_0+1} = (p^{h_0})^{+1} = (t^{h_0}_a)^{+1}$. De même, pour $\ell \geq 0$ on obtient, $t^{h_0+\ell}_a = (t^{h_0}_a)^{+\ell}$; $(t^{h_0})^{+\ell}$ est un fibré vectoriel sur M et $t^{h_0+\ell} \subset (t^{h_0})^{+\ell}$ car $R^{h_0+\ell}$ est contenu dans $(R^{h_0})^{+\ell}$ d'après (2.b); ainsi, $t^{h_0+\ell} = (t^{h_0})^{+\ell}$ pour tout $\ell \geq 0$; d'où, $(R^{h_0})^{+1} = R^{h_0+1}$. Si $R^{h_0+\ell-1} = (R^{h_0})^{+\ell-1}$ on obtient $(R^{h_0})^{+\ell} = (R^{h_0})^{+\ell}$ pour $\ell \geq 0$. Nous avons donc démontré (4).

Démonstration de (5.d). $L \cap J^\infty_a E$ est un idéal fermé de L qui contient I car $R^h \subset J^h E$ pour $h \geq 1$; en plus, $\Pi_0(L \cap J^\infty_a E) = I/I_0 = E_a$; donc,

$$I \subset L \cap J^\infty_a E \subset I + L_0 .$$

Si I est défini par un feuilletage dans (L, L_0) on a $I = L \cap J^\infty_a E$. Réciproquement, supposons $L \cap J^\infty_a E = I$ et soit J un idéal fermé de L tel que,

$$L \cap J^\infty_a E \subset J \subset L \cap J^\infty_a E + L_0;$$

alors $\Pi_0(L \cap J^\infty_a E) = \Pi_0(J)$. Soit $\{S^h\}_{h \geq 1}$ la suite d'équations de Lie qui correspond à J et F le sous-fibré intégrable de $T(M)$. On a $F_a = E_a$, $S^h \subset (J^h F \cap J^h \mathscr{L})$ pour $h \geq 1$, et $E \subset F$. Ainsi $E = F$ et $J = \lim_h S^h_a \subset J^\infty_a F \cap L = J^\infty_a E \cap L = I$; d'où, $I = J$; ce qui implique que I est défini par un feuilletage dans (L, L_0). c.q.f.d.

COROLLAIRE 2.1. *Soit $(\mathscr{L}, M)$ un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M et $I \subset L$ un idéal fermé de son algèbre formelle en a; alors il existe un entier $h_0 \geq 0$ et une équation de Lie formellement intégrable $R^{h_0} \subset J^{h_0} \mathscr{L}$ telle que*

$$[\underline{R^{h_0}}, \underline{J^{h_0} \mathscr{L}}] \subset \underline{R^{h_0}}$$

et

$$I = \lim_{\ell} (R_a^{h_0})^{+\ell} .$$

COROLLAIRE 2.2 [4]. *Etant donnés un pseudogroupe de Lie infinitésimal analytique transitif $\mathscr{L}$ défini sur une variété analytique réelle M et I un idéal fermé de L, il existe un sous-pseudo-groupe infinitésimal $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}$ défini sur M tel que*

$$[\mathscr{L}_0, \mathscr{L}] \subset \mathscr{L}_0 \quad et \quad \lim_{h} J_a^h \mathscr{L}_0 = I .$$

Preuve. Considérons l'équation de Lie R^{h_0} formellement intégrable donnée par le Corollaire 2.1. Soit $\mathscr{L}_0$ l'ensemble des solutions de R^{h_0}; alors $J^{h_0}\mathscr{L}_0 = R^{h_0}$ et $R^{h_0+\ell} = (R^{h_0})^{+\ell} = J^{h_0+\ell}\mathscr{L}_0$, $\forall \ell \geq 0$. Soit X dans $\mathscr{L}_0$ et Y dans $\mathscr{L}$; de $j^{h_0}[X, Y] = [j^{h_0}X, j^{h_0}Y] \in [\underline{R^{h_0}}, J^{h_0}\mathscr{L}] \subset \underline{R^{h_0}}$ on obtient $[X, Y] \in \mathscr{L}_0$; d'où $[\mathscr{L}_0, \mathscr{L}] \subset \mathscr{L}_0$. Ainsi $\mathscr{L}_0$ est un pseudo-groupe infinitésimal vérifiant le corollaire. c.q.f.d.

§ 3.

Les notations étant celles des paragraphes précédents, soit h un entier tel que $J^{m+1}\mathscr{L} = (J^m\mathscr{L})^{+1}$ pour $m \geq h$. Donc, $J^h\mathscr{L}$ est une équation de Lie transitive et formellement intégrable. Dénotons par $I(L)$ l'ensemble des idéaux fermés de L et par $I(J^h\mathscr{L})$ l'ensemble des équations différentielles $R^m \subset J^m\mathscr{L}$ formellement intégrable d'ordre m, $m \geq h$ telle que $[\underline{R^m}, \underline{J^m\mathscr{L}}] \subset \underline{R^m}$. Nous allons définir une application convenable de $I(J^h\mathscr{L})$ sur $I(L)$ avec certaines propriétés.

LEMME 3.1. *Soit $R^m \in I(J^h\mathscr{L})$; alors, on a:*
(a) $[(\underline{R^m})^{+1}, \underline{J^{m+1}\mathscr{L}}]' \subset \underline{R^m}$.
(b) $[(\underline{R^m})^{+\ell+1}, \underline{J^{m+\ell+1}\mathscr{L}}]' \subset (\underline{R^m})^{+\ell}$, *pour* $\ell \geq 0$.

Preuve. La partie (a) découle de $[\underline{R^m}, \underline{J^m\mathscr{L}}] \subset \underline{R^m}$. Supposons:

$$[(\underline{R^m})^{+\ell+1}, \underline{J^{m+\ell+1}\mathscr{L}}]' \subset (\underline{R^m})^{+\ell} ,$$

et soient $\xi^{m+\ell+2}$, $\eta^{m+\ell+2}$ et Z des sections de $(R^m)^{+\ell+2}$, $J^{m+\ell+2}\mathscr{L}$ et de $\mathscr{L}$. Le Lemme 1.1 entraîne:

$$D([\xi^{m+\ell+2}, \eta^{m+\ell+2}]')(Z) = [D(\xi^{m+\ell+2})(Z), \eta^{m+\ell+1}]' + [\xi^{m+\ell+1}, D(\eta^{m+\ell+2})(Z)]' ,$$

où $\eta^{m+\ell+1} = \Pi(\eta^{m+\ell+2})$ et $\xi^{m+\ell+1} = \Pi(\xi^{m+\ell+2}) \in (R^m)^{+\ell+1}$. Ainsi, D envoie $[(\underline{R^m})^{+\ell+2}, \underline{J^{m+\ell+2}\mathscr{L}}]'$ dans $T^* \otimes (\underline{R^m})^{+\ell}$. D'autre part, ce crochet se projecte dans $(\underline{R^m})^{+\ell}$; d'où,

$$[(\underline{R^m})^{+\ell+2}, \underline{J^{m+\ell+2}\mathscr{L}}]' \subset (\underline{R^m})^{+\ell+1} .$$

c.q.f.d.

Soit $R^m \in I(J^h\mathscr{L})$, $a \in M$ et $I = \lim_\ell (R^m_a)^{+\ell}$. Le lemme 3.1 implique que I est un idéal fermé de l'algèbre formelle L en a. Ainsi, nous considérons l'application:

$$(1) \qquad \begin{aligned} I(J^h\mathscr{L}) &\to I(L) \\ R^m &\to I \end{aligned}$$

qui est surjective d'après le Corollaire 2.1. Soient R^m et S^p deux équations de Lie dans $I(J^h\mathscr{L})$ ayant la même image dans $I(L)$. Supposons $m \geq p \geq h$, $m = p + \ell$; $\lim_s (R^m_a)^{+s} = \lim_s (S^p_a)^{+s}$ implique $R^m_a = R^{p+\ell}_a = (S^p_a)^{+\ell}$; $R^{p+\ell}$ et $(S^p)^{+\ell}$ étant deux équations de Lie invariantes par Γ on obtient $R^{p+\ell}_X = (S^p_X)^{+\ell}$ pour $X \in M$; d'où, $R^m = R^{p+\ell} = (S^p)^{+\ell}$. Nous avons ainsi le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit $(\mathscr{L}, M)$ un pseudogroupe transitif infinitésimal sur M, L son algèbre formelle en a et h l'entier tel que $J^{m+1}\mathscr{L} = (J^m\mathscr{L})^{+1}$ pour $m \geq h$; alors il existe une application surjective de $I(J^h\mathscr{L})$ sur $I(L)$ et si deux équations différentielles de $I(J^h\mathscr{L})$ ont la même image l'une de ces équations est le prolongement de l'autre.//*

Soit $F(L)$ l'ensemble des idéaux fermés de L définis par un feuilletage dans (L, L_0) et $F(J^h\mathscr{L})$ l'ensemble des équations de Lie R^m de $I(J^h\mathscr{L})$ pour lesquelles il existe un sous-fibré vectoriel E de $T(M)$ tel que:

$$\begin{aligned} &[\underline{E}, \mathscr{L}] \subset \underline{E}\,; \text{ Ceci implique } [\underline{E}, \underline{E}] \subset \underline{E} \,. \\ &\Pi_0(R^m) = E \\ &R^\infty_a = \lim_\ell (R^m_a)^{+\ell} = L \cap J^\infty_a E \,. \end{aligned}$$

Le Théorème 2.1 (5) et le Corollaire 2.1 impliquent:

PROPOSITION 3.1. *Soit $(\mathscr{L}, M)$ un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M et $a \in M$. L étant l'algèbre formelle de $\mathscr{L}$ en a l'application $I(J^\infty\mathscr{L}) \to I(L)$ induit une application surjective de $F(J^h\mathscr{L})$ sur $F(L)$.*

§ 4.

Soit $(\mathscr{L}, M)$ un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M,

$a \in M$ et $L = \lim_h J_a^h \mathscr{L}$ son algèbre formelle en a.

Considérons I un idéal fermé de L et posons $W^h = I/I^h$ pour $h \geq 0$. On a évidemment les propriétés:

$$W^0 \subset V = T_a(M)\ , \quad \Pi : W^h \to W^{h-1} \quad \text{est surjective}\ ,$$
$$[W^{h+1}, J_a^{h+1}\mathscr{L}]' \subset W^h \qquad \text{pour } h \geq 0\ .$$

Dénotons par p^h le noyau de $W^h \to W^{h-1}$. On a $p^{h+1} \subset (p^h)^{+1}$ pour $h \geq 1$.

LEMME 4.1. *Soient I et J deux idéaux fermés de L et $h \geq 1$ tel que:*

(1) $q^{m+1} = p^{m+1} = (p^m)^{+1}$ *pour* $m \geq h$.

(2) $W^m = U^m$ *pour* $0 \leq m \leq h$.

Alors il existe un isomorphisme de L sur L transportant I sur J.

Preuve. Pour $m \geq 0$, $f \in \Gamma$, $f(a) = a$ induit un isomorphisme linéaire:

$$\begin{aligned} f^m : J_a^m \mathscr{L} &\to J_a^m \mathscr{L} \\ j_a^m X &\to j_a^m f^*(X) \end{aligned}$$

tel que, $[f^{m+1}(X), f^{m+1}(y)]' = f^m[X, y]'$; d'autre part, l'inclusion $[W^{m+1}, J_a^{m+1}\mathscr{L}]' \subset W^m$ implique $f^m(W^m) = W^m$ pour $m \geq 0$.

Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & q^{h+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & U^{h+1} \arrow[r, "\Pi"] & W^h \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "f^h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & p^{h+1} \arrow[r] & W^{h+1} \arrow[r, "\Pi"] & W^h \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Montrons que $f^{h+1}(U^{h+1}) = W^{h+1}$. Soient α et β des sections de $W^{h+1} \to W^h$ et $W^h \to U^{h+1}$ et définissons $\varphi : W^h \to J_a^{h+1}\mathscr{L}$ par $\varphi(X) = (f^{h+1} \circ \beta)(X) - (\alpha \circ f^h)(X)$ alors,

$\Pi(\varphi(X)) = f^h((\Pi \circ \beta)(X)) - f^h(X) = f^h(X) - f^h(X) = 0$; donc $\varphi(X) \in g^{h+1}$ pour $X \in W^h$. En plus, $\delta(\varphi(X)) \in V^* \otimes g^h$ est tel que:

$$\begin{aligned} \delta(\varphi(X))(v) &= [\varphi(X), f^{h+1}(y)]' = [f^{h+1}(\beta(X)), f^{h+1}(y)]' - [\alpha(f^h(X)), f^{h+1}(y)]' \\ &= f^h[\beta(X), y]' - [\alpha(f^h(X)), f^{h+1}(y)]' \end{aligned}$$

appartient à W^h, où $v \in V$ est la projection de $f^{h+1}(y)$ pour y dans $J_a^{h+1}\mathscr{L}$.

Ainsi, $\delta(\varphi(X)) \in V^* \otimes p^h$. Par hypothèse, $\varphi(X)$ est dans $p^{h+1} = (p^h)^{+1}$. On a donc une application $\varphi : W^h \to p^{h+1}$ telle que $f^{h+1}(\beta(X)) = \varphi(X)$

$+ \alpha(f^h(X))$ pour $X \in W^h$; alors $f^{h+1}(U^{h+1}) \subset W^{h+1}$, car $q^{h+1} = p^{h+1}$. De

$$\begin{aligned}\dim W^{h+1} &= \dim W^h + \dim p^{h+1} = \dim W^h + \dim q^{h+1} \\ &= \dim U^{h+1} = \dim f^{h+1}(W^{h+1}) ,\end{aligned}$$

on obtient,

$f^{h+1}(U^{h+1}) = W^{h+1}$. De $f^{h+1}(U^{h+1}) = U^{h+1}$ on obtient, $W^{h+1} = U^{h+1}$. Un raisonnement analogue prouve que $f^m(W^m) = U^m$ pour $m \geq h + 1$; ainsi $\varphi = \lim_m f^m$ est un isomorphisme de L sur L qui envoie I sur J.

c.q.f.d.

DÉFINITION 4.1. Un ensemble $W^h = \{W^0, W^1, W^2, \cdots, W^h\}$ d'espaces vectoriels tel que:

(1) $W^0 \subset V = T_a(M)$.

(2) $W^m \subset J^m_a\mathscr{L}$ pour $m \geq 1$ et $m \leq h$.

(3) $[W^{m+1}, J^{m+1}_a\mathscr{L}]' \subset W^m$, pour $0 \leq m < h - 1$.

(4) La projection $\Pi : W^{m+1} \to W^m$ est surjective pour $0 \leq m < h - 1$.

sera dite une *algèbre de Lie normale tronquèe d'ordre* $h \geq 1$.

Pour $m \leq h$ dénotons par p^m le noyau de la projection Π: $W^m \to W^{m-1}$; pour $m \geq h + 1$ posons $p^{m+1} = (p^m)^{+1}$. Dénotons par $H^{j,m}(W^h)$ la cohomologie de Spencer du complexe:

$$\bigwedge^{j-1} V^* \otimes p^{m+1} \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{j} V^* \otimes p^{m} \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{j+1} V^* \otimes p^{m-1}$$

associé à $\{p^m\}_{m\geq 1}$.

LEMME 4.2. *Pour $h \geq 1$ soit $W^h = \{W^0, W^1, \cdots, W^h\}$ une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre h telle que, $H^{1,h-1}(W^h) = H^{2,h-1}(W^h) = 0$. Supposons $g^{h+1} = (g^h)^{h+1}$; alors il existe un sous-espace vectoriel $W^{h+1} \subset J^{h+1}_a\mathscr{L}$ tel que $W^{h+1} = \{W^0, W^1, \cdots, W^{h+1}\}$ est une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre $h + 1$ et p^{h+1} est* Ker$\{W^{h+1} \to W^h\}$.

Preuve. Considérons les complexes:

$$(1)\qquad \begin{aligned}&0 \longrightarrow p^{h+1} \xrightarrow{\delta} (J^h_a\mathscr{L})^* \otimes p^h \xrightarrow{\delta} \bigwedge^2 (J^h_a\mathscr{L})^* \otimes p^{h-1} \\ &\xrightarrow{\delta} \bigwedge^3 (J^h_a\mathscr{L})^* \otimes p^{h-2} .\end{aligned}$$

et

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow g^{h+1} \xrightarrow{\delta} (J_a^h\mathscr{L})^* \otimes g^h \xrightarrow{\delta} \bigwedge^2 (J_a^h\mathscr{L})^* \otimes g^{h-1} .$$

Les hypothèses impliquent (1) et (2) exactes. Pour définir W^{h+1} nous allons construire une section $\gamma: W^h \to J_a^{h+1}\mathscr{L}$ telle que $[\gamma(W^h), J_a^{h+1}\mathscr{L}]' \subset W^h$. Ainsi $W^{h+1} = \operatorname{im}\gamma + p^{h+1}$ vérifie le lemme.

Pour $X \in W^h$ *posons* $\varphi_X(y) = \mathscr{L}[X, y]' - [\beta(X), \beta(y)]'$ pour $y \in J_a^h\mathscr{L}$ où α et β sont des sections de $W^h \to W^{h-1}$ et $J_a^{h+1}\mathscr{L} \to J_a^h\mathscr{L}$; alors, $\Pi(\varphi_X(y)) = [X, y]' - [\Pi\beta(X), \Pi\beta(y)]' = 0$, d'où, φ_X est à valeurs dans g^h. En plus, pour y, z dans $J_a^h\mathscr{L}$ on a:

$$(\delta\varphi_X)(y, z) = [\varphi_X(z), y]' - [\varphi_X(y), z]' = [\alpha[y, z]', X]' - [[\beta(y), \beta(z)]', X]' .$$

Ainsi, $\delta\varphi_X: \bigwedge^2 (J^h\mathscr{L}) \to p^{h-1}$; de $\delta\delta\varphi_X = 0$ on a l'existence d'une application $\psi_X: J_a^h\mathscr{L} \to p^h$, telle que $\delta\psi_X = \delta\varphi_X$. Ceci implique que $\varphi_X - \psi_X$ de $J_a^h\mathscr{L}$ dans g^h est un cocycle; de $g^{h+1} = (g^h)^{+1}$ on obtient un élément $\eta_X \in g^{h+1}$ tel que $\delta\eta_X = \varphi_X - \psi_X$; d'où, l'existence d'une application linéaire $\eta: W^h \to g^{h+1}$ telle que $\eta(X) = \eta_X = \varphi_X - \psi_X$. Posons $\gamma = \beta + \eta$; alors, pour $X \in W^h$ et $y \in J_a^{h+1}\mathscr{L}$ on obtient:

$$\begin{aligned}
[\gamma(X), y]' &= [\eta(X) + \beta(X), y]' = (\varphi_X - \psi_X)(\Pi(y))' + [\beta(X), y]' \\
&= \alpha([X, \Pi(y)]') - [\beta(X), \beta(\Pi(y))]' - [\psi_X, \Pi(y)]' + [\beta(X), y]' \\
&= \mathscr{L}([X, \Pi(y)]') - [\psi_X, \Pi(y)]' + [\beta(X), y - \beta\Pi(y)]'
\end{aligned}$$

qui est dans W^h; d'où, $[\operatorname{im}\gamma, J_a^{h+1}\mathscr{L}]' \subset W^h$; ceci entraîne notre résultat.

c.q.f.d.

THÉORÈME 4.1. *Soit* $(\mathscr{L}, M)$ *un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur* M, L *son algèbre formelle en* $a \in M$ *et* $W^h = \{W^0, W^1, \cdots, W^h\}$ *une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre* $h \geq 1$ *telle que* $H^{1,m} = H^{2,m}(W_h) = 0$, *pour* $m \geq h - 1$. *Supposons* $g^{m+1} = (g^m)^{+1}$ *pour* $m \geq h$; *alors il existe un idéal fermé* I *de* L *ayant* W^h *comme algèbre tronquée d'ordre* h. *En plus, si* J *est un autre idéal de* L *d'algèbre tronquée* W^h, *alors il existe un isomorphisme de* L *transportant* I *sur* J *si* $q^{m+1} = p^{m+1}$ *pour* $m \geqslant h$.

Preuve. Ces résultats découlent du Lemme 4.2 et du Lemme 4.1.

c.q.f.d.

REFERENCES

[1] Isao Hayashi, Embedding and Existence theorems of infinite Lie algebra, J. Math.

Soc. Japan, Vol. **22**, 1970.
[2] H. Goldschmidt, Sur la structure des équations de Lie III, La cohomologie de Spencer, J. of Diff. Geometry, Vol. **11**, No. 2, 1976.
[3] Pierre Molino, Théorie des G-Structure: Le problème d'équivalence, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, No. 588, 1977.
[4] Ngo Van Quê et A. A. M. Rodriguês, Troisième théorème fondamental de réalisation de Cartan, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble), 1975.

Universite des Sciences and Techniques
du Languedoc
Mathématiques-Montpellier