Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Guido Stampacchia

Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1963-1964), p. 1-77
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___3_1_0>

ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS DISCONTINUS

par
M. Guido STAMPACCHIA

Parmi les équations elliptiques du second ordre

$$(0.1) \qquad a_{ij} u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} + c u = f$$

où

$$a_{ij} \xi_i \xi_j > 0 \qquad \text{pour} \quad \xi \neq 0$$

(les sommes seront toujours sous-entendues) je vais considérer ici seulement les équations que l'on peut appeler équations à structure de divergence :

$$(0.2) \qquad -(a_{ij} u_{x_i} + d_i u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + c u) = T .$$

Si les coefficients des équations sont suffisamment réguliers la différence entre les équations (0.1) et (0.2) est seulement formelle.

Mais si l'on suppose, comme on va le faire ici, les coefficients mesurables et bornés, alors les équations (0.1) et (0.2) sont tout à fait différentes. Jusqu'à présent on ne connaît aucun résultat pour les équations (0.1).

Je parlerai donc des équations à structure de divergence (0.2) et pour gagner en simplicité je considèrerai la plus simple des équations à structure de divergence

$$(0.3) \qquad Lu = -(a_{ij} u_{x_i})_{x_j} = T$$

en supposant que

$$(0.4) \qquad \nu^{-1} |\xi|^2 < a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \nu |\xi|^2 \qquad \nu \text{ const.} > 1 .$$

L'opérateur L généralise l'opérateur de Laplace (pour $\nu = 1$). Le but de notre exposé est de présenter pour l'équation (0.3) beaucoup de résultats qui sont classiques pour l'équation de Laplace, tels que le principe du maximum, l'inégalité de Harnack, les propriétés de la fonction de Green pour le problème de Dirichlet.

Il faut remarquer que l'on est amené à considérer des équations à coefficients discontinus aussi pour étudier des équations non linéaires.

De toute façon, il y a un grand nombre de problèmes linéaires où l'on doit supposer que les coefficients sont discontinus. Et, d'autre part, des difficultés du même type se présentent quand on a un problème aux limites dans un ouvert dont le bord n'est pas assez régulier.

La différence essentielle entre les opérateurs à coefficients continus et les opérateurs à coefficients discontinus est que les premiers peuvent être considérés localement comme de petites perturbations d'opérateurs à coefficients constants, tandis que cela n'est pas vrai pour les opérateurs à coefficients discontinus.

Beaucoup de propriétés des solutions des équations à coefficients continus ne sont pas vraies pour les solutions des équations à coefficients discontinus ; d'ailleurs les propriétés qui sont vraies ne peuvent pas être déduites par les mêmes méthodes que dans le cas des coefficients continus.

Pour les problèmes aux limites dans un ouvert suffisamment régulier la situation est pareille. Quand le bord est régulier on peut réduire localement problème à un ouvert dont le bord contient une partie d'hypothèses sur les coefficients, tandis que cela n'est pas possible si le bord du domaine n'est pas assez régulier.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Monsieur le professeur J. Leray qui a bien voulu m'inviter à prendre la parole à son séminaire, au Collège de France. Je tiens également à remercier Monsieur Geymonat qui m'a aidé à rédiger les notes.

1. Quelques définitions et quelques résultats connus.

On considèrera toujours des fonctions à valeurs réelles et les espaces de Banach considérés seront toujours des espaces de Banach réels. Ω est un ouvert borné de $\underline{\underline{R}}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support dans Ω, avec la topologie usuelle.

$C^0(\overline{\Omega})$ est l'espace (de Banach) des fonctions continues dans $\overline{\Omega}$, normé par

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \max_{\overline{\Omega}} |u|$$

$C_\alpha(\overline{\Omega})$ est l'espace (de Banach) des fonctions qui satisfont une condition d'Hölder avec exposant α, $0<\alpha\leq 1$, avec la norme

$$\|u\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} = \max_{\overline{\Omega}} |u| + [u]_{\alpha,\Omega}$$

où

$$[u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{x',x''\in\Omega} \frac{|u(x')-u(x'')|}{|x'-x''|^\alpha}$$

$C^k(\bar{\Omega})$ est l'espace (de Banach) des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$ avec les dérivées d'ordre $\leqslant k$

$C_o^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^1(\Omega)$ à support dans .

$H^{1,p}(\Omega)$ est l'espace (de Banach) complété de $C^1(\bar{\Omega})$ pour la topologie induite par la norme

$$(*) \qquad \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \ .$$

$H^{1,p}(\Omega)$ est le complété de $C_o^1(\Omega)$ pour la topologie induite par la norme (*).

$H_o^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif dont le dual $H^{-1,p'}(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$, est isomorphe à l'espace des distributions qui sont dérivées de fonctions dans $L^p(\Omega)$.

$H_{loc}^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω telles que pour chaque Ω' ouvert, avec $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, $u|_{\Omega'}$ (restriction de u à Ω') $\in H^{1,p}(\Omega')$.

Si $p = 2$ on écrit aussi

$$H^1(\Omega) \ (\text{resp. } H_o^1(\Omega), \ H_{loc}^1(\Omega), \ H^{-1}(\Omega))$$

au lieu de

$$H^{1,2}(\Omega) \ (\text{resp. } H_o^{1,2}(\Omega), \ H_{loc}^{1,2}(\Omega), \ H^{-1,2}(\Omega)) \ .$$

DÉFINITION 1.1.- *Soit* E *un sous-ensemble de* Ω ; *on dira que* $u \in H^{1,p}(\Omega)$ *satisfait l'inégalité* $u \geqslant 0$ *sur* E *au sens de* $H^{1,p}(\Omega)$ *s'il existe une suite (de Cauchy)* $\{u_m\}$ *de* $C^1(\bar{\Omega})$ *qui converge vers* u *dans* $H^{1,p}(\Omega)$ *et telle que* $u_m \geqslant 0$ *sur* E.

En général cette définition ne coïncide pas avec la notion de fonction *positive presque partout* (p.p.). Si toutefois E est une boule contenue dans

Ω alors par régularisation on a : positive p.p. sur E entraîne positive au sens de $H^{1,p}(\Omega)$. Evidemment pour $k \in \underline{\underline{R}}$ on dira que $u \geqslant k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$, si $u - k \geqslant 0$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$, et on dira que $u \leqslant k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$ si $-u \geqslant -k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$; on dira aussi que $u = k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$ si à la fois $u \geqslant k$ et $u \leqslant k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$.

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 1.1.- Si $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ et si $t \rightsquigarrow G(t)$ est une fonction uniformément Lipschitzienne (c. à d. $|G(t') - G(t'')| \leqslant K\,|t' - t''|$) définie pour $t \in \underline{\underline{R}}$, telle que $G(0) = 0$, alors $G(u) \in H_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$[G(u)]_{x_i} = G'(u).u_{x_i}$$

Dém. du lemme 1.1. On remarque avant tout que l'on a $G'(t) \in L^{\infty}(\underline{\underline{R}})$, c. à d.,

$$\sup_{t \in \underline{\underline{R}}} |G'(t)| \leqslant K .$$

Soit $\{u_m\}$ une suite de $C_0^1(\Omega)$ convergeant vers u dans $H_0^{1,p}(\Omega)$ et soit

$$v_m = G(u_m) .$$

Alors chaque v_m est une fonction continue à support compact dans Ω et lipschitzienne dans $\overline{\Omega}$ et donc $(v_m)_{x_i} \in L^{\infty}(\Omega)$, c. à d. $\sup_{\Omega} |(v_m)_{x_i}| \leqslant C_m K$; on a donc aussi $v_m \in H_0^{1,p}(\Omega)$ parce que Ω est borné. On a évidemment

$$\|v_m - G(u)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K\|u_m - u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\lim_{m \to +\infty} \sup \|(v_m)_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \leq K \lim_{m \to +\infty} \sup \|(u_m)_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \leq K \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

et donc $(v_m)_{x_i}$ varie dans un ensemble borné de $L^p(\Omega)$. On peut alors extraire de v_m une sous-suite notée encore $\{v_m\}$ telle que v_m converge faiblement dans $H_o^{1,p}(\Omega)$ vers $G(u)$. Grâce au théorème de Banach-Saks la suite $\{w_m\}$, où

$$w_m = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m \quad \text{avec} \quad c_j > 0 \,, \quad \sum c_j = 1$$

converge fortement dans $H^{1,p}(\Omega)$ vers $G(u)$; mais $H_o^{1,p}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^{1,p}(\Omega)$ donc $G(u) \in H_o^{1,p}(\Omega)$.

c.q.f.d.

On dira qu'une fonction $u(x) \in H^{1,p}(\Omega)$ est bornée sur $\partial\Omega$ par $\Phi \in \underline{\underline{R}}$ si $u \leq \Phi$ au sens de $H^{1,p}(\Omega)$. Le plus petit des nombres Φ tel que $u \leq \Phi$ sera le maximum de u sur $\partial\Omega$.

Remarque. Si $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $G(t) = 0$ pour $|t| \leq d$ et $\max_{\partial\Omega} |u| \leq d$, alors la thèse du lemme 1.1 est vraie.

Si $u(x) \in L^p(\Omega)$ et k est un nombre réel > 0, on définit les fonctions tronquées

$$\{u\}^k = \begin{cases} u & \text{si} \quad u(x) \leq k \\ k & \text{si} \quad u(x) \geq k \end{cases}$$

$$\{u\}_k = \begin{cases} u & \text{si} \quad u(x) \geq k \\ k & \text{si} \quad u(x) \leq k \end{cases}$$

On a évidemment $\{u\}_k = \max(u,k)$, $\{u\}^k = \min(u,k)$ et grâce au lemme 1.1 on a :

LEMME 1.2.- i) <u>Si</u> $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ <u>et</u> $k \geq 0$ <u>alors</u> $\{u\}^k \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

ii) <u>Si</u> $u \in H^{1,p}(\Omega)$ <u>et</u> $u \leq \Phi$ <u>sur</u> $\partial\Omega$ <u>au sens de</u> $H^{1,p}(\Omega)$, <u>alors pour chaque</u> $k \geq \Phi$, $\{u\}^k - u$ <u>est dans</u> $H_0^{1,p}(\Omega)$.

Considérons l'opérateur différentiel

$$L\,u \equiv -(a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} = T$$

où $a_{ij}(x)$ sont fonctions à valeurs réelles mesurables et bornées dans Ω

<u>On suppose</u> L <u>uniformément elliptique</u>, c. à d. il existe une constante $\nu \geq 1$, telle que

$$(1.1) \qquad \nu^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \leq \nu|\xi|^2$$

pour chaque $x \in \Omega$ et pour chaque $\xi \in \underline{\underline{R}}^n$.

Rappelons que si $T \in H^{-1,2}(\Omega)$ alors il existe $g_i \in L^2(\Omega)$, $i = 0,1,\dots,n$, telles que

$$T = g_0 + \sum_{i=1}^{n} (g_i)_{x_i} .$$

Mais on sait que Δ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$ et considérant le problème

$$\begin{cases} \Delta u = g_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on a

$$g_0 = \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})_{x_i}$$

et on peut écrire (d'une façon non unique) $T = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ avec $f_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1,\dots, n$.

DÉFINITION 1.2.- Soit $T \in H^{-1,2}(\Omega)$; alors la fonction $u \in H^1(\Omega)$ est dite une solution de l'équation

$$L\,u = T = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i} \tag{1.2}$$

si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i}\, \varphi_{x_j}\, dx = -\int_\Omega f_j\, \varphi_{x_j}\, dx \tag{1.3}$$

DÉFINITION 1.3.- Une fonction $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ est une solution locale de (1.2) si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ l'on a

$$\int_\Omega (a_{ij}\, u_{x_i} + f_j)\varphi_{x_j}\, dx = 0 \ .$$

DÉFINITION 1.4.- Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ est dite une sous-solution de (1.2) si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\varphi(x) \geqslant 0$ sur Ω on a

$$\int_\Omega (a_{ij}\, u_{x_i} + f_j)\varphi_{x_j}\, dx \leqslant 0 \ .$$

DÉFINITION 1.5.- Une fonction $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ est dite une sous-solution locale de (1.2) si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et positive sur Ω on a

$$\int_\Omega (a_{ij}\, u_{x_i} + f_j)\varphi_{x_j}\, dx \leqslant 0 \ .$$

DÉFINITION 1.6.- Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ est dite une supersolution [locale] de (1.2) si $-u$ est une sous-solution [locale] de (1.2).

2. Une généralisation d'un théorème de Lax-Milgram.

Soit X un espace de Hilbert réel et soit U un ensemble convexe et fermé de X ; soit X' le dual fort de X, la dualité entre X et X' étant notée $<,>$. Pour chaque point $u \in U$ soit V_u le cône convexe qui projette de l'origine de X l'ensemble $U-u$. Donc

$$V_u = \{v \in X \; ; \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } u + \varepsilon v \in U\} \; .$$

Il est évident que $u \in \overset{o}{U}$ (c. à d. il existe une boule de centre u contenue dans U) si et seulement si $V_u \equiv X$.

Il est aussi évident que si U est une variété linéaire affine (c. à d. parallèle à un sous-espace vectoriel V) alors $V_u \equiv V = U-u$.

On a le théorème suivant [29].

THÉORÈME 2.1.- <u>Soit</u> $a(u,v)$ <u>une forme bilinéaire continue sur</u> $X \times X$ <u>et coercitive, c. à d.</u>

(2.1) $\exists c_1 > 0$ <u>telle que</u> $|a(u,v)| \leq c_1 \|u\|_X \|v\|_X \qquad \forall u,v \in X$

(2.2) $\exists c > 0$ <u>telle que</u> $a(v,v) \geq c \|v\|_X^2 \qquad \forall v \in X$.

<u>Pour tout</u> f <u>donné dans</u> X', <u>il existe un et un seul</u> $u \in U$ <u>tel que</u>

(2.3) $$a(u,v) \geq \langle f,v \rangle \qquad \forall v \in V_u \; .$$

Evidemment si $u \in \overset{o}{U}$ (ou bien si U est une variété linéaire affine de X) alors si $v \in V_u$ aussi $-v \in V_u$ et l'inégalité (2.3) devient

(2.4) $$a(u,v) = \langle f,v \rangle \qquad \forall v \in X \; .$$

Si $U = X$ alors le théorème 2.1 est le théorème de Lax-Milgram. Désignons le $u \in U$ qui vérifie (2.3) avec $G(f \; ; a,U)$. On a avant tout le lemme suivant d'unicité :

LEMME 2.1.- Dans les mêmes conditions du théorème 2.1 soit $u_1 = G(f_1;a,U)$, $u_2 = G(f_2;a,U)$ alors on a

$$\|u_2 - u_1\|_X \leq \frac{1}{c}\|f_2 - f_1\|_{X'} \tag{2.5}$$

Dém. On a par hypothèse :

$$a(u_1,v) \geq \langle f_1,v\rangle \qquad \forall v \in V_{u_1}$$

$$a(u_2,v) \geq \langle f_2,v\rangle \qquad \forall v \in V_{u_2}$$

et puisque $u_2-u_1 \in V_{u_1}$ et $u_1-u_2 \in V_{u_2}$ on en déduit que :

$$a(u_1, u_2-u_1) \geq \langle f_1, u_2-u_1\rangle$$

$$a(u_2, u_2-u_1) \leq \langle f_2, u_2-u_1\rangle$$

d'où en soustrayant et en utilisant (2.2) on a :

$$c\|u_2-u_1\|_X^2 \leq a(u_2-u_1,u_2-u_1) \leq \langle f_2-f_1, u_2-u_1\rangle \leq \|f_2-f_1\|_{X'}\, \|u_2-u_1\|_X$$

d'où le lemme. c.q.f.d.

On peut démontrer l'existence dans l'hypothèse supplémentaire que $a(u,v)$ est symétrique, d'une façon précise.

LEMME 2.2.- Dans les conditions du théorème 2.1, soit de plus $a(u,v) = a(v,u)$ sur $X \times X$; pour chaque $f \in X'$ il existe un $u \in U$ tel que (2.3) soit vraie.

Dém. Posons

$$I(u) = a(u,u) - 2\langle f,u\rangle$$

et soit $d = \inf\limits_{u \in U} I(u)$.

On a d borné inférieurement ; en effet :

$$I(u) \geqslant -\frac{1}{c^2}\|f\|_X^2,$$

Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \in U$, $I(u_n) < d + \frac{1}{n}$; alors $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy de X.

En effet $a(u,v)$ étant une forme bilinéaire symétrique positive sur X on a l'inégalité de la médiane, et puisque

$$\frac{u_n + u_m}{2} \in U$$

on a

$$a(u_n-u_m, u_n-u_m) = 2a(u_n,u_n) + 2a(u_m,u_m) - 4a\left(\frac{u_n+u_m}{2}, \frac{u_n+u_m}{2}\right) =$$

$$= 2I(u_n) + 2I(u_m) - 4I\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) < 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

U étant fermé il existe $u \in U$ tel que $\|u_n - u\|_X \to 0$ et de plus grâce à (2.1) on a aussi

$$a(u_n-u, u_n-u) \to 0$$

et $I(u_n) \to I(u)$; donc $I(u) = d$.

Soit maintenant $v \in U-u$, alors $u + \varepsilon v \in U$ pour tout $0 \leqslant \varepsilon < 1$, et la fonction $\varepsilon \rightsquigarrow I(u+\varepsilon v)$ a un minimum pour $\varepsilon = 0$. Donc

$$2\varepsilon(a(u,v) - \langle f,v \rangle) \geqslant 0$$

pour tout $v \in U-u$, c. à d.

$$a(u,v) - \langle f,v \rangle \geqslant 0 \qquad \forall v \in U-u \ ;$$

évidemment la même inégalité est vraie pour tout $v \in V_u$.

Pour démontrer le théorème 2.1 il faut se débarrasser de la condition de symétrie sur $a(u,v)$ faite dans le lemme 2.2. Posons

$$\alpha(u,v) = \frac{a(u,v)+a(v,u)}{2}, \quad \beta(u,v) = \frac{a(u,v)-a(v,u)}{2}$$

de telle sorte que

$$a(u,v) = \alpha(u,v) + \beta(u,v), \quad \alpha(u,v) = \alpha(v,u), \quad \beta(u,v) = -\beta(v,u).$$

Evidemment $\alpha(u,v)$ et $\beta(u,v)$ sont deux formes bilinéaires continues sur $X \times X$ et $\alpha(u,v)$ est coercitive avec la même constante c de la formule (2.2) ; posons

$$M = \max_{\|u\|_X = \|v\|_X = 1} |\beta(u,v)| = \max_{u,v \in X-\{0\}} \frac{|\beta(u,v)|}{\|u\|_X \cdot \|v\|_X}$$

Considérons la forme bilinéaire continue sur X dépendant du paramètre réel $t \geq 0$:

$$a_t(u,v) = \alpha(u,v) + t\beta(u,v) ;$$

il est évident que $a_t(u,v)$ est coercitive avec la même constante c de la formule (2.2) indépendamment de t.

LEMME 2.3.- <u>Soit</u> τ <u>fixé</u> ≥ 0 <u>et supposons que pour tout</u> $f \in X'$ <u>il existe</u> $u \in U$ <u>unique tel que</u>

(2.6) $$a_\tau(u,v) \geq \langle f,v \rangle \qquad \forall v \in V_u ;$$

<u>alors pour tout</u> $f \in X'$, <u>il existe</u> $\bar{u} \in U$ <u>unique tel que</u>

(2.7) $$a_t(\bar{u},v) \geq \langle f,v \rangle \qquad \forall v \in V_{\bar{u}}$$

<u>pour tout</u> t <u>avec</u> $\tau \leq t \leq \tau + t_o$ <u>où</u> $0 \leq t_o < \frac{c}{M}$.

Dém. On sait par hypothèse que le lemme est vrai pour $t = \tau$. Soit t fixé avec $\tau \leqslant t \leqslant \tau + t_o$ et soit $T : X \to U$ l'application que à $y \in X$ fait correspondre l'unique $u \in U$ tel que

$$\alpha(u,v) \geqslant \langle f,v \rangle - (t-\tau)\,\beta(y,v) \qquad \forall v \in V_u$$

Soient $y_1, y_2 \in X$ et $u_1 = T(y_1)$, $u_2 = T(y_2)$; alors grâce au lemme 2.1, on a

$$\|u_2-u_1\|_X \leqslant \frac{1}{c}(t-\tau)M\,\|y_1-y_2\|_X \leqslant \frac{t_o M}{c}\,\|y_1-y_2\|_X \quad ;$$

T est donc une contraction et il existe alors un point fixe $\bar{u} \in U$ tel que

$$a_t(\bar{u},v) \geqslant \langle f,v \rangle \qquad \forall v \in V_{\bar{u}}$$

c.q.f.d.

Démonstration du théorème 2.1.

Grâce aux lemmes 2.1 et 2.2 l'hypothèse du lemme 2.3 est vérifiée si $\tau = 0$; alors (2.7) est vraie pour $0 \leqslant t \leqslant t_o$; pour $\tau = t_o$ l'hypothèse du lemme 2.3 est donc vérifiée et (2.7) est vraie pour $0 \leqslant t \leqslant 2t_o$, et ainsi de suite jusqu'à rattraper la valeur $t = 1$

c.q.f.d.

COROLLAIRE 2.1.- Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire et continue sur l'espace d'Hilbert $X \times X$ et soit $a(u,v)$ coercitive sur un sous-espace fermé X_o de X, c. à d.

(2.8) $\qquad \exists\, c_2 > 0$ telle que $a(v,v) \geqslant c_2 \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X_o$.

Soit U un ensemble convexe et fermé contenu dans une variété linéaire affine parallèle à X_o ; il existe alors un et un seul $u \in U$ tel que

$$a(u,v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in V_u$$

Dém. Soit $g \in X - X_o$ tel que : $U \subset X_o + g$; alors l'ensemble $U^{(1)} = U-g$ est convexe et fermé dans X_o ; de plus pour tout $u \in U$ on a

$$\begin{aligned} V_u &= \{v \in X \ ; \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } u + \varepsilon v \in U\} \\ &= \{w \in X_o \ ; \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } u - g + \varepsilon w \in U^{(1)}\} \\ &= V^{(1)}_{(u-g)} \end{aligned}$$

où $V^{(1)}_{(u-g)}$ est le cône convexe qui projette de l'origine de X_o l'ensemble $U^{(1)}-(u-g) \subset X_o$.

Par hypothèse, grâce au théorème 2.1 il existe $\zeta \in U^{(1)} \subset X_o$ tel que

$$a(\zeta, \varphi) \geq a(g, \varphi) \qquad \varphi \in V^{(1)}_{\zeta}$$

(il faut observer que pour g fixé dans X, $\varphi \rightsquigarrow a(g, \varphi)$ est par hypothèse une forme linéaire et continue sur X_o) ; si l'on pose $u = \zeta - g$ on a alors

$$a(u,v) \geq 0 \qquad \forall v \in V_u$$

c.q.f.d.

3. Quelques applications du théorème 2.1.

1. Considérons le problème de Dirichlet non homogène

$$(3.1) \qquad \begin{cases} Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i} & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f_i \in L^2(\Omega)$ et g dans l'espace des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$. (Rappelons que l'on dit que $u, v \in H^1(\Omega)$ ont la même trace sur $\partial\Omega$ dans $H^1(\Omega)$ si $u-v \in H^1_o(\Omega)$).

Soit alors U la variété linéaire (affine) de $H^1(\Omega)$ des fonctions ayant la même trace g sur $\partial\Omega$. Il est bien connu que la forme

$$(3.2) \qquad (u,\varphi) \rightsquigarrow \int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i}\, \varphi_{x_j}\, dx$$

est bilinéaire et continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et coercitive sur $H^1_o(\Omega)$ et en utilisant le corollaire 2.1 on obtient donc l'existence de la solution du problème de Dirichlet non homogène.

2. Soit E un ensemble contenu dans Ω ; considérons l'ensemble convexe et fermé U de $H^1_o(\Omega)$ des fonctions u qui satisfont l'inégalité $u \geqslant 1$ sur E au sens de $H^1_o(\Omega)$.

Evidemment la forme

$$(3.3) \qquad (u,v) \rightsquigarrow a(u,v) = \int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i}\, v_{x_j}\, dx$$

est bilinéaire continue et coercitive sur $H^1_o(\Omega) \times H^1_o(\Omega)$.

Il existe alors une et une seule $u \in U$ telle que

$$(3.4) \qquad a(u,v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in V_u \ ;$$

il est évident que V_u contient le cône des fonctions $v \geqslant 0$ sur E au sens de $H^1_o(\Omega)$.

Il est naturel de savoir si $u = 1$ sur E au sens de $H^1_o(\Omega)$. On a évidemment $\{u\}^1 = \max(u,1) \in U$; on démontrera que $\{u\}^1 \equiv u$.

En effet, puisque $\{u\}^1 - u \in V_u$, on a

$$a(u, \{u\}^1 - u) \geqslant 0$$

mais il résulte aussi de (3.3)

$$a(\{u\}^1, u - \{u\}^1) = \int_\Omega a_{ij} (\{u\}^1)_{x_i} (u - \{u\}^1)_{x_j}\, dx = 0$$

car $(\{u\}^1)_{x_i} = 0$ si $u(x) \geqslant 1$ et $(u - \{u\}^1)_{x_j} = 0$ si $u(x) \leqslant 1$.

Alors

$$a(\{u\}^1 - u, \{u\}^1 - u) \leqslant 0$$

et on a :

$$\{u\}^1 = u$$

Puisque $a(u,v)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ avec la topologie usuelle et, de plus, est positive sur le cône des fonctions positives sur $\mathcal{D}(\Omega)$. grâce à un théorème de Schwartz [20, t.I p.29] ..il existe une mesure positive telle que

$$a(u,v) = \int v \, d\mu \quad .$$

Puisque $u = 1$ sur E et $a(u,v) = 0$ si v a le support dans $\Omega - E$, on déduit que le support de μ est sur ∂E. Cette mesure est la capacité de E par rapport à la forme $a(u,v)$ et à l'ouvert Ω .

3. On démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. <u>Si</u> u <u>et</u> v <u>sont deux sous-solutions de l'opérateur elliptique</u> L <u>dans</u> Ω ,

$$w = \max(u,v)$$

<u>est une sous-solution de l'opérateur</u> L.

<u>Dém</u>. Soit U l'ensemble des $\vartheta \in H^1(\Omega)$ telles que $\vartheta(x) \leq w(x)$ dans Ω et $\vartheta(x) = w(x)$ sur $\partial\Omega$. U est convexe et fermé. Grâce au corollaire 2.1 il existe une et une seule $\eta \in U$ telle que

$$(3.5) \qquad a(\eta, \varphi) = \int_\Omega a_{ij} \, \eta_{x_i} \, \varphi_{x_j} \, dx \geq 0 \qquad \forall \varphi \in V_\eta$$

Evidemment $V_\eta \subset H_0^1(\Omega)$ contient le cône des fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\psi(x) \leq 0$ sur Ω ; alors de (3.5) on déduit

$$a(\eta, \varphi) \leq 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et η est donc une sous-solution de l'opérateur L.

Si l'on pose $\zeta = \max(u,\eta)$ on a $\eta \leq \zeta$. En effet $\zeta = \max(u,\eta) \in U$ grâce à la définition de U ; de plus $\zeta - \eta \in V_\eta \subset H_0^1(\Omega)$; on a donc

$$a(\eta\,,\,\zeta-\eta) \geq 0 \quad .$$

Mais, puisque u est une sous-solution de l'opérateur L, si $\zeta \geq \eta$, on a aussi :

$$a(\zeta,\zeta-\eta) = \int_\Omega a_{ij}\, \zeta_{x_i} (\zeta-\eta)_{x_j}\, dx = \int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i} (\zeta-\eta)_{x_j}\, dx \leq 0 \ ;$$

et

$$a(\zeta-\eta,\zeta-\eta) < 0$$

d'où $\zeta = \eta$. Alors $u = w$ entraîne $\eta = u = w$ puisque $\eta \leq u \leq \eta$.

Evidemment $w \in U$ et de plus $w - \eta \in V_\eta$ et, grâce à (3.5)

$$a(\eta\,,w-\eta) \geq 0 \ ;$$

mais, puisque v est une sous-solution de l'opérateur L, si $v = w$, on a aussi :

$$\begin{aligned} a(w,w-\eta) &= \int_\Omega a_{ij}\, w_{x_i} (w-\eta)_{x_j}\, dx \\ &= \int_\Omega a_{ij}\, v_{x_i} (w-\eta)_{x_j}\, dx \leq 0 \ ; \end{aligned}$$

donc $a(w-\eta,w-\eta) \leq 0$ d'où $w = \eta$ presque partout dans Ω (pour la mesure de Lebesgue)

c.q.f.d.

On a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.1. <u>Si</u> u <u>est une sous-solution de l'opérateur elliptique</u> L, <u>pour tout</u> k <u>réel</u>

$$\{u\}_k = \max(u,k)$$

<u>est une sous-solution de l'opérateur</u> L.

4. On démontre le <u>principe de maximum</u> suivant :

THÉORÈME 3.1. <u>Soit</u> $u \in H^1(\Omega)$ <u>une sous-solution de l'opérateur elliptique L, on a</u> :

$$\max_{\Omega} u \leqslant \max_{\partial\Omega} u \tag{3.6}$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\Phi = \max\limits_{\partial\Omega} u$, grâce au corollaire 3.1

$$\{u\}_{\Phi} - \Phi \in H_0^1(\Omega)$$

est une sous-solution de l'opérateur L. Alors

$$a(\{u\}_{\Phi} - \Phi, \varphi) \leqslant 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

avec $\varphi(x) \geqslant 0$ dans Ω et aussi en prolongeant par continuité

$$a(\{u\}_{\Phi} - \Phi, \{u\}_{\Phi} - \Phi) \leqslant 0$$

et donc

$$\|\{u\}_{\Phi} - \Phi\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

d'où $\{u\}_{\Phi} = \Phi$, c'est-à-dire :

$$u \leqslant \Phi \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Avec le même raisonnement, on obtient :

THÉORÈME 3.2. <u>Soit</u> $u \in H^1(\Omega)$ <u>une supersolution de l'opérateur elliptique L ; alors on a</u> :

$$\min_{\Omega} u \geqslant \min_{\partial\Omega} u \tag{3.7}$$

4. Majorations dans L^p des sous-solutions.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4.1. *Soit* $\varphi(t)$ *une fonction définie pour* $t \geq k_0$ *non négative et non décroissante telle que si* $h > k \geq k_0$ *l'on ait :*

$$\varphi(h) \leq \frac{c}{(h-k)^{\alpha}}[\varphi(k)]^{\beta} \tag{4.1}$$

c, α, β *étant des constantes positives.*

Alors (i) *si* $\beta > 1$ *l'on a*

$$\varphi(k_0 + d) = 0 \tag{4.2}$$

où

$$d^{\alpha} = c[\varphi(k_0)]^{\beta-1} \quad 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} \quad ; \tag{4.3}$$

(ii) *si* $\beta = 1$ *l'on a*

$$\varphi(h) \leq e \exp[-\zeta(h-k_0)]\varphi(k_0) \tag{4.4}$$

où $\zeta = (ec)^{-1/\alpha}$;

(iii) *si* $\beta < 1$ *et* $k_0 > 0$ *l'on a*

$$\varphi(h) \leq \frac{2^{\frac{\mu}{1-\beta}}}{h^{o}} \left\{ c^{\frac{1}{1-\beta}} + (2k_0)^{\mu} \varphi(k_0) \right\} \tag{4.5}$$

où $\mu = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$.

Dém. On considère la suite

$$k_s = k_0 + d - \frac{d}{2^s} \quad ;$$

de (4.1) l'on a

$$\varphi(k_{s+1}) \leq \frac{c\, 2^{(s+1)\alpha}}{d^{\alpha}}[\varphi(k_s)]^{\beta} \ . \tag{4.6}$$

On démontre par récurrence sur s que

$$(4.7)\qquad \varphi(k_s) \leq \frac{\varphi(k_o)}{2^{-s\mu}} \qquad \text{où} \qquad \mu = \frac{\alpha}{1-\beta} \quad .$$

Le cas $s = 0$ est évident.

Supposant vraie l'inégalité (4.7) pour s, on la démontre pour $s+1$. En effet de (4.6) on a

$$\varphi(k_{s+1}) \leq c\, \frac{2^{(s+1)\alpha}}{d^{\alpha}}\, \frac{[\varphi(k_o)]^{\beta}}{2^{-s\beta\mu}}$$

et grâce à (4.3) l'on a

$$\varphi(k_{s+1}) < \frac{\varphi(k_o)}{2^{-(s+1)\mu}} \quad ;$$

et, pour $s \to +\infty$, on a le résultat.

(ii) On considère la suite $k_s = k_o + s(ec)^{\frac{1}{\alpha}}$; de (4.1) on tire

$$\varphi(k_s) \leq \frac{1}{e}\, \varphi(k_{s-1})$$

et

$$\varphi(k_s) \leq e^{-s}\, \varphi(k_o).$$

Soit $h > k_o$ et soit s un entier tel que

$$k_o + (s-1)(ec)^{\frac{1}{\alpha}} \leq h < k_o + s(ec)^{\frac{1}{\alpha}} \quad ;$$

alors

$$\varphi(h) \leq \varphi(k_o + (s-1)(ec)^{\frac{1}{\alpha}}) \leq e^{-(s-1)}\, \varphi(k_o)$$

$$\leq e\, e^{-\zeta(h-k_o)}\, \varphi(k_o)$$

où $\zeta = (ec)^{\frac{1}{\alpha}}$.

(iii) On pose :

$$(4.8) \qquad \varphi(h) = \psi(h)\,\frac{c^{\frac{1}{1-\beta}}}{h^{\mu}}$$

et on obtient de (4.1)

$$\psi(h) \leqslant [\psi(k)]^{\beta}\left(\frac{h}{(h-k)^{1-\beta}\,k^{\beta}}\right)^{\mu} \quad ;$$

par conséquent, si $h = 2k$ on a :

$$\psi(2k) \leqslant 2^{\mu}[\psi(k)]^{\beta}$$

et, pour tout entier s :

$$\varphi(2^s k) \leqslant [\psi(k)]^{\beta^s}\, 2^{\mu \sum_{i=1}^{s} \beta^i} \leqslant (1+c')2^{\mu\frac{1}{1-\beta}}$$

où

$$c' = \max_{k_0 \leqslant k \leqslant 2k_0} \psi(k) = c^{\frac{1}{\beta-1}} \max_{k_0 \leqslant k \leqslant 2k_0} k^{\mu}\varphi(k) \leqslant c^{\frac{1}{\beta-1}}(2k_0)^{\mu}\;\varphi(k_0)$$

La fonction $\psi(t)$ est donc bornée et alors de (4.8) découle (iii).

c.q.f.d.

Soit L l'opérateur défini dans le § 1 (on peut observer que pour démontrer le résultat de ce § on utilise seulement l'inégalité de gauche de (1.1), c. à d. :

$$(4.9) \qquad \nu^{-1}|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \qquad\qquad \forall\,\xi \text{ réel} \neq 0 \;)$$

et soit $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème de Dirichlet pour l'équation

$$(4.10) \qquad Lu = T = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} (a_{ij}\,u_{x_i} + f_j)\,\varphi_{x_j}\,dx = 0 \qquad\qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ou, ce qui revient au même

$$(4.11)\qquad \int_\Omega (a_{ij}\, u_{x_i} + f_j)\varphi_{x_j}\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

THÉORÈME 4.1. <u>Soit</u> $u \in H_0^1(\Omega)$ <u>la solution de (4.10) avec</u> $f_i \in L^p(\Omega)$, $p \geqslant 2$ <u>il existe alors une constante</u> $K = K(p,n)$ <u>telle que</u> :

(i) <u>si</u> $p > n$ <u>on a</u> :

$$(4.12)\qquad \max_\Omega |u| \leqslant K\,\nu\,(\text{mes}\,\Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\Omega)}$$

(ii) <u>si</u> $p = n$ <u>on a</u> :

$$(4.13)\qquad \int_\Omega (e^{\vartheta|u|} - 1)dx \leqslant e(\text{mes}\,\Omega)\,\frac{\vartheta}{(\zeta - \vartheta)}$$

où

$$0 < \vartheta < \zeta = \Big(K\nu \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^n(\Omega)}\Big)^{-1}\ ;$$

(iii) <u>si</u> $2 \leqslant p < n$ <u>on a</u> :

$$(4.14)\ \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant K\nu \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \qquad \Big(\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\Big)$$

<u>Dém</u>. Pour k réel > 0 considérons la fonction

$$v = G(u) = \text{sign}\ u.\max\ \{|u| - k, 0\}$$

alors, grâce au lemme 1.1 , $v \in H_0^1(\Omega)$. (En effet, la fonction

$$t \rightsquigarrow G(t) = \begin{cases} t + k & \text{si}\quad t \leqslant -k \\ 0 & \text{si}\quad -k < t < k \\ t - k & \text{si}\quad t \geqslant k \end{cases}$$

est uniformément lipschitzienne).

Grâce à (4.11) et au fait que si $v \neq 0$ alors $v_{x_i} = u_{x_i}$, on a :

$$\int_\Omega (a_{ij}\, u_{x_i} + f_j) v_{x_j}\, dx = 0$$

$$\int_\Omega (a_{ij}\, v_{x_i} + f_j) v_{x_j}\, dx = 0\ ;$$

de (4.9) il découle

$$\nu^{-1} \int_\Omega v_{x_i}^2\, dx \leqslant \int_\Omega f_i\, v_{x_i}\, dx$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy on a

$$\int_\Omega v_x^2\, dx \leqslant \nu^2 \int_{A(k)} f_j^2\, dx \tag{4.15}$$

où $A(k) = \{x \in \Omega\ ;\ |u| > k\}$ et $v_x^2 = \sum v_{x_i}^2 = \sum u_{x_i}^2$.

Grâce aux inégalités de Sobolev pour les fonctions de $H_o^1(\Omega)$ on a :

$$\left(\int_\Omega v^2\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant S^2 \int_\Omega v_x^2\, dx \qquad \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \tag{4.16}$$

où S est une constante qui dépend seulement de n (on peut démontrer que

$$S \leqslant \frac{2(n-1)}{n(n-2)}\, \frac{1}{\omega^{\frac{1}{n}}} \quad ,$$

ω étant la mesure de la sphère unitaire dans $\underline{\underline{R}}^n$).

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$(4.17) \qquad \int_{A(k)} f_j^2 \, dx \leqslant \left(\int_\Omega |f_j|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} [\text{mes } A(k)]^{1-\frac{2}{p}}$$

et de (4.15), (4.16), (4.17) on tire :

$$\left(\int_\Omega v^{2^*} \, dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant S^2 \, \nu^2 \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^p(\Omega)} \, [\text{mes } A(k)]^{1-\frac{2}{p}}$$

où, ce qui revient au même

$$\left(\int_{A(k)} (|u|-k)^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant S^2 \, \nu^2 \sum \|f_i\|^2_{L^p(\Omega)} \, [\text{mes } A(k)]^{1-\frac{2}{p}} .$$

Soit maintenant $h > k > 0$; alors $A(h) \subset A(k)$ et dans $A(h)$ on a $|u| > h$; on obtient donc :

$$(h-k)^2 [\text{mes } A(h)]^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \left(\int_{A(h)} (|u|-k)^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$\leqslant \left(\int_{A(k)} (|u|-k)^2 dx \right)^{\frac{2}{2^*}} .$$

En conclusion, l'on a :

$$(4.18) \qquad \text{mes } A(h) \leqslant \frac{c}{(h-k)^{2^*}} [\text{mes } A(k)]^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})}$$

où

$$(4.19) \qquad c = \left\{ S \nu \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \right\}^{2^*} .$$

Grâce au lemme (4.1), où $\varphi(k) = \text{mes } A(k)$, $k_0 = 0$, $\alpha = 2^*$ et $\beta = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})$, on déduit :

(i) si $p > n$ (c. à d. $\beta > 1$) alors

$$\max_{\Omega} |u| \leqslant S\,\nu\, 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})p^*} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \quad ;$$

(ii) si $p = n$ (c. à d. $\beta = 1$) alors

$$\mathrm{mes}\, A(h) \leqslant e\, e^{-\zeta h}\ \mathrm{mes}\,\Omega$$

où

$$\zeta = e^{-1}\Big(S\,\nu \sum_i \|f_i\|_{L^n(\Omega)}\Big)^{-1}$$

et, par conséquent, d'après un argument standard

$$\int_{\Omega} (e^{\vartheta |u|}-1)dx \leqslant e\ \mathrm{mes}\,\Omega\ \frac{\vartheta}{\zeta-\vartheta} \qquad \text{si} \qquad \vartheta < \zeta \ .$$

(iii) si $2 \leqslant p < n$ (c. à d. $0 \leqslant \beta < 1$) alors

$$\mathrm{mes}\, A(h) \leqslant \left(\frac{2^{\frac{p^*}{2^*}} S\,\nu \sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega)}}{h}\right)^{p^*} . \tag{4.20}$$

Pour démontrer complètement le cas (iii) nous utiliserons le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Considérons l'application $\bar{f} \rightsquigarrow u = G(\vec{f}) = \sum_{i=1}^{n} G(\vec{f}_i)$ où $\vec{f}_i = (0,\dots,0,f_i,0,\dots,0)$; elle est linéaire et, grâce à (4.20), du type faible (p,p^*) si $2 \leqslant p \leqslant n$; alors G est aussi du type fort (p,p^*) si $2 < p < n$; le cas $p = 2$ est une conséquence immédiate des inégalités de Sobolev.

c.q.f.d.

Introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 4.1. <u>Pour</u> p <u>réel</u> > 1 <u>on dit que</u> $f \in L^p(\Omega)$ <u>faible s'il existe une constante</u> $A > 0$ <u>telle que</u>

$$\text{mes}\left\{x\in\Omega \quad ; \quad |f| > \sigma\right\} \leq \left(\frac{A}{\sigma}\right)^p$$

la plus petite constante A étant la norme de f dans $L^p(\Omega)$ faible.

On démontre facilement les inclusions algébriques et topologiques :

$$L^p(\Omega) \subset L^p(\Omega) \text{ faible } \subset L^{p-\varepsilon}(\Omega) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

DÉFINITION 4.2. Pour $p > 1$ on dit que $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ s'il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout ensemble mesurable $K \subset \Omega$ l'on a :

$$\int_K |f|^2\, dx \leq B(\text{mes } K)^{1-\frac{2}{p}}$$

la norme de f étant le plus petit $B^{1/2}$.

$\mathcal{L}^p(\Omega)$ est un espace de Lorentz.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. Pour $p > 2$ $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est isomorphe à $L^p(\Omega)$ faible.

Dém. Soit $f \in L^p(\Omega)$ faible pour $p > 2$ (alors $f \in L^2(\Omega)$) et soit K un ensemble mesurable $\subset \Omega$. Alors pour tout $a > 0$ l'on a :

$$\int_K |f|^2 dx = 2\int_0^\infty \sigma\, \text{mes}(\{x \in \Omega\, ; |f| > \sigma\} \cap K)d\sigma$$

$$\leq 2\int_0^a \sigma \text{ mes } K\, d\sigma + 2\int_a^{+\infty} \sigma \left(\frac{A}{\sigma}\right)^p d\sigma$$

$$= a^2 \text{ mes } K + 2A^p \left[\frac{\sigma^{2-p}}{2-p}\right]_{\sigma=a}^{\sigma=+\infty}$$

$$= a^2 \text{ mes } K + \frac{2A^p}{p-2} a^{2-p}$$

En choisissant $a = A(\text{mes } K)^{-\frac{1}{p}}$ l'on a :

$$\int_K |f|^2\, dx \leqslant A^2\left(1 - \frac{2}{p-2}\right)(\text{mes } K)^{1-\frac{2}{p}}$$

Soit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ on a :

$$\sigma^2 \,\text{mes}\{x \in \Omega \,;\, |f| > \sigma\} \leqslant \int_{\{x\in\Omega\,;\,|f|>\sigma\}} |f|^2\, dx \leqslant B(\text{mes}\{x\in\Omega\,;\,|f|>\sigma\})^{1-\frac{2}{p}}$$

donc

$$(\text{mes}\{x\in\Omega\,;\,|f|>\sigma\})^{\frac{2}{p}} \leqslant \frac{B}{\sigma^2}$$

d'où

$$\text{mes}\{x\in\Omega\,;\,|f|>\sigma\} \leqslant \left(\frac{\sqrt{B}}{\sigma}\right)^p$$

c.q.f.d.

Le cas (iii) du théorème 4.1 peut être substitué par la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (4.10) avec $f_i \in L^p(\Omega)$, $2 < p < n$, alors $u \in L^{p^*}(\Omega)$ faible et il existe $K = K(p,n)$ telle que

(4.21) $$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega) \text{ faible}} \leqslant K\nu \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega) \text{ faible}}$$

Démonstration. Il faut changer très peu dans la démonstration du théorème 4.1. Au lieu de (4.17) l'on a :

(4.17') $$\int_{A(K)} f_j^2\, dx \leqslant \|f_j\|^2_{L^p(\Omega)\text{ faible}} [\text{mes } A(k)]^{1-\frac{2}{p}} ;$$

on répète alors le même raisonnement qu'avant et l'on obtient au lieu de (4.20)

(4.20') $$\text{mes } A(h) \leqslant \left(\frac{K\nu \sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega)\text{faible}}}{h}\right)^{p^*}$$

d'où (4.21).

c.q.f.d.

On peut se demander si une inégalité du type suivant est vraie :

(4.22) $$\|u\|_{H^{1,q}(\Omega)} \leq \text{const.} \sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega)}$$

avec $q = q(p)$.

Dans le cas des coefficients réguliers (4.22) est vraie pour $q = p$ et elle découle du théorème de Calderon-Zygmund.

Dans le cas des coefficients discontinus on peut démontrer que la fonction $q(p)$ dépend de ν et l'on peut seulement dire que $q(p) > 2$; de plus on peut donner des exemples qui montrent que $q(p) \to 2$ si $\nu \to 0$. Tout ceci est démontré par N. Meyers [11].

Il est bien connu que l'opérateur L est un isomorphisme de $H_0^{1,2}(\Omega)$ sur $H^{-1,2}(\Omega)$; l'opérateur qui à $\vec{f} \in H^{-1,2}(\Omega)$ fait correspondre $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ est l'isomorphisme inverse de L et il est noté avec G.

Si $\mathscr{E}$ est l'espace des fonctions qui vérifient la condition (4.13) on peut alors énoncer le théorème 4.1 de la façon suivante :

THÉORÈME 4.1' (i) <u>Si</u> $2 \leq p < n$ G <u>est linéaire et continu de</u> $H^{-1,p}(\Omega)$ <u>dans</u> $L^{p^*}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$.

(ii) <u>Si</u> $p = 2$ G <u>est linéaire et continu de</u> $H^{-1,n}(\Omega)$ <u>dans</u> $\mathscr{E} \cap H_0^{1,2}(\Omega)$.

(iii) <u>Si</u> $p > n$ G <u>est linéaire et continu de</u> $H^{-1,p}(\Omega)$ <u>dans</u> $L^\infty(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$.

DÉFINITION 4.3. <u>Pour</u> $f \in L^1(\Omega)$ <u>on définit l'opérateur</u> $G^*f = u$ <u>utilisant la relation</u>

$$\int_\Omega u\, L\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \qquad \forall v \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ telle que } L\, v \in L^\infty(\Omega).$$

Alors du théorème 4.1', (i), (iii) on a par dualité :

PROPOSITION 4.3. (i) <u>Si</u> $f \in L^q(\Omega)$ <u>avec</u> $1 < q \leqslant \frac{2n}{n+2}$ <u>alors</u> $G^*f \in H_o^{1,q^*}(\Omega)$ <u>et de plus</u>

$$\|G^*f\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant K\nu \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

(ii) <u>Si</u> $f \in L^1(\Omega)$ <u>alors</u> $G^*f \in H_o^{1,r}(\Omega)$ <u>avec</u> $1 < r < \frac{n}{n-1}$ <u>et de plus</u>

$$\|G^*f\|_{H^{1,r}(\Omega)} \leqslant K\nu \ (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{n}-1+\frac{1}{r}} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Dans la proposition 4.3 (ii) on ne peut pas prendre $r = \frac{n}{n-1}$ mais on peut démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4.4. <u>Si</u> $f \in L^1(\Omega)$ <u>et</u> $|f| \log^+|f| \in L^1(\Omega)$ <u>alors</u>

$$G^*f \in H_o^{1,\frac{n}{n-1}}(\Omega).$$

<u>Démonstration.</u> Grâce à l'inégalité de Young (v. [5] p.111) on a pour tout $\vartheta > 0$

$$(4.23) \qquad \xi\eta < \frac{1}{\vartheta}\left\{(1+\xi)\log(1+\xi) - \xi + e^{\vartheta\eta} - 1\right\} .$$

Soit $\psi \in H^{-1,n}(\Omega)$ alors si l'on pose dans (4.23)

$$\vartheta = \frac{\zeta}{2} = \frac{1}{2}(K\nu\|\psi\|_{H^{-1,n}(\Omega)})^{-1} ,$$

K étant la constante du théorème 4.1 ; on a :

$$\int_\Omega |fG\psi|dx \leq 2K\nu\|\psi\|_{H^{-1,n}(\Omega)}\left\{I(f) + \int_\Omega (e^{\vartheta|G\psi|}-1)dx\right\}$$

$$\leq 2K\nu\|\psi\|_{H^{-1,n}(\Omega)}\left\{I(f) + e \text{ mes } \Omega\right\}$$

où

$$I(f) = \int_\Omega\left\{(1+|f|)\log(1+|f|) - |f|\right\}dx < +\infty$$

par hypothèse. Alors grâce à la définition de G^* on a

$$\|G^*f\|_{H_0^{1,n'}(\Omega)} \leq 2K\nu\left\{I(f) + e \text{ mes } \Omega\right\}$$

avec $n' = 1^* = \frac{n}{n-1}$.

c.q.f.d.

Remarque 4.1. Plus loin on démontrera que sous des hypothèses convenables de régularité sur Ω alors on a G linéaire et continu pour $p > n$ de $H^{-1,p}(\Omega)$ dans $\overset{o}{C}_\lambda(\bar{\Omega})$; par dualité alors G^* est linéaire et continu de l'espace $\mathcal{M}$ des mesures à variation bornée (sur $\tilde{\Omega}$) dans $H^{1,r}(\Omega)$ avec $r < \frac{n}{n-1}$. En particulier on a pour δ_y la fonction de Green $G^*\delta_y \in H^{1,r}(\Omega)$, $r < \frac{n}{n-1}$ (Voir n°9).

Remarque 4.2. On a donné une définition de solution que l'on peut dire (vraiment) faible du problème de Dirichlet dans Ω $Lu = f$ aussi quand $f \in L^p(\Omega)$ pour $p < \frac{2n}{n+1}$ (ou bien quand f est une mesure à variation bornée). Cette solution a été définie par dualité de la solution faible variationnelle. On peut se demander si $Lu = f$ avec $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ avec $p < 2$ est équivalent à

$$\int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i}\varphi_{x_j}\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La réponse est négative comme nous le montre l'exemple donné par J. Serrin [21].

5. Majorations locales des solutions.

Considérons l'opérateur elliptique

(5.1) $$Lu = -(a_{ij}\, u_{x_i})_{x_j}$$

et supposons dans ce paragraphe

(5.2) $$\nu^{-1} |\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leqslant \nu\, |\xi|^2$$

Sans perdre de généralité on peut supposer aussi $n > 2$.

On suppose, pour simplifier, que $a_{ij} = a_{ji}$. Autrement il faudrait supposer aussi

(5.2') $$\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \leqslant \nu$$

Soit $I(x, \rho)$ la boule de centre x et rayon ρ ; on pose $\Omega(x, \rho) = \Omega \cap I(x, \rho)$.

On a les résultats suivants :

THÉORÈME 5.1. Soit $u(x)$ une sous-solution locale de (5.1) : si $x \in \Omega$ et $I(x,R) \subset \Omega$ alors il existe une constante $K = K(\nu, n)$ telle que

(5.3) $$\max_{\Omega(x;\, \frac{R}{2})} u(x) \leqslant K \left\{ \frac{1}{R^n} \int_{\Omega(x,R)} |u|^2\, dx \right\}^{1/2}$$

COROLLAIRE 5.1. Soit $u(x)$ une supersolution locale de (5.1) ; si $x \in \Omega$ et $I(x,R) \subset \Omega$ on a alors :

(5.4) $$\min_{\Omega(x, \frac{R}{2})} u(x) \geqslant -K \left\{ \frac{1}{R^n} \int_{\Omega(x,R)} |u|^2\, dx \right\}^{1/2}$$

En effet $-u$ est alors une sous-solution et de (5.3) découle (5.4) ; enfin évidemment on a :

COROLLAIRE 5.2. Si $u(x)$ est une solution locale de $Lu = 0$, on a alors :

$$(5.5) \qquad \max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} |u(x)| \leq K \left\{ \frac{1}{R^n} \int_{\Omega(x,R)} |u|^2 \, dx \right\}^{1/2}$$

Avant de démontrer le théorème 5.1 il faut démontrer le lemme suivant semblable au lemme 4.1.

LEMME 5.1. Si $\varphi(h, \rho)$ est une fonction réelle non négative définie pour $h > k_o$ et $\rho < R_o$, non croissante en h pour ρ fixé et non décroissante en ρ pour h fixé, telle que

$$(5.6) \qquad \varphi(h, \rho) \leq \frac{c}{(h-k)^{\alpha} (R-\rho)^{\gamma}} [\varphi(k,R)]^{\beta} \qquad \begin{matrix} h < k < k_o \\ \rho < R < R_o \end{matrix}$$

c, α, β, γ étant constantes positives avec $\beta > 1$; alors pour tout $\sigma \in]0,1[$ on a

$$(5.7) \qquad \varphi(k_o + d, R_o - \sigma R_o) = 0$$

où

$$(5.8) \qquad d^{\alpha} = \frac{2^{(\alpha+\beta)\frac{\beta}{\beta-1}} c[\varphi(k_o,R_o)]^{\beta-1}}{\sigma^{\gamma} R_o^{\gamma}}$$

Démonstration. On considère les suites

$$k_s = k_o + d - \frac{d}{2^s} \quad \text{et} \quad \rho_s = R_o - \sigma R_o + \frac{\sigma R_o}{2^s}$$

et l'on démontre par récurrence sur s que

(5.9) $$\varphi(k_s, \rho_s) \leqslant \frac{\varphi(k_o, R_o)}{2^{\mu s}} \qquad \text{avec} \qquad \mu = \frac{\alpha + \gamma}{\beta - 1}$$

La (5.9) est vraie pour $s = 0$. On la suppose vraie pour s et on la démontre pour $s + 1$. En effet de (5.6), (5.8) et (5.9) l'on a

$$\varphi(k_{s+1}, \rho_{s+1}) \leqslant c \frac{2^{(\alpha+\gamma)(s+1)}}{d^\alpha \sigma^\gamma R_o^\gamma} [\varphi(k_s, \rho_s)]^\beta \leqslant \frac{\varphi(k_o, R_o)}{2^{\mu(s+1)}}$$

Alors si $s \to +\infty$ on a (5.7)

c.q.f.d.

LEMME 5.2. <u>Si</u> v <u>est une sous-solution locale non négative de l'opérateur elliptique</u> L <u>et si</u> $\alpha \in C_o^1(\Omega)$ <u>on a</u>

(5.10) $$\int_\Omega \alpha^2 v_x^2 \, dx \leqslant 4\nu^2 \int_\Omega \alpha_x^2 v^2 dx$$

<u>Démonstration</u>. Par hypothèse l'on a

$$\int_\Omega a_{ij} v_{x_i} \varphi_{x_i} \, dx < 0 \qquad \forall \varphi \in H_o^1(\Omega'), \quad \text{avec } \bar{\Omega}' \subset \Omega \quad \text{et } \varphi \geqslant 0 \text{ dans } \Omega'$$

Alors en posant $\varphi = \alpha^2 v$ on a

$$\int_{\Omega'} a_{ij} v_{x_i} (\alpha^2 v)_{x_j} \, dx = \int_{\Omega'} \left\{ a_{ij} v_{x_i} \alpha^2 v_{x_j} + 2\alpha\alpha_{x_j} a_{ij} v_{x_i} v \right\} dx \leqslant 0$$

en utilisant (5.2) et l'inégalité de Cauchy on obtient alors (5.10).

COROLLAIRE 5.3. <u>Avec les mêmes hypothèses du lemme 5.2 on a</u>

$$\left(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant 2S(1 + 4\nu^2) \int_\Omega \alpha_x^2 v^2 dx \quad \left(\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right)$$

<u>où</u> S <u>est une constante qui dépend seulement de</u> n.

En effet en utilisant l'inégalité de Sobolev pour les fonctions de $H_o^1(\Omega)$ on a, grâce au lemme 5.2:

$$\Big(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*} dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant S \int_\Omega (\alpha v)_x^2 dx \leqslant 2S \int_\Omega (\alpha^2 v_x^2 + \alpha_x^2 v^2)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2S(1+4\,\nu^2) \int_\Omega \alpha_x^2\, v^2 dx \quad .$$

COROLLAIRE 5.4. <u>Avec les mêmes hypothèses du lemme 5.2 on a</u>

$$\int_\Omega \alpha^2 v^2 dx \leqslant 2S(1+4\,\nu^2) \int_\Omega \alpha_x v^2 dx . [\text{mes} \{x \in \Omega \,;\, \alpha v \neq 0\}]^{\frac{2}{n}}$$

<u>où</u> S <u>dépend seulement de</u> n.

En effet, de l'inégalité d'Hölder on a

$$\int_\Omega (\alpha v)^2 dx \leqslant \Big(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*} dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} [\text{mes} \{x \in \Omega \;;\; \alpha v \neq 0\}]^{1-\frac{2}{2^*}}$$

<u>Démonstration du théorème 5.1.</u> u étant une sous-solution la fonction $\{u\}_k - u = u - \{u\}^k$ est une sous-solution non négative (Prop. 3.1). Soit $\alpha \in C_0^1(\Omega)$ avec $\alpha = 1$ dans $\Omega(x,\rho)$ et $\alpha = 0$ hors de $\Omega(x,R)$ où $\rho < R$ (il faut remarquer que, grâce aux hypothèses, on a $I(x,\rho) = \Omega(x,\rho)$ pour $\rho \leqslant R$) ; du corollaire 5.4, on tire

$$\int_{A(k,\rho)} (u-k)^2 dx \leqslant \frac{c}{(R-\rho)^2} \int_{A(k,R)} (u-k)^2 dx\, [\text{mes}\, A(k,R)]^{\frac{2}{n}}$$

où $A(k,\rho) = \{y \;;\; u(y) \geqslant k\} \cap \Omega(x,\rho)$; on a aussi

$$(h-k)^2 \text{mes}\, A(h,\rho) \leqslant \int_{A(h,\rho)} (u-k)^2 dx \leqslant \int_{A(k,\rho)} (u-k)^2 dx \quad .$$

Si l'on pose

$$(5.11) \qquad \begin{cases} a(h,\rho) = \text{mes}\, A(h,\rho) \\ u(h,\rho) = \displaystyle\int_{A(h,\rho)} (u-h)^2 dx \end{cases}$$

on obtient alors

$$(5.12)\quad \begin{cases} u(h,\rho) \leqslant \dfrac{c}{(R-\rho)^2}\, u(k,R)[a(k,R)]^{\frac{2}{n}} \\[2ex] a(h,\rho) \leqslant \dfrac{1}{(h-k)^2}\, u(k,R) \end{cases}$$

Soient ξ, η deux nombres > 0 que l'on fixera plus avant. On a de (5.12)

$$(5.13)\quad |u(h,\rho)|^{\xi}\, |a(h,\rho)|^{\eta} \leqslant \frac{c^{\xi}}{(R-\rho)^{2\xi}\,(h-k)^{2\eta}} [u(k,R)]^{\xi+\eta} |a(k,R)|^{\frac{2\xi}{n}}$$

On choisit ξ et η de façon que

$$\xi + \eta = \vartheta\, \xi \quad , \quad \frac{2\xi}{n} = \vartheta\, \eta \quad ;$$

ϑ doit alors satisfaire l'équation $\vartheta^2 - \vartheta - \frac{2}{n} = 0$ qui a une racine $\vartheta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{n}} > 1$; on peut alors fixer $\eta = 1$, $\xi = \frac{n\vartheta}{2}$ et en posant alors :

$$\varphi(h,\rho) = |u(h,\rho)|^{\xi}\, |a(h,\rho)|^{\eta}$$

(5.13) peut s'écrire

$$(5.14)\qquad \varphi(h,\rho) \leqslant \frac{c^{\xi}}{(R-\rho)^{2\xi}(h-k)^{2\eta}} [\varphi(k,R)]^{\vartheta}$$

où $h > k$, $\rho < R$ et $\vartheta > 1$; grâce au lemme 5.2 on a pour $\sigma = \frac{1}{2}$, $k_o = 0$, $R_o = R < \text{dist}\,(x, \partial\Omega)$:

$$\varphi(d, \tfrac{R}{2}) = 0$$

avec $d = \dfrac{K[\varphi(0,R)]^{\frac{\vartheta-1}{2}}}{(\sigma R)^{\frac{n\vartheta}{2}}}$ où K dépend seulement de n et ν .

c.q.f.d.

THÉORÈME 5.2. <u>Dans le théorème 5.1 au lieu de 5.3, on a :</u>

$$(5.15) \qquad \max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} u \leq k_o + K \left\{ \frac{1}{R^n} \int_{A(k_o,R)} (u-k_o)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\operatorname{mes} A(k_o,R)}{R^n} \right]^{\frac{\vartheta-1}{2}}$$

<u>où</u> k_o <u>est un nombre réel quelconque,</u> $A(k,R) = \{ y \in \Omega(x,R) : u(y) \geq k \}$ <u>et</u> $\vartheta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{n}}$.

On répète la même démonstration du théorème 5.1 jusqu'à obtenir (5.14) ; on utilise alors le lemme 5.1 avec k_o au lieu de 0 et on obtient (5.15).

THÉORÈME 5.3. <u>Soit</u> $x_o \in \partial\Omega$ <u>et soit</u> $u(x) \in H^1(\Omega(x_o,R_o))$ <u>une sous-solution de</u> (5.1) <u>telle que</u> $u \leq \Phi$ <u>au sens de</u> $H^1(\Omega(x_o,R_o))$ <u>sur</u> $\partial\Omega \cap I(x_o,R_o)$. <u>Alors l'inégalité (5.15) est valable si</u> $k_o > \Phi$.

Il suffit de remarquer que la démonstration du théorème 5.1 est encore valable dans ce cas si l'on suppose $k_o > \Phi$ de façon que $u - \{u\}_k$ soit nulle sur $\partial\Omega \cap I(x_o,k_o)$ et que le lemme 5.2 soit valable dans $\Omega(x_o,R_o)$.

Considérons maintenant les solutions de l'équation elliptique

$$(5.16) \qquad Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

avec $f_i \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 5.4. <u>Si</u> $u(x)$ <u>est une solution locale de (5.16), alors il existe une constante</u> $K = K(\nu,n)$ <u>telle que si</u> $I(x,R) \subset \Omega$ <u>l'on ait, si</u>

$2 \leq p < n$.

$$(5.17) \quad \|u\|_{L^{p}(\Omega(x;\frac{R}{2}))} \leq K \left\{ \left(\frac{1}{R^{n(1-\frac{2}{p^*})}} \int_{\Omega(x,R)} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sum \|f_i\|_{L^p(\Omega(x;R))} \right\}$$

avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, et si $p > n$

$$(5.18) \quad \max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} |u| \leq K\left\{\left(\frac{1}{R^n} \int_{\Omega(x,R)} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sum \|f_i\|_{L^p(\Omega(x;R))} R^{1-\frac{n}{p}}\right\}$$

Démonstration. Soit v la solution dans $H_0^1(\Omega(x,R))$ de l'équation (5.16) et posons :

$$u = v + w$$

où w est une solution dans $\Omega(x,R)$ de l'équation $Lw = 0$. Grâce au théorème 4.1 (i), (iii), on a si $2 \leq p < n$:

$$\|v\|_{L^{p^*}(\Omega(x,R))} \leq K \sum \|f_i\|_{L^p(\Omega(x,R))}$$

et si $p > n$

$$\max_{\Omega(x,R)} |v| \leq K \sum \|f_i\|_{L^p(\Omega(x,R))} R^{1-\frac{n}{p}} .$$

Grâce au corollaire 5.2, on a

$$(5.19) \quad \max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} |w| \leq K\left\{\frac{1}{R^n} \int_{\Omega(x,R)} |w|^2 \, dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq K\left\{\left(\frac{1}{R^n} \int_{\Omega(x,R)} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{R^n} \cdot \int_{\Omega(x,R)} |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\} ;$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on a si $2 \leq p < n$

$$(5.20)\qquad \Big(\int_{\Omega(x,R)} |v|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\int_{\Omega(x,R)} |v|^{p^*} dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} [\operatorname{mes}\Omega(x,R)]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p^*}}$$

$$\leqslant K \sum \|f_i\|_{L^p(\Omega(x,R))} [\operatorname{mes}\Omega(x,R)]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p^*}}$$

et si $p > n$

$$(5.21)\qquad \Big(\int_{\Omega(x,r)} |v|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \max_{\Omega(x,R)} |v| [\operatorname{mes}\Omega(x,R)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant K \sum \|f_i\|_{L^p(\Omega(x,R))} R^{1-\frac{n}{p}} [\operatorname{mes}\Omega(x,R)]^{\frac{1}{2}} \quad .$$

On a aussi $2 \leqslant p < n$

$$\|w\|_{L^{p^*}(\Omega(x,\frac{R}{2}))} \leqslant \max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} |w| \, [\operatorname{mes}\Omega(x,R)]^{\frac{1}{p^*}}$$

et donc de (5.19), (5.20) et de l'inégalité

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega(x,\frac{R}{2}))} \leqslant \|v\|_{L^{p^*}(\Omega(x,\frac{R}{2}))} + \|w\|_{L^{p^*}(\Omega(x,\frac{R}{2}))}$$

on obtient (5.17).

Si $p > n$ en utilisant (5.19), (5.21) et l'inégalité

$$\max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} |u| \leqslant \max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} |v| + \max_{\Omega(x,\frac{R}{2})} |w|$$

on obtient (5.18). c.q.f.d.

Avec la même démonstration on a :

THÉORÈME 5.5. <u>Soit</u> $x_0 \in \partial\Omega$ <u>et soit</u> $u(x)$ <u>une solution de (5.16) nulle sur</u> $\partial\Omega \cap I(x_0,R_0)$; <u>les inégalités (5.17) et (5.18) sont valables si</u> $x = x_0$ <u>et</u> $R < R_0$.

6. <u>Une famille de sous-ensembles de</u> Ω .

DÉFINITION 6.1. <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert de</u> $\underline{\underline{R}}^n$ <u>et soit</u> β <u>une constante positive.</u> <u>On dénote par</u> $\mathcal{P}(\beta,\Omega)$ <u>la famille des ensembles</u> $E \subset \bar{\Omega}$ <u>tels que, pour chaque</u> $v \in C^1(\bar{\Omega})$ <u>nulle sur</u> E, <u>l'on ait</u> :

$$(6.1) \qquad |v(x)| \leqslant \beta \int_\Omega \frac{|v_x(t)|}{|x-t|^{n-1}}\,dt \qquad \forall x \in \Omega$$

<u>Remarque</u>.

Si $E \in \mathcal{P}(\beta,\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ et $v = 0$ sur E, (6.1) est valable presque partout dans Ω .

On admet içi le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. <u>Si</u> $v \in H^1(\Omega)$ <u>et</u> $v = 0$ <u>sur</u> E <u>avec</u> $E \in \mathcal{P}(\beta,\Omega)$, <u>il existe alors une constante</u> $\beta' = \beta'(\beta,n)$, <u>telle que</u>

$$(6.2) \qquad \text{mes}\{x \in \Omega \; ; |v| > \sigma\} \leqslant \beta'\left(\frac{\int_\Omega |v_x(t)|\,dt}{\sigma}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

En effet le théorème 6.1 est une conséquence de la déf. 6.1 et du résultat suivant de la théorie du potentiel.

"Soit μ une mesure positive à support compact et soit

$$\mathcal{U}_1^{\mu}(x) = \int \frac{d\,\mu(t)}{|x-t|^{n-1}}$$

le potentiel engendré par μ . Il existe alors une constante $C = C(n)$, telle que

$$\text{mes}\left\{x \in \underline{\underline{R}}^n \ ; \ \mathcal{U}_1^{\mu}(x) > \sigma\right\} \leqslant \left(\frac{C\int |d\,\mu|}{\sigma}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad ".$$

Pour la démonstration de ce résultat on peut voir A. Zygmund [30] ou G. Stampacchia [23 ; Appendice].

THÉORÈME 6.2. <u>Soit</u> Ω <u>un ensemble convexe</u>. <u>Soit</u> $M(\vartheta)$ <u>la famille des sous-ensembles de</u> Ω <u>tels que</u>

$$\text{mes } E \geqslant \vartheta \text{ mes } \Omega \qquad (0 < \vartheta \leqslant 1). \tag{6.3}$$

<u>Il existe alors une constante</u> $\beta = \beta(n, \Omega)$ <u>telle que</u>

$$M(\vartheta) \subset \mathcal{P}\left(\frac{\beta}{\vartheta}, \Omega\right)$$

<u>Dém</u>. Soit $v \in C^1(\overline{\Omega})$ nulle sur E ; si $x \in E$, alors la formule (6.1) est évidemment vraie. Soit $x \notin E$: on considère la fonction $r \rightsquigarrow v(x + r\,\xi)$ avec $\xi \in S^n$, où S^n est l'hypersurface de la sphère unitaire. Soit $\Sigma \equiv \left\{ \xi \in S^n \ ; \ \exists\, R : x + R\,\xi \in E \right\}$.

Pour tout $\xi \in \Sigma$ on a

$$v(x) - v(x + r\,\xi) = \int_r^0 \frac{dv}{dr}\, dr$$

et si R est tel que $x + R\,\xi \in E$, l'on a

$$|v(x)| \leqslant \int_0^{2R} |v_x|\, d\, r$$

et, donc, si $d\omega$ est la mesure sur S^n, puisque $|x-t|^{n-1}\, dr d\omega = dt$, l'on a :

$$(6.4) \quad \int_{\Sigma} |v(x)| d\omega \leq \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \int_{\Sigma} |v_x| dr d\omega \leq \int_{\Omega} \frac{|v_x(t)|}{|x-t|^{n-1}} dt \;.$$

Il suffit alors de démontrer que la mesure $(n-1)$-dimensionnelle de Σ, soit $|\Sigma|$, est bornée inférieurement. En effet, on a :

$$\vartheta \operatorname{mes} \Omega \leq \operatorname{mes} E \leq \int_{\Sigma} d\omega \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} r^{n-1}\, dr = \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^n}{n} |\Sigma|$$

Donc

$$|\Sigma| \geq \vartheta\, n.\, \frac{\operatorname{mes}\Omega}{(\operatorname{diam}\Omega)^n} \;.$$

De (6.4), il découle alors

$$|v(x)| \leq \frac{1}{\vartheta\, n} \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^n}{\operatorname{mes}\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v_x(t)|}{|x-t|^{n-1}} dt$$

c'est-à-dire $E \in \mathcal{P}(\frac{\beta}{\vartheta}, \Omega)$ avec $\beta = \frac{1}{n} \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^n}{\operatorname{mes}\Omega}$.

c.q.f.d.

THÉORÈME 6.3. Soit $u(x) \in H^1(I(x_0,R))$ et soit

$$A(k,R) = \{x \in I(x_0,R) \;;\; u(x) \geq k\} \;;$$

s'il existe deux constantes k_0 et ϑ, avec $0 \leq \vartheta < 1$, telles que

$$\operatorname{mes} A(k_0,R) < \vartheta \operatorname{mes} I(x_0,R) \;;$$

alors, si $h > k > k_0$, on a

$$(6.5) \qquad (h-k)\, [\operatorname{mes} A(h,R)]^{\frac{n-1}{n}} \leq C \int_{[A(k,R) - A(h,R)]} |u_x(t)| dt$$

avec $C = C(\theta, n)$.

Dém. Si $k > k_o$, alors $v = \{u\}^h - \{u\}^k \in H^1(I(x_o,R))$ et

$$\text{mes}\{x \in I(x_o,R)\ ;\ v = 0\} = \text{mes}\,\{I(x_o,R) - A(k,R)\} > (1-\theta)\ \text{mes}\ I(x_o,R).$$

Grâce aux théorèmes 6.1 et 6.2, en posant $\sigma = h - k - \varepsilon$ et en faisant $\varepsilon \to 0$, l'on a :

$$\text{mes}\ A(h,R) \leqslant \beta' \left(\frac{\int_{A(k,R) - A(h,R)} |u_x(t)|\,dt}{h-k} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

d'où le théorème

c.q.f.d.

En utilisant l'inégalité de Schwartz on a :

COROLLAIRE 6.1. Sous les mêmes hypothèses du théorème 6.3 on a :

$$(6.6)\quad (h-k)^2[\text{mes}\ A(h,R)]^{\frac{2n-2}{n}} \leqslant C \int_{A(k,R)} |u_x(t)|^2\,dt.\{\text{mes}\ A(k,R) - \text{mes}\ A(h,R)\}\ .$$

DÉFINITION 6.2. Un ouvert borné $\Omega \subset \underline{\underline{R}}^n$ est dit $H^1_o(\Omega)$- admissible s'il existe deux constantes β et ρ_o telles que pour $\rho < \rho_o$ et $x_\sigma \in \partial\Omega$ l'on ait :

$$\partial\Omega \cap I(x_o,\ \rho) \in \mathcal{P}(\beta, \Omega(x_o,\ \rho))\ .$$

On peut aussi dire que Ω est $H^1_o(\Omega)$- admissible si pour tout $\rho < \rho_o$ et $x_o \in \partial\Omega$ et pour toute $u(x) \in C^1(\overline{\Omega(x_o,\ \rho)})$ nulle sur $\partial\Omega \cap I(x_o,\ \rho)$ on a :

$$|u(x)| \leqslant \beta \int_{\Omega(x_o,\ \rho)} \frac{|u_x(t)|}{|x-t|^{n-1}}\,dt$$

DÉFINITION 6.3. On dit qu'un ouvert borné Ω de $\underline{\underline{R}}^n$ est de classe S_α s'il existe deux constantes α, avec $0<\alpha<1$ et ρ_0 telles que, pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ et tout $\rho<\rho_0$ on ait :

$$\text{mes}\left\{I(x_0,\rho) - \Omega(x_0,\rho)\right\} > \alpha \,\text{mes}\, I(x_0,\rho) .$$

Grâce au théorème 6.2, s'il existe α avec $0<\alpha<1$ tel que Ω soit de classe S_α, Ω est alors $H_0^1(\Omega)$- admissible.

Avec la même démonstration du théorème 6.3 et du corollaire 6.1 on a le théorème suivant :

THÉORÈME 6.4. Soit $u(x)\in H^1(\Omega(x_0,R))$ avec $x_0\in\partial\Omega$ et soit Ω $H_0^1(\Omega)$- admissible ; si $u(x)$ est nulle sur $\partial\Omega\cap I(x_0,R)$ alors les formules (6.5) et (6.6) sont valables pour $h>k>0$.

En utilisant les inégalités de Sobolev pour les potentiels on a :

THÉORÈME 6.5. Si $v \in H^{1,p}(\Omega)$ $(1<p<n)$ et $v=0$ sur E, avec $E\in\mathcal{P}(\beta,\Omega)$, alors il existe une constante $\beta' = \beta'(\beta,n,p)$ telle que :

$$\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant \beta' \sum \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \tag{6.7}$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} .$$

On démontre maintenant une inégalité qui généralise l'inégalité, bien connue. de Poincaré.

THÉORÈME 6.6. Soit A un ouvert convexe et borné de $\underline{\underline{R}}^n$ et soit $u(x)$ une fonction de $H^{1,p}(A)$ $(1<p<n)$; il existe alors une constante $K=K(n,p)$,

<u>telle que</u> :

$$(6.8) \qquad \left\{ \int_A |u - u_A|^{p^*} dx \right\}^{\frac{1}{p^*}} \leqslant K \ \frac{(\text{diam } A)^n}{\text{mes } A} \ \left\{ \int_A |u_x|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

<u>où</u> u_A <u>est la valeur moyenne de</u> u <u>sur</u> A.

<u>Dém.</u> On peut se borner à supposer que $u \in C^1(\bar{A})$, parce que, par continuité l'on obtient (6.8) si $u \in H^{1,p}(\Omega)$.

Soit γ un nombre tel que

$$\text{mes} \left\{ x \in A \ ; \ u \geqslant \gamma \right\} \geqslant \frac{1}{2} \text{ mes } A$$

$$\text{mes} \left\{ x \in A \ ; \ u \leqslant \gamma \right\} \leqslant \frac{1}{2} \text{ mes } A \quad .$$

Puisque

$$u(x) - \gamma = [\{u\}_\gamma - \gamma] + [\{u\}^\gamma - \gamma]$$

et les mesures où $\{u\}_\gamma - \gamma$ et $\{u\}^\gamma - \gamma$ sont nulles, sont $\geqslant \frac{1}{2}$ mes A ,

on a, grâce aux théorèmes 6.2 et 6.5

$$\|u(x) - \gamma\|_{L^{p^*}(A)} \leqslant K \ \frac{(\text{diam } A)^n}{\text{mes } A} \ \|u_x\|_{L^p(A)}$$

où $K = K(n,p)$.

Mais, puisque

$$|u_A - \gamma| \leqslant |(u - \gamma)_A| \leqslant \|u - \gamma\|_{L^{p^*}(A)} \ (\text{mes } A)^{-\frac{1}{p^*}}$$

et, encore, parce que

$$\|u - u_A\|_{L^{p^*}(A)} \leqslant \|u - \gamma\|_{L^{p^*}(A)} + \|u_A - \gamma\|_{L^{p^*}(A)}$$

on obtient (6.8).

COROLLAIRE 6.2. Sous les mêmes hypothèses du théorème 6.6, il existe une constante $K = K(n,p)$ telle que l'on ait :

$$(6.9) \qquad \int_A |u(x) - u_A|^p \, dx \leq K \left[\frac{(\text{diam } A)^n}{(\text{mes } A)^{1-\frac{1}{n}}}\right]^p \int_A |u_x|^p \, dx \ .$$

Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder, pour déduire (6.9) de (6.8).

7. Continuité hölderienne des solutions.

Lemme 7.1. Soit $h \rightsquigarrow \varphi(h)$ une fonction, non croissante, définie pour $h \in [k_0, M]$, telle que si $k_0 < k < h < M$ l'on ait :

$$(7.1) \qquad (h-k)^\alpha \, |\varphi(h)|^\beta \leq C[M-k]^\alpha \, [\varphi(k) - \varphi(h)]$$

où α, β, C sont des constantes positives. Alors $\lim_{h \to M} \varphi(h) = 0$ et de plus si l'on pose $k_s = M - \frac{M-k_0}{2^s}$ l'on a :

$$(7.2) \qquad \varphi(k_N) \leq \left(2^\alpha C \, \frac{\varphi(k_0)}{N}\right)^{\frac{1}{\beta}} \ .$$

Démonstration. Puisque $k_s - k_{s-1} = \frac{M-k_0}{2^s}$, $M - k_{s-1} = \frac{M-k_0}{2^{s-1}}$, de (7.1) on a :

$$|\varphi(k_s)|^\beta \leq C \, 2^\alpha \, [\varphi(k_{s-1}) - \varphi(k_s)] \ ;$$

en sommant pour $s = 1, \ldots, N$ et en remarquant que $\varphi(k_s) \geq \varphi(k_N)$ l'on a :

$$N \, |\varphi(k_N)|^\beta \leq 2^\alpha C[\varphi(k_0) - \varphi(k_N)]$$

d'où (7.2).

c.q.f.d.

THÉORÈME 7.1. <u>Soit</u> $u(x)$ <u>une solution locale de l'équation elliptique</u> $Lu = 0$. <u>Puisque</u> $u(x)$ <u>est bornée (v. Corollaire 5.2) on pose</u> :

$$m(r) = \inf_{\Omega(x,r)} u \quad , \quad M(r) = \sup_{\Omega(x,r)} u \quad .$$

<u>Supposons que</u> :

(7.3) $$\text{mes } A(k_o,R) < 1/2 \text{ mes } \Omega(x_o,R)$$

<u>avec</u>

$$k_o = \frac{M(2R)+m(2R)}{2}$$

<u>alors</u>

(7.4) $$\lim_{h \to M(2R)} A(h,R) = 0 \ .$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\alpha \in C_o^1(\Omega(x,2R))$ avec $\alpha = 1$ dans $\Omega(x,R)$; alors, grâce au lemme 5.2, on a :

$$\int_{A(k,R)} |u_x|^2 dx \leqslant \frac{C}{R^2} \int_{A(k,2R)} (u-k)^2 \, dx \leqslant C[M(2R) - k]^2 . R^{n-2} \ ;$$

grâce au corollaire 6.1, on a aussi pour $h > k$:

$$(h-k)^2[\text{mes } A(h,R)]^{\frac{2n-2}{n}} \leqslant C[M(2R) - k]^2 \, R^{n-2}[\text{mes } A(h,R) - \text{mes } A(k,R)]$$

et grâce au lemme 7.1, on a (7.4). c.q.f.d.

THÉORÈME 7.2. <u>Soit</u> $u(x)$ <u>une solution locale de l'équation elliptique</u> $Lu = 0$; <u>on pose</u> $\omega(r) = M(r) - m(r)$; <u>il existe</u> $\eta < 1$ <u>tel que pour</u> $\rho < \rho_o$ <u>on ait</u>

(7.5) $$\omega(\rho) < \eta \omega(4\rho) \ .$$

Démonstration. On peut toujours supposer que (7.3) soit vérifiée ; en effet si (7.3) n'est pas vérifiée, la solution $v = -u$ satisfera (7.3) car $\text{mes}\{x \, ; \, u(x) > k\} + \text{mes}\{x \, ; \, -u(x) > k\} = \text{mes}\ \Omega(x_0,R)$. Grâce au théorème 5.2 avec k_0 donné par

$$k_N = M(2R) - \frac{M(2R) - m(2R)}{2^{N+1}},$$

on a :

$$m(\tfrac{R}{2}) \leqslant k_N + K[M(2R) - k_N]\,\Big[\frac{\text{mes}\ A(k_N,R)}{R^n}\Big]^{\frac{\vartheta-1}{2}}$$

avec $\vartheta > 1$. Grâce au théorème 7.1 on peut choisir N suffisamment grand de façon que

$$K\Big[\frac{\text{mes}\ A(k_N,R)}{R^n}\Big]^{\frac{\vartheta-1}{2}} < 1/2$$

et alors on a

$$M(\tfrac{R}{2}) \leqslant M(R) - \frac{M(2R) - m(2R)}{2^{N+2}}$$

d'où en observant que $m(\frac{R}{2}) \geqslant m(2R)$ on a

$$\omega(\tfrac{R}{2}) \leqslant \omega(2R)\Big(1 - \frac{1}{2^{N+2}}\Big) \quad .$$

c.q.f.d.

THÉORÈME 7.3. <u>Soit</u> $u(x) \in H^1(\Omega(x,R))$ <u>avec</u> $x_0 \in \partial\Omega$ <u>une solution de</u> $Lu = 0$; <u>soit de plus</u> u <u>nulle sur</u> $\partial\Omega \cap I(x_0,R)$; <u>si</u> Ω <u>est</u> $H^1(\Omega)$<u>-admissible, alors il existe</u> $\eta > 1$ <u>tel que</u>

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\,\omega(4\rho).$$

On peut répéter la démonstration du théorème 7.2 en remarquant que l'on peut toujours supposer, en changeant éventuellement u avec $-u$,

$$k_o = \frac{M(2r) + m(2R)}{2} > 0 \ ;$$

alors on utilise le théorème 5.3 au lieu du théorème 5.2.

Il faut maintenant démontrer deux lemmes que l'on utilisera dans la suite

LEMME 7.2. <u>Si</u> $\omega(\rho) \leqslant \eta\, \omega(4\rho)$ <u>avec</u> $\eta > 1$ <u>alors il existe</u> $\lambda \in]0,1[$ <u>et</u> K <u>tels que</u>

$$\omega(\rho) \leqslant K \rho^{\lambda}$$

Ce lemme est un cas particulier du lemme suivant.

LEMME 7.3. <u>Si</u>

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\, \omega(4\rho) + H\rho^{\alpha} \qquad \underline{\text{avec}} \quad \rho < \rho_o < 1$$

<u>il existe</u> $\lambda \in]0,1[$ <u>et</u> K <u>tels que</u>

$$\omega(\rho) \leqslant K \rho^{\lambda}$$

<u>Démonstration.</u> Soit a tel que $\eta < a < 1$ et soit β tel que $4^{\beta}\eta = a < 1$ on pose alors $\lambda = \min(\beta, \alpha)$. Si $\rho \in [\frac{R}{4}, R]$ on a en posant $M = \frac{\omega(4R)}{R^{\lambda}}$

$$\omega(\rho) \leqslant M \rho^{\lambda} \quad ;$$

donc si $\rho \in [\frac{R}{4^2}, \frac{R}{4}]$ on a étant donné que $\rho^{\alpha} \leqslant \rho^{\lambda}$

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\, 4^{\alpha} M \rho^{\lambda} + N\rho^{\lambda}$$

et en général si $\rho \in [\frac{R}{4^{i+1}}, \frac{R}{4^{i}}]$ on a :

$$\omega(\rho) \leqslant \left\{M(4^{\alpha}\eta)^{i} + H\sum_{S=0}^{i-1}(4^{\alpha}\eta)^{S}\right\}\rho^{\alpha} \leqslant \left\{Ma^{i} + \frac{H}{1-a}\right\}\rho^{\alpha} \leqslant \left\{M + \frac{H}{1-a}\right\}\rho^{\lambda}$$

c.q.f.d.

On a alors le théorème suivant sur la continuité hölderienne "à l'intérieur".

THÉORÈME 7.4. <u>Soit</u> $u(x)$ <u>une solution locale de</u> $Lu = 0$; <u>alors</u> $u(x)$ <u>vérifie une condition de Hölder dans tout compact</u> $\subset \Omega$; <u>c. à d. qu'il existe deux constantes</u> K <u>et</u> λ <u>avec</u> $0 < \lambda < 1$, <u>qui dépendent de</u> γ <u>et de</u> n, <u>telles que si</u> $0 < \rho < R < \text{dist}\,(x, \partial\Omega)$ <u>on ait</u> :

$$\underset{\Omega(x,\,\rho)}{\text{osc}}\ u(x) \leqslant K \left(\frac{\int_{\Omega(x,R)} u^2 dx}{R^n} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\lambda}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega(x, 8\rho))$ la solution de l'équation $Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ et l'on pose $u = v + w$ où w est une solution de $Lw = 0$. Grâce au théorème 7.4 et au théorème 5.4 on a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 7.5. <u>Soit</u> $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ <u>une solution de</u>

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

<u>avec</u> $f_i \in L^p(\Omega)$ <u>pour</u> $p > n$. <u>Alors il existe deux constantes</u> K <u>et</u> λ <u>avec</u> $0 < \lambda < 1$, <u>qui dépendent de</u> γ, n, R, <u>telles que pour</u> $x \in \Omega$ <u>et</u> $0 < \rho < R < \text{dist}\,(x, \partial\Omega)$ <u>on ait</u> :

$$\underset{\Omega(x,\,\rho)}{\text{osc}}\ u(x) \leqslant K \left\{ \left(\int_{\Omega(x,R)} u^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \right\} \rho^{\lambda}$$

Grâce aux théorèmes 7.3 et 7.5 on a aisément le théorème suivant de continuité hölderienne dans $\overline{\Omega}$:

THÉORÈME 7.6. *Soit* $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ *une solution de* $Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ *avec* $f_i \in L^p(\Omega)$ *et* $p > n$; *soit de plus* $\Omega \; H_0^1(\Omega)$- *admissible. Alors* u *vérifie une condition de Hölder dans* $\bar{\Omega}$, *c. à d. il existe deux constantes* K *et* λ *avec* $0 < \lambda < 1$ *qui dépendent de* ν *et* n *telles que*

$$\underset{\Omega(x,\rho)}{\mathrm{osc}} \; u \leqslant K \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \right\} \rho^{\lambda}$$

8. L'inégalité de Harnack.

Soit $Lu = -(a_{ij} u_{x_i})_{x_j}$ un opérateur elliptique défini dans l'ouvert $\Omega \subset \underline{\underline{R}}^n$, où, en supposant plus simplement $a_{ij} = a_{ji}$, l'on ait :

$$\nu^{-1}|\xi|^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \nu|\xi|^2 \tag{8.1}$$

On a alors le théorème suivant démontré par Moser [15] qui généralise l'inégalité de Harnack.

THÉORÈME 8.1. *Soit* u *une solution locale de l'équation* $Lu = 0$ *qui soit positive dans* Ω ; *alors pour tout compact* $\Omega' \subset \Omega$ *il existe une constante positive* $c = c(\nu, n, \Omega, \Omega')$ *telle que*

$$\max_{\Omega'} u \leqslant c \min_{\Omega'} u \tag{8.2}$$

Remarque 1. Puisque par homothétie de $\underline{\underline{R}}^n$ la constante ν ne change pas, il s'ensuit que la constante c dépend seulement de la distance de $\partial\Omega'$ $\partial\Omega$. De plus si Ω'' est déduit de Ω' par une homothétie, la même constante qui intervient dans (8.2) intervient aussi pour les solutions sur Ω''.

LEMME 8.1. Soit u une solution positive de $Lu = 0$ et soit $p \in \mathbb{R}$; alors la fonction $v = u^p$ satisfait l'équation non linéaire.

$$(8.3) \qquad -(a_{ij}\, v_{x_i})_{x_j} = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{1}{v}\, a_{ij}\, v_{x_i}\, v_{x_j}$$

Donc v est une sous-solution de L si $p \leqslant 0$ ou $p > 1$ et v est une supersolution de L si $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Démonstration. Puisque $u = v^{\frac{1}{p}}$ on a $u_{x_i} = \frac{1}{p}\, v^{\frac{1}{p}-1}\, v_{x_i}$ et

$$(a_{ij}\, v^{\frac{1}{p}-1}\, v_{x_i})_{x_j} = 0$$

c'est-à-dire

$$v^{\frac{1}{p}-1}(a_{ij}\, v_{x_i})_{x_j} + \left(\frac{1}{p}-1\right)v^{\frac{1}{p}-2}\, a_{ij}\, v_{x_i}\, v_{x_j} = 0$$

d'où (8.3)

c.q.f.d.

LEMME 8.2. Avec les mêmes hypothèses du lemme 8.1, on a si $p \neq 1/2$ et si $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(8.4) \qquad \left(\int_\Omega (\alpha\, v)^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant 4S\, \nu^2\left(\frac{p}{2p-1}\right)^2 \int_\Omega \alpha_x^2\, v^2 dx$$

où $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ et S dépend de n.

Démonstration. De (8.3) en multipliant par $\alpha^2 v$ et par intégration par parties on a :

$$\int_\Omega a_{ij} v_{x_i} (\alpha^2 v)_{x_j}\, dx = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \int_\Omega a_{ij}\, v_{x_i}\, v_{x_j}\, \alpha^2\, dx$$

d'où

$$\left(2-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega \alpha^2 a_{ij}\, v_{x_i}\, v_{x_j} dx \leqslant 2\left(\int_\Omega \alpha^2 a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega a_{ij}\, \alpha_{x_i}\, \alpha_{x_j}\, v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et, en utilisant (8.1) l'on a :

$$\int_\Omega \alpha^2 v_x^2\, dx \leqslant 4\,\nu^2\left(2-\frac{1}{p}\right)^{-2}\int_\Omega \alpha_x^2\, v^2\, dx \ ;$$

grâce aux inégalités de Sobolev on a alors (8.4).

c.q.f.d.

LEMME 8.3. <u>Soit</u> u <u>une solution locale positive de</u> $Lu = 0$; <u>alors la fonction</u> $v = \log u$ <u>satisfait l'équation non linéaire</u>

(8.5) $$Lv = -(a_{ij}\, v_{x_i})_{x_j} = a_{ij}\, v_{x_i}\, v_{x_j} \ .$$

En effet puisque $u = e^v$ et $u_{x_i} = e^v\, v_{x_i}$ on a

$$(a_{ij}\, e^v\, v_{x_i})_{x_j} = e^v (a_{ij}\, v_{x_i})_{x_j} + e^v\, a_{ij}\, v_{x_i}\, v_{x_j}$$

d'où (8.5).

LEMME 8.4. Soit u une solution locale positive de $Lu = 0$ et soit $v = \log u$.

(i) Si $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$(8.6) \qquad \int_\Omega \alpha^2 a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \, dx \leq 4 \int_\Omega a_{ij} \alpha_{x_i} \alpha_{x_j} \, dx$$

(ii) il existe une constante $c = c(n, \nu)$ telle que

$$(8.7) \qquad \int_{Q(\rho)} |v - v_Q|^2 \, dx \leq c \rho^n$$

où $Q(\rho)$ est un cube de centre x et de côté ρ et v_Q indique la valeur moyenne de v sur $Q(\rho)$.

Démonstration (i). En multipliant (8.5) par α^2 et en intégrant par parties on a

$$\int_\Omega a_{ij} v_{x_i} 2\alpha \alpha_{x_j} \, dx = \int_\Omega a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \alpha^2 \, dx$$

et, grâce à l'inégalité de Cauchy, on a (8.6).

(ii) Soit $\alpha = 1$ sur $Q(\rho)$ et $\alpha \in \mathcal{D}(Q(2\rho))$; alors, grâce à (8.1) on a :

$$\int_{Q(\rho)} v_x^2 \, dx \leq 4 \nu^2 \rho^{n-2} \ ;$$

en utilisant alors l'inégalité suivante de Poincaré

$$\int_{Q(\rho)} |v - v_Q|^2 \, dx \leq c \rho^2 \int_{Q(\rho)} v_x^2 \, dx$$

on a (8.7).

c.q.f.d.

Nous aurons aussi besoin du théorème suivant de F. John et L. Nirenberg (v. [6]) que nous ne démontrerons pas.

THÉORÈME 8.2. Soit $u \in L^1(Q(1))$ telle qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\int_{Q(\rho)} |u - u_Q| dx \leq K \rho^n \tag{8.8}$$

pour tout cube $Q(\rho)$, $\rho < 1$, à côtés parallèles aux côtés de $Q(1)$. Il existe alors deux constantes positives α, β qui dépendent de n telles que

$$\int_{Q(\rho)} e^{\alpha |u-u_Q| K^{-1}} dx \leq \beta \rho^n \tag{8.9}$$

COROLLAIRE 8.1. Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 8.2 on a :

$$\int_{Q(\rho)} e^{\alpha u K^{-1}} dx \int_{Q(\rho)} e^{-\alpha u K^{-1}} dx \leq \beta^2 \rho^{2n} \tag{8.10}$$

En effet de (8.9), l'on tire

$$\int_{Q(\rho)} e^{-\alpha(u-u_Q)K^{-1}} dx \leq \beta \rho^n$$

et

$$\int_{Q(\rho)} e^{+\alpha(u-u_Q)K^{-1}} dx \leq \beta \rho^n$$

d'où en multipliant, il s'ensuit (8.10).

LEMME 8.5. Soit u une solution locale de $Lu = 0$. Il existe deux constantes α et β telles que :

(8.11) $$\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho)}|u|^{-\alpha}dx\right)\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho)}|u|^{\alpha}dx\right)\leqslant\beta^2$$

d'où

(8.12) $$\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho)}|u|^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\beta^{\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho)}|u|^{-\alpha}dx\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Démonstration. Soit $v = \log u$ et grâce au lemme 8.4, on a:

$$\int_{Q(\rho)}|v - v_Q|dx \leqslant \left(\int_{Q(\rho)}|v - v_Q|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{n}{2}}\leqslant C^{\frac{1}{2}}\rho^n$$

où $C^{1/2}$ dépend de n et de ν ; grâce au corollaire 8.1 on a alors :

$$\int_{Q(\rho)}e^{\alpha vC^{1/2}}dx.\int_{Q(\rho)}e^{-\alpha vC^{-1/2}}dx\leqslant\beta^2\rho^{2n}$$

d'où en appelant $\alpha C^{-1/2}$ avec α on a (8.11) et (8.12)

c.q.f.d.

Démonstration du théorème 8.1. Grâce au lemme 8.1 et au théorème 5.1 on a

$$\max_{Q(\rho_1)}u^p\leqslant K\Big[\frac{1}{\rho_1}\int_{Q(2\rho_1)}u^{2p}\,dx\Big]^{1/2}\quad\text{si}\quad p\geqslant 1$$

$$\max_{Q(\rho_2)}u^p\leqslant K\Big[\frac{1}{\rho_2}\int_{Q(2\rho_2)}u^{2p}dx\Big]^{1/2}\quad\text{si}\quad p\leqslant 0$$

d'où en posant $q = 2\,p$ si $p\geqslant 1$ et $q = -2p$ si $p\leqslant 0$ l'on a

(8.13) $$\max_{Q(\rho_1)}u = K\Big[\frac{1}{\rho_1}\int_{Q(2\rho_1)}u^{q}\,dx\Big]^{\frac{1}{q}}\quad\text{si}\quad q\geqslant 2$$

(8.14) $$\min_{Q(\rho_2)}u\geqslant K'\Big[\frac{1}{\rho_2}\int_{Q(2\rho_2)}u^{-q}dx\Big]^{-\frac{1}{q}}\quad\text{si}\quad q\leqslant 0$$

avec K et K' constantes qui dépendent de n et ν .

Grâce au lemme 8.5 il existe une constante α telle que

$$(8.15)\qquad \min_{Q(\rho_2)} u \geq K''\left[\frac{1}{\rho_2}\int_{Q(2\rho_2)} u^{\alpha}\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Pour démontrer le théorème 8.1 il suffit de démontrer qu'il existe une constante C telle que pour $\rho_2 > \rho_1$ l'on ait

$$(8.16)\qquad \left[\frac{1}{\rho_1}\int_{Q(2\rho_1)} u^2 dx\right]^{1/2} \leq C\left[\frac{1}{\rho_2}\int_{Q(2\rho_2)} u^{\alpha}\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Si (8.16) est valable, avec une constante $K = K(\nu, n)$ convenable, on a :

$$\max_{Q(\rho_1)} u \leq K \min_{Q(\rho_2)} u \leq K \min_{Q(\rho_1)} u \;;$$

le passage de $Q(\rho)$ à Ω' se fait alors de façon standard.

Nous allons démontrer (8.16).

On pose $\chi = \frac{n}{n-2}$ et on suppose que l'exposant à droite de (8.16) soit tel que $\alpha\chi^s \neq 1$ pour s entier (il suffit de prendre α un peu plus petit). Soit h un entier tel que $\alpha\chi^h > 2$ et soit $r = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$. On pose $q_s = \alpha\chi^s$ et $r_s = 2\rho_2 - 2s\frac{\rho_2 - \rho_1}{h}$ et l'on utilise le lemme 8.2 avec $2p = q_s$ et en prenant $\alpha = 1$ sur $Q(r_{s+1})$ et $\alpha \in \mathcal{D}(Q(r_s))$ et puisque $q_s \neq 1$ on a :

$$\left(\int_{Q(r_{s+1})} u^{q_{s+1}}\,dx\right)^{\frac{1}{q_{s+1}}} \leq c_s\left(\int_{Q(r_s)} u^{q_s}\,dx\right)^{\frac{1}{q_s}}$$

et en multipliant les inégalités que l'on a si $s = 0,\dots, h-1$ on obtient (8.16).

c.q.f.d.

COROLLAIRE 8.2. <u>Les solutions non négatives de</u> $Lu = 0$ <u>sont positives ou identiquement nulles.</u>

En effet si $\min\limits_{Q(\rho)} u > 0$, alors $u > 0$; et si $\min\limits_{Q(\rho)} u = 0$, $u \equiv 0$.

COROLLAIRE 8.3. (<u>Principe fort du maximum</u>). <u>Si une solution de l'équation</u> $Lu = 0$ <u>dans</u> Ω <u>possède un point de maximum (minimum) à l'intérieur de</u> Ω u <u>est alors constante.</u>

En effet soit M la valeur du maximum ; par hypothèse il existe un cube $Q(\rho)$ dans Ω où pour tout $\varepsilon > 0$, $v = M - u + \varepsilon$ est positive ; mais v est une solution de $Lv = 0$ donc

$$\max_{Q(\rho)} (M - u + \varepsilon) \leqslant C\,\varepsilon$$

$$M - \min_{Q(\rho)} u \leqslant \varepsilon(C - 1)$$

alors $\min\limits_{Q(\rho)} u = M$.

On a aussi l'inégalité de Harnack pour les solutions positives des équations non homogènes.

THÉORÈME 8.3. <u>Soit</u> u <u>une solution locale positive dans</u> Ω <u>de l'équation</u> $Lu = \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ <u>où</u> $f_i \in L^p(\Omega)$ <u>avec</u> $p > n$. <u>Il existe deux constantes</u>

$C = C(\nu, n)$ <u>et</u> $K = K(\nu, n, p)$ <u>telles que</u>

$$(8.17)\quad \max_{Q(\rho)} u \leqslant C \min_{Q(\rho)} u + K \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \rho^{1-\frac{n}{p}}$$

<u>Démonstration</u>. Si l'on pose $u = v + w$, où w est la solution dans $H_o^1(Q(2\rho))$ de l'équation $Lw = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$, v est une solution de l'équation homogène $Lv = 0$ avec $v = u$ sur $\partial Q(2\rho)$. Grâce au principe de maximum puisque $v = u$ est positive sur $Q(2\rho)$ elle est positive dans $Q(2\rho)$. Donc grâce au théorême 8.1 de Moser-Harnack

$$\max_{Q(\rho)} v \leqslant C \min_{Q(\rho)} v$$

Mais on a :

$$\min v + \min w \leqslant \min u \leqslant \max u \leqslant \max v + \max w$$

et

$$\max_{Q(\rho)} u \leqslant \max_{Q(\rho)} v + \max_{Q(\rho)} w \leqslant C \min_{Q(\rho)} v + \max_{Q(\rho)} w$$

$$\leqslant C(\min_{Q(\rho)} u - \min_{Q(\rho)} w) + \max_{Q(\rho)} w$$

$$\leqslant C \min_{Q(\rho)} u + C \max_{Q(\rho)} |w|$$

Mais, grâce au théorème 4.1, on a :

$$\max_{Q(\rho)} |w| \leqslant K \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \rho^{1-\frac{n}{p}}$$

d'où (8.17).

c.q.f.d.

On peut maintenant donner une nouvelle démonstration du théorème 7.5 ; c'est-à-dire on peut démontrer que les solutions de l'équation elliptique $Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ avec $f_i \in L^p(\Omega)$, $p > n$, sont hölderiennes à l'intérieur de Ω.

On pose $M(\rho) = \max\limits_{Q(\rho)} u$ et $m(\rho) = \min\limits_{Q(\rho)} u$; alors les deux fonctions $v = M(2\rho) - u$ et $w = u - m(2\rho)$ sont solutions positives dans $Q(2\rho)$ des équations

$$Lv = -\sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

$$Lw = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

Grâce au théorème 8.3 on a alors

$$M(2\rho) - m(\rho) \leqslant C[M(2\rho) - M(\rho)] + K \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \rho^{1-\frac{n}{p}}$$

$$M(\rho) - m(2\rho) \leqslant C[m(\rho) - m(2\rho)] + K \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \rho^{1-\frac{n}{p}}$$

où grâce à la remarque 1, la constante C dépend de ν et n mais ne dépend pas de ρ.

En posant $\omega(\rho) = M(\rho) - m(\rho)$ et en sommant on a :

$$\omega(2\rho) + \omega(\rho) \leqslant C[\omega(2\rho) - \omega(\rho)] + 2K \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \rho^{1-\frac{n}{p}}$$

d'où

$$\omega(\rho) \leq \frac{C-1}{C+1}\,\omega(2\rho) + 2K \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \; \rho^{1-\frac{n}{p}} \quad ;$$

grâce au lemme 7.3 on a alors :

$$\omega(\rho) = H\rho^{\lambda} \qquad \text{avec} \quad 0 < \lambda < 1.$$

9. La fonction de Green.

Le but de cette section est d'étudier les propriétés de la fonction de Green pour le problème de Dirichlet relatif à un opérateur elliptique $Lu = -(a_{ij}\,u_{x_i})_{x_j}$ à coefficients mesurables et bornés satisfaisant la condition d'ellipticité

$$(9.1) \qquad \nu^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \leq \nu\,|\xi|^2 \qquad \nu \geq 1 \quad .$$

Nous supposerons que $a_{ij} = a_{ji}$ et que l'ouvert Ω est $H_0^1(\Omega)$ - admissible.

DÉFINITION 9.1. *Si μ est une mesure à variation bornée à support dans Ω, on dit que la fonction $u \in L^1(\Omega)$ est une solution faible de l'équation*

$$(9.2) \qquad Lu = \mu$$

qui s'annule sur $\partial\Omega$ si

$$(9.3) \qquad \int_\Omega u\,L\varphi\,dx = \int_\Omega \varphi\,d\mu$$

pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$ telle que $L\varphi \in C^0(\bar\Omega)$.

Si Ω est $H_0^1(\Omega)$-admissible, l'espace des "test-functions" φ est alors non vide grâce au théorème (7.6).

Remarque 1. Les solutions faibles que nous venons de définir sont des solutions faibles du problème de Dirichlet associé à l'équation (9.2) plutôt que des solutions faibles de l'équation (9.2).

Grâce au théorème 2.1 il existe une application linéaire et continue G de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ telle que si $T \in H^{-1}(\Omega)$, $u = GT$ est la seule solution dans $H_0^1(\Omega)$ de l'équation $Lu = T$. Cette application, inverse à droite de L, définit l'opérateur de Green pour L.

Grâce au théorème 4.1, G applique $H^{-1,p}(\Omega)$ dans $L^{\infty}(\Omega)$ pour $p > n$, et, de plus, grâce au théorème 7.6, G applique $H^{-1,p}(\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$ continûment. On a, pour toute fonction $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$

$$(9.4) \qquad \max_{\overline{\Omega}} |G\psi| \leq K\,\nu(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \qquad (p > n)$$

où K dépend seulement de p et de n et $T = \sum (f_i)_{x_i} \in H^{-1,p}(\Omega)$.

u est donc une solution faible, qui s'annule sur Ω, de l'équation

$$Lu = \mu$$

si et seulement si

$$(9.5) \qquad \int_{\Omega} u\psi dx = \int_{\Omega} G(\psi) d\mu \qquad \forall \psi \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Evidemment il existe au plus une fonction qui satisfait ces conditions.

De (9.4) et (9.5) on a, pour tout $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$:

$$\left| \int_{\Omega} u\psi dx \right| \leq K\,\nu(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \int_{\Omega} |d\mu| \cdot \|\psi\|_{H^{-1,p}(\Omega)}$$

où $\int_{\Omega} |d\mu|$ est la variation totale de μ.

Puisque $C^0(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^{-1,p}(\Omega)$ on a

$$(9.6) \qquad \|u\|_{H_0^{1,p'}(\Omega)} \leq K\,\nu(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \int_{\Omega} |d\mu|$$

avec $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ et $p > n$.

L'application $\mu \to u$ est l'application adjointe G^* de G, c'est-à-dire $u = G^*(\mu)$.

Grâce à la définition de G, G opère continûment de $H^{-1,p}(\Omega)$ dans $C^o(\bar{\Omega})$ et alors G^* est un opérateur linéaire et continu défini dans le dual de $C^o(\bar{\Omega})$, c'est-à-dire dans l'espace $\mathcal{M}$ des mesures à variation bornée sur $\bar{\Omega}$; pour $\mu \in \mathcal{M}$ on a aussi $G^*(\mu) \in H_o^{1,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{\rho}$.

On a ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 9.1. <u>Si Ω est $H_o^1(\Omega)$-admissible pour tout μ à variation bornée il existe une solution faible et une seule de l'équation (9.2), au sens de la définition 9.1, et</u> $u \in H_o^{1,p'}(\Omega)$ <u>si</u> $p' < \frac{n}{n-1}$.

Nous démontrerons maintenant que u peut être approchée par une suite de solutions faibles d'équations à coefficients continus.

Considérons une suite des régularisants $\{\alpha_s(x)\}$ ayant les propriétés

(i) $\alpha_s(x) \in C^\infty(\underline{\underline{R}}^n)$

(ii) $\alpha_s(x) \geq 0$

(iii) $\alpha_s(x) = 0 \quad$ si $|x| \geq \frac{1}{s}$

(iv) $\int_{\underline{\underline{R}}^n} \alpha_s(x)dx = 1$.

Soit $\tilde{a}_{ij}(x)$ le prolongement de $a_{ij}(x)$ à $\underline{\underline{R}}^n$ défini par $\tilde{a}_{ij}(x) = \delta_{ij}$ hors de Ω ; et soit $a_{ij}^{(s)} = \tilde{a}_{ij} * \alpha_s$.

Alors :

$$L^{(s)}u = -(a_{ij}^{(s)} u_{x_i})_{x_j}$$

est un opérateur à coefficients $C^\infty(\underline{\underline{R}}^n)$ et satisfait encore la condition

$$\nu^{-1} |\xi|^2 \leq a_{ij}^{(s)} \xi_i \xi_j \leq \nu |\xi|^2$$

parce que

$$a_{ij}^{(s)}(x)\,\xi_i\,\xi_j = \int_{\underline{\underline{R}}^n} \tilde{a}_{ij}(y)\,\xi_i\,\xi_j\,\alpha_s(x-y)dy.$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 9.2. <u>Soit</u> μ <u>une mesure à variation bornée et soit</u> $u^{(s)}$ <u>la solution faible au sens de la définition 9.1 de</u>

$$L^{(s)}u^{(s)} = \mu \quad .$$

<u>La suite</u> $\{u^{(s)}\}$ <u>converge alors vers la solution faible</u> u <u>de</u>

$$Lu = \mu$$

<u>faiblement dans</u> $H_0^{1,p'}(\Omega)$ <u>si</u> $p' < \frac{n}{n-1}$ <u>et, par conséquent, fortement dans</u> $L^q(\Omega)$ si $q < \frac{n}{n-2}$.

<u>Démonstration</u>. Considérons d'abord le cas où

$$d\mu = \psi\,dx$$

avec $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$. Tout $u^{(s)}$ est alors une solution dans $H_0^1(\Omega)$ et on a

$$\int_\Omega a_{ij}\,u_{x_i}^{(s)}\,\varphi_{x_j}\,dx = \int_\Omega \psi\,\varphi\,dx \qquad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

u est donc la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de $Lu = \psi$; cette solution étant unique est toute la suite $\{u^{(s)}\}$ qui converge vers u.

Considérons maintenant le cas général. Tout $u^{(s)}$ vérifie l'identité

$$\text{(9.7)} \qquad \int_\Omega u^{(s)}\,\psi\,dx = \int_\Omega \varphi^{(s)}d\mu$$

où $\varphi^{(s)} \in H_0^1(\Omega)$ est la solution de l'équation $L^{(s)}\,\varphi^{(s)} = \psi$. On a démontré que $\varphi^{(s)} \to \varphi$ uniformément dans Ω , et faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de $L\,\varphi = \psi$.

Grâce à (9.6) $\|u^{(s)}\|_{H_0^{1,p'}(\Omega)}$ est uniformément borné ; il existe donc une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction $u \in H_0^{1,p'}(\Omega)$. En passant à la limite dans (9.7) on a :

$$\int_\Omega u\psi\,dx = \int_\Omega \varphi\,d\mu \qquad \forall \psi \in C^0(\bar{\Omega})$$

où $\varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ et $L\varphi = \psi$; donc u est la solution faible au sens de la définition 9.1 de $Lu = \mu$.

Il est bien connu qu'il existe alors une sous-suite qui converge fortement dans $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} > \frac{1}{p'} - \frac{1}{n}$ vers u. Grâce à l'unicité de la solution faible on en déduit que la suite même $\{u^{(s)}\}$ converge vers u

c.q.f.d.

DÉFINITION 9.2. <u>On appelle fonction de Green</u> $g(x,y)$ <u>pour le problème de Dirichlet relatif à l'opérateur</u> L <u>au point</u> y <u>la solution faible, au sens de la définition 9.1, de l'équation</u>

$$Lg = \delta_y$$

<u>où</u> δ_y <u>est la mesure de Dirac au point</u> y.

Grâce à la définition 9.2 la solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $L\varphi = \psi$, $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ est donnée par la formule

$$\varphi(y) = \int_\Omega g(x,y)\,\psi(x)\,dx \quad .$$

Si l'opérateur L a les coefficients indéfiniment dérivables, alors on sait que $g(x,y) \geqslant 0$ et $g(x,y) = g(y,x)$. D'après le théorème 9.2 on peut déduire que ces propriétés sont valables aussi dans le cas des coefficients $L^\infty(\Omega)$.

THÉORÈME 9.3. Pour toute mesure μ, à variation bornée, l'intégrale

$$(9.8) \qquad u(x) = \int_\Omega g(x,y)d\mu(y)$$

est finie p.p. et elle donne la solution faible, au sens de la définition 9.1, de l'équation $Lu = \mu$.

Démonstration. On peut supposer μ positive. Soit $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ non négative et soit φ la solution dans $H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de l'équation $L\varphi = \psi$. Grâce au principe du maximum on déduit que φ aussi est non négative et elle est donnée par la formule

$$\varphi(y) = \int_\Omega g(x,y)\psi(x)dx .$$

Alors, grâce au théorème de Fubini, l'intégrale $\int_\Omega g(x,y)d\mu(y)$ existe p.p. et l'on a :

$$\int_\Omega \varphi(y)d\mu(y) = \int_{\Omega\times\Omega} g(x,y)\psi(x)d\mu(y) = \int_\Omega \psi(x)u(x)dx ;$$

cette identité est valable pour tout $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ et u est la solution faible, au sens de la définition 9.1, de l'équation $Lu = \mu$.

c.q.f.d.

THÉORÈME 9.4. Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles au sens de la définition 9.1 de

$$Lu_1 = \mu_1 \quad \text{et} \quad Lu_2 = \mu_2 ;$$

alors on a :

$$(9.9) \qquad \int_\Omega u_1 d\mu_2 = \int_\Omega u_2 d\mu_1 = \int_{\Omega\times\Omega} g(x,y)d\mu_1(x)d\mu_2(y)$$

en ce sens que si l'une des intégrales existe l'autre existe aussi et elles sont égales.

Le théorème est une conséquence du théorème 9.3 et du théorème de Fubini.

Remarque 2. Les solutions faibles, au sens de la définition 9.1, ont plusieurs propriétés semblables aux propriétés des potentiels ordinaires (par ex. l'identité (9.9) généralise la relation de réciprocité des potentiels ordinaires) ; pour ces solutions la théorie est plus semblable à la théorie du potentiel qu'à la théorie des équations aux dérivées partielles.

Etudions maintenant quelques propriétés de la fonction de Green.

On a démontré au § 3 qu'à tout sous-ensemble E de Ω on peut associer une mesure positive (ou nulle) μ qui est la capacité de E par rapport à la forme

$$a(u,v) = \int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i}\, v_{x_j}\, dx \, .$$

Dans le cas actuel on a

$$\text{cap. } E = \inf_{u \in U} a(u,u)$$

où U est l'ensemble convexe des $u \in H^1_0(\Omega)$ telles que $u \geq 1$ sur E au sens de $H^1(\Omega)$. La fonction u qui donne le minimum est $= 1$ sur E au sens de $H^1(\Omega)$ et satisfait la relation

$$\int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i}\, \varphi_{x_j}\, dx = \int_\Omega \varphi\, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \, .$$

Il est facile de vérifier que u est aussi la solution faible au sens de la définition 9.1 de l'équation $Lu = \mu$; on a donc $u(x) = \int_\Omega g(x,y)\,d\mu(y)$ et u est appelé le potentiel capacitaire de E.

Supposons maintenant que L soit à coefficients $C^\infty(\underline{\underline{R}}^n)$ et soit $g(x,y)$ la fonction de Green au point y. Pour $y \in \Omega$ tel que dist $(y, \partial\Omega) > 0$ soit

$$J_a \equiv \left\{ x \in \Omega \, ; \, g(x,y) \geq a \right\} \quad ;$$

grâce aux hypothèses faites sur les coefficients de L, J_a contient un voisinage de y.

LEMME 9.1. <u>On a</u> :

$$\text{cap. } J_a = \frac{1}{a}$$

<u>Démonstration.</u> Le potentiel capacitaire u de J_a est = 1 au point y et

$$1 \, . = u(y) = \int g(x,y) d\, \mu_a(x)$$

où μ_a est la capacité de J_a portée par ∂J_a ; mais sur J_a on a $g(x,y) = a$; on a donc cap. $J_a = 1$.

c.q.f.d.

Soit Σ_γ la boule de centre y et de rayon γ ; posons

$$a = \min_{x \in \partial \Sigma_\gamma} g(x,y) \quad ;$$

alors, grâce au principe de maximum, on a $\overline{\Sigma}_\gamma \subset J_a$ et puisque la capacité est une fonction subadditive d'ensemble on a :

$$\text{cap. } \Sigma_\gamma \leq \text{cap. } J_a = \frac{1}{a} = \frac{1}{\min\limits_{\partial \Sigma_\gamma} g(x,y)} \quad ;$$

d'une façon analogue, si

$$b = \max_{\partial \Sigma_\gamma} g(x,y)$$

on a :

$$\text{cap. } \Sigma_\gamma \geq \text{cap. } J_b = \frac{1}{b} = \frac{1}{\max\limits_{\partial \Sigma_\gamma} g(x,y)} \quad .$$

On a alors :

$$\min_{\partial \Sigma_\gamma} g \leq (\text{cap. } \Sigma_\gamma)^{-1} \leq \max_{\partial \Sigma_\gamma} g \quad ;$$

mais $g(x,y)$ est une solution de $L_g = 0$ dans $\Omega - \{y\}$ et, grâce au théorème (de Moser-Harnack) 8.1. il existe une constante $C = C(\nu, n)$ telle que

$$\max_{\partial \Sigma_\gamma} g \leqslant C \min_{\partial \Sigma_\gamma} g$$

(grâce à la remarque 1 du § 8 on peut choisir C indépendant de γ) ; on a alors, sur $\partial \Sigma_\gamma$:

$$C^{-1}(\text{cap.}\, \Sigma_\gamma)^{-1} \leqslant g(x,y) < C(\text{cap.}\, \Sigma_\gamma)^{-1} .$$

Soit maintenant $\bar{L}$ un autre opérateur à coefficients $C^\infty(\underline{\underline{R}}^n)$, elliptique avec la même constante ν . Soit $\bar{g}(x,y)$ sa fonction de Green et soit $\overline{\text{cap.}}\, E$ la capacité de E par rapport à la forme bilinéaire associée à $\bar{L}$.

Evidemment on a l'inégalité :

$$\nu^{-2} \text{cap.}\, E \leqslant \overline{\text{cap.}}\, E \leqslant \nu^2 \text{cap.}\, E$$

d'où

$$\nu^{-2} C^{-2} \bar{g}(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant \nu^2 C^2 \bar{g}(x,y) \quad . \tag{9.10}$$

Si L et $\bar{L}$ sont à coefficients $L^\infty(\Omega)$, en utilisant le théorème 9.2 on déduit que (9.10) est valable aussi dans ce cas. On a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 9.5. <u>Soient</u> $g(x,y)$ <u>et</u> $\bar{g}(x,y)$ <u>les fonctions de Green pour deux opérateurs</u> L <u>et</u> $\bar{L}$ <u>elliptiques avec la même constante d'ellipticité</u> ν . <u>Alors pour tout compact</u> $\Omega' \subset \Omega$ <u>il existe une constante</u> $K = K(\nu, \Omega, \Omega', n)$ <u>telle que</u>

$$K^{-1} \leqslant \frac{g(x,y)}{\bar{g}(x,y)} \leqslant K \qquad \forall\, x,y \in \Omega'$$

En particulier si pour $n > 3$ on considère l'opérateur L et l'opérateur de Laplace, on en déduit que la fonction de Green $g(x,y)$ de L a au point y une singularité polaire d'ordre n-2.

On peut démontrer que $g \in H^1_{loc}(\Omega - \{y\})$ et que

$$\int_\Omega a_{ij}\, g_{x_i}\, \varphi_{x_j}\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega - \{y\}) ;$$

donc, grâce au théorème 7.4., g est hölderienne.

Si $n > 3$ il existe une fonction $m(x,y) \in H^{1,p'}(\Omega)$ pour $p' < \frac{n}{n-1}$, hölderienne si $x \neq y$ est bornée inférieurement et supérieurement par une constante positive telle que

$$g(x,y) = \frac{m(x,y)}{|x-y|^{n-2}} .$$

10. Problème de Dirichlet et notions sur les points réguliers.

Considérons maintenant le

Problème 10.1. Si $h \in C^0(\partial\Omega)$, chercher u tel que

$$(10.1) \qquad \begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il est bien connu, même si les coefficients de l'opérateur elliptique L et Ω sont très réguliers, que l'on ne peut pas résoudre le problème (10.1 avec la méthode variationnelle, à savoir la solution n'est pas dans $H^1(\Omega)$. Voir l'exemple classique de Hadamard.

D'autre part, si $\mathcal{C} = \frac{H^1(\Omega)}{H^1_0(\Omega)}$ est l'espace des traces des $u \in H^1(\Omega)$, on a démontré que (par la méthode variationnelle) pour $h \in \mathcal{C}$ il existe u unique dans $H^1(\Omega)$ tel que (10.1) ait lieu (voir § 3.1).

Dans ce cas on a une application linéaire et continue $h \to Bh = u$ de $\mathcal{C}$ dans $H^1(\Omega)$.

Grâce au principe de maximum (v. th. 3.1 et 3.2) on a :

$$\min_{\partial\Omega} h \leqslant \min_{\Omega} Bh \leqslant \max_{\Omega} Bh \leqslant \max_{\partial\Omega} h$$

et, grâce au lemme 5.2, on a aussi :

$$|||Bh||| \leqslant K(\nu, \Omega) \max_{\partial\Omega} |h|$$

où

$$|||g||| = \sup_{\bar\Omega' \subset \Omega} \left(\delta^2 \int_{\Omega'} g_x^2 \, dx\right)^{1/2} + \max_{\Omega} |g| \qquad \delta = \mathrm{dist}(\bar\Omega', \partial\Omega)$$

Toute fonction $h \in C^0(\partial\Omega)$ est limite uniforme d'une suite $\{h_n\} \subset \mathcal{C}$ (il suffit de prolonger h à $\underline{\underline{R}}^n$ et d'utiliser le théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme des fonctions continues par polynômes) ; on peut donc prolonger par continuité B jusqu'à $C^0(\partial\Omega)$ et B fait correspondre à **tout** $h \in C^0(\partial\Omega)$ une fonction u et une seule telle que

(i) $|||u||| < +\infty$

(ii) u est une solution locale de $Lu = 0$.

Cette application a donc résolu le problème de Dirichlet 10.1 dans le sens suivant.

<u>A toute fonction</u> $h \in C^0(\partial\Omega)$ <u>on fait correspondre une fonction</u> u <u>solution locale de</u> $Lu = 0$ (et même höldérienne à l'intérieur, v. th. 7.4) <u>de façon que si</u> h <u>est la trace sur</u> $\partial\Omega$ <u>d'une fonction</u> $\tilde h \in C^1(\Omega)$, $Bh \in H^1(\Omega)$ <u>est la solution variationnelle de (10.1)</u>.

D'une façon naturelle, on se pose le

<u>Problème 10.2.</u> <u>Peut-on dire que pour</u> $y \in \partial\Omega$ <u>on a</u> :

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} B\,h = h(y) \; ?$$

Il est bien connu, grâce à un exemple classique de Lebesgue, que déjà pour le laplacien le problème 10.2 n'admet pas toujours une réponse affirmative.

DÉFINITION 10.1. <u>Un point</u> $y \in \partial\Omega$ <u>est dit régulier par rapport à l'opérateur</u> L <u>pour tout</u> $h \in C^0(\partial\Omega)$ <u>on a :</u>

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} Bh = h(y) .$$

<u>Un point non régulier est dit irrégulier.</u>

Pour l'étude du problème 10.2 on renvoie à [10] ; on se bornera ici à énoncer les résultats suivants.

THÉORÈME 10.1. <u>Un point</u> $y \in \partial\Omega$ <u>est régulier si et seulement si les potentiels capacitaires des ensembles</u> $E_\rho \equiv \complement \Omega \cap I(\chi, \rho)$ <u>par rapport à une boule quelconque</u> $\Sigma \subset \underline{\underline{R}}^n$ <u>avec</u> $\Omega \subset \Sigma$ <u>sont continus au point</u> y.

<u>Remarque</u>.

Les potentiels capacitaires des ensembles E_ρ donnent la possibilité de construire des barrières. En utilisant ce résultat et les propriétés de la fonction de Green (v. § 9), on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 10.2. <u>Un point</u> $y \in \partial\Omega$ <u>est régulier par rapport à un opérateur elliptique</u> L <u>si et seulement s'il est régulier par rapport à n'importe quel autre opérateur elliptique</u> Σ .

En particulier, $y \in \partial\Omega$ est régulier par rapport à L, si et seulement si la condition de N. Wiener est vérifiée (i.e. si y est régulier par rapport à l'opérateur de Laplace).

La condition de Wiener est la suivante :

Soit $c(\rho)$ la capacité de E_ρ ; le point $y \in \partial\Omega$ est régulier si et seulement si

$$\int_0^{\rho_0} c(r) r^{1-n} \, dr = +\infty \quad .$$

11. Aperçu sur les développements de la théorie.

Dans l'exposition que nous venons de faire nous avons utilisé des résultats qui ont été démontrés ces dernières années (voir [2], [10], [14], [15], [24], [25], [27], [29]).

Le point de départ de ces résultats a été le désir de généraliser aux équations elliptiques non-linéaires en plus de deux variables la théorie qui avait été développée dans la première moitié du siècle par Bernestein, Schauder, Leray, Caccioppoli, Morrey, Nirenberg dans le cas des équations à deux variables indépendantes.

Le résultat du § 7 a été pendant plusieurs années une question ouverte jusqu'à ce que De Giorgi [2] et Nash [19], indépendamment, aient démontré le théorème sur la continuité hölderienne des solutions faibles, en 1958.

La méthode de De Giorgi utilise la possibilité de tronquer les solutions des équations envisagées (on obtient alors, comme nous venons de le voir ici, des sous-solutions ou des supersolutions).

Déjà Lebesgue, en 1907, et plus tard Tonelli et beaucoup d'autres mathématiciens avaient utilisé cette opération pour démontrer la compacité des autres minimisantes des intégrales régulières du Calcul des Variations.

De Giorgi utilise la technique des inégalités isopérimétriques. Aujourd'hui on sait que cette technique peut être substituée par l'usage des inégalités de Sobolev.

Le théorème de De Giorgi a été généralisé aux équations plus générales du type (0.2) par C.B. Morrey [12] et par Stampacchia [24].

Dans ces travaux on a aussi obtenu la régularité au bord. Dans le second il a été considéré aussi la régularité au bord pour des problèmes différents du problème de Dirichlet.

Moser a donné une nouvelle démonstration du théorème de De Giorgi [14] et de plus, il a démontré l'inégalité de Harnack [15] en utilisant un théorème de F. John et L. Nirenberg [6] qui joue un rôle très important. Nous avons exposé sa démonstration au § 8.

Les inégalités du maximum et les majorations dans L^p ont été démontrées par Stampacchia [23, 25, 26, 27]. Il a considéré dans [26] aussi le cas des équations du type (0.2) sous hypothèses très générales pour les coefficients b_i et d_i. En effet il a démontré que les majorations dans L^p sont valables aussi si $b_i \in L^n$, $d_i \in L^n$, de telle sorte que l'on peut aussi obtenir quelques résultats pour les équations du type (0.1) quand les coefficients a_{ij} sont dans $H^{1,n}(\Omega)$. Ces remarques ont été utilisées récemment par Miranda [17,18] qui a donné plusieurs résultats pour les équations du type (0.1) quand les coefficients sont dans $H^{1,n}(\Omega)$.

En ce qui concerne les équations non-linéaires, il faut rappeler que De Giorgi avait démontré l'analyticité des solutions faibles du problème du calcul des variations

$$\delta \int F\ (\operatorname{grad} u)dx = 0$$

quand F est analytique et satisfait la condition

$$\nu^{-1} |\xi|^2 \leqslant F_{p_i p_j} \xi_i \xi_j \leqslant \nu |\xi|^2 \qquad (\nu \geqslant 1)$$

en démontrant qu'une solution faible a les dérivées premières hölderiennes, l'analyticitéétant une conséquence des résultats connus.

Ce résultat a été généralisé par C. Morrey [13] et par Ladyzenskaia et Uralt'seva [7,8].

Ladyzenskaia et Uralt'seva [7,8] ont aussi donné plusieurs résultats pour les équations elliptiques non linéaires.

Plus récemment Gilbarg [3] et Stampacchia [28] indépendamment, ont donné des résultats pour des équations non linéaires qui, comme les équations des surfaces minimales, ne sont pas contenus dans les résultats de Morrey et de Ladyzenskaia et Uralt'seva.

Récemment J. Serrin [22] a généralisé aux équations elliptiques quasi-linéaires le théorème de Moser sur l'inégalité de Harnack. Il a également étudié le problème de l'allure locale des solutions.

La théorie des équations paraboliques à coefficients discontinus s'est développée en même temps. C'est Nash le premier qui a démontré, par une méthode tout à fait différente, la continuité hölderienne des solutions faibles.

Plusieurs théorèmes ont été démontrés en utilisant la méthode des fonctions tronquées par Ladyzenskaia-Uralt'seva [9], Aronson [1], Guglielmino [4]. Il vient maintenant de paraître une note de Moser [16] où il démontre l'inégalité de Harnack pour les équations paraboliques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSON, On the Green's function for second order parabolic differential equations with discontinuous coefficients. Bull. of the Amer. Math. Soc. vol. 69 (1963) pp.841-847.

[2] E. DE GIORGI, Sulla differenziabilità e l'analicità delle estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sc. Torino (3) 3 (1957) pp. 25-43.

[3] D. GILBARG, Boundary value problems for nonlinear elliptic equations in n variables. Symposium on Nonlinear Problems, Madison, Wisconsin, (1962).

[4] GUGLIELMINO, Sulla regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi al contorno per operatori parabolici. Ricerche di Matem., vol. XII (1963) pp.44-66.

[5] HARDY, LITTLEWOOD and POLYA. Inequalities, Cambridge, 1952.

[6] F. JOHN and L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1960), pp.93-140.

[7] O.A. LADYZENSKAIA et N.N. URALT'SEVA, Quasi-linear elliptic equations and variational problems with many independent variables. Russian Math. Surveys, London Math. Soc. (16) 1 (1961), pp. 17-91.

[8] ----- On the smoothness of weak solutions of quasi-linear equations in several variables and of variational problems. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), pp. 481-495.

[9] ----- A boundary-value problem for linear and quasi-linear parabolic equations, I, Izv. Akad. Nauk SSSR Sez. Mat. 26 (1962), pp.5-52, (Russian).

[10] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA and H. WEINBERG, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Sc. Norm. Sup. Pira - S III (XVII) (1963), pp. 45-79.

[11] N. MEYERS, An L^p estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence structure equations. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 17 (1963), pp. 189-206.

[12] C.B. MORREY, Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity. Math. Z. 72 (1952), pp. 146-164.

[13] C.B. MORREY, Existence and differentiability theorem for variational problems for multiple integrals - Conf. on Partial Diff. Equations and Continuum Mechanics. Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wisc. 1961.

[14] J. MOSER, A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), pp. 457-468.

[15] ----- On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. XIV (1961), pp. 577-591.

[16] ----- A Harnack inequality for Parabolic Differential Equations. Comm. Pure Appl. Math., vol. XVII, pp. 101-134 (1964).

[17] C. MIRANDA, Alcune osservazioni sulla maggiorazione in L^{ν} delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine. Ann. di Matem. t.61 (1963) pp. 151-168.

[18] ----- Sull' equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale, a coefficienti discontinui. Ann. di Matem. s. IV, t.LXIII, pp.353-386 (1963).

[19] J. NASH, Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. 80 (1958), pp.931-954.

[20] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Paris, Hermann.

[21] J. SERRIN, Pathological Solutions of Elliptic differential equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (à paraître).

[22] ----- Local behavior of solutions of quasi-linear equations (à paraître).

[23] ----- Contributi alla regolarizazzione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (III) 12 (1958), pp.223-244 (Appendice).

[24] ----- Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 51 (1960), pp. 1-38.

[25] ----- Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues. Intern. Symp. Lin. Spaces, Jerusalem, 1960.

[26] G. STAMPACCHIA, Equations elliptiques à données discontinues. Séminaire Schwartz, t.5, 1960-61, Equations aux dérivées partielles et interpolation, n.4, 16 p.

[27] ----- Some limit cases of L^p-estimates for solutions of second order elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963).

[28] ----- On some regular Multiple integral Problems in the Calculus of Variations. Comm. Pure Appl. Math. vol. XVI (1963)

[29] ----- Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. Comptes-rendus Acad.des Sci. de Paris (séance du 27 avril).

[30] ZYGMUND A., On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations. J. Math. Pures Appl. 35 (1956), pp. 223-248.

Conférences

I C.B. MORREY, Some recent developments in the theory of partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. t.68, 1962, pp.279-297.

II ----- Des résultats récents du calcul des variations, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1961-62, n°5, 62 p. (Collège de France, nov. 1961-mai 1962).

III L. NACHBIN, Régularité des solutions des équations différentielles elliptiques, Séminaire Bourbaki, 15e année, 1962-63, n°258.

IV L. NIRENBERG, Some aspects of linear and non linear partial differential equations. Proceedings of the International Congress of mathematicians (1962), Stockholm, pp. 147-162.

V STAMPACCHIA G. Second order elliptic equations and boundary value problems, Proceedings of the International Congress of mathematicians (1962), Stockholm, pp. 405-413.