Zeitschrift für Physik 155, 498–506 (1959)

Von der Forschungsprofessur für Theoretische Physik der Universität Hamburg

Erhaltungssätze für die Wirkung in elektromagnetischen und gravischen Strahlungsfeldern

Von

JÜRGEN EHLERS und RAINER K. SACHS

Mit 1 Figur im Text

(Eingegangen am 22. April 1959)

Two generally covariant integral conservation laws concerning electromagnetic null fields and vacuum gravitational fields of type II with vanishing Riemann-eigenvalue respectively are proved. The conserved quantities both have the dimensions of action. The electromagnetic law shows that with respect to the propagation of energy a null field may be represented by a stream of photons. The gravitational conservation theorem is in many respects similar to the electromagnetic one; it admits to calculate the change of intensity along a gravitational ray.

Einleitung

Wir beweisen im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zwei allgemein-kovariante integrale Erhaltungssätze, einen für elektromagnetische Nullfelder und einen analogen für Vakuum-Gravitationsfelder vom Typ II mit verschwindendem Riemann-Eigenwert. Die beiden Feldtypen verhalten sich algebraisch und analytisch sehr ähnlich. Wir wollen versuchen, die gemeinsamen Eigenschaften im einzelnen zu klären, bevor wir den formal und begrifflich schwierigeren Fall des Gravitationsfeldes betrachten.

I. Elektromagnetische Nullfelder

Für elektromagnetische Nullfelder, die ausführlich in [1], Kap. IX, behandelt werden, gibt es verschiedene äquivalente Definitionen. Wir geben vier davon an.

Ein elektromagnetisches Vakuumfeld mit dem Feldstärkentensor F_{ab} und dem Energietensor T_{ab} heißt ein Nullfeld, wenn eine der folgenden Aussagen richtig ist:

a) F_{ab} hat dieselbe algebraische Struktur wie der Sprungtensor ΔF_{ab} an einer Unstetigkeits-Hyperfläche (Wellenfront) eines Maxwell-Feldes[2],

---

[1] SYNGE, J.L.: Relativity: The Special Theory. Amsterdam 1956.

[2] Wir legen dabei für die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, deren Metrik und für den Feldstärkentensor die in LICHNEROWICZ, A., Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme, Paris 1955 formulierten Stetigkeitsannahmen zugrunde.

d.h. es gibt einen Vektor k_a mit

$$F_{[ab}k_{c]} = 0, \qquad F_{ab}k^b = 0\,^3. \tag{1}$$

b) Für einen (und damit für alle) Beobachter haben die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ den gleichen Betrag und stehen aufeinander senkrecht:

$$F_{ab}F^{ab} = 0, \qquad F_{ab}F_{cd}\,\varepsilon^{abcd} = 0. \tag{2}$$

c) Der Energietensor hat die gleiche Form wie der eines inkohärenten Teilchenstromes, nämlich

$$T_{ab} = \mu\, k_a k_b. \tag{3}$$

d) Für einen (und damit für alle) Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit u^k ist die Energiedichte $T_{ab}u^a u^b$ des Feldes gleich der Energiestromdichte, d.h. gleich dem Betrag des Poynting-Vektors

$$P_a = -(g_{ab} + u_a u_b)\, T^{bc} u_c\,.^4 \tag{4}$$

Mathematisch am einfachsten ist die Definition b. Die physikalische Bedeutung der Nullfelder geht wohl am deutlichsten aus c und d hervor, wonach die Nullfelder unter allen Feldern dadurch ausgezeichnet sind, daß in ihnen die ganze Energie mit Lichtgeschwindigkeit lokal in einer Richtung strömt. Es handelt sich also um reine Strahlungsfelder, die sich sozusagen vollständig von der Quelle gelöst haben. Die Definition a besagt, daß diese Felder durch die Existenz von Strahlen (mathematisch: Bicharakteristiken, s. z.B. [2] und [3]) gekennzeichnet sind.

Es sei ein Nullfeld gegeben. Dann sind durch k^a dort, wo $T_{ab} \neq 0$ ist, lichtartige Geodätische bestimmt [5], die Strahlen des Feldes. Das folgt aus

$$T^a_a = 0, \qquad T^{ab}{}_{;b} = 0. \tag{4}$$

Wir können und wollen k^a und μ in (3) so wählen, daß k^a längs der Strahlen „konstant" im Sinne der Parallelverschiebung von LEVI-CIVITA [6] ist, also

$$k^a_{;b}\, k^b = 0 \tag{5}$$

gilt.

Wir nehmen an, daß in dem ganzen Raum-Zeit-Bereich, den wir betrachten — also auch dort, wo $T_{ab} = 0$ ist — μ und k^a so gewählt werden können, daß (3) und (5) gelten und $k^a \neq 0$ ist, so daß das Strahlenfeld dieses Gebiet schlicht überdeckt. μ ist dann nicht negativ und ver-

---

[3] Für eine Ableitung dieser Sprungbedingungen siehe z.B. K. STELLMACHER: Math. Ann. **115**, 740 (1938).

[4] Die kovariante Zerlegung eines Energietensors in Anteile bezüglich eines Beobachters findet man z.B. in C. ECKART: Phys. Rev. **58**, 919 (1940).

[5] MARIOT, L.: C. R. Acad. Sci., Paris **238**, 2055 (1954).

[6] Siehe z.B. H. WEYL: Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl. Berlin 1923. §12, §15.

schwindet genau da, wo F_{ab} verschwindet. μ und k^a sind bis auf Transformationen

$$k'^a = A\, k^a, \qquad \mu' = A^{-2}\mu \tag{6}$$

festgelegt, wobei A ein Skalar mit

$$k^i A_{,i} = 0 \tag{7}$$

ist. Die Nebenbedingung (5) für das Vektorfeld k^a kann wegen dessen Lichtartigkeit auch durch die Gleichung

$$k_{[a,b]}\, k^b = 0 \tag{8}$$

ausgedrückt werden, und diese Beziehung kann wegen des Stokesschen Satzes[7] in einen Erhaltungssatz umgeformt werden:

Satz. Für jeden aus Strahlen bestehenden Streifen (s. Fig. 1), jedes „Signal", ist das über einen (eindimensionalen) orientierten Querschnitt*

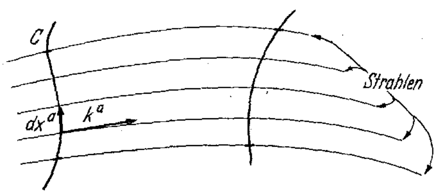

Fig. 1. Strahlenstreifen

C des Streifens erstreckte invariante Integral

$$N = \int_C k_a\, dx^a \tag{9}$$

bei gegebenem k^a eine Konstante des Streifens, d.h. unabhängig vom Querschnitt C.

Wenn ein Signal einen Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit u^a überstreicht, ist für den dadurch gegebenen Querschnitt C $dx^a = u^a\, d\tau$, also

$$N = \tau\, \overline{k_a u^a}\,, \tag{10}$$

wo τ die „Empfangsdauer" und $\overline{k_a u^a}$ der Mittelwert von $k_a u^a$ längs C ist. Gehört das Signal einer im kleinen näherungsweise ebenen monochromatischen Welle an, so wird man (10) für ein Signal betrachten, das von zwei aufeinander folgenden Strahlen der Intensität 0 (s. unten) begrenzt wird; $1/2\tau$ ist dann die Frequenz bezüglich des Beobachters u^a, $\overline{u_a k^a}$ kann praktisch durch $k_a u^a$ in irgendeinem Ereignis von C ersetzt werden. Der Erhaltungssatz sagt dann aus, daß sich die Frequenz des

* Das heißt für das Linienelement dx^a von C soll $k_a dx^a \leqq 0$ sein.

[7] Siehe z.B. P. JORDAN: Schwerkraft und Weltall, 2. Aufl., S. 26. Braunschweig 1955.

Signals proportional zu dem Skalarprodukt $k_a u^a$ längs eines seiner Strahlen ändert*.

Aus (3), (4) und (5) folgt der differentielle Erhaltungssatz

$$(\sqrt{-g}\,\mu\, k^a)_{,a} = 0 \tag{11}$$

bzw. die Fortpflanzungsgleichung

$$k^a \mu_{,a} + \mu\, k^a_{;a} = 0. \tag{12}$$

μ, T_{ab} und F_{ab} verschwinden deshalb in allen Ereignissen oder in keinem Ereignis eines Strahls.

Aus (11) folgt wie üblich (Gaußscher Satz) der integrale *Erhaltungssatz:* Für jedes Strahlenbündel — darunter verstehen wir eine dreidimensionale Strahlenschar — ist das über einen orientierten Querschnitt S des Bündels** erstreckte invariante Integral

$$I = \int_S \mu\, k^a\, d S_a \tag{13}$$

eine Konstante des Bündels, d.h. unabhängig vom Querschnitt S, wenn μ und k^a fest gewählt sind.

Wenn das Bündel einen „ausgedehnten Beobachter" (ein Bündel zeitartiger Kurven, ein u^a-Feld) überstreicht und S ein räumlicher „Abdruck" ist, den das Bündel im Raum des Beobachters hinterläßt, ist (mit $d S =$ Volumelement des Beobachters) $d S_a = d S\, u_a$, also

$$I = (\widetilde{k_a u^a})^{-1} E, \tag{14}$$

wobei $E = \int T_{ab}\, u^a u^b\, d S$ die Energie des Bündels bezüglich des Beobachters und $\sim$ ein mit dem Gewicht $T_{ab}\, u^a u^b$ gebildeter Mittelwert über S ist.

Wir sehen, daß keine der beiden Erhaltungsgrößen (10), (14) für sich allein eine einfache physikalische Bedeutung hat; insbesondere ändern sich beide bei „Umnormierungen" (6), (7) in unübersichtlicher Weise. Zugleich zeigt aber der Vergleich von (10) und (14), daß man durch deren Multiplikation einen Ausdruck bekommt, der eine einfache Bedeutung hat, wenn nur die $k_a u^a$-Mittelwerte (zumindest in guter Näherung) einander gleich sind. Es gilt nämlich offenbar der

Satz. Gegeben sei ein Strahlenbündel, das einen Strahlenstreifen enthält. Zwei Beobachter mögen je die Dauer τ des Strahlenstreifens (Signals) und die Energie E des Bündels messen. Dann stimmen die

* Wir haben hier in präziser und etwas modifizierter Form die bekannte Überlegung wiederholt, die man bei der Ableitung der Rotverschiebung anzustellen pflegt, um ihre Ähnlichkeit mit dem folgenden Erhaltungssatz hervortreten zu lassen.

** Der Vektor $d S_a$ des Hyperflächenelementes von S soll so orientiert sein, daß $k^a\, d S_a \leqq 0$ ist.

für beide Beobachter gebildeten „Wirkungen" τE überein, wenn bei mindestens einer „Normierung" von k^a die oben definierten Mittelwerte von $k^a u_a$ für jeden der zwei Beobachter miteinander übereinstimmen; also insbesondere dann, wenn das Strahlenbündel so klein ist, daß $k^a u_a$ in jedem der zwei Beobachtungsbereiche nicht merklich variiert.

Damit ist unter sinnvoll scheinenden Voraussetzungen bewiesen, daß für Wellenpakete in Nullfeldern die Wirkung $E\tau$ invariant und zeitlich konstant ist, womit nachgewiesen ist, daß die Benutzung des Begriffs „Photon" bei Diskussion der Lichtausbreitung im Rahmen der Einstein-Maxwell-Theorie erlaubt ist.

Wir betonen, daß die Größe τE nicht vom Strahlenbündel allein, sondern von Bündel und Streifen zusammen abhängt. Um einem beliebigen Bündel eine Wirkung zuzuordnen, muß man es in hinreichend kleine Teilbündel zerlegen und in diesen je einen Streifen wählen. Diese Komplikation scheint unvermeidlich zu sein, wenn das Nullfeld nicht spezielle Eigenschaften hat[8].

Zerlegen wir die Energie in Intensität × Fläche × Zeit, so ergibt sich aus unserem Erhaltungssatz, daß das Produkt aus Intensität und Fläche (quer zu den Strahlen) *nicht* (wie in der unrelativistischen Optik für relativ zueinander ruhende Beobachter) konstant ist längs des Bündels, sondern sich umgekehrt proportional zum Quadrat der Beobachtungsdauer ändert entsprechend Doppler- und Verdünnungseffekt. Dieses Ausbreitungsgesetz muß bei der Untersuchung von Entfernungsmessungen mittels Lichtintensitäten berücksichtigt werden[9].

II. Gravische Nullfelder

Wir nennen ein metrisches Feld g_{kl}, das der Vakuumfeldgleichung

$$R_{kl} = 0 \tag{15}$$

genügt, ein Nullfeld, wenn eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

a) R_{abcd} hat dieselbe algebraische Struktur wie der Sprungtensor ΔR_{abcd} an einer Unstetigkeits-Hyperfläche eines Vakuumfeldes, d.h. es gibt einen Vektor k_a mit

$$R_{abcd}\,k^d = 0 \Leftrightarrow R_{ab[cd}\,k_{e]} = 0\,^{10}. \tag{16}$$

b) Für den Krümmungstensor gilt

$$R_{abij}\,R_{cd}{}^{ij} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^{ijkl}\,R_{abij}\,R_{cdkl} = 0. \tag{17}$$

[8] Vgl. dazu Abschnitt III und E. SCHRÖDINGER: Expanding Universes. Cambridge 1956.

[9] Zur Entfernungsmessung siehe E. NEWMAN u. J.N. GOLDBERG: The Measurement of Distance in General Relativity. (Preprint, Aeronautical Research Laboratory, Wright — Patterson Air Force Base, Ohio) 1959.

[10] Siehe z.B. A. TRAUTMAN: Lectures on General Relativity (Preprint, King's College, London); London 1958 oder die oben zitierte Arbeit von STELLMACHER.

Daß diese Definitionen wirklich gleichwertig sind, ergibt sich so: Die Eigenschaft a ist, wenn $R_{abcd} \neq 0$ hinzugenommen wird, kennzeichnend für Typ II mit Eigenwert 0 im Sinne der Petrov-Klassifikation der Vakuumfelder[11]. Andererseits ist aber auch b für diesen Typ kennzeichnend, wie man mittels der Normalformen des Riemann-Tensors (s. [11] oder [12]) nachrechnen kann*.

Diese Definitionen sind offenbar den Definitionen a und b im ersten Abschnitt analog. Man kann wie oben Strahlen definieren; diese sind wieder lichtartige Geodätische[11,13], und wir nehmen wieder die Normierung (5) vor, so daß der mit (9) verbundene Erhaltungssatz gilt.

Wir wollen zeigen, wie man eine zu (I. c) analoge Kennzeichnung der Gravitationsnullfelder und einen Erhaltungssatz gewinnen kann.

Wir gehen von der Formel

$$\ddot{\eta}^a = R^a{}_{ikj}\, u^i\, u^j\, \eta^k \tag{18}$$

für die Relativbeschleunigung eines Probekörpers gegen einen anderen benachbarten mit der Vierergeschwindigkeit u^a aus[12] und sehen, daß der symmetrische Tensor

$$E^{ab} = R^{aibj}\, u_i\, u_j \quad \text{mit} \quad E^a_a = 0 \tag{19}$$

für ein Gravitationsfeld eine ähnliche Bedeutung hat wie der Vektor $E^a = F^{ab} u_b$, der die absolute Beschleunigung bestimmt, für ein elektromagnetisches Feld.

Für ein Nullfeld folgt aus der zweiten Gl. (16), daß der Riemann-Tensor mittels (19) die Darstellung

$$R_{abcd} = -4\, (k_i u^i)^{-2}\, k_{[a}\, E_{b][c} k_{d]} \tag{20}$$

gestattet in Analogie zu der Darstellung

$$F_{ab} = 2\, (k_i u^i)^{-1}\, k_{[a}\, E_{b]} \tag{21}$$

eines elektromagnetischen Nullfeldes. Bei einem Nullfeld ist außerdem nach (16) und (19)

$$E_{ab}\, k^b = 0\,. \tag{22}$$

Aus diesen Hilfsformeln ergibt sich weiter

$$R_{aibj}\, R_c{}^i{}_d{}^j = (u_i k^i)^{-4}\, E_{jl}\, E^{jl}\, k_a\, k_b\, k_c\, k_d\,. \tag{23}$$

* Ebenso kann man feststellen, daß $R_{abij}\, R_{cd}{}^{ij} \neq 0$, $R_{abij}\, R^{ijkl}\, R_{klcd} = 0$ für Typ III charakteristisch sind.

[11] KUNDT, W.: Diss. Univ. Hamburg, Hamburg 1959.

[12] PIRANI, F. A. E.: Phys. Rev. **105**, 1089 (1957).

[13] LICHNEROWICZ, A.: C. R. Acad. Sci., Paris **246**, 893 (1958).

Wenn umgekehrt für den Riemann-Tensor eines Vakuumfeldes eine Gleichung

$$R_{aibj} R_{c\cdot d\cdot}^{\ i\ j} = \nu\, k_a k_b k_c k_d \tag{24}$$

mit einem Skalar ν und einem Vektor k_a gilt, folgt aus der zyklischen Symmetrie des Riemann-Tensors zunächst $R_{aibj} R^{cdij} = 0$ und dann unter nochmaliger Verwendung der zyklischen Symmetrie (17). Damit haben wir als dritte Kennzeichnung eines Nullfeldes gefunden:

c) Ein Vakuumfeld ist genau dann ein Nullfeld, wenn eine Darstellung (24) besteht.

Die Größe ν aus (24) ist, wie der Vergleich mit (23) zeigt, nicht negativ; denn E_{kl} ist wegen $E_{kl} u^l = 0$ ein bezüglich u^l räumlicher Tensor. ν verschwindet genau dann, wenn $E_{kl} = 0$ ist, also nach (20) genau dann, wenn der Riemann-Tensor gleich Null ist.

Außer der algebraischen Analogie zwischen (24) und (3) besteht aber auch die (4) entsprechende Divergenzrelation

$$(R^{aibj} R_{cidj})_{;a} = 0\,, \tag{25}$$

die aus der Bianchi-Identität, (17) und den Symmetrieeigenschaften des Riemann-Tensors folgt.

Aus (25), (24) und (5) ist abzulesen, daß auch die (11) und (12) entsprechenden Beziehungen

$$(\sqrt{-g}\,\nu\, k^a)_{,a} = 0, \qquad k^a \nu_{,a} + \nu\, k^a_{;a} = 0 \tag{26}$$

bestehen, so daß die k^a-Linien die Strahleneigenschaft haben wie im elektromagnetischen Fall. Ebenso gilt der (13) entsprechende Erhaltungssatz für die Größe

$$J = \int_S \nu\, k^a\, d S_a\,. \tag{27}$$

Wegen der Bedeutung von E_{kl} kann man den Skalar $V = E_{kl} E^{kl}$ als ein Maß für die Stärke des Gravitationsfeldes bezüglich des Beobachters u^a betrachten entsprechend der Energiedichte $T_{kl} u^k u^l = E_i E^i$. Die Erhaltungsgröße (27) kann dann entsprechend (14)

$$J = \widetilde{(k_a u^a)}^{-3} \int_S V\, dS \tag{28}$$

geschrieben werden, und unter den oben beschriebenen Voraussetzungen erhalten wir aus (28) und (10), daß die Größe

$$N^3 J = \tau^3 \int_S V\, dS\,, \tag{29}$$

die in natürlichen relativistischen Einheiten* wieder die Dimension einer Wirkung hat, für Gravitations-Wellenbündel (nahezu) konstant

* Das heißt $c = 1$, $f = 1/8\pi$.

ist. Daraus ist abzulesen, daß im Unterschied zum elektromagnetischen Fall das „Intensitätsintegral" (Flächenintegral von V) sich proportional zur vierten Potenz der „Frequenz" ändert.

Der Hauptunterschied zwischen dem Verständnis elektromagnetischer und gravischer Strahlung ist, daß bis jetzt im zweiten Fall Emissions- und Absorptionsvorgang nicht bekannt sind. Es muß deshalb offen gelassen werden, welche Beziehungen zwischen Veränderungen der Größe V und denjenigen Größen bestehen, die den inneren und äußeren Zustand der materiellen Körper, die mit dem Feld wechselwirken, beschreiben.

Dazu, daß die in den Abschnitten I und II konstruierten Erhaltungsgrößen die Dimension einer Wirkung haben, möchten wir noch bemerken: In der speziellen Relativitätstheorie nehmen die Integral-Erhaltungssätze für Energie und Impuls bei Benutzung beliebiger Koordinaten die Form

$$\oint_S T^{ab}\,\xi_b\,d\,S_a = 0$$

an, worin S eine geschlossene Hyperfläche und ξ^b einer der zehn erzeugenden Vektoren der infinitesimalen Lorentz-Transformationen ist. Auch diese Erhaltungsgrößen haben die Dimensionen einer Wirkung, wenn wir den Killing-Vektoren dieselbe Dimension geben wie den Koordinatendifferenzen. Entsprechendes gilt für diejenigen Erhaltungssätze in der allgemeinen Relativitätstheorie, die aus der Existenz lokaler Isometriegruppen folgen; man vergleiche dazu [10] und [14].

III. Sonderfälle

Aus der Ricci-Identität

$$k_{a;[bc]} = -\tfrac{1}{2} R_{iabc} k^i \tag{30}$$

folgt, daß man die Definition (II, a) auch so aussprechen kann:

a') Ein Nullfeld ist durch die Existenz eines Vektorfeldes k^a mit vertauschbaren zweiten kovarianten Ableitungen charakterisiert.

Die Bedingung $k_{a;[bc]}=0$ ist sicher erfüllt, wenn k^a ein konstanter Vektor, d.h. $k_{a;b}=0$ ist; also ist jede Vakuumlösung, die ein konstantes Vektorfeld enthält, ein Nullfeld. Die Konstanz von k^a ist gleichwertig damit, daß k_a wirbelfrei ($k_{[a,b]}=0$) und ein Killing-Vektor ($k_{(a;b)}=0$) ist. Es ist leicht zu sehen, daß g_{kl} genau dann ein solches Vektorfeld zuläßt, wenn in passenden Koordinaten die Fundamentalform die Gestalt

$$e^{2\varphi(\tau-\xi)}\,(d\tau^2 - d\xi^2) - d\sigma^2 \tag{31}$$

annimmt, wobei $d\sigma^2$ eine positiv definite quadratische Differentialform in zwei Variablen η, ζ ist, deren Koeffizienten noch von $\tau-\xi$ als Parameter abhängen.

---

[14] Bergmann, P. G.: Phys. Rev. **112**, 287 (1958).

Die bis jetzt explizit bekannten Nullfelder gehören alle der Robinsonschen Klasse[15] an; ROBINSONS Linienelement hat die Form (31), und zwar hängen sogar alle g_{kl} darin nur von $\tau-\xi$ ab, so daß die Metrik eine dreiparametrige Abelsche Bewegungsgruppe gestattet.

Bei Feldern mit konstantem k^a vereinfachen sich die von uns betrachteten Erhaltungssätze insofern, als k^a durch die Eigenschaft $k_{a;b}=0$ nicht nur bis auf die Transformationen (6), (7), sondern sogar bis auf einen konstanten Faktor festgelegt ist, so daß die Größe ν in (24) bis auf einen Zahlenfaktor ein durch das Feld bestimmter Skalar ist.

Eine ähnliche Normierung ist möglich, wenn jeder Strahl eine einzelne Linie schneidet, was näherungsweise für das elektromagnetische Strahlungsfeld einer Punktquelle zutrifft. Sei u^a der Einheitsvektor tangential zu der Weltlinie der Quelle; dann bestimmen die Bedingungen $u^a_{;b}k^b=0$ und $u_a k^a=-1$ die Felder u^a, k^a und μ (bzw. ν) eindeutig in einem vierdimensionalen Bereich.

Wenn k^a hyperflächennormal ist, kann k^a durch die Bedingung $k_{[a,b]}=0$ bis auf Transformationen (6) mit $A_{,[b}k_{c]}=0$ festgelegt werden. Dann gelten weitere Fortpflanzungsgleichungen, wie z.B. $F^{ab}_{\;;c}k^c+\frac{1}{2}\times F^{ab}k^c_{;c}=0$ bzw. $R^{abcd}_{\;\;;i}k^i+\frac{1}{2}R^{abcd}k^i_{;i}=0$, aus denen abzulesen ist: Bei harmonischem Vektorfeld k^a (d.h. $k_{[a,b]}=0$ und $k^a_{;a}=0$) werden F^{ab} bzw. R^{abcd} längs der Strahlen übertragen. Dies gilt also insbesondere für die Robinsonschen Gravitationswellen.

Die Verfasser danken Herrn Professor P. JORDAN, aus dessen Hamburger Seminar für allgemeine Relativitätstheorie diese Arbeit hervorgegangen ist, für vielfältige Anregung und Förderung. Ausgedehnte fruchtbare Diskussionen mit Herrn E. SCHÜCKING waren für diese Arbeit von wesentlichem Wert. Die Arbeit des einen Verfassers (E.) ist unterstützt worden durch die Akademie der Wissenschaften und der Literatur (Mainz). Der Hamburger Aufenthalt des anderen Verfassers (S.) ist ermöglicht durch eine Siftung von Herrn Dr. FRIEDRICH FLICK.

---

[15] BONDI, H.: Nature, Lond. **179**, 1072 (1957).