

## Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs

Par J. L. LIONS

(Reçu le 26 dec., 1961)

### 1. Introduction

1.1—Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert, avec  $V \subset H$ , l'injection de  $V$  dans  $H$  étant continue et  $V$  étant dense dans  $H$ . On désigne par  $(f, g)$  (resp.  $((u, v))$ ) le produit scalaire dans  $H$  (resp.  $V$ ); on pose:  $|f| = (f, f)^{1/2}$ ,  $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$ .

Soit  $u, v \rightarrow a(u, v)$  une forme sesquilinéaire continue sur  $V$ . On suppose que

$$(1.1) \quad \operatorname{Re} a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \text{ pour tout } v \in V.$$

Le triplet  $\{V, H, a(u, v)\}$  définit un opérateur  $A$  non borné dans  $H$ , de domaine  $D(A)$ , de la façon suivante (cf. par ex. Lions [1] chap. II): un élément  $u$  de  $V$  est dans  $D(A)$  si la forme semi-linéaire

$$v \rightarrow a(u, v)$$

est continue sur  $V$  pour la topologie induite par  $H$ ; alors

$$(1.2) \quad a(u, v) = (Au, v), \quad Au \in H,$$

ce qui définit  $A$ .

On munira toujours  $D(A)$  de la norme du graphe:  $(\|u\|^2 + \|Au\|^2)^{1/2}$ , qui fait de  $D(A)$  un espace de Hilbert.

Dans la terminologie de T. Kato [1], l'opérateur  $A$  est dit (lorsque (1.1) a lieu) *régulièrement accréitif*<sup>1)</sup>. (Dans les notations de T. Kato,  $V = D(\mathcal{D})$ ).

On définit la *forme adjointe*  $a^*(u, v)$  par

$$(1.3) \quad a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}, \quad u, v \in V.$$

Cette forme définit un opérateur  $A^*$ , par

$$(1.4) \quad a^*(u, v) = (A^*u, v), \quad u \in D(A^*),$$

dont on vérifie qu'il est l'adjoint de  $A$ .

Plusieurs auteurs (cf. la bibliographie de T. Kato [1]) ont défini les puissances fractionnaires  $A^\theta$  d'opérateurs  $A$  ayant diverses propriétés.

---

1) Au lieu de (1.1), M. Kato suppose seulement que  $\operatorname{Re} a(v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2$ .  
Mêmes résultats (raisonner sur  $A + \lambda$  au lieu de  $A$ ).

Sous les hypothèses précédentes (et même pour des opérateurs accréatifs, non nécessairement régulièrement accréatifs), M. T. Kato (cf. Kato [1], [2]) a démontré les résultats suivants :

$$(1.5) \quad D(A^\rho) = D(A^{*\rho}) \quad \text{pour } 0 \leq \rho < 1/2$$

(identité algébrique et normes équivalentes);

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } A_1, V_1, H_1 \text{ un deuxième triplet ayant des propriétés analogues} \\ \text{au triplet } A, V, H; \text{ si } \Pi \text{ est un opérateur linéaire continu de } H \\ \text{dans } H_1, \text{ appliquant continûment } D(A) \text{ dans } D(A_1), \text{ alors } \Pi \text{ applique} \\ \text{continûment } D(A^\rho) \text{ dans } D(A_1^\rho), 0 < \rho < 1. \end{array} \right.$$

(Ces résultats sont établis pour  $A$  accréatif).

En outre, M. T. Kato pose le problème de savoir si  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2}) = V$  lorsque  $A$  est régulièrement accréatif, et conjecture que ceci n'est pas vrai lorsque  $A$  est accréatif non régulièrement accréatif (cf. T. Kato [1, p. 268, Remark 1]).

1.2—Nous nous proposons d'étudier ces problèmes dans cet article.

Tout d'abord, la propriété d'interpolation (1.6) impose d'étudier les *relations entre  $D(A^\rho)$  et les espaces d'interpolation entre  $D(A)$  et  $H$* . C'est ce que nous faisons au n°3, à l'aide des *espaces de trace* (cf. Lions [2], [3], [4]); un rappel sur les espaces de trace est fait au n°2. La réponse est facile : les  $D(A^\rho)$  *coïncident* avec les espaces d'interpolation "naturels" entre  $D(A)$  et  $H$ .

Ceci étant fait, nous donnons aux n°5 et 6 *deux conditions suffisantes sous lesquelles  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$* .

La première (n°5) est simplement que  $D(A) = D(A^*)$  (ce qui naturellement n'entraîne pas que  $A = A^*$ !).

La deuxième (n°6) est plus technique-mais elle couvre tous les problèmes aux limites elliptiques "réguliers" (cf. n°6).

Nous donnons enfin (n°7) un exemple où,  $A$  étant accréatif *non* régulièrement accréatif, on a :  $D(A^{1/2}) \neq D(A^{*1/2})$ .

1.3—Nous utilisons systématiquement des méthodes de théorie d'interpolation. Pour cela, nous mettons en évidence au n°3 quelques théorèmes d'isomorphisme. Les résultats du n°5 sont, entre autres, démontrés par M. T. Kato dans l'article suivant celui-ci, par des méthodes différentes (cf. T. Kato [3]).

Le plan est le suivant :

1. Introduction.
2. Espaces de trace. Rappels.
3. Espaces de trace et espaces  $D(A^\rho)$ .
4. Théorèmes d'isomorphisme.

5. Applications (I).
6. Applications (II).
7. Un contre-exemple.

**2. Espaces de trace. Rappels.**

2.1—Soient  $A_0$  et  $A_1$  deux espaces de Banach, avec

$$A_0 \subset A_1,$$

l'injection de  $A_0$  dans  $A_1$  étant continue et  $A_0$  dense dans  $A_1$  (l'hypothèse  $A_0 \subset A_1$  n'est *nullement* indispensable—cf. Lions [3]).

On considère l'espace  $W(2, \alpha; A_0, A_1)$  des (classes de) fonctions  $t \rightarrow u(t)$  telles que

$$(2.1) \quad t^\alpha u \in L^2(0, \infty; A_0)$$

(i. e.  $\int_0^\infty t^{2\alpha} \|u(t)\|_{A_0}^2 dt < \infty$ ,  $u$  étant fortement mesurable à valeurs dans  $A_0$ ) et

$$(2.2) \quad t^\alpha \frac{du}{dt} \in L^2(0, \infty; A_1)$$

(la dérivée  $\frac{du}{dt}$  étant prise au sens des distributions vectorielles—L. Schwartz [1]). On suppose que

$$(2.3) \quad \frac{1}{2} + \alpha = \theta \in ]0, 1[.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{W(2, \alpha; A_0, A_1)} = \max \left( \|t^\alpha u\|_{L^2(0, \infty; A_0)}, \left\| t^\alpha \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, \infty; A_1)} \right)$$

c'est un espace de Banach.

Pour chaque  $u \in W(2, \alpha; A_0, A_1)$  on peut définir de façon unique  $u(0)$ ; on désigne par  $T(2, \alpha; A_0, A_1)$  l'espace décrit (dans  $A_1$ ) par  $u(0)$  lorsque  $u$  décrit  $W(2, \alpha; A_0, A_1)$ . Muni de la norme

$$(2.4) \quad \|a\|_{T(2, \alpha; A_0, A_1)} = \inf_{u(0)=a} \|u\|_{W(2, \alpha; A_0, A_1)}$$

c'est un espace de Banach.

Les espaces  $T(2, \alpha; A_0, A_1)$  entrent dans la famille des *espaces de trace* (cf. Lions [2], [3], [4]).

2.2—Nous utiliserons les propriétés suivantes de ces espaces. D'abord la *propriété d'interpolation* :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \{B_0, B_1\} \text{ est un deuxième couple d'espaces de Banach ayant des} \\ \text{propriétés analogues à celles du couple } \{A_0, A_1\}, \text{ et si } \Pi \text{ est un} \\ \text{opérateur linéaire continu de } A_i \text{ dans } B_i \text{ pour } i=0 \text{ et } i=1, \text{ (en bref :} \\ \Pi \in \mathcal{L}(A_i; B_i), \text{ alors} \\ \Pi \in \mathcal{L}(T(2, \alpha; A_0, A_1); T(2, \alpha; B_0, B_1)). \end{array} \right.$$

Ensuite la *propriété de dualité* :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } A_0 \text{ et } A_1 \text{ sont réflexifs (cf. détails dans Lions [3]), alors } (X' \text{ désignant de façon générale le dual de } X): \\ T(2, \alpha; A_0, A_1)' = T(2, -\alpha; A_1', A_0'). \end{array} \right.$$

2.3—Nous utilisons dans la suite les espaces de trace. On pourrait tout aussi bien utiliser les espaces d'interpolation construits à l'aide des fonctions holomorphes (cf. A. P. Calderón [1], J. L. Lions [5]; cf. aussi S. G. Krein [1], [2]), ces diverses constructions donnant le même résultat dans le cas qui nous intéresse (on pourrait aussi utiliser J. L. Lions [4]).

### 3. Espaces de trace et espaces $D(A^\rho)$ .

THÉORÈME 3.1—L'opérateur  $A$  étant défini par (1.2), avec (1.1), on a :

$$(3.1) \quad T(2, \alpha; D(A), H) = D(A^{1/2-\alpha}), \quad -1/2 < \alpha < 1/2,$$

avec normes équivalentes.

REMARQUE 3.1

Résultat valable—avec la même démonstration—en supposant  $A$  accréatif, non régulièrement accréatif.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1

Soit  $B$  un opérateur auto-adjoint strictement positif tel que

$$D(B) = D(A) \quad (\text{avec normes équivalentes}).$$

Alors, naturellement :

$$(3.2) \quad T(2, \alpha; D(A), H) = T(2, \alpha; D(B), H).$$

Par ailleurs, du résultat de Kato rappelé en (1.6), il résulte que

$$(3.3) \quad D(B^\rho) = D(A^\rho), \quad 0 < \rho < 1,$$

Mais, d'après Lions [2] :

$$(3.4) \quad T(2, \alpha; D(B), H) = D(B^{1/2-\alpha})$$

(on peut dans ce cas utiliser la décomposition spectrale de  $B$ ) et le théorème résulte alors de (3.2), (3.3), (3.4).

**4. Théorèmes d'isomorphisme.**

Nous avons les inclusions (avec injections continues):

$$D(A) \subset V \subset H, \quad D(A^*) \subset V \subset H,$$

et chaque espace étant dense dans le suivant. Si nous prenons les espaces anti-duals, en identifiant  $H$  à son anti-dual, il vient

$$(4.1) \quad D(A) \subset V \subset H \subset V' \subset D(A^*)'$$

et

$$(4.2) \quad D(A^*) \subset V \subset H \subset V' \subset D(A)'$$

Notons maintenant que de (1.1) résulte aussitôt ceci :

$$(4.3) \quad A \text{ (resp. } A^*) \text{ est un isomorphisme de } D(A) \text{ (resp. } D(A^*)) \text{ sur } H;$$

$$(4.4) \quad A \text{ (resp. } A^*) \text{ est un isomorphisme de } V \text{ sur } V'.$$

Considérons l'adjoint  $(A^*)^*$  de  $A^*$  considéré comme isomorphisme de  $D(A^*)$  sur  $H$ ;  $(A^*)^*$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $D(A^*)'$ , et comme  $(A^*)^*$  coïncide avec  $A$  sur  $D(A)$ , c'est un prolongement de  $A$ ; donc

$$(4.5) \quad A \text{ est un isomorphisme de } H \text{ sur } D(A^*)'.$$

De même

$$(4.5)^* \quad A^* \text{ est un isomorphisme de } H \text{ sur } D(A)'.$$

On peut maintenant *interpoler* de toutes les façons entre ces divers isomorphismes. On obtient, en particulier :

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \text{ (resp. } A^*) \text{ est un isomorphisme de } T(2, \alpha; D(A), H) \text{ (resp.} \\ T(2, \alpha; D(A^*), H)) \text{ sur } T(2, \alpha; H, D(A^*)') \text{ (resp. } T(2, \alpha; H, D(A)')) \end{array} \right.$$

D'après (2.6),  $T(2, \alpha; H, D(A^*)') = T(2, -\alpha; D(A^*), H)'$  et de même  $T(2, \alpha; H, D(A)') = T(2, -\alpha; D(A), H)'$ .

Tenant compte de ces relations dans (4.6) et prenant  $\alpha = 0$ , on obtient (en notant que  $T(2, 0; D(A), H) = D(A^{1/2})$  et  $T(2, 0; D(A^*), H) = D(A^{*1/2})$ ):

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \text{ (resp. } A^*) \text{ est un isomorphisme de } D(A^{1/2}) \text{ (resp. } D(A^{*1/2})) \text{ sur} \\ D(A^{*1/2})' \text{ (resp. } D(A^{1/2})'). \end{array} \right.$$

Les résultats des n°5 et 6 sont obtenus par comparaison de (4.4) et (4.7).

**5. Applications (I).**

THÉORÈME 5.1—*On suppose que  $A$  est donné par (1.2), (1.1) ayant lieu. Alors l'inclusion " $D(A^{1/2}) \subset V$ " est équivalente à " $D(A^{*1/2}) \supset V$ ". Même chose en échangeant  $A$  et  $A^*$ .*

DÉMONSTRATION. En effet,  $A$  étant un isomorphisme de  $V$  sur  $V'$  et de  $D(A^{1/2})$  sur  $D(A^{*1/2})'$ , l'inclusion " $D(A^{1/2}) \subset V$ " équivaut à " $D(A^{*1/2})' \subset V'$ ", ce qui équivaut à " $V \subset D(A^{*1/2})$ " d'où le théorème.

COROLLAIRE 5.1—Si  $D(A^{1/2}) \subset V$  et  $D(A^{*1/2}) \subset V$ , alors  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2}) = V$ .  
Même chose si l'on suppose que  $D(A^{1/2}) \supset V$  et  $D(A^{*1/2}) \supset V$ .

THÉORÈME 5.2—On suppose  $A$  donné par (1.2), (1.1) ayant lieu. Si  $D(A^{1/2}) \subset D(A^{*1/2})$ , alors  $D(A^{1/2}) \subset V \subset D(A^{*1/2})$ .

DÉMONSTRATION. De l'hypothèse résulte que  $D(A^{*1/2})' \subset D(A^{1/2})'$  d'où résulte que en particulier,  $A$  est un opérateur linéaire continu de  $D(A^{1/2})$  dans son dual. Donc, pour tout  $u \in D(A^{1/2})$ ,

$$| \langle Au, u \rangle | \leq c_1 \|u\|_{D(A^{1/2})}^2.$$

Pour  $u \in D(A)$ , on a :  $\langle Au, u \rangle = a(u, u)$  donc

$$\|u\| \leq c_2 \|u\|_{D(A^{1/2})} \quad \text{pour tout } u \in D(A).$$

Comme  $D(A)$  est dense dans  $D(A^{1/2})$ , on en déduit que

$$\|u\| \leq c_2 \|u\|_{D(A^{1/2})} \quad \text{pour tout } u \in V$$

i. e.  $D(A^{1/2}) \subset V$ .

Alors (Théorème 5.1),  $V \subset D(A^{*1/2})$ , d'où le théorème.

COROLLAIRE 5.2—Si  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$  alors  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2}) = V$ .

THÉORÈME 5.3—On suppose  $A$  donné par (1.2), (1.1) ayant lieu. Si  $D(A) = D(A^*)$ , alors  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2}) = V$ .

DÉMONSTRATION. En effet,  $D(A^{1/2}) = T(2, 0; D(A), H) = T(2, 0; D(A^*), H) = D(A^{*1/2})$  et le Théorème résulte du corollaire 5.2.

REMARQUE 5.1—L'hypothèse  $D(A) = D(A^*)$  est vérifiée lorsque  $A$  est un opérateur différentiel elliptique, pour les conditions aux limites de Dirichlet, toutes les données étant suffisamment régulières.

## 6. Applications (II).

6.1—On va démontrer le

THÉORÈME 6.1—On suppose  $A$  donné par (1.2), (1.1) ayant lieu. On suppose en outre

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un espace de Hilbert } X, X \subset H, \text{ tel que;} \\ \text{(i) } V \text{ soit un sous-espace fermé de } T(2, 0; X, H); \\ \text{(ii) } D(A) \subset X, D(A^*) \subset X. \end{array} \right.$$

Alors  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2}) = V$ .

(On donne au point 6.2 des exemples où (6.1) est vérifiée).

DÉMONSTRATION. Désignons par  $\mathcal{W}$  l'espace des fonctions  $t \rightarrow u(t)$  une fois continûment différentiables de  $t \geq 0 \rightarrow D(A)$  et à support compact ;  $\mathcal{W}$  est dense dans  $W(2, 0 ; D(A), H)$ .

L'application  $u \rightarrow u(0)$  de  $\mathcal{W}$  dans  $D(A)$  est continue lorsque l'on munit  $\mathcal{W}$  de la topologie de  $W(2, 0 ; D(A), H) = W$  et  $D(A)$  de la topologie induite par  $T(2, 0 ; D(A), H) = D(A^{1/2})$ . Comme  $D(A) \subset X$ , on a  $T(2, 0 ; D(A), H) \subset T(2, 0 ; X, H)$  de sorte que

$$\|u(0)\|_{T(2,0; X, H)} \leq c_1 \|u\|_W, \quad u \in \mathcal{W}.$$

Comme  $V$  est fermé dans  $T(2, 0 ; X, H)$ , ceci équivaut à

$$\|u(0)\| \leq c_2 \|u\|_W, \quad u \in \mathcal{W}.$$

Par conséquent  $u \rightarrow u(0)$  se prolonge par continuité en une application de  $W$  dans  $V$  ; or  $u \rightarrow u(0)$  applique  $W$  sur  $D(A^{1/2})$ , d'où

$$D(A^{1/2}) \subset V.$$

Même chose pour  $A^*$ , d'où le théorème par application du corollaire 5.1.

6.2—On va maintenant donner des exemples où (6.1) est vérifiée.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$ , borné, de frontière régulière. On désigne par  $H^k(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions  $u \in L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$  telles que  $D^p u \in L^2(\Omega)$  pour  $|p| \leq k$  ; pour  $u, v \in H^k(\Omega)$ , on pose

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|p| \leq k} \int_{\Omega} (D^p u)(\overline{D^p v}) dx,$$

ce qui munit  $H^k(\Omega)$  d'une structure hilbertienne.

On désigne par  $H_0^k(\Omega)$  l'adhérence dans  $H^k(\Omega)$  du sous-espace des fonctions à support compact dans  $\Omega$ .

Soit  $V$  un sous-espace fermé de  $H^m(\Omega)$  avec

$$(6.2) \quad H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega).$$

Nous appliquons les résultats précédents avec  $V$  comme ci-dessus et  $H = H^0(\Omega)$  ; la forme  $a(u, v)$  étant donnée (avec (1.1)), on dit que le triplet  $\{V, H, a(u, v)\}$  est régulier si

$$(6.3) \quad D(A) \subset H^{2m}(\Omega), \quad D(A^*) \subset H^{2m}(\Omega).$$

Il en est ainsi si  $a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} \alpha_{pq} D^p u \overline{D^q v} dx$ , les fonctions  $\alpha_{pq}$  étant suffisamment régulières dans  $\overline{\Omega}$ , et si  $V$  est défini par des relations linéaires à coefficients réguliers entre les valeurs de  $u$  et de ses dérivées d'ordre  $\leq m-1$  sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  (cf. L. Nirenberg [1], Browder [1]). [On peut également incorporer des intégrales sur  $\Gamma$  dans  $a(u, v)$ ].

Ceci étant posé, l'hypothèse (6.1) a lieu, avec  $X = H^{2m}(\mathcal{Q})$ . En effet,  $T(2, 0; H^{2m}(\mathcal{Q}), H^0(\mathcal{Q})) = (T(2, 0; X, H)) = H^m(\mathcal{Q})$  (cf. Lions-Magenes [1]) et  $V$  est *par hypothèse* un sous-espace fermé de  $H^m(\mathcal{Q})$ .

REMARQUE 6.1—Il est bon de rappeler que les problèmes aux limites *mêlés* n'entrent pas dans la catégorie précédente. Donc, *par exemple*, pour un opérateur elliptique  $A$  du 2ème ordre, non auto-adjoint, avec condition aux limites de Dirichlet sur une partie de la frontière et condition aux limites de Neumann sur le reste de la frontière, on ignore si  $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$ . Même chose d'ailleurs avec le problème de Dirichlet et une *frontière irrégulière*.

## 7. Un contre-exemple.

On considère l'opérateur  $A$  défini dans T. Kato [1], p. 252.

On va voir que, pour cet opérateur (accrétif mais non régulièrement accrétif)  $D(A^{1/2})$  est strictement contenu dans  $D(A^{*1/2})$  avec une topologie plus fine.

En effet, si  $\mathcal{Q} = ]0, \infty[$ , on a (cf. T. Kato [1]):

$$D(A) = H_0^1(\mathcal{Q}), \quad D(A^*) = H^1(\mathcal{Q}) \quad (\text{notations du n}^\circ 6)$$

et notre affirmation résulte alors de Lions-Magenes [2, Théorème 5.2].

Nancy

## Bibliographie

F. E. Browder

- [1] On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **9** (1956), 351-361.

A. P. Calderón

- [1] Intermediate spaces and interpolation, Colloque de Varsovie, Septembre, 1960.

T. Kato

- [1] Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), 246-274.  
 [2] A generalization of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad., **37** (1961), 305-308.  
 [3] Fractional powers of dissipative operators, II, This Journal,

S. G. Krein

- [1] Un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, **130** (1960), 1162-1165.  
 [2] Sur la notion d'échelle normale d'espaces, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, **132** (1960), 510-513.

J. L. Lions

- [1] Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer (collection Jaune), t. 111, 1961.  
 [2] Théorèmes de trace et d'interpolation (I), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1959), 389-403.



- [3] Sur les espaces d'interpolation ; dualité, *Math. Scand.* **9** (1961), 147-177.
  - [4] Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, *Bull. Math. R. P. R. Bucarest*, **2** (1958), 419-432.
  - [5] Une construction d'espaces d'interpolation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **251** (1960), 1853-1855.
- J. L. Lions-E. Magenes
- [1] Problèmes aux limites non homogènes (II), *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 137-178.
  - [2] Id., (IV), *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (1961),
- L. Nirenberg
- [1] Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 648-674.
- L. Schwartz
- [1] Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier*, **7** (1957), 1-139, **8**, (1958), 1-209.