ESPACES DE HILBERT POUR LESQUELS L'APPROXIMATION SPECTRALE EST IMPOSSIBLE EN GENERAL

PAR

E. J. AKUTOWICZ

1. Introduction

Chaque suite fixée $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0,1,\cdots}$ de nombres non négatifs définit un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Lambda$ consistant en les suites numériques complexes $a = \{a_n\}_{n=0,\pm1,\cdots}$ avec le produit scalaire,

$$(a, b)_\Lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n a_n \bar{b}_n \qquad (\lambda_{-n} = \lambda_n).$$

On considère chaque suite a de $\mathcal{H}_\Lambda$ comme la suite des coefficients de Fourier d'un objet dual α, voire une distribution, sur le tore $\mathbf{T}$ à une dimension, et l'on transpose la structure d'espace de Hilbert à ces distributions:

$$(\alpha, \beta)_\Lambda = (a, b)_\Lambda \qquad (a = \mathfrak{F}\alpha, b = \mathfrak{F}\beta),$$

$$\| \alpha \|_\Lambda = \sqrt{(a, a)_\Lambda}\,.$$

On désignera ce dernier espace de Hilbert de distributions α par $\mathcal{G}_\Lambda$.

La question de l'approximation spectrale (ou de synthèse spectrale) est alors de savoir si, pour tout ensemble fermé E de $\mathbf{T}$, toute distribution α de l'espace $\mathcal{G}_\Lambda$ portée par E soit adhérente dans la norme de $\mathcal{G}_\Lambda$ à l'ensemble des mesures de $\mathcal{G}_\Lambda$ portées par E.

La résponse est affirmative si la suite $\{\lambda_n\}$ strictement positive est un quotient de la forme $\lambda_n = \alpha_n/\beta_n$ où $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ sont deux suites définies négatives paires telles que

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \beta_n > 0.$$

Une démonstration complète de ce résultat se trouve dans [5]. Elle dépend de la théorie du potentiel.

En particulier, si

$$\lambda_n = (1 + n^2)^\alpha, \qquad -1 \leq \alpha \leq 1,$$

la synthèse spectrale est valable dans l'espace $\mathcal{G}_\Lambda$.

Nous verrons dans les lignes qui suivent que les faits sont entièrement différents si l'on abandonne l'hypothèse selon laquelle λ_n est strictement positive. Nous nous restreindrons au cas où

$$\sum_k \lambda_k < \infty.$$

Nous ferons usage d'une méthode statistique, inventée et exploitée par Kahane et Salem [4], [7]. L'idée est de rendre aléatoire la distribution de Malliavin, qui a été étudiée pour la première fois dans [9], [10].

Received March 1, 1968.

2. Des processus Gaussiens

Une suite $\{B_k\}_{k=0,1,\cdots}$ de nombres réels, non négatifs servira à déterminer un processus Gaussien X, réel et stationnaire, sur le cercle $\mathbf{T}$, tel que

$$EX(t) = 0 \qquad t \in \mathbf{T}$$

$$E(X(t_1)X(t_2)) = B(t_1 - t_2), \quad t_1 \text{ et } t_2 \in \mathbf{T}$$

où

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos kt.$$

Nous allons imposer deux conditions sur le processus X, c'est-à-dire sur la suite $\{B_k\}$:

$$(1) \qquad \text{Prob}\left\{\sum_n \lambda_n | X_n |^2 < \infty\right\} = 1,$$

où X_n désigne le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de X. Autrement dit, la suite $\{X_n\}$ appartient à l'espace $\mathcal{H}_\Lambda$ avec probabilité 1.

$$(2) \qquad \text{Prob}\left\{\sum_n \lambda_n | X_n | < \infty\right\} = 1.$$

Si $\Lambda(t) = \sum_n \lambda_n \cos nt$, ceci signifie que la convolution $\Lambda * X$ appartient avec probabilité 1 à la classe A des séries de Fourier absolument convergentes.

Si $\lambda_n \sqrt{B_n} = o(1)$, $n \to \infty$, alors la condition (1) est équivalente à

$$(3) \qquad \sum_n \lambda_n B_n < \infty$$

et la condition (2) est équivalente à

$$(4) \qquad \sum_n \lambda_n \sqrt{B_n} < \infty.$$

Car si (4) est vérifiée, on a

$$E\left(\sum_n \lambda_n | X_n |\right) = \sum_n \lambda_n E| X_n | \leq \sum \lambda_n \sqrt{E| X_n |^2} = \sum \lambda_n \sqrt{B_n} < \infty;$$

donc (2) est vérifiée, Réciproquement, si la série

$$\sum_n \lambda_n | X_n |$$

converge avec probabilité 1, le théorème des trois séries de Kolmogoroff [8, dernière phrase] s'applique puisque les variables aléatoires $\lambda_1| X_1 |$, $\lambda_2| X_2 |$, $\cdots$ sont mutuellement indépendantes. Il existe donc, en particulier, une constante $c > 0$ telle que la série tronquée

$$\sum_n E(\lambda_n| X_n |)^c \qquad (X^c = X \text{ si } | X | \leq c,\ X^c = 0 \text{ si } | X | > c)$$

converge. Mais

$$E(\lambda_n | X_n |)^c = \frac{1}{\sqrt{2\pi B_n}} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_n | x |)^c e^{-x^2/2B_n}\, dx$$

$$= \frac{\lambda_n}{\sqrt{2\pi B_n}} \int_{-c/\lambda_n}^{c/\lambda_n} | x |\, e^{-x^2/2B_n}\, dx$$

$$= \frac{2\lambda_n \sqrt{B_n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{c/\lambda_n\sqrt{B_n}} x e^{-x^2/2}\, dx,$$

d'où la convergence (4) puisque $\lambda_n \sqrt{B_n}$ tend vers 0. L'équivalence de (2) et (3) se vérifie de la même manière.

3. L'impossibilite de l'approximation spectrale

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Soient* $\{B_k\}_{k=0,1,\cdots}$ *et* $\{\lambda_k\}_{k=0,1,\cdots}$ *deux suites non négatives telles que les séries* (3) *et* (4) *convergent. Si la fonction*

$$C(t) = \sum_k \lambda_k^2 B_k \cos kt,$$

admet la minoration,

$$C(0) - C(t) \geq M|t|^\delta, \tag{5}$$

avec deux constantes $M > 0$ *et* $0 < \delta < \frac{1}{2}$, *alors l'approximation spectrale est en général impossible dans* $\mathcal{G}_\Lambda$.

Démonstration. La condition (3) implique que la fonction aléatoire réelle

$$f(t) \equiv \Lambda * X(t) = \sum_n \lambda_n X_n e^{int} \tag{6}$$

appartient, avec probabilité 1, à la classe A des séries de Fourier absolument convergentes.

On va maintenant étudier l'intégrale de Malliavin

$$\int_{-\infty}^{\infty} iu \exp (iuf(t))\, du \tag{7}$$

et montrer que cette intégrale définit presque sûrement une distribution de la classe $\mathcal{G}_\Lambda$, qu'on notera $\delta'(f(t))$.

Dans ce but, considérons le développement de Fourier

$$\exp (iuf(t)) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} p_n(u) \exp (int),$$

où

$$p_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp i(uf(t) - nt)\, dt.$$

Puisque la loi de répartition de la variable aléatoire $f(t)$, et donc de $f(t_1) - f(t_2)$, est Gaussienne, on obtient en faisant usage du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} E \sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt_1\, dt_2 \sum_n \lambda_n \exp in(t_1 - t_2) E \exp iu(f(t_1) - f(t_2)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt_1\, dt_2\, \Lambda(t_1 - t_2) \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 E[f(t_1) - f(t_2)]^2\right). \end{aligned}$$

Vu la définition (6) de $f(t)$, on a

$$\begin{aligned} E(f(t_1) - f(t_2))^2 &= E(\textstyle\sum_n \lambda_n X_n(e^{int_1} - e^{int_2}))^2 \\ &= \textstyle\sum_n \lambda_n^2 |e^{int_1} - e^{int_2}|^2 E X_n^2 \\ &= 4 \textstyle\sum_n \lambda_n^2 B_n \sin^2 \frac{1}{2}n(t_1 - t_2) = 2(C(0) - C(t_1 - t_2)). \end{aligned}$$

On a donc, d'après la condition (5),

$$E(f(t_1) - f(t_2))^2 \geq M |t_1 - t_2|^\delta, \quad M > 0, 0 < \delta < \tfrac{1}{2}.$$

Ceci implique les majorations suivantes:

$$\begin{aligned} E \sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \iint dt_1\, dt_2 \Lambda(t_1 - t_2) \exp\left(-\frac{1}{2} Mu^2 |t_2 - t_1|^\delta\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{t_1 t_2} \Lambda(t_1 - t_2) \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} Mu^2 |t|^\delta\right) dt \\ &\leq \begin{cases} C^{te} & \text{si } |u| \leq 1, \\ C^{te} \cdot |u|^{-2/\delta} & \text{si } |u| \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E \sqrt{\sum_n \lambda_n \left| \int u p_n(u)\, du \right|^2} &\leq E \int_{-\infty}^{\infty} |u| \sqrt{\sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2}\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |u| E \sqrt{\sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2}\, du \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u| \sqrt{E \sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2}\, du \\ &\leq C^{te} + C^{te} \int_1^{\infty} |u|^{1-1/\delta}\, du \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\delta'(f) \in \mathcal{G}_\Lambda$ avec probabilité 1.

4. Conclusion de la demonstration

Comme élément de $\mathcal{G}_\Lambda$, $\delta'(f)$ est une distribution de la classe $\mathfrak{D}'$ de Schwartz (Cf. [12, Chap. I, pp. 31–32; Chap. VII, §1]). Une telle distribution est déterminée par ses valeurs sur les fonctions indéfiniment dérivables sur le cercle $\mathbf{T}$.

En particulier, le support de $\delta'(f)$ est déterminé par les valeurs de $\delta'(f)$ prises sur $\mathfrak{D}$.

LEMME 2. *Le support de $\delta'(f)$ est situé dans l'ensemble des zéros de $f = \Lambda * X$.*

DÉMONSTRATION (Kahane [4], [7]). Soit $g \in \mathfrak{D}$ et ayant son support disjoint de l'ensemble des zéros de f. Alors la fonction

$$g/(\Lambda * X)^2$$

est localement dans A, donc dans A (voir [11, p. 133–134]). On a donc

$$g = h\cdot(\Lambda * X)^2 \quad \text{avec } h \in A.$$

Il en résulte, moyennant deux intégrations par parties,

$$\begin{aligned}\langle\delta'(f), g\rangle &= \langle\delta'(f), h\cdot f^2\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} iu\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)f(t)^2 \exp\,(iuf(t))\,dt\right\} du = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

La fonction g étant arbitraire, la conclusion du Lemme 2 en résulte.

LEMMA 3. *On a*

$$(X,\ \delta'(\Lambda * X))_\Lambda = \langle\Lambda * X, \delta'(\Lambda * X)\rangle \neq 0$$

avec probabilité positive.

Démonstration. En posant $h \equiv 1$ et $g = \Lambda * X$ dans (8), il vient

$$\langle\Lambda * X, \delta'(\Lambda * X)\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} p_0(u)\,du.$$

L'espérance mathématique de ceci est

$$\begin{aligned}E\int_{-\infty}^{\infty} p_0(u)\,du &= \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\,(iu\Lambda * X(t))\,dt\right)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2E[\Lambda * X(t)]^2\right)dt \\ &> 0,\end{aligned}$$

ce qui entraine la conclusion du Lemma 3.

Maintenant, soit δ_t la mesure de Dirac en $t \in E$ = ensemble des zéros de $\Lambda * X$. Alors, d'après le Lemme 2, l'ensemble E est non vide dès que $\delta'(\Lambda * X)$ est non nulle, ce qui est vérifié pour un ensemble V de trajectories X de probabilité positive, d'après le Lemme 3. C'est-à-dire, on a d'une part,

$$(X, \delta_t)_\Lambda = \langle\Lambda * X, \delta_t\rangle = \Lambda * X(t) = 0, \qquad X \in V,\ t \in E, \tag{9}$$

et d'autre part,

$$(X, \delta'(f))_\Lambda \neq 0, \qquad X \in V. \tag{10}$$

Les relations (9) impliquent, pour chaque $X \in V$, que

$$(X, \mu)_\Lambda = \int_E \Lambda * X(t)\,d\mu(t) = 0$$

pour chaque mesure $\mu \in \mathcal{G}_\Lambda$ portée par l'ensemble E. La relation (10) montre que le sous-espace des mesures de $\mathcal{G}_\Lambda$ portées par E n'est pas dense dans l'espace des distributions de $\mathcal{G}_\Lambda$ portées par E. Autrement dit, l'approximation spectrale est impossible en général dans l'espace hilbertien $\mathcal{G}_\Lambda$. La démonstration du théorème est ainsi achevée.

5. Un cas particulier

Considérons un poids $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0,1,\cdots}$ lacunaire, c'est-à-dire $\lambda_k = 0$ sauf pour les indices ayant la forme $k = p^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, p entier ≥ 2. Fixons β, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, et posons

$$B_k = \lambda_k^{-2} k^{-\beta} \quad \text{si } k = p^n,\ n = 0, 1, \cdots,$$
$$B_k = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

Rappelons que la fonction classique de Weierstrass,

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n\beta} \cos p^n t,$$

appartient à la classe Lip β, mais $w \notin$ Lip δ pour $\delta > \beta$ (Cf. Zygmund [13, pp. 46–47]). Ceci implique pour tout $t \in \mathbf{T}$,

$$w(0) - w(t) \geq M|t|^\delta \qquad (\beta < \delta < \tfrac{1}{2}),$$

pour une constante $M > 0$, car $w(t)$ est "le moins continu" pour $t = 0$. D'autre part, les séries (3) et (4) convergeront si

$$\lambda_{p^n} = (1 + p^{2n})^\alpha, \qquad 0 > \alpha > -\tfrac{1}{4}.$$

Donc l'approximation spectrale est en général impossible dans ces cas. Cf. l'Introduction.

Bibliographie

1. A. Beurling, *Sur les spectres des fonctions*, Colloque International sur l'analyse harmonique, Nancy, 1947, Publ. C.N.R.S., Paris 1949, p. 9–29.
2. A. Beurling and J. Deny, *Dirichlet spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 45 (1959), p. 208–215.
3. I. M. Gelfand and N. J. Wilenkin, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*, IV, *Einige Anwendungen der harmonischen Analyse, Gelfandsche Raumtripel*, Hochschulbücher für Mathematik, Band 50, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.
4. J.-P. Kahane, *Sur la synthèse harmonique dans* $\mathcal{L}^\infty$ Anais da Académia Brasiliera Ciências, vol. 32 (1960), p. 179–189.
5. ——— , *Quotients des fonctions définies négatives* (d'après Beurling & Deny), Séminaire N. Bourbaki, Nov. 1966.
6. J.-P. Kahane and P. Malliavin, *Appendice au livre de Guelfand, Raikov et Šilov*, Les anneaux normés commutatifs, Gauthier-Villars, Paris, 1964, pp. 235–256.
7. J.-P. Kahane and R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Chapitre IX, Actualités Sci. Ind., 1301, Paris, 1963.
8. A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Erg. Mat., Springer, Berlin, 1933.

9. P. MALLIAVIN, *Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite*, C. R. Acad. Sci. Paris, T. 248 (1959), pp. 2155–2157.
10. ———, *Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts*, Publ. Math. I.H.E.S., No 2 (1959), pp. 61–68.
11. W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Interscience, New York, 1962.
12. L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.
13. A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, vol. I, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
MONTPELLIER, FRANCE