Estimation of Weibull Renewal Function for Censored Data

Cigdem Cengiz (Corresponding author)
Faculty of Arts and Sciences, Bitlis Eren University
Besminare M. Rahvan Campus Bitlis, Turkey
E-mail: cigdemcengiz44@gmail.com

Ayse Metin Karakas
Faculty of Arts and Sciences, Bitlis Eren University
Besminare M. Rahvan Campus Bitlis, Turkey
E-mail: akarakas@beu.edu.tr

Abstract

In this study, the weibull renewal process in which interrenewal times are weibull distributed is considered. In case of random right censored sample, a parametric estimator for the value of weibull renewal function is proposed based on the maximum likelihood estimators of the unknown parameters of weibull distribution.

Key Words: Weibull distribution, Renewal process, renewal function, censoring

Bilinmeyen Veri için Weibull Yenileme Fonksiyonun Tahminlenmesi

Özet

Bu çalışmada, iç yenileme zamanlı weibull dağılımı olan weibull yenileme süreci ele alınmıştır. Rastgele veri örneği durumunda, weibull yenileme fonksiyonu için weibull dağılımlarının bilinmeyen parametrelerin maksimum olabilirlik tahminleyici tabanlı bir parametrik tahminleyici amaçlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Weibull dağılımı, yenileme süreci, yenileme fonksiyonu, , bilinmeyen

1. Giriş

$\{X_n,\, n=1,2,...\}$ negatif olmayan, bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. $F(0)=P(X_n=0)<1$ olsun.

X_n: $(n-1)$. yenileme yapıldıktan sonra, n .yenilemeye kadar geçen zaman olarak ifade edilsin.

$S_0 = 0$, $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$ olmak üzere S_n rasgele değişkeni n. yenileme yapılıncaya kadar geçen zamandır. Her $t \geq 0$ için $N(t)$,

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\} \tag{1}$$

ile tanımlansın. $N(t)$ sadece t zamanına kadar yani $[0,t]$ zaman aralığındaki yenilemelerin sayısıdır. Bu şekilde tanımlanan $N(t)$ yenileme rasgele değişkeni ve $\{N(t),\, t \geq 0\}$ stokastik süreci bir yenileme süreci olarak adlandırılır (Ross 1983).

$\{N(t),\ t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere,

$$M(t) = E(N(t)), \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

ile verilen M ortalama değer fonksiyonuna yenileme fonksiyonu denir (Karlin ve Taylor 1975). Burada $M(t)$, $[0,t]$ zaman aralığında yapılan yenilemelerin ortalama sayısıdır.

$$I_k = \begin{cases} 1, & S_k \leq t \\ 0, & S_k > t \end{cases} \tag{3}$$

olsun.

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \tag{4}$$

olup

$$E(N(t)) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t) \tag{5}$$

elde edilir. O halde

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t) \ , \qquad t \geq 0 \tag{6}$$

dir. Burada * Stieltjes konvolüsyon işlemini göstermektedir.

Denklem 6'in kullanılmasıyla M yenileme fonksiyonu için bir integral denklemi elde edilebilir. $F^{(k+1)*}(t)$ yerine matematiksel olarak denk olan $\int_0^t F^{k*}(t-x)dF(x)$ integralinin alınmasıyla

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x)$$
$$= F(t) + F*M(t), \quad t \geq 0 \tag{7}$$

bulunur. Bu integral denkleme yenileme denklemi adı verilir. Buna göre denklem 7

$$M(t) = F(t) + \int_o^t F(t-x)dM(x), \qquad t \geq 0 \tag{8}$$

olarak yazılabilir.

M yenileme fonksiyonu genelde iki parametreli üstel, düzgün, hiper üstel ve gamma dağılımı dışında analitik olarak elde edilemez. Bu durumda M sayısal olarak elde edilebilir. Literatürde Laplace ve ters Laplace dönüşümlerinin hesabına, kuvvet serileri açılımına, kübik spline yaklaşımına ve yenileme integral denkleminin sayısal hesabına dayalı bazı yöntemler vardır (Baxter ve ark. 1982; Xie 1989). Kolay olarak programlanabilmesi hemen hemen tüm durumlarda basitliği ve yakınsaklığı ile iyi sonuçlar veren ve diğer bilinen yöntemlerle karşılaştırıldığında uygulanabilirliği daha fazla olan bir yöntem aşağıda tarif edilen Xie'nin RS (Rieman-Stieltjes) yöntemidir (Xie 1989).

Riemann-Stieltjes integralin tanımının ışığı altında $\int_a^b g(x)dh(x)$ integrali, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması $\Delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ olmak üzere,

$$\int_a^b g(x)dh(x) \approx \sum_{i=1}^{n} g((x_i + x_{i-1})/2)(h(x_i) - h(x_{i-1})) \tag{9}$$

şeklinde yazılabilir. Riemann-Stieltjes integralinin sayısal hesaplanabilmesi için kullanılabilecek bu formülde parçalanmanın normu küçüldükçe yaklaşımın daha iyi olacağı açıktır. Denklem 8 incelendiğinde t verilmiş bir değer ve $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ şartını sağlayan bir parçalanma olsun. Bu durumda

$$M(t_i) = F(t_i) + \int_0^{t_i} F(t_i - x)dM(x)$$

şeklinde olup denklem 9'ün kullanılmasıyla

$$M(t_i) \approx F(t_i) + \sum_{j=1}^{i} F(t_i - (t_j + t_{j-1})/2)(M(t_j) - M(t_{j-1})) \tag{10}$$

bulunur. Böylece $T_i = \sum_{j=1}^{i-1} F(t_i - (t_j + t_{j-1})/2)(M(t_j) - M(t_{j-1}))$ alındığında $M(t_i)$ ardışık olarak,

$\widehat{M}(t_0) = 0$ olmak üzere

$$\widehat{M}(t_i) = \frac{F(t_i) + T_i - F(t_i - (t_i + t_{i-1})/2)\widehat{M}(t_{i-1})}{1 - F(t_i - (t_i + t_{i-1})/2)}, \; i = 1,2,...,n \tag{11}$$

ile yaklaşık olarak hesaplanabilir (Xie 1989).

Bu yöntem özellikle f olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmediği ve aykırı noktalara sahip iken faydalıdır.

F dağılım fonksiyonu yerine f olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde ve F'nin kapalı bir formda ifadesi yok ise F dağılım fonksiyonu

$$F(t_i) = F(t_{i-1}) + f((t_i + t_{i-1})/2)\frac{t}{n}, \qquad i = 1,2,...,n \tag{12}$$

formülü ile kolaylıkla hesaplanabilir. Denklem 7 ve denklem 8 teorik olarak denktirler. Literatürde en yaygın olanı denklem 7 olmasına rağmen RS yöntemi 3 nolu denkleminin çözümüne kısıtlanmıştır. Eşit olmayan adım uzunlukları kullanılırsa denklem 8 ardışık çözüm için daha basit görünür. Aynı zamanda denklem 7 yerine denklem 8 kullanılmasının temel avantajı $F(t)$'nin büyük t'ler için hemen hemen sabit olmasıdır ve böylece $F(t_i) - F(t_{i-1})$ deki yuvarlatma hatası nispeten büyük olacaktır.

1. Sağdan Rasgele Sansürlü Örneklem Durumunda Parametre Tahmini Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini

Sansürleme, zaman ve maliyet gibi bir takım sınırlamalar nedeniyle, örneklemdeki birimlerden elde edilen gözlemlerin analize dahil edilememesi veya elde edilemeyen bilgilerin göz ardı edilmesidir. Örneğin, sabit ya da rasgele takip süreli çalışmalarda, belirlenen süre sonunda ilgilenilen olayın (bozulma gibi) hala gerçekleşmemiş olmasıdır. Bu tür durumlarda karşımıza çıkan gözlemlere sansürlü veriler adı verilir

Literatürde farklı sansürleme çeşitleri verilmiştir (Lawless 2003). Bu çalışmada sansürleme çeşitlerinden yalnızca sağdan rasgele sansürleme ile ilgilenmekteyiz. Bu kısımda F dağılım fonksiyonu fonksiyonel olarak bilinirken, bilinmeyen $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ parametrelerinin sağdan rasgele sansürlenmiş örneklemine dayalı olarak en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilmesi üzerinde durulacaktır.

$i=1,2,\ldots,n$ için Y_i i. parçanın ömrünü ve T_i i. parça ile ilgili sansürleme rasgele değişkenini göstersin. Burada hem Y_i ($i=1,2,\ldots,n$)'ler hem de T_i ($i=1,2,\ldots,n$)'ler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir. Ayrıca Y_i ($i=1,2,\ldots,n$) ve T_i ($i=1,2,\ldots,n$) rasgele değişkenleri bağımsızdır.

$i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere i. bileşenin T_i rasgele değişkeni ile sansürlenmesi altında i. bileşen için sansürlü gözlemimiz $X_i=\min(Y_i,T_i)$ 'dir. Bu şekilde oluşturulan $X_1,\ldots$ rasgele değişkenlerine 'sağdan rasgele sansürlenmiş n birimlik örneklem' denir.

Yenileme süreçleri ile ilgili uygulamalarda çoğu kez bu tip gözlemler ile karşılaşılır. Örneğin, yeni çıkan bir ürün farklı zamanlarda satılır ve üretici bu satılan ürünlerin bozulma sürelerini 12 ay boyunca izlenirse, satılan ürünlerin ömürleri karşımıza sağdan rasgele sansürlenmiş veriler olarak çıkar.

$i=1,2,\ldots,n$ için Y_i rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F ve olasılık yoğunluk fonksiyonu f ile gösterelim. F şekilsel olarak bilinirken bazı parametreleri bilinmesin. $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r$ F 'in bilinmeyen parametrelerini göstersin. Bu durumda $X_1,\ldots$ sağdan rasgele sansürlü örneklemine dayalı olarak $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r$ parametrelerinin tahminleri yardımıyla F 'nın bir noktadaki tahminini yapabiliriz.

T_i ($i=1,2,\ldots,n$) rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu G ve olasılık yoğunluk fonksiyonunu g ile gösterelim. $i=1,2,\ldots,n$ için,

$$I_i=\begin{cases}1, & Y_i\le T_i\\ 0, & Y_i>T_i\end{cases} \tag{13}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}X_i&=\min(Y_i,T_i)\\ &=Y_iI_i+T_i(1-I_i)\end{aligned} \tag{14}$$

yazılabilir. . ($I_i=1$) olayı i. bileşen için sansürlemenin yapılmadığını gösterirken . ($I_i=1$) olayı sansürlemenin yapıldığını gösterir. Şimdi ilk olarak sağdan rasgele sansürlü $X_1,\ldots$ örneklemi durumunda olabilirlik fonksiyonunun oluşturulması için X_i ve I_i ($i=1,2,\ldots,n$) rasgele değişkenlerinin ortak dağılımlarını bulalım.

$$\begin{aligned} X_i = x_i, I_i = 1 &\Leftrightarrow X_i = x_i \quad , \; Y_i \le T_i \\ &\Leftrightarrow X_i = Y_i = x_i , \; X_i \le T_i \\ &\Leftrightarrow Y_i = x_i \quad , \; x_i \le T_i \end{aligned} \tag{15}$$

olduğundan

$$f_{x_i, I_i}(x_i, 1) = f(x_i)(1 - G(x_i^-)) \tag{16}$$

ve

$$\begin{aligned} X_i = x_i, I_i = 0 &\Leftrightarrow X_i = x_i \quad , \; Y_i > T_i \\ &\Leftrightarrow X_i = x_i \quad , \; Y_i > T_i \quad , X_i = T_i \\ &\Leftrightarrow Y_i = x_i \quad , \; Y_i > x_i \end{aligned} \tag{17}$$

olduğundan

$$f_{x_i, I_i}(x_i, 0) = g(x_i)(1 - F(x_i)) \tag{18}$$

dir. Böylece $\delta_i \in \{0,1\}$ için

$$f_{X_i, I_i}(x_i, \delta_i) = \left[f(x_i) \right]^{\delta_i} \left[1 - F(x_i) \right]^{1-\delta_i} \left[f_{T_i}(x_i) \right]^{1-\delta_i} \left[1 - F_{T_i}(x_i) \right]^{\delta_i} \tag{19}$$

yazılabilir. Bu durumda sağdan rasgele sansürlü $X_1, \dots$ örneklemi için $L(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_r)$ olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır (Lawless 2003).

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_r) &= \prod_{i=1}^{n} [f(x_i)]^{\delta_i} [1 - F(X_i)]^{1-\delta_i} \prod_{i=1}^{n} [f_T(x_i)]^{1-\delta_i} \left[1 - F(x_i^-)\right]^{\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^{n} [f(x_i)]^{\delta_i} [1 - F(X_i)]^{1-\delta_i} \prod_{i=1}^{n} [g(x_i)]^{1-\delta_i} [1 - G(x_i)]^{\delta_i} \end{aligned} \tag{20}$$

olur. Bu L fonksiyonunu maksimum yapan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \dots, \hat{\theta}_r$ değerlerine parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri denir ve bu tahminler sırasıyla $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \dots, \hat{\theta}_r$ ile gösterilir. G dağılımı $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \dots, \hat{\theta}_r$ parametrelerini içermez ise olabilirlik fonksiyonundaki ikinci çarpım en çok olabilirlik tahmin edicilerin bulunma işlemini etkilemeyecektir

En çok olabilirlik yöntemi ile uygun bir şekilde çalışmak için gözlemlerin kümesini D ve C gibi iki alt kümeye ayıralım. D gözlenmiş bozulma zamanlarını ve C sansürlenmiş gözlemlerin indislerinin kümesini göstersin. D kümesinin boş küme olmadığı varsayımı altında C ve D kümeleri yardımıyla olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta_1,...,\theta_r) = \prod_{i\in D} f(x_i)\prod_{i\in C}(1-F(x_i))\prod_{i\in C} g(x_i)\prod_{i\in D}(1-G(x_i)) \tag{21}$$

biçiminde yazılabilir. Çoğu durumda $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 ..., \hat{\theta}_r$ en çok olabilirlik tahmin edicileri

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{22}$$

denklem sisteminin çözümüyle elde edilir. Yaygın kullanılan birkaç F dağılımı dışında bu denklem sisteminin analitik çözümü yoktur. Bu durumda sayısal bir yöntem ile çözümün gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada literatürde en çok kullanılan denklem sistemini çözme yöntemlerinden birisi olan Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır.

3. Weibull Dağılımında Parametre Tahmini

F , α şekil ve β ölçek parametreli Weibull dağılım fonksiyonu olsun,

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}} \qquad , x > 0 \tag{23}$$

olup bu dağılımın f olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^{\alpha}} \qquad , \quad x > 0; \quad \alpha, \beta > 0 \tag{24}$$

dir.

$X_1,\ldots$; F dağılımından sağdan rasgele sansürlenmiş n birimlik örneklem olmak üzere, sansürleme rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olan G 'nin α ve β parametrelerini içermediğini kabul edelim. Bu durumda

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i\in D}\left(\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x_i^{\alpha-1} e^{-(x_i/\beta)^{\alpha}}\right)\prod_{i\in C}\left(e^{-(x_i/\beta)^{\alpha}}\right) \tag{25}$$

ve

$$\begin{aligned}
\ln L(\alpha,\beta) &= \sum_{i\in D}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x_i^{\alpha-1} e^{-(x_i/\beta)^{\alpha}}\right)\sum_{i\in C}\ln\left(e^{-(x_i/\beta)^{\alpha}}\right) \\
&= S(D)\ln\alpha - S(D)\alpha\ln\beta + (\alpha-1)\sum_{i\in D}\ln x_i - \frac{1}{\beta^{\alpha}}\sum_{i\in D} x_i^{\alpha} - \frac{1}{\beta^{\alpha}}\sum_{i\in C} x_i^{\alpha} \qquad (27) \\
&= S(D)\ln\alpha - S(D)\alpha\ln\beta + (\alpha-1)\sum_{i\in D}\ln x_i - \frac{1}{\beta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}
\end{aligned}$$

olup

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}=\frac{S(D)}{\alpha}-S(D)\ln\beta+\sum_{i\in D}\ln x_i-\frac{1}{\beta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\ln x_i+\frac{\ln\beta}{\beta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}=0 \tag{28}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial \beta}=-\frac{S(D)\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}=0 \tag{29}$$

denklemleri elde edilir. Denklem 29'den

$$\beta=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}{S(D)}\right)^{1/\alpha} \tag{30}$$

olur. Bu ifadenin denklem 28'de yerine konulmasıyla, α 'ya göre türevinin alınmasıyla

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{S(D)}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}=0 \tag{31}$$

lineer olmayan denklemi elde edilir. Bu denklemleri Matlab paket programında Newton Raphson yöntemi ile çözülebilir. Burada Newton Raphson yönteminin verilişindeki notasyonlara bağlı kalınmak üzere,

$$U(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{S(D)}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}} \tag{32}$$

ve

$$V(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\left(\ln x_i\right)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\ln x_i\right)^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\left(\ln x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}\right)^2 \tag{33}$$

dir. Bu durumda Newton Raphson yönteminden $\alpha(1)$ başlangıç değeri ile,

$$\alpha(m+1)=\alpha(m)-\frac{U(\alpha(m))}{V(\alpha(m))}$$

$$=\alpha(m)-\frac{\frac{1}{\alpha(m)}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{S(D)}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha(m)}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha(m)}}}{-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha(m)}\left(\ln x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha(m)}}+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha(m)}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha(m)}}\right)^2},\qquad m=1,2,\ldots \tag{34}$$

iterasyon işlemlerine ulaşılır. $\alpha\left(m+1\right)$ yeterince $\alpha\left(m\right)$ sayısına yeterince yakınsa iterasyon durdurularak α 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri olan $\hat{\alpha}=\alpha(m+1)$ olarak bulunmuş olur.

Örneğin yapılan bu α ve β parametreli Weibull dağılımı için sağdan rasgele sansürlenmiş gözlem değerleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1 α ve β parametreli Weibull dağılımı için sağdan rasgele sansürlenmiş gözlem değerleri

$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$	X_5^*	X_6^*	X_7^*	X_8^*	X_9^*	X_{10}^*	X_{12}^*	X_{13}^*	X_{14}^*
7.92	**4.55**	**6.77**	**6.77**	7.51	7.08	6.59	6.08	5.15	1.95	4.08	7.45	5.23

* sembolü sansürlenmiş gözlem değerleridir.

Matlab programında denklem 34'daki iterasyon işlemleri yapılınca α 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri $\hat{\alpha}=7.9272$ olarak bulunur. Denklem 30'de β 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri

$\hat{\beta} = 7.8533$ olur.

4. Sonuçlar

Bu çalışmada yenileme süreçlerine temel olan bazı kavramlar tanıtılarak yenileme teorisi üzerinde durulmuştur. Daha sonra analitik olarak elde edilemeyen weibull yenileme fonksiyonu Xie ‘nin RS yöntemiyle elde edilmiştir. Araştırmanın konusu doğrultusunda; yenileme süreçlerinde sık kullanılan sansürlü örneklem durumunda weibull yenileme fonksiyonu elde edilip en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunmuştur.

Kaynaklar

Baxter, L. A. (1981), Some Remarks on Numerical Convolution. *Communications in Statistics, Ser.* B(10), 281-288

Baxter, L. A. et al. (1982), On the Tabulation of the Renewal Function. *Technometrics,* Volume 24, 151-158.

Binshan, Lui. (1988), Estimation of the Renawal Function. The İnterdepartmental Program in Business Administration. 84. Lousiana.

Gertsbakh, I. B. (1989), Statistical Reliability Theory. Marcel Dekker, 331, New York.

Frees, E. W. (1986a),. Warranty and Renewal Function Estimation. Nov. Res. Logist.Q., 33,361;372

Frees, E. W. (1986b), Nonparemetrik Renawal Function Estimation. Ann. Statist., 14, 4, 1366-1378.

Grimmett, G. R. and Stirzaker, D. R. (1992), Probability and Random Processes. Oxford University Pres Inc, New York.

Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975), A First Course in Stochastic Processes. Second edition. Academic Press, 557, New York.

Lawless, J. F. (2003), Statistical Models and Methods for Lifetime Data. John Wiley & Sons, 630, Canada.

Ross, M. S. (1983), Stochastic Processes. John Wiley & Sons, 510, New York.

Tijms, (1994), Stochastic Models: An Algorithmic Approach. John Wiley & Sons

Topçu, Ç. (2007), Greenwood ve Kaplan-Meier Metodu Yardımı ile Varyans Tahmini. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, 48s, Ankara