



P. PINOT

# Étude de lames flexibles en alliage de cuivre-béryllium pour l'expérience française de balance du watt

## *Study of flexure strips made of copper-beryllium alloy to be used for the French watt balance experiment*

Patrick PINOT<sup>1</sup>, Stéphane MACÉ<sup>1</sup>, Gérard GENEVES<sup>2</sup>, Pierre GOURNAY<sup>2</sup>, Darine HADDAD<sup>2</sup>, Michel LECOLLINET<sup>1</sup>, François VILLAR<sup>2</sup> et Marc HIMBERT<sup>1</sup>

Laboratoire commun de métrologie LNE-Cnam

<sup>1</sup> LNE-INM, CNAM, 61 Rue du Landy, 93210 La Plaine Saint-Denis, France, patrick.pinot@cnam.fr.

<sup>2</sup> LNE, 29 Avenue Roger Hennequin, 78197 Trappes Cedex, France.

### Résumé

La conception d'une expérience de balance du watt fait appel à des compétences pluridisciplinaires et nécessite de nombreuses études sur chaque élément qui la constitue. Un exemple d'une telle étude est présenté dans cet article. Afin de concentrer, en un point unique, les points d'application de deux forces à comparer (un poids et une force électromagnétique équilibrant ce poids), un système à liaisons élastiques monobloc à lames flexibles a été réalisé en alliage de cuivre-béryllium. Il permet l'articulation des suspensions de la masse et de la bobine engendrant la force électromagnétique selon quatre axes coplanaires qui se coupent en un seul point (centre virtuel de rotation). Les caractéristiques statiques d'élasticité des lames en termes de raideur et de limite d'élasticité ont été étudiées. De plus, l'étude du comportement dynamique sous vide de ce dispositif a été effectuée en termes de fréquence de résonance, d'amortissement dû aux frictions internes et de couplage entre les deux systèmes d'articulation.

**MOTS CLÉS** : PIVOT FLEXIBLE, RAIDEUR, CARDAN, BALANCE DU WATT, ALLIAGE CUIVRE-BÉRYLLIUM.

### Abstract

*The design of a watt balance experiment requires skills in several scientific fields and needs to carry out numerous studies about every element of this experiment. That can be illustrated by the experimental study presented in this article. In order to have a single point of application of a weight and an electromagnetic force balancing this*

*weight, a system of double gimbals with flexure pivots was made out of copper-beryllium alloy. It allows the articulation of the suspensions of the mass and coil generating the electromagnetic force round four coplanar axes which intersect in one point (virtual centre of rotation). The static characteristics of these elastic pivots have been studied in terms of stiffness and elasticity limit. In addition, the study of the dynamic behaviour under vacuum of this device has been carried out in terms of resonance frequency, damping due to internal frictions and coupling between the two systems of gimbals.*

**KEY WORDS**: FLEXURE PIVOT, STIFFNESS, GIMBALS, WATT BALANCE, COPPER-BERYLLIUM ALLOY.

### 1. Introduction

La conception d'une expérience de balance du watt fait appel à des compétences pluridisciplinaires (métrologie électrique, magnétisme, gravimétrie, méthodes optiques d'alignement et de mesure, mécanique, techniques d'asservissement, technique du vide...). Cela nécessite d'effectuer de nombreuses études sur les différents éléments constituant l'expérience. Dans cet article, nous présentons un exemple d'étude d'une pièce mécanique : un système d'articulation à lames flexibles. Seule la phase d'étude expérimentale est décrite ici.

Dans les expériences de balance du watt en général tout comme dans l'expérience française en particulier [1-5], la phase statique de mesure consiste à équilibrer un poids et une force électromagnétique. La bobine sur laquelle agit cette force électromagnétique ainsi que le récepteur de charge sont suspendus à la même extrémité du fléau d'une balance, l'autre extrémité étant chargée par une masse de tare.

L'une des difficultés de ces expériences est de rendre négligeables les effets dus aux défauts d'alignement. Plus précisément, on cherche à rendre l'égalité des moments de force équivalente à l'égalité des forces appliquées à  $10^{-9}$  près en valeur relative. En particulier, il faut réduire autant que possible les effets de décentrage de la masse sur le récepteur de charge (décentrage généralement inférieur au millimètre) et assurer que l'écart de longueur des bras du fléau reste quasiment constant (par exemple, pour une longueur de bras de 100 mm, la différence entre les bras doit être constante à 0,1 nm près, imposant aussi une maîtrise de la stabilité de la température).

Dans ce but, le laboratoire commun de métrologie LNE-Cnam a conçu une pièce monobloc articulée au moyen de pivots élastiques. Ce dispositif original, réalisé en alliage de cuivre-béryllium (Cu98Be2), est formé de deux parties identiques ayant chacune deux axes de rotation orthogonaux et coplanaires. Les deux systèmes d'axes se coupent en un point unique sur l'axe de symétrie vertical du dispositif. Ce point représente le centre virtuel de rotation du dispositif monobloc.

Des études expérimentales des comportements mécaniques statique et dynamique de ce dispositif ont été entreprises pour caractériser la raideur de ses pivots flexibles et le comportement dynamique en termes de couplage entre les deux parties mobiles du système.

Certaines caractéristiques des lames telles que leur raideur intrinsèque ou leur limite d'élasticité ne pouvant être mesurées directement sur le dispositif monobloc, une lame simple de profil identique a été utilisée.

On a pu ainsi caractériser le comportement mécanique de ce dispositif pour l'application qui en sera faite dans l'expérience française de balance du watt en cours de construction sur le site de Trappes du Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE).

On présente ici l'étude des caractéristiques statiques d'élasticité des lames en CuBe2 réalisée au moyen d'une méthode dynamométrique ainsi que l'étude du comportement dynamique sous vide du double système de suspension à lames flexibles au moyen d'un montage pendulaire pour des mouvements de très faibles amplitudes angulaires.

## 2. Expérience de balance du watt

### 2.1. Comparateur de force

L'expérience de la balance du watt repose sur le principe de puissance virtuelle pour comparer

indirectement une puissance mécanique et une puissance électrique. L'idée a été proposée en 1976 par l'anglais B.P. Kibble [6]. L'expérience se déroule en deux étapes, l'une dite dynamique, l'autre statique, seul le principe de cette dernière nous intéresse ici.

Cette phase statique consiste à comparer au moyen d'une balance à fléau le poids d'une masse étalon  $m$  à une force verticale de Laplace s'exerçant sur un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ d'induction magnétique.

Pour cette phase d'équilibre statique, le conducteur est suspendu à la même extrémité du fléau de la balance que le plateau de pesée recevant la masse de transfert  $m$  (dans l'expérience française, cette masse  $m$  est de 500 g). Une masse de tare est suspendue à l'autre extrémité du fléau pour équilibrer les masses « mortes ». Ainsi la force électromagnétique et le poids seront appliqués à la même distance du centre de rotation du fléau. L'équilibre des moments de force correspondra donc à l'égalité des forces elles-mêmes.

Mais pour obtenir cette équivalence d'égalité, il faut non seulement rendre négligeables les effets d'excentration de positionnement de la masse de transfert  $m$  sur le plateau récepteur de charge. Mais il faut aussi s'assurer que la force électromagnétique soit verticale. Une déviation de quelques dizaines de microradians par rapport à la verticale de la suspension de la masse ou de celle de la bobine introduirait un écart non négligeable sur la longueur du bras du fléau.

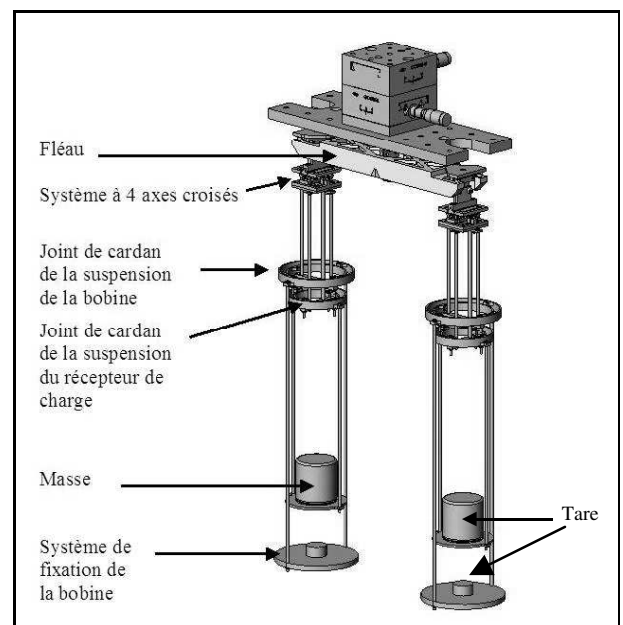


Fig. 1. – Double ligne de suspension du récepteur de charge et de la bobine.

Afin d'améliorer les découplages statiques et dynamiques des éléments suspendus (c'est-à-dire du récepteur de charge et de la bobine), chaque ligne de suspension est composée de deux sections articulées autour de joints de cardan composés de pivots à pointes

offrant une grande mobilité à l'articulation. C'est une technique largement employée sur les balances et comparateurs de masse afin d'atténuer les effets d'excentration de masse [7-9]. La figure 1 présente la double ligne de suspension fixée sous le dispositif à quatre axes croisés conçue pour le plateau de pesée (suspendu au cadre mobile interne du dispositif à axes croisés) et la bobine (suspendue au cadre mobile externe du même dispositif).

## 2.2. Système à quatre axes croisés

Pour ramener les points d'application des forces électromagnétique et gravitationnelle en un même point, nous avons conçu une pièce monobloc en alliage de cuivre-béryllium (matériau choisi pour ses propriétés élastiques) dont le module d'Young est de l'ordre de 128 GPa. Il constitue un double système à deux axes croisés dont les axes de rotation se coupent en un même point (les quatre axes étant coplanaires et orthogonaux avec l'exactitude permise par la technique de réalisation). Chaque axe de rotation est matérialisé par deux lames flexibles symétriques à section non constante. Le système comporte donc huit pivots flexibles, identiques et couplés deux à deux, usinées par électro-érosion à fil dans un bloc de cuivre allié à 2 % de béryllium. Le profil de ces pivots est circulaire concave avec un rayon de courbure de 3 mm. Leur largeur est de 1,5 mm et leur épaisseur au col est de 40 µm.

Ce système de lames soutient deux cadres mobiles indépendants sous lesquels sont fixées la suspension de la masse de transfert pour l'un et la suspension de la bobine pour l'autre. Le dimensionnement statique des lames couplées deux à deux a été défini pour une charge de 5 N pour chaque suspension, soit 2,5 N pour chaque lame avec un coefficient minimum de sécurité de 3. La contrainte normale appliquée sur chaque lame est de 42 MPa pour une contrainte limite théorique de déformation de 172 MPa. La figure 2 montre la vue en perspective de cette pièce complexe.

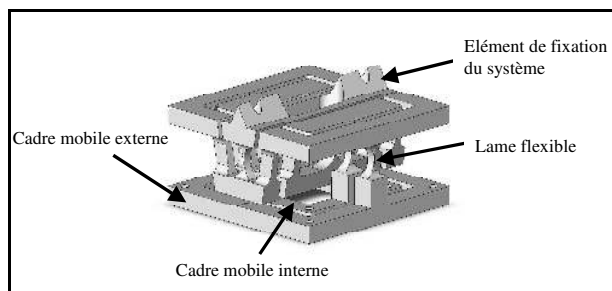


Fig. 2. – Vue en perspective du système à quatre axes croisés.

## 3. Caractéristiques statiques d'élasticité

### 3.1. Approche théorique

La théorie de la flexion d'une lame sous charge est maintenant bien connue [10-15] et les avantages de l'utilisation de lames flexibles minces à la place des

cousteaux/coussinets pour les comparateurs de masse ont été étudiés depuis de nombreuses années [10, 16-18].

Afin de comparer expérimentalement la rigidité de différents types de lame, on peut mesurer la force de rappel de la lame encastrée soumise à un effort à son extrémité libre comme illustré sur la figure 3.

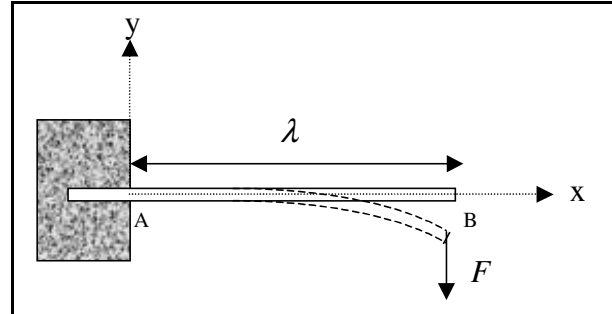


Fig. 3. – Schéma de la flexion d'une poutre encastrée sous l'effet d'une force.

Sur la figure 3, on considère une force verticale  $F$  appliquée à l'extrémité libre B d'une poutre encastrée en A, faite d'un matériau homogène de module d'Young  $E$ , de section rectangulaire constante (largeur  $w$  et épaisseur  $\epsilon$ ), de moment quadratique  $I$  et de longueur  $AB = L$ .

L'énergie de déformation élastique  $W$  emmagasinée par la poutre (on néglige l'apport de l'effort tranchant), a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} ds \quad (1)$$

$ds$  est un élément d'abscisse curviligne ;

$M$  est le moment fléchissant, qui dans le cas de la figure 3, s'exprime par :

$$M = F(L - x) \quad (2)$$

On obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{F^2 (L - x)^2}{EI} dx \quad (3)$$

L'expression du déplacement du point d'application de la force  $F$  dans sa direction, qui correspond à la flèche  $f$ , est donnée par le théorème de Castigliano, soit :

$$f = \frac{\partial W}{\partial F} = F \int_0^L \frac{(L - x)^2}{EI} dx \quad (4)$$

Ce qui donne dans le cas d'une lame à section constante :

$$f = \frac{FL^3}{3EI} \quad (5)$$

Le moment quadratique  $I$  pour une lame de section constante d'épaisseur  $\epsilon$  et de largeur  $w$  vaut :

$$I = \frac{w\epsilon^3}{12} \quad (6)$$

On définit la raideur de la poutre vis-à-vis de l'effort  $F$  (qui est constante car la caractéristique force-déformation est linéaire) par :

$$C = \frac{F}{f} = \frac{3EI}{L^3} \quad (7)$$

On considère un autre cas de chargement qui consiste à placer un moment noté  $M$  à l'extrémité libre de la lame. L'extrémité de la poutre tourne d'un angle noté  $\theta$ . On peut exprimer la raideur notée  $k$  (qui est constante compte-tenu de la linéarité de la relation liant  $M$  et  $\theta$ ) vis-à-vis du moment par :

$$k = \frac{M}{\theta} = \frac{EI}{L} = \frac{CL^2}{3} \quad (8)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les lames flexibles sont à section variable et, plus précisément, présentent un col circulaire de rayon  $R$  et d'épaisseur au col  $\varepsilon_0$  (voir figure 7). Le moment quadratique  $I$  donné par l'expression (6) n'est donc pas constant le long de la poutre.

Si  $\lambda$  est la distance entre le centre de rotation de la lame et le point d'application de la force  $F$ , on peut écrire en première approximation (si  $f$  est très petit devant  $\lambda$ ) les expressions suivantes :

$$\text{avec } \theta \approx \frac{f}{\lambda} \quad \text{et} \quad M \approx F\lambda$$

$$k = \frac{M}{\theta} \approx \frac{F\lambda^2}{f} \approx C\lambda^2 \quad (9)$$

Henein [19], puis Merken et Debongnie [20] ont développé les expressions analytiques plus rigoureuses adaptées à de telles articulations. Ainsi l'expression de la raideur en flexion  $k$ , lorsque le rapport  $\varepsilon_0$  sur  $R$  est petit devant 1 et en faisant l'hypothèse que la caractéristique moment-déformation est linéaire, devient :

$$k \approx \frac{2Ew}{9\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0^5}{R}} \quad (10)$$

Ces mêmes auteurs ont donné l'expression approximative suivante de la course angulaire maximum  $\alpha$  en fonction de la contrainte maximum  $\sigma$  :

$$\alpha \approx \frac{3\pi\sigma}{4E} \sqrt{\frac{R}{\varepsilon_0}} \quad (11)$$

### 3.2. Méthode d'étude et montage expérimental

Compte tenu de la configuration complexe du dispositif monobloc, il n'est pas possible de mesurer simplement certains paramètres des lames. Il faut alors réaliser une lame simple dans le même matériau et ayant le même profil que celles du système monobloc et sur laquelle pourront être effectuées certaines mesures. Bien entendu, un logiciel de simulation pourrait permettre de

calculer ces éléments avec une très bonne approximation, mais les caractéristiques mécaniques du matériau données par le fabricant peuvent être modifiées en surface de manière significative par la technique d'usinage utilisée. Ce point est particulièrement important pour des lames dont l'épaisseur est de quelques dizaines de micromètres.

Ainsi pour déterminer le coefficient de raideur d'une lame simple soumise à aucune traction, on pourra utiliser la technique schématisée sur la figure 4. Bien sûr ces conditions de mesure sont différentes des conditions d'utilisation finale de la lame, mais elles donnent des résultats permettant de classer comparativement les matériaux et les profils de lame.

La technique de mesure consiste à fixer horizontalement l'une des extrémités de la lame considérée à un support solide d'une table élévatrice à vis micrométrique. Cette méthode est semblable à celle employée pour la mesure de très faible force de flexion de pointe d'AFM [21]. L'extrémité libre de la lame repose sur un couteau placé sur le plateau d'une balance. La translation verticale de l'extrémité fixe de la lame dont l'autre extrémité est en appui sur le couteau permet de la faire fléchir plus ou moins sous l'effet de la force d'appui  $F$ .

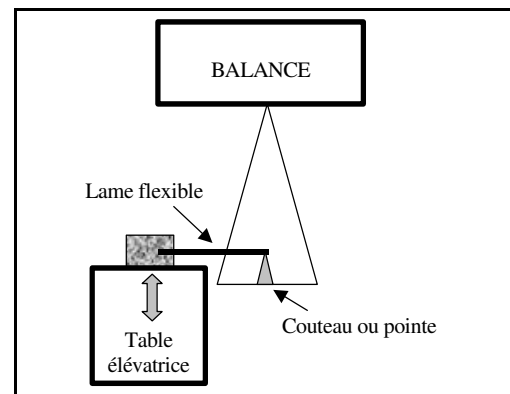


Fig. 4. – Schéma de principe de la mesure du coefficient de raideur d'une lame mince.

A partir de sa position horizontale, en augmentant la force d'appui par translation verticale vers le bas et sans dépasser les limites d'élasticité de la lame, les valeurs  $m$  de masse conventionnelle indiquées par la balance sont directement convertibles en force en les multipliant par la valeur conventionnelle de l'accélération de la pesanteur. On admettra que la composante horizontale de cette force reste négligeable pour de très faibles valeurs de flèche.

La flèche  $f$  est mesurée au moyen de la vis micrométrique de la table élévatrice et la distance  $L$ , pour une lame mince de section constante entre l'extrémité fixe de la lame et le point d'application de la force  $F$ , est mesurée lorsque la lame est soutenue à l'horizontal. Dans le cas particulier d'une lame mince de section constante et pour de très petits déplacements  $d$  par rapport à la longueur  $L$ , on observe une relation linéaire de la variation de masse  $\Delta m$  indiquée par la balance par rapport à la variation de déplacement  $\Delta d$  donnée par la vis

micrométrique. On obtient directement un coefficient de raideur  $C$  constant donné par :

$$C = g \frac{\Delta m}{\Delta d} = \frac{\delta F}{\delta f} \quad (12)$$

Si les paramètres dimensionnels de la lame sont constants et connus et pour  $d$  très petit devant  $L$ , on peut déduire de l'expression (8) la raideur en flexion  $k$ , mais aussi le module d'Young  $E$  de la lame.

Pour des lames de section variable, comme c'est le cas pour les lames du système à quatre axes croisés, la raideur  $C$  varie avec l'amplitude de la flèche de la lame. Il faudrait alors faire appel à des techniques de modélisation et d'analyse par éléments finis pour obtenir la valeur de cette raideur pour une flèche donnée. Néanmoins pour de très faibles valeurs de flèche, on peut admettre que la raideur  $C$  tend vers une limite à flèche nulle. La difficulté réside alors dans la détermination de la distance  $\lambda$  (différente de  $L$ ) pour en déduire une valeur approchée de  $k$  donnée par l'expression (9).

On a pu valider cette technique en appliquant la méthode de mesure et le montage expérimental à une lame mince en acier inoxydable de  $10 \mu\text{m}$  d'épaisseur à section constante.

La figure 5 montre une vue du montage expérimental qui a été utilisé dans cette étude.

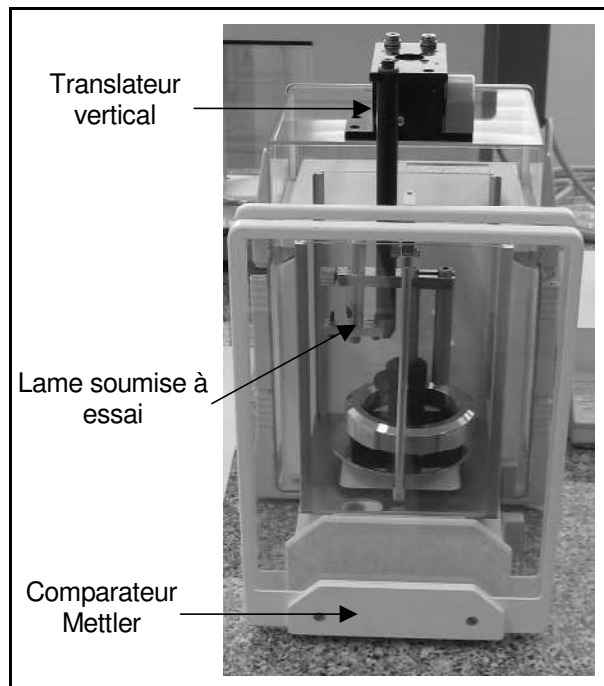


Fig. 5. – Vue du montage expérimental pour la détermination du coefficient de raideur.

### 3.3. Résultats et discussion

#### 3.3.1. Validation de la méthode

Afin de valider la méthode décrite dans la section précédente, des séries de mesure ont été effectuées sur une

lame mince de section constante en acier inoxydable ayant les caractéristiques suivantes :

- masse  $m$  de la lame : environ 20 mg ;
- épaisseur  $\varepsilon$  de la lame :  $10 \mu\text{m}$  ;
- largeur  $w$  de la lame : 13 mm ;
- longueur  $L$  de la lame : 9 mm.

Ce type de lame est utilisé actuellement comme pivot central et d'extrémités sur le fléau du prototype de comparateur de force de l'expérience française de balance du watt, d'où l'intérêt de son étude.

La figure 6 présente les courbes d'une série de mesure à flèche croissante et d'une série correspondant au retour à flèche nulle.

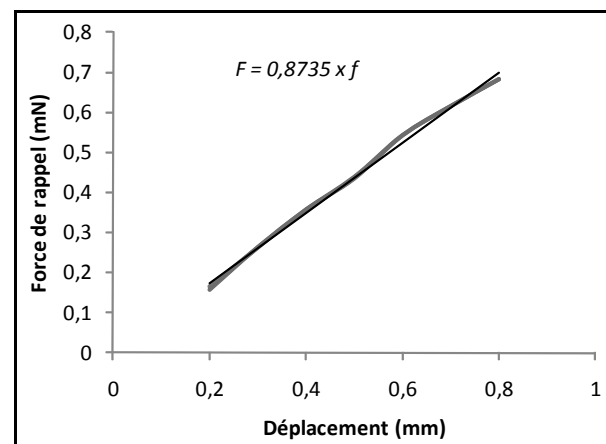


Fig. 6. – Courbes de la force de rappel exercée par une lame en acier inoxydable de  $10 \mu\text{m}$  d'épaisseur en fonction de sa flèche, pour les valeurs croissantes et décroissantes de flèche, et droite de tendance en noir.

Une fois passée la transition correspondant à la compensation du poids de la lame, on obtient une variation quasi-linéaire de la force de rappel en fonction de la flèche. Les petites fluctuations visibles sur les courbes correspondent à un défaut de linéarité de la table élévatrice. On n'observe pas d'effet d'hystérésis, ce qui signifie que la flexion a été réalisée dans le domaine purement élastique de la lame. Le calcul selon l'expression (12) donne un coefficient de raideur  $C$  de  $0,87 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Pour cette lame, en utilisant la valeur expérimentale de  $C$ , on déduit de l'expression (8) une valeur de la raideur en flexion  $k$  de  $2,4 \cdot 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ . L'incertitude relative de mesure est inférieure à 20 %.

Connaissant les dimensions de la lame, on peut exprimer le moment d'inertie  $I$  selon (6) pour une lame de section rectangulaire constante, soit  $1,08 \cdot 10^{-18} \text{ m}^4$ . La tolérance sur l'épaisseur  $\varepsilon$  donnée par le fournisseur est de  $\pm 15 \%$ . Cela peut entraîner une erreur relative maximale de  $\pm 45 \%$  sur  $I$ . On admettra que l'incertitude relative sur la détermination de  $I$  est égale au tiers de l'erreur maximale, soit 15 %. Pour vérifier la cohérence des calculs, on peut déterminer le module d'Young  $E$  à partir de l'expression (7). Avec la valeur de  $C$  déterminée expérimentalement, on obtient une valeur de  $E$  de

197 GPa. Le fournisseur donne une fourchette pour le module d'Young entre 190 GPa et 210 GPa. L'incertitude relative sur la détermination de  $E$  étant de l'ordre de 15 %, c'est donc une valeur tout à fait conforme, aux incertitudes près, à la valeur du module d'Young pour cet acier inoxydable.

Compte tenu des sources d'erreur (contraintes de fixation de la lame, contraintes directionnelles dues au laminage de la lame...), l'ordre de grandeur des résultats théoriques et expérimentaux est suffisamment cohérent pour valider la méthode.

### 3.3.2. Étude de lames à col circulaire

Comme il a été indiqué précédemment, pour déterminer certaines caractéristiques des lames du système à quatre axes croisés (double cardan) telles que la raideur  $C$  à traction nulle, il a été nécessaire de faire réaliser une lame simple, faite dans le même alliage de cuivre-béryllium, avec le même profil à col circulaire et réalisée selon la même procédure d'usinage et par le même usinier que le double cardan.

La largeur de la lame simple a été adaptée afin d'obtenir l'exactitude de mesure nécessaire en tenant compte de la résolution de 10  $\mu\text{g}$  de la balance utilisée. La figure 7 montre la section de l'éprouvette qui a été réalisée.

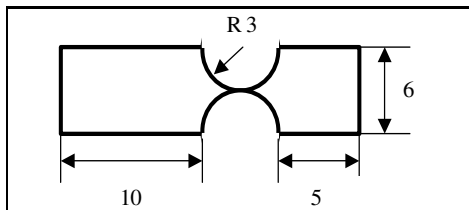


Fig. 7. – Profil du pivot flexible en alliage de cuivre-béryllium de 40  $\mu\text{m}$  d'épaisseur au col et de 34 mm de largeur utilisée pour la mesure de raideur.

La figure 8 présente un exemple de courbes de la force de rappel en fonction de l'amplitude de la flèche obtenues à partir des mesures expérimentales. Un déplacement de 0,01 mm équivaut à un angle de flexion de 1,8 mrad.

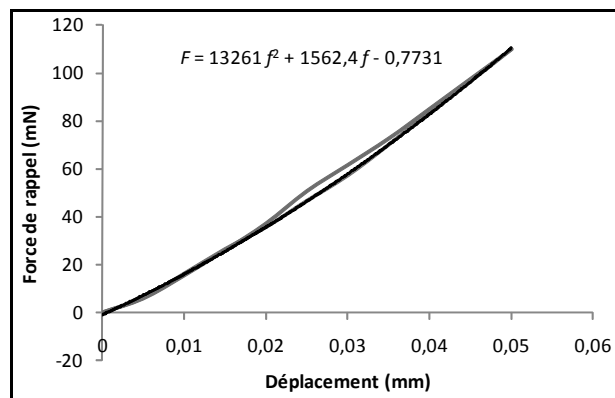


Fig. 8. – Courbes de la force de rappel exercée par une lame en CuBe en fonction de l'amplitude de la flèche, pour les valeurs croissantes et décroissantes de flèche, et courbe de tendance d'ordre 2 en noir.

On observe une légère hystérésis qui peut être liée à la limite d'élasticité de la lame et au temps de relaxation ou aux défauts de la table élévatrice ou bien encore à une composante horizontale non nulle de la force appliquée. De plus, les courbes ne semblent pas linéaires.

En effectuant une régression polynomiale à l'ordre 2 pour d'une courbe obtenue à partir des mesures expérimentales, on obtient une expression du type :

$$F = af^2 + bf + c \quad (13)$$

On obtient une raideur d'effort tranchant  $C$  exprimée en  $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$  avec  $f$  en millimètres tel que :

$$C = \frac{dF}{df} = 2af + b \approx 26522f + 1562 \quad (14)$$

Pour ce profil de lame, on observe que plus la flèche est importante, plus la raideur  $C$  augmente. La valeur limite de  $C$  quand  $f$  tend vers 0 est  $1\,562\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

A partir de cette valeur expérimentale de  $C$  et en considérant que le centre de rotation de la lame se trouve au niveau du col correspondant dans notre expérience à une valeur de  $\lambda$  de 5,5 mm, on obtient une valeur approximative de la raideur en flexion en utilisant l'expression (9) qui donne  $k = 0,047\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ .

L'expression plus rigoureuse (10) donne une valeur de  $k = 0,053\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ . L'écart relatif inférieur à 15 % entre ces deux valeurs de  $k$  n'est pas significatif compte tenu des incertitudes sur  $\lambda$ ,  $C$ ,  $\varepsilon_0$  et  $E$ .

A l'aide d'une simulation par éléments finis pour une déflexion d'environ 20 mrad, on observe une zone de déformation de  $\pm 0,36\text{ mm}$  autour du col de la lame comme montrée sur la figure 9. En fait, on remarque que cette déformation est surtout concentrée dans la zone  $\pm 0,2\text{ mm}$  autour du col.

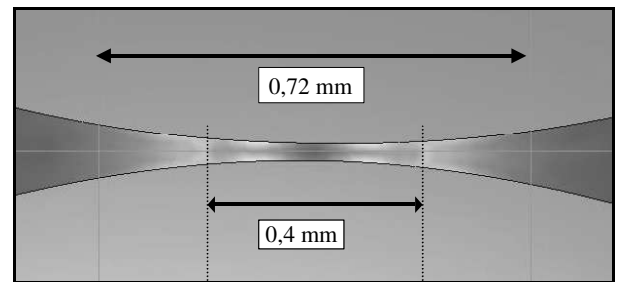


Fig. 9. – Image d'une simulation par éléments finis de la zone de déformation au centre de la lame pour une déflexion de l'ordre de 20 mrad.

Enfin, la figure 10 présente un essai réalisé pour déterminer la limite d'élasticité de l'éprouvette en alliage de cuivre-béryllium. On effectue des flexions croissantes avec un pas de déplacement de 20  $\mu\text{m}$ , soit environ 3,6 mrad en prenant  $\lambda = 5,5\text{ mm}$  comme valeur de longueur de lame. Entre chaque augmentation de déplacement, on revient à une flexion initiale voisine de zéro et on relève l'indication de la balance. On note une forte diminution de cette force après que la lame ait subi

une flèche de 260  $\mu\text{m}$  qui correspond à une limite angulaire d'élasticité de 47 mrad.

En utilisant l'expression (11), on peut en déduire la valeur de contrainte limite  $\sigma$  pour une course angulaire maximum de 47 mrad et pour  $E = 128 \text{ GPa}$ . On obtient  $\sigma = 295 \text{ MPa}$  correspondant au matériau après usinage par électroérosion pour une épaisseur au col de 40  $\mu\text{m}$ . Cette valeur mesurée en quasi-statique est certainement plus élevée que la limite de fatigue en flexion obtenue pour un grand nombre de cycles. La course angulaire maximum d'utilisation du double cardan étant de l'ordre de  $\pm 2 \text{ mrad}$ , soit vingt fois plus faible que la limite déterminée en statique, on peut raisonnablement admettre qu'il n'y aura aucun risque de rupture d'une lame du double cardan.

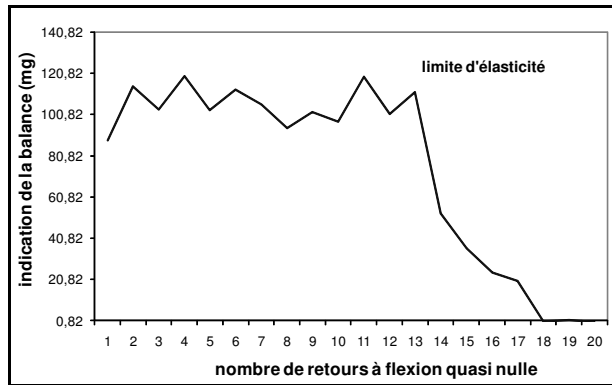


Fig. 10. – Essai de détermination de la limite d'élasticité d'une lame en alliage de cuivre-béryllium.

## 4. Comportement dynamique

### 4.1. Approche théorique

#### 4.1.1. Pendule sphérique

Le comportement dynamique du système monobloc à quatre axes croisés doit être nécessairement étudié sur le dispositif lui-même.

Considérons un pendule sphérique constitué d'une masse  $m$  non ponctuelle de centre de gravité  $G$ , placée à l'extrémité inférieure d'une tige rigide de masse négligeable. Cette tige est fixée à son extrémité supérieure en un point  $O$  défini par un système à pivots flexibles croisés selon des axes de rotation orthogonaux  $xx'$  et  $yy'$  dans un plan horizontal. On admet que tous les pivots (étant dimensionnellement identiques) ont la même raideur  $k$ .

Pour l'étude dynamique du système, il est nécessaire de déterminer les moments d'inertie  $J_c$  et  $J_i$  par rapport à  $O$  des masses suspendues selon leur axe de révolution. Dans le cas respectivement d'un cylindre de hauteur  $h$  et rayon  $R$  et d'un anneau à section rectangulaire de hauteur  $h$ , de rayon interne  $R_i$  et de rayon externe  $R_e$ , les moments d'inertie ont pour expression :

$$\begin{aligned} J_c &= \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} + ml^2 \\ J_i &= \frac{m(R_e^2 + R_i^2)}{4} + \frac{mh^2}{12} + ml^2 \end{aligned} \quad (15)$$

avec  $l$  la distance  $OG$ .

La pulsation propre  $\omega_0$  correspondant à la fréquence de résonance naturelle  $f_0$  est telle que :

$$\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = \frac{k' + mgl}{J} \quad (16)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $k'$  le moment de raideur de la lame sous charge.

A partir des coordonnées sphériques de  $G(\theta, \varphi, l)$ , les coordonnées cartésiennes sont :  $x = l \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = l \sin \theta \sin \varphi$  et  $z = -l \cos \theta$ . Les équations du mouvement dans le plan  $xOy$  pour de petites oscillations libres ont pour expression :

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \cos \varphi = a \cos(\omega_0 t + \phi) \\ y &= l \sin \theta \sin \varphi = b \cos(\omega_0 t + \psi) \end{aligned} \quad (17)$$

$$= b [\cos(\omega_0 t + \phi) \cos \alpha + \sin(\omega_0 t + \phi) \sin \alpha]$$

avec :  $\psi = \phi + \alpha$ .

La trajectoire du centre de gravité  $G$  est donc une ellipse dite de Hooke (ou encore de Lissajous) centrée sur la verticale passant par  $O$ .

Connaissant la position  $(x, y)$  dans le plan horizontal du centre de gravité  $G$ , on peut exprimer l'énergie potentielle  $E_p$  du pendule pour de petites oscillations sous la forme suivante :

$$E_p = mg \left( l - \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} \right) + \frac{1}{2} k' \theta^2 \quad (18)$$

Pour de petits angles, on peut écrire :

$$\theta^2 \approx \frac{x^2 + y^2}{l^2} \quad (19)$$

Dans ces conditions, on remarque que l'énergie potentielle, qui ne dépend pas de l'angle  $\varphi$ , devient proportionnelle au carré de l'amplitude angulaire en première approximation telle que :

$$E_p \approx \frac{1}{2} (mgl + k') \theta^2 \quad (20)$$

#### 4.1.2. Amortissement

##### Décroissement et temps de relaxation :

Pour un système pendulaire placé sous vide et fixé à un bâti parfaitement rigide, seul l'amortissement thermo-élastique d'origine interne au matériau intervient. Cet amortissement structural ou hystérétique est un processus complexe, généralement non linéaire [22-24].

Pour ce type d'amortissement, la décroissance des oscillations est approximativement de type logarithmique. En partant de cette hypothèse, on pourra estimer le décrément  $\eta$  à partir des énergies potentielles en utilisant l'expression approchée (20) sur un intervalle de temps  $\Delta t = t_f - t_i$  correspondant à un très grand nombre d'oscillations tel que :

$$\eta(\Delta t) \approx \frac{\ln \frac{E_{p \max}(t_i)}{E_{p \max}(t_f)}}{\omega_p \Delta t} \quad (21)$$

La pseudo-pulsation  $\omega_p$  (ou encore la pseudo-fréquence  $f_p$ ) d'un mouvement oscillatoire amorti est légèrement inférieure à sa pulsation propre  $\omega_0$  (ou à sa fréquence propre  $f_0$ ) telle que :

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (22)$$

A l'aide du décrément et de la pseudo-pulsation, on exprime le temps de relaxation  $\tau$  comme suit :

$$\tau \approx \frac{1}{\omega_p \eta} = \frac{\Delta t}{\ln \frac{E_{p \max}(t_i)}{E_{p \max}(t_f)}} \quad (23)$$

#### Facteur de qualité et facteur de perte :

On définit le facteur de qualité  $Q$  du pendule tel que :

$$Q \approx \frac{\omega_p \Delta t}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} \quad (24)$$

Dans le cas d'un pendule pesant de moment gravitationnel  $k_g$  suspendu à une lame flexible de raideur  $k'$  sous charge, le facteur de qualité peut alors s'écrire selon [25] sous une forme simplifiée :

$$Q = \frac{k_g}{k' \gamma} \approx \frac{l}{2\gamma} \sqrt{\frac{mg}{EI}} \quad (25)$$

$$\text{avec } k_g = \frac{mgl}{2} \quad \text{et} \quad k' \approx \sqrt{mgEI}$$

où  $\gamma$  est le facteur de perte.

Pour ce calcul approché, on suppose pour  $k'$  que la lame a une section constante sur toute sa longueur.

On en déduit une expression approchée du facteur de perte  $\gamma$  telle que :

$$\gamma \approx \frac{k_g [E_{p \max}(t_i) - E_{p \max}(t_f)]}{k' \omega_p \Delta t E_{p \max}(t_i)} \quad (26)$$

#### 4.2. Méthode d'étude et montage expérimental

La méthode a été développée spécifiquement pour le dispositif à quatre axes croisés. Elle consiste à étudier le comportement dynamique d'un pendule sphérique pesant suspendu sous chacun des deux cadres mobiles du système à axes croisés. Les centres virtuels de rotation des deux pendules sont supposés confondus en un point O. Les

deux pendules sont de même masse de l'ordre de 500 g. La masse en acier inoxydable de l'un des pendules a une forme cylindrique de 43 mm de diamètre et de 50 mm de hauteur. La longueur de ce pendule est réglable entre 50 mm et 200 mm. La masse faite dans le même matériau du second pendule est un anneau de section carrée de 70 mm de diamètre intérieur, de 94 mm de diamètre extérieur et de 20 mm de hauteur. La longueur de ce pendule est réglée à 142 mm. L'axe de suspension de chaque pendule est confondu avec l'axe de révolution de leur masse.

Un hexapode mécano-soudé en cornière d'acier inoxydable offrant une grande rigidité a été fabriqué pour supporter le système pendulaire. Cet hexapode a été installé dans une enceinte à vide de 800 mm de diamètre dans laquelle un vide primaire de l'ordre de 1 Pa peut être maintenu. L'ensemble est placé sur un socle antivibratoire dans une salle propre climatisée. La figure 11 présente l'hexapode utilisé pour cette expérience et reposant sur trois pieds traversant la base de l'enceinte à vide.

Pour étudier l'amortissement du mouvement des pendules, on peut mettre en oscillation libre chaque pendule indépendamment l'un de l'autre. On enregistre les oscillations du mouvement durant plusieurs heures afin de déterminer le décrément.

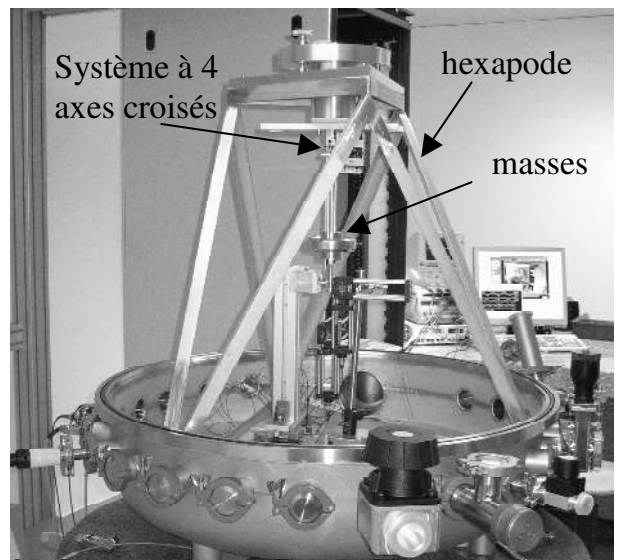


Fig. 11. – Hexapode sur lequel est fixé le système à axes croisés installé dans l'enceinte à vide (ici l'enceinte étant ouverte, seule la base de celle-ci est visible).

Pour étudier le couplage entre les deux pendules, un dispositif mécanique motorisé permet de mettre en oscillation, par une impulsion initiale, l'un des deux pendules. Ainsi on peut étudier le transfert d'énergie d'un pendule à l'autre. Pour cela, on détermine simplement l'énergie apportée par l'excitation impulsionnelle de l'un des pendules à un instant donné  $t_i$  et on suit l'évolution de l'énergie potentielle du second pendule (non excité initialement). On peut ainsi en déduire l'énergie transférée de l'un à l'autre des systèmes pendulaires sur un intervalle de temps  $\Delta t$ .



Le détecteur de déplacement est constitué d'une diode laser fixe dont le faisceau réfléchi par un miroir solidaire du système pendulaire est capté par une matrice 2D de photodiodes. La sensibilité  $S$  du capteur est de  $10 \text{ V}\cdot\text{mrad}^{-1}$ . Pour chaque pendule, on fait l'acquisition, à l'aide d'un programme développé sous Labview®, des tensions  $v_x$  et  $v_y$  des signaux des oscillations délivrés par l'électronique associée à la photodiode selon les deux directions horizontales perpendiculaires. Ces axes correspondent à quelques dixièmes de radian près aux axes de rotation du dispositif monobloc.

Le traitement des données est effectué au moyen d'un programme développé sous MATLAB®. Il permet entre autres choses :

- L'annulation du décalage de la tension moyenne des signaux et la conversion en déplacement  $x$  et  $y$  des valeurs de tension correspondant à la position dans le plan horizontal du centre de gravité  $G$  du pendule sphérique considéré.
- Le calcul par transformée de Fourier rapide (FFT) donnant le spectre fréquentiel des signaux  $x$  et  $y$  et permettant de déterminer  $\omega_p$  ou  $f_p$  pour chaque pendule.
- Le calcul de l'énergie potentielle  $E_p$  de chaque pendule sphérique à partir des mesures de  $x$  et  $y$  selon l'expression (18).

Dans la suite, les paramètres d'indice 1 se rapportent au pendule à masse annulaire et ceux d'indice 2 au pendule à masse cylindrique. De plus, nous nommerons respectivement ces pendules : pendule 1 et pendule 2.

### 4.3. Résultats et discussion

En tenant compte de toutes les sources d'incertitudes, on peut estimer que les valeurs des paramètres sont calculées avec une incertitude relative de l'ordre de 10 %. En particulier, l'une des composantes d'incertitude prépondérante est l'incertitude sur la détermination des longueurs  $(OG)_1$  et  $(OG)_2$  qui est proche de 1 mm.

Afin d'avoir un ordre de grandeur pour la raideur de la lame sous charge, on fait l'hypothèse qu'elle a une section constante. On rappelle que l'expression de  $k'$  est donnée pour une lame de section constante sur toute sa longueur, dimension qui n'intervient pas dans son expression. En considérant la section au col de la lame, le moment quadratique pour une lame de 1,5 mm de large donné par l'expression (6) vaut  $8\cdot 10^{-18} \text{ m}^4$  pour  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . On en déduit en utilisant l'expression (25) une valeur approchée de  $k'$  sous une charge de 2,5 N de l'ordre de  $1,6\cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ . Elle est donc négligeable devant le produit  $m\cdot g\cdot l$  dans l'expression (20). La valeur intrinsèque de la raideur en flexion  $k$  déduite de l'expression (10) et ramenée à cette même largeur de lame (non chargée) est d'environ  $2,5\cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ . Elle est du même ordre de grandeur que  $k'$ , mais significativement différente, et de toute façon négligeable devant le produit  $m\cdot g\cdot l$ .

#### 4.3.1. Fréquences et précession

On excite simultanément les deux pendules et on enregistre numériquement les tensions délivrées par les photodiodes avec des fréquences d'échantillonnage de 20 Hz ou de 1 kHz en fonction des durées d'enregistrement nécessaires.

Une première série d'essais a été réalisée avec une longueur OG de 142 mm pour les deux pendules. On trouve des moments d'inertie  $J_1$  et  $J_2$  quasiment identiques valant respectivement à  $1,05\cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  et  $1,02\cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . On en déduit les deux valeurs de la pulsation propre  $\omega_0$  de  $8,24 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $8,36 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  respectivement, correspondant aux fréquences  $f_0$  de 1,31 Hz et 1,33 Hz. Les deux pendules ont la même fréquence propre de l'ordre de 1,32 Hz obtenue à partir de la transformation de Fourier rapide des signaux expérimentaux à 1 % près. Ces valeurs théoriques et expérimentales ne sont pas significativement différentes compte tenu des incertitudes sur les mesures et sur les paramètres tels que  $E$  et  $\varepsilon_0$ .

La figure 12 présente un exemple d'enregistrement à la fréquence d'échantillonnage de 20 Hz du mouvement du centre de gravité (avec OG = 142 mm) du pendule 2 après excitation.

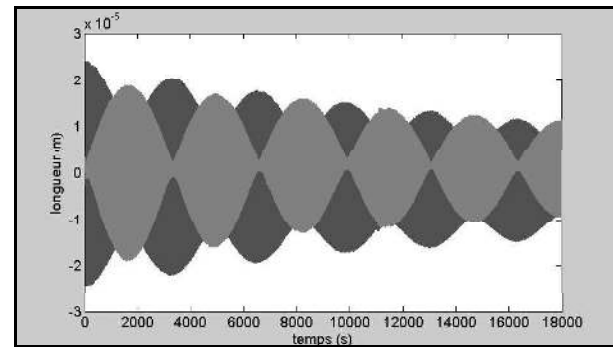


Fig. 12. – Enregistrement du mouvement du centre de gravité  $G$  du pendule 2 selon l'axe  $xx'$  (courbe claire) et selon l'axe  $yy'$  (courbe foncée).

Compte tenu de l'échelle temporelle, seules des oscillations de grande période apparaissent distinctement sur la figure 12. Elles correspondent au mouvement de précession des ellipses de Hooke. Dans cet exemple, la fréquence de précession est de l'ordre de 0,6 mHz.

Dans les différentes expériences réalisées avec ce montage, nous avons observé des fréquences de précession comprises entre 0,2 mHz et 0,9 mHz. La fréquence de précession semble dépendre ici des caractéristiques de l'excitation initiale en termes de direction, de front d'impulsion et d'amplitude.

Cette précession pourrait être en partie liée à des défauts mécaniques. En effet, on a pu montrer par simulation que les poutres reliant les lames entre elles des deux axes d'un même cardan n'avait pas une flexion similaire sous charge [26]. Cela entraîne un léger défaut de coplanarité des deux axes pour chaque cardan.

La figure 13 présente l'aire balayée par les trajectoires après 23 400 oscillations des centres de gravité des deux pendules après excitation uniquement du pendule 2. On voit bien que les trajectoires du pendule excité s'inscrivent dans un rectangle et ont des coordonnées du type donné par l'expression (17), mais avec une rotation des axes du repère de 0,2 rad et une rotation continue et identique des phases  $\phi$  et  $\psi$  correspondant à la précession des ellipses. Dans cet exemple, le rapport  $a/b$  vaut approximativement 2.

La flèche représentée sur la figure 13 montre la direction de l'impulsion initiale appliquée au pendule 2. On note un léger décalage angulaire de l'impulsion initiale par rapport à la direction de l'axe  $yy'$  d'environ 80 mrad. Cela ne signifie pas forcément qu'il y ait une composante impulsionnelle dans la direction  $xx'$  puisque les axes correspondant aux directions de détection sont très voisins des axes de rotation du dispositif monobloc.

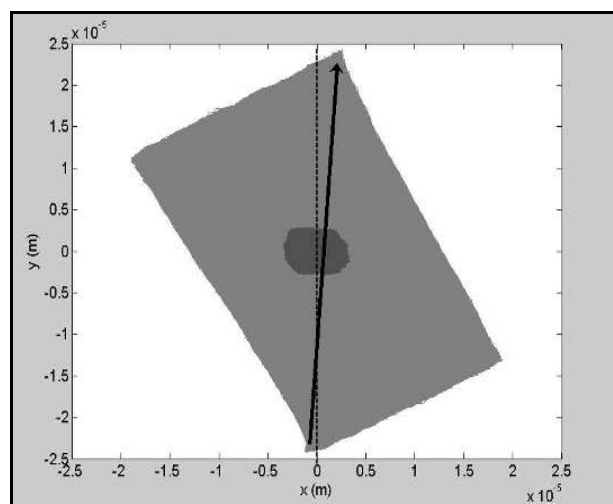


Fig. 13. – Exemple d'aire couverte par les trajectoires de 23 400 oscillations des centres de gravité du pendule 1 (en foncé) et du pendule 2 (en clair).

Une seconde série d'essais a été effectuée avec une longueur OG de 142 mm pour le pendule 1 et de 75 mm pour le pendule 2. On trouve un nouveau moment d'inertie  $J_2$  de l'ordre de  $0,29 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . On détermine alors une nouvelle valeur de pulsation propre  $\omega_{02}$  de  $11,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit une fréquence  $f_{02}$  de 1,82 Hz.

Les mesures expérimentales ont donné pour le pendule 2, une pseudo-fréquence de 1,74 Hz alors que la fréquence du pendule 1 est restée à 1,32 Hz.

#### 4.3.2. Amortissement

L'étude de l'amortissement a consisté à enregistrer les signaux de tension après excitation soit de l'un des deux pendules, soit des deux pendules simultanément. Les enregistrements ont été effectués sur plusieurs heures en continu à la fréquence d'échantillonnage de 20 Hz.

A partir des mesures expérimentales pour de faibles amplitudes angulaires ( $\theta_{\max} \leq 0,8 \text{ mrad}$ ), on calcule les énergies potentielles maximales  $E_{p_{\max}}$  successives d'après

l'expression (20). On en déduit des valeurs du décrétement logarithmique  $\eta$  calculées d'après l'expression (21). Ensuite, on détermine le temps de relaxation  $\tau$ , le facteur de qualité  $Q$  et le facteur de perte  $\gamma$  d'après les expressions (23), (24) et (26) respectivement.

Le bruit de fond observé est compris en moyenne entre 0,4 nJ (34  $\mu\text{rad}$ ) la nuit et 1 nJ (54  $\mu\text{rad}$ ) le jour. Ce bruit a pour origine les vibrations mécaniques, les parasites électromagnétiques et l'instabilité des moyens de mesure.

Les différents essais réalisés à la pulsation propre des deux pendules ont montré que :

- Tous les paramètres  $\omega_p$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ ,  $Q$  et  $\gamma$  sont égaux aux incertitudes près pour les deux pendules ayant même masse et même longueur avec une énergie potentielle initiale  $E_{p_{\max}}$  (ou une amplitude angulaire initiale  $\theta_{\max}$ ) du même ordre de grandeur. En particulier, on a constaté que les valeurs obtenues ne sont pas significativement différentes pour une même durée d'observation  $\Delta t$ . Cependant, on note un écart significatif entre celles obtenues pour deux intervalles de temps bien différents. Cela peut s'expliquer par un décrétement qui ne serait pas purement logarithmique. Le facteur de qualité pour les deux pendules est de l'ordre de  $10^5$ .
- Pour le pendule 1 ( $m = 0,5 \text{ kg}$  et  $l = 142 \text{ mm}$ ) :
  - Le décrétement  $\eta$  dépend de l'énergie potentielle ou de l'amplitude angulaire initiale. Il prend des valeurs comprises entre  $7 \cdot 10^{-6}$  et  $12 \cdot 10^{-6}$  pour des énergies potentielles initiales entre 5 nJ et 80 nJ.
  - Le facteur de perte  $\gamma$  est peu dépendant de l'énergie potentielle initiale puisqu'il varie entre  $5 \cdot 10^{-4}$  et  $6 \cdot 10^{-4}$  pour les mêmes énergies potentielles initiales comprises entre 5 nJ et 80 nJ, respectivement. Cette variation est à peine significative au regard de l'incertitude relative de 10 %.
  - Le temps de relaxation  $\tau$  est de l'ordre de  $1,5 \cdot 10^4 \text{ s}$ .
- Pour le pendule 2 ( $m = 0,5 \text{ kg}$  et  $l = 75 \text{ mm}$  ou  $142 \text{ mm}$ ) :
  - Avec une longueur semblable au pendule 1 (même pulsation propre pour les deux pendules), le décrétement  $\eta$  prend des valeurs du même ordre de grandeur. Mais, pour une longueur de 75 mm (pulsation propre plus grande), les valeurs deviennent significativement plus grandes comprises entre  $16 \cdot 10^{-6}$  et  $19 \cdot 10^{-6}$ .
  - Avec une longueur de pendule de 75 mm, le facteur de perte  $\gamma$  est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-4}$ , valeur deux fois plus petite que celle observée pour une longueur de 142 mm. Ce facteur semble donc dépendre de la fréquence, ce qui est conforme à la théorie.
  - Le temps de relaxation  $\tau$  passe de  $1,5 \cdot 10^4 \text{ s}$  pour une longueur de pendule de 142 mm à  $5 \cdot 10^3 \text{ s}$  pour 75 mm.
- Enfin, en termes de puissance moyenne dissipée par rapport à l'amplitude angulaire initiale, on a déterminé, par exemple, les valeurs suivantes :

0,3 pW pour 150  $\mu$ rad ;  
 0,4 pW pour 200  $\mu$ rad ;  
 1,5 pW pour 430  $\mu$ rad ;  
 3 pW pour 650  $\mu$ rad.

Il semble que la puissance dissipée soit très approximativement proportionnelle à l'amplitude angulaire pour les plus faibles valeurs ( $< 0,2$  mrad) et proportionnelle au carré de l'amplitude angulaire pour les valeurs les plus élevées du domaine étudié ( $> 0,2$  mrad).

#### 4.3.3. Couplage

La figure 14 présente l'évolution de l'énergie potentielle pour un exemple d'essai effectué avec des longueurs de pendule identiques. On voit qu'il n'y a pas de transfert significatif d'énergie entre le pendule 1 (non excité) et le pendule 2 (excité). L'énergie du pendule 1 reste au niveau du bruit qui est ici de l'ordre de 0,1 nJ, soit environ quatre-vingt-cinq fois plus faible que l'énergie initiale du pendule 2.

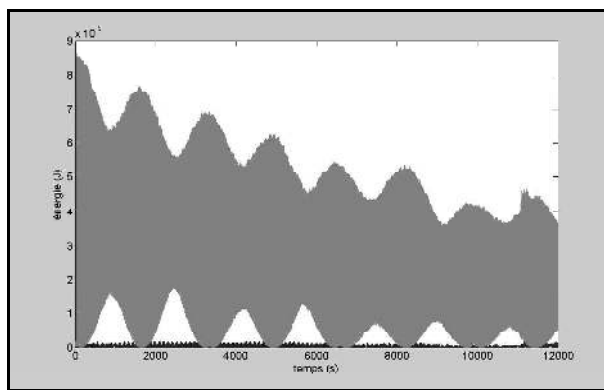


Fig. 14. – Evolution sur 5 heures de l'énergie potentielle du pendule 1 (en noir) et du pendule 2 (en gris) présentant une fréquence de précession de 0,6 mHz après excitation de ce dernier.

On observe clairement les oscillations dues au mouvement de précession avec quelques irrégularités dont l'origine n'a pas été identifiée. Les fluctuations du minimum de l'énergie potentielle qui apparaît sur la figure 14 s'explique par le fait que l'énergie ne passe que périodiquement par zéro (selon la fréquence de précession). En effet, la projection du mouvement dans un plan horizontal est de forme elliptique. C'est seulement lorsque l'ellipse s'aplatit pour devenir un segment de droite que le centre de gravité du pendule passe par la position de repos du pendule (énergie potentielle minimale).

L'amortissement de l'énergie potentielle correspond à un décrétement logarithmique de  $8 \cdot 10^{-6}$ . Compte tenu des incertitudes relatives de mesure de l'ordre de 10 %, cette valeur est dans l'intervalle des valeurs déterminées à partir de l'évolution de l'énergie potentielle pour d'autres essais.

Le transfert d'énergie du pendule 2 (excité) au pendule 1 (non excité) n'est pas significatif au regard des incertitudes de mesure et du bruit ambiant.

Pour les essais réalisés avec une longueur de 75 mm pour le pendule 2, on ne relève également aucun transfert significatif d'énergie du pendule 2 initialement excité au pendule 1 qui reste au repos, mis à part son mouvement résiduel dû au bruit.

## 5. Conclusion

Pour améliorer la répétabilité des mesures et éliminer certains biais du comparateur de force utilisé dans l'expérience française de balance du watt, un système monobloc d'articulation à lames flexibles a été conçu pour réduire les contraintes et déformations du pivot d'extrémité du fléau supportant la masse de transfert et la bobine.

Le projet initial de cette expérience prévoyait d'utiliser une masse de transfert de 500 g et une bobine de masse voisine. En tenant compte de ces données initiales, un premier dispositif d'articulation a été conçu et réalisé dans un bloc d'alliage de cuivre-béryllium (Cu98Be2) dans lequel ont été usinées huit lames de profil circulaire de 3 mm de rayon, 40  $\mu$ m d'épaisseur au col et 1,5 mm de largeur. Ce système constitue deux cardans indépendants dont les centres de rotation sont confondus. Chaque axe de rotation est matérialisé par deux lames symétriques qui supportent chacune la demi-charge suspendue, soit 2,5 N. Ces lames permettent l'articulation pour de faibles amplitudes d'angle solide des suspensions de la masse et de la bobine. Ce dispositif a pour but d'assurer :

- La concentration en un point unique d'application des forces gravitationnelle et électromagnétique à comparer ;
- Le découplage statique des effets de désalignement dus à l'excentration de la masse de transfert sur son plateau et à l'existence éventuelle d'une composante horizontale de la force électromagnétique ;
- Le découplage dynamique des oscillations parasites pouvant apparaître sur l'une ou l'autre des suspensions (masse ou bobine).

Des moyens d'étude spécifiques ont été développés et mis en œuvre afin de vérifier les caractéristiques statiques et dynamiques et l'efficacité de ce système monobloc d'articulation à lames flexibles.

L'étude du comportement statique (raideur, module d'Young, hystérésis, limite d'élasticité) des lames a été effectuée au moyen d'une méthode dynamométrique. Ne pouvant appliquer cette méthode directement sur le système monobloc, un artefact de lame simple semblable en tout point (à l'exception de sa largeur) aux liaisons élastiques du dispositif à quatre axes croisés a été réalisé selon la même technique d'usinage et par le même usineur.

Les mesures statiques ont été effectuées dans des conditions (lames non chargées, application d'un effort perpendiculaire à la direction de la lame...) qui sont différentes des conditions d'utilisation des lames formant le double cardan. Cependant, ces mesures obtenues par

une méthode de mesure statique de mise en œuvre simple permettent de classer de manière comparative les lames par rapport aux matériaux dont elles sont constituées et à leur profil.

Ainsi pour des lames à col circulaire en CuBe2, on a montré que la raideur d'effort tranchant  $C$  n'est pas constante, elle dépend de l'angle de flexion. Néanmoins, on a pu déterminer une valeur limite à flèche nulle.

On en a déduit, avec une incertitude relative inférieure à 20 %, la raideur en flexion  $k$  pour une lame non chargée.

On a également déterminé un domaine angulaire d'élasticité de  $\pm 47$  mrad pour cette lame qui est bien supérieur (d'au moins vingt fois) au domaine dans lequel les lames travailleront. L'influence des effets hystérétiques du système monobloc devrait donc être tout à fait négligeable.

L'étude du comportement dynamique du dispositif monobloc à quatre axes croisés en cuivre-béryllium a été effectuée dans des conditions proches de celles de l'utilisation finale. Ainsi cette étude a été réalisée en régime oscillatoire libre sous vide pour une charge de 5 N pour chaque pendule ayant une longueur voisine de 100 mm et pour des amplitudes angulaires inférieures à 1 mrad. On reste donc bien dans le domaine élastique des lames.

Les fréquences mesurées entre 1 Hz et 2 Hz pour la configuration du montage expérimental sont cohérentes avec la théorie. Des systèmes amortisseurs (par exemple amortisseur à ballotement de liquide) devront être développés pour ces fréquences généralement difficiles à éliminer car elles peuvent être facilement excitées par des vibrations d'origine mécanique.

Les principaux résultats obtenus expérimentalement montrent que :

- Le facteur de qualité  $Q$  des deux pendules est de l'ordre de 100 000 ;
- Le facteur de perte  $\gamma$  est de l'ordre de quelques  $10^{-4}$  sans différence significative entre les deux systèmes de lames flexibles pour une même fréquence propre ;
- L'amortissement dû à l'anélasticité du matériau est caractérisé par un décrétement  $\eta$  de l'ordre de  $10^{-5}$ . Cet amortissement est fonction de la fréquence d'oscillation, mais aussi de l'amplitude angulaire ;
- Le temps de relaxation  $\tau$  voisin de 10 000 s est inversement proportionnel au décrétement.

De plus, on a constaté que l'amortissement intrinsèque au matériau et les effets dus au profil particulier de la lame ne semblent pas être représentés par un décrétement purement logarithmique.

Ces résultats sont globalement très favorables en termes d'élasticité d'articulation et de facteur de qualité pour la configuration à double section pendulaire de chaque ligne de suspension telle qu'elle a été conçue et réalisée sur le prototype de comparateur de force de la balance du watt (fig. 1).

En outre, sans qu'il s'agisse d'un véritable essai de fatigue, le dispositif soumis à l'étude a été maintenu sous charge (5 N pour chaque pendule) pendant un an et a été régulièrement mis en oscillation durant cette période. Il a ainsi effectué sous charge plusieurs centaines de milliers d'oscillation dans un domaine angulaire maximum de  $\pm 2$  mrad. Il n'y a pas eu de rupture de lame et le comportement dynamique n'a pas significativement évolué au cours du temps.

Cette étude a également mis en évidence un découplage quasi-parfait entre les deux systèmes d'axes. C'est un point particulièrement intéressant pour l'application de ce dispositif à l'expérience française de balance du watt.

Enfin, le phénomène de précession observé semble dû en partie à une différence de flexion des poutres reliant les parties flexibles du dispositif entraînant un défaut de coplanarité des axes d'un même cardan. Cette flexion des poutres a aussi pour conséquence une inhomogénéité de répartition de la contrainte de charge sur la largeur des lames.

Finalement, l'étude a permis de conforter le choix du matériau, la configuration monobloc de la structure, les caractéristiques dimensionnelles et la technique de réalisation par électro-érosion du dispositif.

La seule amélioration à apporter à ce dispositif est le renforcement des poutres reliant les parties flexibles afin de réduire les défauts de coplanarité des axes des lames et de répartition de contrainte sur la largeur de ces lames. Ces résultats ont déjà fait en partie l'objet d'une publication [26].

L'évolution récente de l'expérience française de balance du watt pourrait nous conduire à considérer des charges suspendues plus importantes que celles initialement prévues, correspondant à environ 20 N pour chaque suspension (masse de transfert de 1 kg, amortisseur d'oscillation à ballotement de liquide, dispositif actif d'alignement de la bobine).

Bien que le système monobloc actuel pourrait théoriquement supporter de telles charges, le coefficient de sécurité ne serait plus que de 1, ne laissant aucune marge ; une rupture de lame pourrait alors survenir à tout moment. C'est pourquoi il est nécessaire de concevoir un nouveau système de double cardan monobloc.

Sur la base des résultats présentés ici, un nouveau dispositif semblable à celui qui a fait l'objet de cette étude, mais adapté aux nouvelles valeurs de charge est en cours de réalisation. Il sera facilement qualifié en l'implantant sur le montage expérimental qui a été mis au point et utilisé pour cette étude.

Les méthodes et moyens d'étude qui ont été présentés ici sont actuellement utilisés pour l'étude de nouvelles lames flexibles pour le nouveau fléau du comparateur de force de l'expérience française de balance du watt.

## Références

- [1] LECOLLINET M., BORDÉ CH., CHAMBON M., CLAIRON A., COOREVITS TH., FELTIN N., GENEVÈS G., GOSSET A., JUNCAR P., PINOT P. et PLATEL F., « Vers une balance du watt française », *Actes des conférences du 10<sup>e</sup> Congrès international de métrologie*, 2001, St Louis, France (disponible en version électronique).
- [2] ALVES F., BESBES M., CLAIRON A., CHASSAGNE L., DAVID J., GOSSET A., GOURNAY P., HOLLEVILLE D., JUNCAR P., LANDRAGIN A., LECOLLINET M., PEREIRA DOS SANTOS F., PINOT P., TOPÇU S., VILLAR F. et GENEVÈS G., « La balance du watt du BNM : état d'avancement », *Actes des conférences du 11<sup>e</sup> Congrès international de métrologie*, 2003, Toulon, France (disponible en version électronique).
- [3] GENEVÈS G., GOURNAY P., GOSSET A., LECOLLINET M., VILLAR F., PINOT P., JUNCAR P., CLAIRON A., LANDRAGIN A., HOLLEVILLE D., PEREIRA DOS SANTOS F., DAVID J., BESBES M., ALVES F., CHASSAGNE L. et TOPÇU S., « The BNM watt balance project », *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **54**, 2, numéro spécial pour CPEM 2004, 2005, 850-853.
- [4] GENEVÈS G., GOURNAY P., VILLAR F., PINOT P., JUNCAR P., LECOLLINET M., CHASSAGNE L., CLAIRON A., LANDRAGIN A., HOLLEVILLE D., PEREIRA DOS SANTOS F., DAVID J., BESBES M., ALVES F., TOPÇU S., HADDAD D., GOSSET A., SILVESTRI Z., MEURY P.-A., MADEC T. et MACÉ S., « La balance du watt : vers une nouvelle définition de l'unité de masse ? », *Revue française de métrologie*, **9**, 2007, 3-34.
- [5] PINOT P., GENEVÈS G., HADDAD D., DAVID J., JUNCAR P., LECOLLINET M., MACÉ S. et VILLAR F., « Theoretical analysis for the design of the French watt balance experiment force comparator », *Rev. Sci. Instrum.*, **78**, 095108, 2007, 11.
- [6] KIBBLE B.P., « Atomic masses and fundamental constants », **5**, ed. J.H. Sanders and A.H. Wapstra, New-York Plenum, 1976, 545-551.
- [7] KIBBLE B.P., ROBINSON I.A. et BELLIS J.H., « A realization of the SI watt by the NPL moving coil balance », *Metrologia*, **27**, 1990, 173-192.
- [8] ROBINSON I.A. et KIBBLE B.P., « The NPL moving coil apparatus for measuring Planck's constant and monitoring the kilogram », *IEEE Trans. on Instr. and Meas.*, **46**, 2, 1997, 596-600.
- [9] STEINER R.L., NEWELL D. et WILLIAMS E., « Details of the 1998 watt balance experiment. Determining the Planck constant », *J. Reas. Natl. Stand. Technol.*, **110**, 2005, 1-26.
- [10] EASTMAN F.S., « Flexure pivots to replace knife edges and ball bearings », *Engineering Experiment Station Series, Bulletin n° 86*, University of Washington, Seattle, 1935.
- [11] EASTMAN F.S., « The design of flexure pivots », *J. Aeronautical Science*, **5**, 1937, 16-21.
- [12] WITTRICK W.H., « The theory of symmetrical crossed flexure pivots », *Aust. J. Sci. Res. A*, **1**, 1948, 121-134.
- [13] WITTRICK W.H., « The properties of crossed flexure pivots, and the influence of the point at which the strips cross », *Aeronautical Quarterly*, **11**, 1951, 272-292.
- [14] WEINSTEIN W.D., « Flexure-pivot bearings », *Machine Design*, **37**, 1965, 136-145.
- [15] SYDENHAM P.H., « Elastic design of fine mechanism in instruments », *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, **17**, 1984, 922-930.
- [16] PICARD A., « The BIPM flexure-strip balance FB-2 », *Metrologia*, **41**, 2004, 319-329.
- [17] QUINN T.J., SPEAKE C.C. et DAVIS R.S., « A 1 kg mass comparator using flexure-strip suspensions: Preliminary results », *Metrologia*, **23**, 1986/87, 87-100.
- [18] QUINN T.J., « The beam balance as an instrument for very precise weighing », *Meas. Sci. Technol.*, **3**, 1992, 141-159.
- [19] HENEIN S., « Conception des guidages flexibles », *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, 2004, 248.
- [20] MERKEN P. et DEBONGNIE J.F., « Le col circulaire comme articulation flexible », *Actes du 6<sup>th</sup> National Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Ghent, 2003, NCTAM-2003-077, 7.
- [21] KIM M.S., CHOI J.H., PARK Y.K. et KIM J.H., « Atomic force microscope cantilever calibration device for quantified force metrology at micro- or nano-scale regime: the nanoforce calibrator (NFC) », *Metrologia*, **43**, 5, 2006, 389-395.
- [22] AL MAJID A., « Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire », *Thèse de doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, 2002, 162.
- [23] LALANNE M., « Modeling damping in mechanical engineering structures », *Shock and Vibration Journal*, **7**, 1, 2000, 29-37.
- [24] SOULA M., VINH T., CHEVALIER Y., BEDA T. et ESTEOULE C., « Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies », *Journal of Sound and Vibration*, **205**, 2, 1997, 167-184.
- [25] BLAIR D.G., JU L. et NOTCUTT M., « Ultrahigh Q pendulum suspensions for gravitational wave detectors », *Rev. Sci. Instrum.*, **64**, 7, 1993, 1899-1904.
- [26] PINOT P., MACÉ S., GENEVÈS G., GOURNAY P., HADDAD D., LECOLLINET M., VILLAR F. et HIMBERT M.E., « Dynamic behaviour of a monolithic suspension device for the French watt balance experiment », *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, **44**, 2, 2008, 193-204.

Article reçu le 6 octobre 2008 ; version révisée reçue le 14 juin 2010.