Jacques Francheteau
Guy Métivier

Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels

Astérisque, tome 268 (2000)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__268__R1_0>

ASTÉRISQUE 268

EXISTENCE DE CHOCS FAIBLES POUR DES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES MULTIDIMENSIONNELS

Jacques Francheteau
Guy Métivier

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Jacques Francheteau
Écoles de Saint-Cyr Coëtquidan, CREC, 56381 Guer Cedex.

Guy Métivier
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.
E-mail : `Guy.Metivier@univ-rennes1.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35L67, 35L65, 35L50, 76L05.

Mots clefs. — Systèmes de lois de conservations, ondes de choc, problèmes mixtes hyperboliques non linéaires, frontières libres, stabilité, calcul paradifférentiel, schémas de Nash-Moser.

EXISTENCE DE CHOCS FAIBLES POUR DES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES MULTIDIMENSIONNELS

Jacques Francheteau, Guy Métivier

Résumé. — L'objet de ce travail est l'étude des chocs faibles pour des systèmes de lois de conservation en dimension d'espace deux ou plus. Le résultat principal est la construction dans un domaine indépendant du paramètre ε, de familles de solutions u^ε ayant une discontinuité sur une hypersurface Σ^ε avec un saut d'amplitude d'ordre de grandeur ε. Le problème à ε fixé a été résolu par A. Majda, comme un problème mixte hyperbolique non linéaire à frontière libre non caractéristique. Lorsque ε tend vers 0, le front tend à devenir caractéristique et on doit faire face à un problème de type perturbation singulière avec perte de stabilité et de régularité. Ces pertes mettent en échec les méthodes classiques d'obtention des estimations *a priori* par dérivation de l'équation et de construction de solutions par des schémas itératifs de type Picard. On est conduit à utiliser des outils plus sophistiqués, comme le calcul paradifférentiel pour les estimations *a priori* et les schémas de type Nash-Moser pour la construction des solutions. Une application importante des résultats concerne les équations d'Euler de la dynamique des gaz. On peut ainsi construire des familles de chocs faibles aussi bien dans le cas du système d'Euler complet que dans le cas du système isentropique. Nos résultats permettent aussi de comparer ces deux familles de chocs faibles.

***Abstract* (Existence of weak shocks for multidimensional quasi-linear hyperbolic systems)**

In this work, we consider weak shocks for systems of conservation laws in any space dimension. The main result is the construction on a space-time domain independent of the parameter ε, of families of weak solutions u^ε, discontinuous along a smooth hypersurface Σ^ε, with jumps of order ε. For a fixed ε, the problem can be recast as a nonlinear mixed hyperbolic problem with a free noncharacteristic boundary. It has been solved by A. Majda. When ε tends to zero, the front tends to be characteristic. This induces a loss of of stability and regularity. As a consequence, the classical nonlinear methods based on Picard's iterations and differentiation of the equations do not apply. In this work, to prove the suitable *a priori* estimates and to construct the solutions, we use more sophisticated methods such as the para-differential calculus and Nash-Moser's type iteration schemes. An important application of our results concerns Euler's equations of gas dynamics. They apply to the full system and to the isentropic system. We construct and compare weak shock solutions of these two systems.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Énoncé du problème

Au début des années 80, A. Majda ([Ma2], voir aussi [Ma3]) a montré comment construire des ondes de choc pour des systèmes $N \times N$ de lois de conservation multi-dimensionnelles :

$$\sum_{j=0}^{n} \partial_j f_j(u) = 0. \tag{1.1.1}$$

Les flux f_j sont des applications C^∞ d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Le système est supposé hyperbolique symétrique dans la direction x_0, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $S(u)$ telle que les matrices $S(u)f_j'(u)$ sont symétriques et $S(u)f_0'(u)$ est définie positive. Cette hypothèse est satisfaite par de nombreux exemples physiques et en particulier dès que le système admet une entropie strictement convexe (*cf.* par exemple [Fr-La1], [Se]). La dimension d'espace est n et x_0 est la variable de temps, qu'on note aussi t.

Un choc est une solution faible de (1.1.1), discontinue à travers une hypersurface Σ, régulière jusqu'au bord de part et d'autre de Σ. Quitte à changer de repère, on peut supposer qu'en coordonnées locales, le *front* est d'équation

$$\Sigma := \{x_n = \phi(y)\}, \qquad y := (x_0, \ldots, x_{n-1}). \tag{1.1.2}$$

On s'intéresse alors à des fonctions $u^\pm$ sur $\Omega_\pm := \{\pm(x_n - \phi(y)) > 0\}$, régulières jusqu'au bord Σ. La fonction

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } x_n > \phi(y) \\ u^-(x) & \text{si } x_n < \phi(y) \end{cases} \tag{1.1.3}$$

est solution faible de (1.1.1), si et seulement si u^+ et u^- sont solutions classiques de (1.1.1) respectivement sur Ω_+ et Ω_- et si leurs traces sur Σ vérifient les *conditions de Rankine-Hugoniot*

$$\sum_{j=0}^{n} \nu_j [f_j(u)] = 0 \quad \text{sur } \Sigma \tag{1.1.4}$$

où $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n)$ est la normale à Σ et $[f] = f(u^+) - f(u^-)$ désigne comme d'habitude le saut de $f(u)$ sur Σ (voir par exemple [La] ou [Se], [Go-Ra]).

Les équations (1.1.1) pour $u^{\pm}$ et les conditions de transmission (1.1.4), constituent un *problème aux limites à frontière libre.*

Pour des sauts $[u]$ dont l'amplitude n'est pas trop grande, P. Lax ([La]) a distingué deux types de solutions discontinues : d'une part, les *discontinuités de contact* pour lesquelles le front Σ est une surface caractéristique à droite et à gauche, et d'autre part les *chocs* qui sont des solutions du type (1.1.3), pour lesquelles Σ est non caractéristique et qui vérifient en outre des *conditions d'entropie* que nous rappellerons ci-dessous.

Dans [Ma2], A. Majda construit des ondes de chocs, en résolvant le problème (1.1.1) pour $u^{\pm}$ avec les conditions aux limites (1.1.4) et des *données de Cauchy* en $t = 0$, singulières sur une hypersurface Σ_0 d'équation $x_n = \phi_0(y')$:

$$u_0(x') = \begin{cases} u_0^+(x') & \text{si } x_n > \phi_0(y') \\ u_0^-(x') & \text{si } x_n < \phi_0(y') \end{cases} \tag{1.1.5}$$

où l'on a noté $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Il s'agit donc d'un *problème mixte hyperbolique non linéaire à frontière libre.* A. Majda construit des solutions locales en temps, c'est-à-dire sur des intervalles $[0, T]$ où T dépend de certaines normes des données initiales, mais aussi de l'amplitude du saut initial $[u]$. Pour des raisons que nous expliquerons ci-dessous, le temps T qu'il construit tend vers zéro lorsque l'amplitude ε du saut tend vers zéro. Cela est lié à une perte effective de stabilité qui est analysée dans [Mé2]. Néanmoins, on ne s'attend pas à ce que le temps d'existence de la solution du problème non linéaire tende vers zéro lorsque ε tend vers zéro. En effet, le problème limite pour $\varepsilon = 0$, est un problème de construction d'*ondes soniques*, c'est-à-dire de solutions continues à gradient discontinu sur le front Σ. Dans le cas des équations d'Euler, cela correspond aux ondes acoustiques qui se propagent à la vitesse du son. Ce type d'onde a été étudié dans [Mé1] et [Sab]. Une différence importante avec les chocs est que, pour les ondes soniques, le front Σ est caractéristique. Le phénomène naturel attendu est que les chocs de faible amplitude ressemblent aux ondes soniques lorsque la force du choc tend vers zéro.

Le but de ce travail est précisément d'élucider cette question et de construire des *chocs faibles*, c'est-à-dire de construire sur *domaines fixes* des familles d'ondes de choc d'amplitude arbitrairement petite. Ce résultat sous-entend que la notion même de choc faible est *consistante* : si le choc est de taille ε à l'instant initial, il reste de taille $O(\varepsilon)$ sur un intervalle de temps fixe. La vérification de ce point fait partie de la démonstration. Une fois établie l'existence de familles de chocs faibles vérifiant des estimations uniformes, il n'est pas très difficile de montrer leur convergence lorsque l'amplitude du saut tend vers zéro vers une onde sonique, c'est-à-dire une discontinuité du gradient. Le problème se présente donc comme une étude de perturbations singulières non caractéristiques de problèmes aux limites caractéristiques, avec la difficulté supplémentaire que les frontières sont libres.

Nos résultats s'appliquent aux équations d'Euler de la dynamique des gaz, que ce soit le système isentropique, ou le système entropique complet. En particulier, nous construisons des chocs faibles pour chacun de ces systèmes et nous montrerons que les chocs faibles isentropiques sont de bonnes approximations de chocs entropiques. Cela n'est pas très surprenant si l'on pense que le saut d'entropie est cubique par rapport au saut de pression, mais la principale difficulté est que les fronts entropiques et isentropiques sont différents et qu'il faut contrôler l'écart entre ces fronts.

Les résultats sont présentés au chapitre 2.

1.2. La stratégie générale. Techniques mises en jeu

La démarche que nous suivons reprend un certain nombre de méthodes classiques dans l'étude des problèmes aux limites hyperboliques.

1. Le problème étant à frontière libre, on se ramène à un domaine fixe, par changement de variables inconnu. Ce faisant, on introduit ce changement de variables, ou plutôt son inverse, comme une nouvelle inconnue.

2. On analyse les données initiales du problème. Elle doivent vérifier un certain nombre de conditions de compatibilité pour que ne naisse qu'une seule onde discontinue de la discontinuité initiale. Lorsque ces conditions sont satisfaites, on peut construire des solutions approchées, u_{app}, qui vérifient l'équation au sens de développements de Taylor en $t = 0$, d'ordre grand mais fixé. On résout alors l'équation pour

$$v = \begin{cases} u - u_{app} & \text{pour} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

3. On établit des estimations a priori pour u (ou v). C'est l'étape principale de notre travail. La principale différence avec [Ma2] est que nous obtenons des estimations sur un domaine indépendant de la force ε du choc et avec des constantes indépendantes de ε.

4. On construit des solutions v, à ε fixé, sur un intervalle de temps dépendant de ε. Les estimations uniformes permettent d'itérer cette construction pour finalement aboutir à une solution sur un domaine indépendant de ε.

La mise en œuvre de ce schéma général cumule un assez grand nombre de difficultés et utilise certaines techniques lourdes. Parmi les questions et les ingrédients auxquels touche ce travail, mentionnons l'étude des chocs plans et du problème de Riemann, le redressement du front, l'étude des problèmes mixtes hyperboliques caractéristiques et non caractéristiques, les questions de stabilité et la condition de Lopatinski uniforme, la stabilité des chocs, la stabilité des chocs faibles, l'utilisation du calcul paradifférentiel, la nécessité de travailler dans des espaces anisotropes et la notion de régularité conormale, l'obtention d'estimations L^∞, le choix des schémas de résolution, l'utilisation de méthodes de Nash-Moser. Avant de présenter les résultats au chapitre 2, nous indiquons ici quelques points de repère et références concernant les problèmes mentionnés ci-dessus. Nous espérons qu'ils permettront au lecteur de mieux situer le contexte du présent travail. Cette présentation servira aussi à motiver l'introduction des différentes techniques.

1.2.1. Chocs plans. Condition d'entropie. — L'idée de départ pour construire des chocs multidimensionnels est de perturber une situation simple connue, celle des *chocs plans.* Dans ce cas, la solution est constituée de deux états constants u^- et u^+ séparés par un hyperplan $\nu \cdot x = c$. Les équations se réduisent aux conditions de saut de Rankine-Hugoniot (1.1.4). En particulier, en dimension $n = 1$, la condition s'écrit

$$\sigma[f_0(u)] = [f_n(u)] \qquad \text{pour} \quad \Sigma = \{x_n = \sigma x_0\}. \tag{1.2.1}$$

Cette équation qui relie u^+, u^- et σ s'analyse aisément, au moins lorsque $[u]$ est assez petit (*cf.* [La] et aussi par exemple [Se], [Go-Ra], [Hö2]). En notant $A_j(u) := f_j'(u)$, l'hypothèse d'hyperbolicité implique que les valeurs propres de $A_0^{-1}(u)A_n(u)$ sont réelles. Si $\lambda(u)$ est une valeur propre simple, alors au voisinage de $(\underline{u}, \underline{u}, \underline{\sigma})$ avec $\underline{\sigma} = -\lambda(\underline{u})$, il existe une variété de solutions (u^-, u^+, σ) paramétrée par u^- et un paramètre $s \in \mathbb{R}$ assez petit :

$$u^+ = U(u^-, s), \quad \sigma = \Lambda(u^-, s). \tag{1.2.2}$$

La théorie de Lax ajoute aux conditions de Rankine-Hugoniot des conditions *d'admissibilité ou d'entropie.* Ce sont des critères d'unicité qui éliminent les solutions physiquement inacceptables. Ces conditions apparaissent aussi comme des conditions de stabilité (voir ci-dessous). Selon Lax, en notant $\lambda_1(u) \leq \cdots \leq \lambda_N(u)$ les valeurs propres de la matrice $A_0^{-1}(u)A_n(u)$, une discontinuité de front $\{x_n = \sigma x_0\}$ est un *k-choc* si elle vérifie

$$\lambda_{k-1}(u^-) < \sigma < \lambda_k(u^-), \quad \lambda_k(u^+) < \sigma < \lambda_{k+1}(u^+) \tag{1.2.3}$$

En particulier, pour les chocs, au contraire de ce qui se passe pour les discontinuités de contact, le front est non caractéristique pour chacun des deux états qu'il sépare. Selon Lax, on dit que la valeur propre λ_k est *vraiment non linéaire* si

$$r_k(u) \cdot \nabla_u \lambda_k(u) \neq 0 \tag{1.2.4}$$

où $r_k(u)$ désigne un vecteur propre de $A_0^{-1}(u)A_n(u)$ associé à la valeur propre $\lambda_k(u)$. Dans ce cas, on peut normaliser r_k de sorte que le membre de gauche de (1.2.4) soit égal à 1. L'analyse de la courbe (1.2.2) associée à la valeur propre λ_k montre que $\sigma = \underline{\sigma} + \frac{1}{2}s + O(s^2)$ alors que $\lambda_k(u^+) = \lambda_k(u^-) + s + O(s^2)$ Les conditions de choc (1.2.3) sont équivalentes, pour s assez petit, à

$$s < 0. \tag{1.2.5}$$

Par ailleurs, cette condition est aussi équivalente aux conditions d'entropie définies à l'aide d'entropies strictement convexes pour le système (*cf.* [La], [Se], [Go-Ra]).

Cette analyse s'étend par rotation des axes au cas des chocs plans multidimensionnels, comme indiqué au paragraphe 2.2. Pour $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, l'hypothèse d'hyperbolicité implique que les valeurs propres de $\sum_{j \geq 1} \eta_j A_0^{-1}(u)A_j(u)$ sont réelles. Si $\lambda(u, \eta)$ est une valeur propre simple, alors au voisinage de de $(\underline{u}, \underline{u}, \underline{\nu})$ avec $\underline{\nu}_0 = -\lambda(\underline{u}, \underline{\nu}_1, \dots, \underline{\nu}_n)$, il existe une variété de solutions (u^-, u^+, ν) des conditions de Rankine-Hugoniot (1.1.4), paramétrée par u^-, $(\nu_1, \dots \nu_n)$ et un paramètre $s \in \mathbb{R}$ assez petit. La notion de valeur propre vraiment non linéaire s'étend de manière évidente. Les conditions de choc (1.2.3) et d'entropie (1.2.5) s'étendent immédiatement au cas multidimensionnel.

1.2.2. Exemples de résolution du problème à données discontinues

On sait résoudre le problème (1.1.1) (1.1.5) dans certains cas très particuliers. Tout d'abord, le *problème de Riemann* concerne le problème de Cauchy pour (1.1.1) avec des données initiales formées de deux états constants u^+ et u^- séparés par un front initial Σ_0 qui est un hyperplan. À une rotation près des vecteurs de base, la donnée initiale s'écrit donc

$$u_0(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} u^+ & \text{si } x_n > 0, \\ u^- & \text{si } x_n < 0. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Il est naturel de chercher une solution indépendante des variables $(x_1, \dots, x_{n-1})$ et le problème est en fait monodimensionnel. Suivant Lax, on sait que, sous certaines hypothèses sur les valeurs propres du système et si $u^+ - u^-$ n'est pas trop grand, alors il existe une solution se présentant comme la juxtaposition de $N+1$ états constants, $(u_0, \dots, u_N)$, avec $u_0 = u^-$ et $u_N = u^+$, séparés soit par des ondes de raréfaction, soit par des sauts qui sont ou bien des chocs ou bien des discontinuités de contact (*cf.* [La] ou [Se], [Go-Ra], [Hö2] par exemple). Pour l'unicité de cette solution parmi les solutions entropiques autosimilaires, voir [He].

En dimension un, la construction locale de solutions régulières de problèmes hyperboliques est grandement facilitée par les méthodes d'intégration le long ses caractéristiques. On renvoie par exemple à [Li] pour des exemples de mise en œuvre de ces méthodes. Pour le problème (1.1.1) (1.1.5) en dimension $n = 1$, la solution locale se présente encore comme la juxtaposition de solutions régulières (sauf en 0 pour les raréfactions) séparées par des fronts qui en dimension un sont des courbes issues du point initial de discontinuité.

En dimension supérieure, sous certaines hypothèses sur le système, E. Harabetian a résolu le problème (1.1.1) (1.1.5) dans un cadre de fonctions réelles analytiques ([Ha]). Les solutions sont à nouveau formées de juxtaposition de fonctions régulières séparées par des fronts. Mais, de même que le théorème de Cauchy-Kowalewsky ne demande aucune hypothèse d'hyperbolicité, le résultat de [Ha] laisse de côté toute analyse de stabilité, à l'opposé du travail de A. Majda.

Rappelons aussi qu'en dimension un, on dispose du théorème de Glimm (*cf.* [Gl] ou [Se], [Hö2]) qui construit des solutions du problème de Cauchy pour des données à variations bornées, donc permettant des discontinuités. Ce théorème a donné lieu à de nombreuses variantes et extensions (*cf.* par exemple [BCP] et la bibliographie de [Se]). Par contre, en dimension supérieure, on ne dispose d'aucun analogue et la construction de solutions locales pour des données discontinues est un problème essentiellement ouvert. La construction d'ondes de chocs multidimensionnelles par A. Majda ([Ma2]) est donc une première avancée dans ce problème, tout comme la construction d'ondes de raréfaction par S. Alinhac ([Al]). Mentionnons que la question des discontinuités de contact multidimensionnelles est un problème encore incompris, puisque donnant lieu à des instabilités fortes (*cf.* [Ar-Ma]). Les ondes soniques ou de gradient sont étudiées dans [Mé1] et [Sab].

1.2.3. Redressement du front. — Pour les problèmes à frontière libre, le domaine de définition de la solution est inconnu. Cela crée des difficultés dans la mise en place de schémas itératifs et dans la comparaison de solutions. Une technique standard consiste à ramener le problème à un domaine fixe, par un changement de variables qu'on prend comme inconnue. Cette idée se retrouve par exemple dans l'utilisation des transformations de l'hodographe (*cf.* [Co-Fr], ou [Ma-Th]).

Pour les solutions de (1.1.1) de la forme (1.1.3), on ramène le front $\Sigma = \{x_n = \phi(y)\}$ à un front fixe $\widetilde{x}_n = 0$ par un changement de variables

$$(y, \widetilde{x}_n) \longrightarrow (y, \Phi(y, \widetilde{x}_n)) \tag{1.2.7}$$

où $\Phi(y, 0) = \phi(y)$. Les domaines $\Omega_\pm$ sont transformés en $\widetilde{\Omega}\pm := \{\pm\widetilde{x}_n > 0\}$. On note $\widetilde{u}$ [resp. $\widetilde{u}^\pm$] les fonctions déduites de u [resp. $u^\pm$] par le changement de variables (1.2.7). Alors, u est solution faible de (1.1.1) si et seulement si $\widetilde{u}^\pm$ et Φ vérifient

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\widetilde{u}^\pm, d\Phi) := \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\widetilde{u}^\pm)\partial_j\widetilde{u}^\pm + \mathcal{M}(\widetilde{u}^\pm, d\Phi)\partial_n\widetilde{u}^\pm = 0, & \text{sur } \pm\widetilde{x}_n > 0, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j\phi[f_j(\widetilde{u})] - [f_n(\widetilde{u})] = 0, \quad \Phi = \phi, & \text{sur } \widetilde{x}_n = 0. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

On renvoie au § 2.3 pour une explicitation de la matrice $\mathcal{M}$. On construit les solutions dans les variables $(y, \widetilde{x}_n)$ et pour alléger l'écriture on oublie dorénavant les $\widetilde{\ }$.

Insistons sur le fait que dans (1.2.8), les inconnues sont $u^\pm$ et Φ. On notera que (1.2.8) est sous-déterminé. C'est normal, puisque la seule condition imposée au changement de variables (1.2.7) est de redresser le front Σ. Tout changement de variables qui préserve $\{\widetilde{x}_n = 0\}$ transforme une solution de (1.2.8) en une autre solution. Seule la condition au bord lie ϕ à u. Pour clore le système on doit donc fixer une relation entre Φ et (u, ϕ), telle que $\Phi = \phi$ sur Σ. Dans [Ma1] et [Ma2], le choix de Majda est

$$\Phi(y, x_n) = x_n + \phi(y). \tag{1.2.9}$$

Ce choix a l'avantage d'être simple, mais sa pertinence repose sur l'ellipticité en ϕ des conditions de Rankine-Hugoniot alliée à l'estimation sans perte des traces due à la condition de stabilité uniforme de [Ma1] (voir §§ 1.2.4 et 1.2.11 ci-dessous). Dans le cas des chocs faibles, l'ellipticité et l'estimation des traces ne sont pas uniformes comme on l'indique plus loin (*cf.* [Mé2]). L'utilisation de (1.2.9) conduirait donc à des pertes de régularité dont le contrôle ne paraît pas clair.

Le cas limite où le saut est nul correspond au cas des ondes soniques. Les conditions au bord s'écrivent alors sous la forme

$$[u] = 0, \quad \partial_t \phi = \lambda(u, \partial_{y'}\phi) \quad \text{sur} \quad x_n = 0. \tag{1.2.10}$$

On a noté $t = y_0$ et $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. L'équation eikonale ne fait que traduire le fait que le front Σ est une surface caractéristique. Pour l'étude des ondes soniques dans [Mé1], Φ est fixé en demandant que la deuxième équation de (1.2.10) soit satisfaite partout, c'est à dire sur $\{x_n \geq 0\}$ et sur $\{x_n \leq 0\}$. Pour traiter le cas où le saut $[u]$ est petit, l'idée et de faire un choix de Φ qui redonne le choix de [Mé1] à la limite $\varepsilon \to 0$. Tout d'abord, en suivant l'analyse de Lax, on voit que pour les discontinuités faibles, les conditions de Rankine-Hugoniot sont équivalentes à des équations de la forme

$$\mathcal{R}(u^+, u^-, \partial_{y'}\phi) = 0, \quad \partial_t \phi = \lambda(u^+, u^-, \partial'_y \phi). \tag{1.2.11}$$

où $\mathcal{R}$ est un système de $N-1$ équations et $\lambda(u^+, u^-, \theta)$ est une extension de la fonction $\lambda(u, \theta)$ (voir [Se] et § 2.2). L'idée est de déterminer Φ en résolvant la seconde équation de (1.2.11) partout et non plus seulement sur $\{x_n = 0\}$. Pour cela on choisit un prolongement de u^+ [resp. u^-] sur $\{x_n < 0\}$ [resp. $\{x_n > 0\}$]. De façon précise, on complète le système (1.2.8) par

$$\begin{cases} \partial_t \Phi = \lambda(u^+, u^+ - p^+, \partial'_y \Phi) & \text{sur} \quad x_n \geq 0, \\ \partial_t \Phi = \lambda(u^- + p^-, u^-, \partial'_y \Phi) & \text{sur} \quad x_n \leq 0. \end{cases} \tag{1.2.12}$$

où p^+ [resp. p^-] est déterminé par relèvement de trace dans $\{x_n > 0\}$ [resp. $\{x_n < 0\}$] à partir des conditions

$$p^+_{|x_n=0} = p^-_{|x_n=0} = [u]. \tag{1.2.13}$$

On notera que la trace de $u^+ - p^+$ [resp. $u^- + p^-$] vaut u^- [resp. u^+] si bien que les traces des équations de (1.2.12) sur le bord $\{x_n = 0\}$ se réduisent à la seconde équation de (1.2.11). Il en résulte que la condition $\Phi = \phi$ sur $\{x_n = 0\}$ est compatible aux équations et est propagée à partir des données initiales.

1.2.4. Problèmes aux limites hyperboliques. Stabilité des chocs. — Le problème (1.2.8) rentre dans la catégorie des problèmes aux limites non linéaires hyperboliques. Les méthodes standard de construction de solutions régulières sont basées sur la linéarisation des équations et la mise en place de schémas itératifs de résolution. Le point crucial est l'obtention d'estimations a priori pour les équations linéarisées. À la différence de la dimension $n = 1$, pour les problèmes multidimensionnels, les seules estimations générales sont des estimations d'énergie d'abord dans des espaces L^2 puis dans des espaces de Sobolev basés sur L^2.

a) Estimations L^2. Condition de Lopatinski uniforme. — Considérons pour fixer les idées un problème mixte hyperbolique symétrique linéaire, de la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t v + \sum A_j(x)\partial_j v = f, & \text{pour} & x_n > 0,\ t > 0, \\ B(x)v = g, & \text{pour} & x_n = 0,\ t > 0, \\ v = v_0, & \text{pour} & x_n > 0,\ t = 0. \end{array}\right. \tag{1.2.14}$$

Le cas le plus simple est celui où les conditions aux limites sont *dissipatives* (*cf.* [Fr1], [Fr2], [Fr-La2], [La-Ph]), ce qui veut dire que la matrice SA_n est positive ou nulle sur le noyau de B, $S(x)$ désignant ici le symétriseur. Dans ce cas, quand $g = 0$, les estimations L^2 s'obtiennent par de simples intégrations par parties, l'hypothèse de dissipativité signifiant que les termes de bord ont automatiquement le bon signe. Dans le cas *strictement dissipatif*, c'est-à-dire quand SA_n est définie positive sur le noyau de B, on obtient les estimations de la forme

$$\begin{aligned} &\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|v_{|x_n=0}\|_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^{n-1})} \leq \\ &\qquad C\Big(\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|f\|_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^{n-1})}\Big). \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

On notera que la condition de stricte dissipativité nécessite que la matrice A_n soit inversible, c'est-à-dire que le bord $\{x_n = 0\}$ soit non caractéristique.

Dans le cas non dissipatif, on dispose de la théorie de Kreiss qui concerne les problèmes linéaires à coefficients C^∞ strictement hyperboliques et non caractéristiques. Kreiss montre une estimation analogue à (1.2.15) (voir (1.2.17) ci-dessous), sous une hypothèse dite *condition de Lopatinski uniforme* ([Kr], [Ral], [Ch-Pi]). L'analyse de Kreiss consiste à construire un opérateur $\mathbb{S}$, qui possède des propriétés de symétrisation analogues à celles de l'opérateur de multiplication par la matrice $S(x)$ dans le cas des problèmes strictement dissipatifs. On commence par étudier le problème (1.2.14) dans le cas où les coefficients sont constants. Par transformation de Fourier-Laplace dans les variables $y = (t, x_1, \ldots, x_{n-1})$, on obtient un problème aux limites pour un système différentiel ordinaire en x_n. La condition de Lopatinski uniforme est satisfaite quand ce système différentiel est bien posé, uniformément par rapport aux fréquences tangentielles. Sous cette hypothèse, on construit un symétriseur $S(\eta)$ qui est un multiplicateur de Fourier-Laplace dans les variables y. Dans le cas de coefficients C^∞, on fait cette construction pour chaque point x fixé, pour obtenir le symbole du symétriseur $S(x, \eta)$. On quantifie ce symbole en opérateur de symétrisation $\mathbb{S} = S(x, D_y)$ via l'utilisation du calcul pseudodifférentiel (*cf.* [Kr] [Ch-Pi]). Pour appliquer ces résultats aux problèmes non linéaires, on doit aussi considérer des systèmes (1.2.14) dont les coefficients ont une régularité limitée. On peut alors adapter le calcul pseudodifférentiel à des symboles à régularité limitée comme l'a fait A. Majda ([Ma1]). On peut aussi utiliser le calcul paradifférentiel de J.-M. Bony ([Bo]) ou une variante, qui permet d'obtenir (1.2.15) pour des coefficients seulement lipschitziens (*cf.* [Mok], [Mé3] [Mé4] et § 1.2.8 ci-dessous).

b) Stabilité uniforme des chocs au sens de Majda. — Pour un choc plan $u^\pm$ de front $x_n = \sigma x_0$, le linéarisé de (1.2.8) est

$$\text{(1.2.16)}\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} A_j(u^+)\,\partial_j v^+ + \big(A_n(u^+) - \sigma A_0(u^+)\big)\partial_n v^+ = f^+, & x_n > 0,\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} A_j(u^-)\,\partial_j v^- + \big(A_n(u^-) - \sigma A_0(u^-)\big)\partial_n v^- = f^-, & x_n < 0,\\ \displaystyle\big[(A_n(u) - \sigma A_0(u))v\big] - \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j\varphi\,[f_j(u)] = g, & x_n = 0, \end{cases}$$

(*cf.* [Ma1]). Ce problème aux limites n'est pas tout à fait standard à cause de la présence de l'inconnue φ dans la condition aux limites. On pourrait d'ailleurs éliminer φ, pour trouver des conditions aux limites différentielles du premier ordre. Les équations linéarisées de (1.2.8) autour d'états non constants (u, Φ) sont encore de la forme (1.2.16), mais avec des coefficients variables dépendant de (u, Φ).

En dimension $n > 1$, la présence de φ dans les conditions aux limites de (1.2.16) fait qu'elles ne sont pas dissipatives. Cependant, comme l'a montré A. Majda ([Ma1]) la théorie de Kreiss s'étend à ce type de problèmes. Pour le problème de transmission (1.2.16), les conditions de choc de Lax (1.2.3) impliquent d'une part que le problème est non caractéristique, i.e. 0 n'est pas valeur propre de $A_n(u^\pm) - \sigma A_0(u^\pm)$, et d'autre part que l'on a le bon nombre de conditions aux limites. La condition de *stabilité uniforme des chocs* de Majda exprime que le problème mixte (1.2.16) vérifie la condition de Lopatinski uniforme. Dans [Ma1] il est montré que ces conditions sont satisfaites par les équations d'Euler de la dynamique des gaz pour des lois d'état convexes, et sous certaines hypothèses sur le nombre de Mach pour des lois générales. Les conditions de stabilité sont aussi satisfaites par les systèmes vraiment non linéaires, sous des hypothèses assez générales dès que le choc est assez petit et vérifie les conditions de Lax (1.2.3) (*cf.* [Mé2], [Mé3]).

Pour le système (1.2.16), la condition de stabilité uniforme de [Ma1] se traduit par des estimations de la forme

$$\text{(1.2.17)}\qquad \|v^\pm\|_{L^2} + \|v^\pm{}_{|x_n=0}\|_{L^2} + \|\varphi\|_{H^1} \le C\Big(\|f^\pm\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\Big).$$

On a supposé que les fonctions sont nulles dans le passé. Les normes de $v^\pm$ et $f^\pm$ sont calculées sur $[0, T] \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{\pm x_n > 0\}$ et celles de φ, g et des traces $v^\pm_{|x_n=0}$ sont calculées sur $[0, T] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Cette estimation est l'exacte analogue des estimations de Kreiss ([Kr] et aussi [Ch-Pi]). On y retrouve l'estimation L^2 de v^+, v^- et de leur trace. L'estimation de φ dans H^1 résulte de l'ellipticité en φ des conditions aux limites.

c) Estimations H^s. — Pour un problème mixte non caractéristique, une fois obtenue l'estimation L^2, on estime les dérivées tangentielles en dérivant les équations. Puis on majore les dérivées normales en revenant à l'équation et en utilisant le fait que la matrice A_n est inversible. On obtient ainsi des estimations dans les espaces de Sobolev H^s (*cf.* [Pe], [Sar], [Ta], [Ch-Pi], [Ma-Ra] dans le cas linéaire). Pour les équations non linéaires ou dans le cas de coefficients à régularité limitée, comme dans le cas du problème de Cauchy hyperbolique, on conjugue cette idée générale à l'utilisation d'estimations non linéaires du type Gagliardo-Nirenberg et inégalité de Moser (*cf.* par exemple [Ma3], [Ma-Ra]). Cette méthode s'applique aux équations linéarisées de (1.2.8) autour de (u, Φ). Sous l'hypothèse de stabilité uniforme, on a des estimations de la forme

$$\|v^{\pm}\|_{H^s} + \|v^{\pm}{}_{|x_n=0}\|_{H^s} + \|\varphi\|_{H^{s+1}} \leq C(T, u, \Phi)\Big(\|f^{\pm}\|_{H^s} + \|g\|_{H^s}\Big). \tag{1.2.18}$$

où $C(T, u, \Phi)$ de dépend que de $T \leq 1$ et de la norme de $(u, d\Phi)$ dans H^s. Comme dans (1.2.17) on a supposé que v, φ, f et g sont nulles pour $t < 0$ et que les normes sont évaluées sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n_{\pm}$ et $[0, T] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Ayant obtenu les bonnes estimations sur les linéarisés, tout l'objet du travail [Ma2] est de construire localement en temps des ondes de choc en résolvant un schéma itératif du type Picard (voir § 1.2.11 ci-dessous).

1.2.5. Problèmes aux limites hyperboliques caractéristiques. — L'analyse ci-dessus utilise fortement le fait que le bord $\{x_n = 0\}$ est non caractéristique. Pour l'étude des problèmes caractéristiques dissipatifs linéaires, on renvoie par exemple à [La-Ph] quand la matrice de bord (i.e. la matrice A_n dans (1.2.14)) est de rang constant au voisinage du bord et à [Ra] quand la matrice de bord est de rang constant seulement sur le bord. L'analyse de [Ra] est étendue aux équations non linéaires par O. Guès ([Gu]). Pour les systèmes linéaires non dissipatifs, à coefficients C^∞, l'analyse de Kreiss a été étendue à certains problèmes caractéristiques par A. Majda et S. Osher ([Ma-Os]). En particulier, ils font la même hypothèse sur la matrice de bord que [La-Ph].

Pour les estimations L^2, une première différence avec les problèmes non caractéristiques est que l'on perd le contrôle L^2 des traces des composantes de v qui correspondent au noyau de la matrice de bord. La majoration (1.2.15) n'est plus satisfaite. Dans le meilleur des cas, on peut estimer dans le membre de gauche la norme L^2 de v à l'intérieur et la norme L^2 de la trace de $A_n v$ sur le bord.

En partant de l'estimation L^2, on peut estimer les dérivées tangentes en dérivant les équations ([Ma-Os], [Sar], [Ts]). Pour les problèmes dissipatifs, J. Rauch ([Ra]) et O. Guès ([Gu]) ont complété cette analyse en montrant que la bonne notion de régularité à l'intérieur est celle de *régularité conormale* au bord. Concrètement, cela signifie que les dérivées $x_n \partial_{x_n}$ jouent le même rôle que les dérivée tangentes ∂_y. C'est l'ajout des dérivations $x_n \partial_n$ qui permet de réduire l'hypothèse sur la matrice de bord.

Une seconde différence importante avec les problèmes non caractéristiques, est qu'on ne peut plus utiliser l'équation pour estimer les dérivées normales à partir des dérivées tangentielles, puisque la matrice A_n n'est plus inversible. On trouvera dans [Ma-Os] un exemple montrant qu'il n'y a pas en général d'estimations H^s pour les problèmes caractéristiques. Pour estimer les dérivées normales, le principe est le suivant. Pour le problème (1.2.14), connaissant une estimation des dérivées tangentes (ou conormales) on peut majorer $A_n\partial_n v$. Pour estimer les composantes de $\partial_n v$ qui correspondent au noyau de A_n, on écrit qu'elles vérifient une équation de transport (voir [Ra-Re], [Ra], [Gu] et § 1.2.6), dont le terme source contient deux dérivées tangentes (ou conormales) de toutes les composantes de v. On estime donc ces composantes de $\partial_n v$ par propagation. On itère ce procédé pour estimer les dérivées normales d'ordre supérieur. On voit ainsi se dessiner la règle générale suivante : il faut deux dérivées tangentielles pour estimer une dérivée normale (*cf.* [Ma-Os] et aussi [Ra-Re], [Gu], [Mé-Ra], [Al]). Cela conduit à résoudre les équations dans des espaces anisotropes W^s de fonctions u telles que

$$\partial_y^\alpha \partial_{x_n}^k u \in L^2 \qquad \text{pour les } (\alpha, k) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \quad \text{tels que} \quad |\alpha| + 2k \leq 2s. \tag{1.2.19}$$

ou

$$(x_n\partial_{x_n})^j \partial_y^\alpha \partial_{x_n}^k u \in L^2 \qquad \text{pour les } (j, \alpha, k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \quad \text{tels que} \quad j+|\alpha|+2k \leq 2s.$$

L'étude des ondes de raréfaction conduit à des problèmes caractéristiques ([Al]). Il en est de même pour les ondes soniques ([Mé1], [Sab]). Pour les chocs faibles, comme l'équation limite est caractéristique, il est alors naturel de chercher des estimations uniformes et des solutions dans les espaces de type (1.2.19).

Ceci étant, on doit faire face à une difficulté supplémentaire. Les problèmes sont à frontière libre et la perte de régularité des traces, inévitable dans le cas des problèmes caractéristiques, se répercute en une perte de régularité du front ϕ, comme l'indiquent les conditions de transmission (1.2.10). En effet, cette équation de transport implique que ϕ a en général la même régularité que les traces de u.

1.2.6. Transport du saut. Consistance de la notion de choc faible. — On doit vérifier que la notion de choc faible a bien un sens, c'est-à-dire que si l'amplitude du choc est initialement d'ordre ε, elle reste du même ordre de grandeur sur un intervalle de temps $[0, T]$ indépendant de ε. Pour cela, on montre que le saut de $[u]$ vérifie une équation de transport. Par construction, dans (1.2.8), la matrice normale $\mathcal{M}(u, \partial\Phi)$ admet la valeur propre $\mu(u, d\Phi) := \partial_t\Phi - \lambda(u, \partial_y'\Phi)$. Notons $l(u, \partial\Phi)$ un vecteur propre à gauche de $\mathcal{M}(u, d\Phi)$:

$$l(u, d\Phi)\mathcal{M}(u, d\Phi) = \mu(u, d\Phi)l(u, d\Phi). \tag{1.2.20}$$

Alors, on montre que $S := [l(u, d\Phi)u]$ vérifie une équation de transport de la forme

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j\partial_j S + bS = 0 \tag{1.2.21}$$

où les a_j et b sont des fonctions de $w = (u^+_{|x_n=0}, u^-_{|x_n=0}, \partial_y\phi)$ où $\phi = \Phi^\pm_{|x_n=0}$.

L'analogue de ce résultat pour les problèmes caractéristiques est bien connu. Dans ce cas, $\mu = 0$ dans (1.2.20). D'autre part, les conditions de saut impliquent que

$[u] \in \operatorname{Ker} \mathcal{M}$. L'équation (1.2.21) s'obtient alors en appliquant l aux équations. C'est la même méthode qui conduit aux équations de transport pour $l \cdot u$ et aux estimations L^∞ de u, ou encore aux estimations des dérivées normales pour les problèmes caractéristiques ([Gu]). C'est aussi cette méthode qu'on trouve dans Courant-Hilbert pour obtenir les équations de transport du saut des dérivées dans le cas des singularités faibles ([Co-Hi], voir aussi [Ra-Re], [Mé5] dans le cas semilinéaire).

Dans le cas des chocs, comme $\{x_n = 0\}$ n'est pas exactement caractéristique, la même méthode introduit des termes supplémentaires. À partir des équations (1.2.8), on évalue le saut de $l(u, d\Phi)\mathcal{L}(u, d\Phi)$ pour trouver

$$[\mu \partial_n S] + \sum_{j=0} \big[l(u, \phi) A_j(u) \partial_j u\big] = 0. \tag{1.2.22}$$

La théorie de Lax (*cf.* (1.2.11)) implique que, tant que l'amplitude du saut de u est inférieure à une valeur ε_0, on a

$$[u] = [S]\, U(w), \qquad \mu(u^\pm_{|x_n=0}, d\phi) = [S]\, \tilde{\mu}(w).$$

où U et $\tilde{\mu}$ sont des fonctions régulières de leurs arguments. Il est alors clair que (1.2.22) implique une équation de la forme (1.2.21). Cette équation de transport, montre que $S(t) = O(S(0))$ et donc que $S(t)$ reste de taille ε sur un intervalle de taille $O(1)$ si $S(0) = O(\varepsilon)$, pourvu que la solution existe et admette des traces assez régulières, uniformément bornées.

1.2.7. Estimations a priori pour les chocs faibles. — Quand le saut de u tend vers 0, l'analyse de Lax montre que pour un k-choc plan de front $x_n = \sigma x_0$, $\lambda_k(u^+) - \sigma$ et $\lambda_k(u^-) - \sigma$ tendent vers 0. Il en résulte que les matrices de bord $A_n(u^\pm) - \sigma A_0(u^\pm)$ dans le linéarisé (1.2.16) ont des valeurs propres $\lambda_k(u^\pm) - \sigma$ qui tendent vers 0. Le problème mixte (1.2.16) tend à devenir caractéristique. En outre, comme le montre l'équation limite (1.2.10), l'ellipticité en φ des conditions aux limites disparaît elle aussi. Il en résulte qu'il n'existe pas d'estimation (1.2.17) uniforme lorsque $\varepsilon = \big|\,[u]\,\big|$ tend vers 0. Cette perte de stabilité est analysée dans [Mé2] : sous certaines hypothèses qui seront rappelées au chapitre 2, les solutions de (1.2.16) vérifient

$$\begin{aligned} &\|v^\pm\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon}\,\|v^\pm{}_{|x_n=0}\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon}\,\|\varphi\|_{L^2} + \varepsilon\,\|\varphi\|_{H^1} \\ &\qquad\qquad \le C\Big(\|f^\pm\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|g\|_{L^2}\Big). \end{aligned} \tag{1.2.23}$$

Ces estimations précisent comment on perd le contrôle des traces et du front lorsque ε tend vers 0. Ceci explique pourquoi dans les estimations a priori de Majda les constantes explosent quand ε tend vers zéro et pourquoi la solution est construite sur un intervalle de temps qui tend vers zéro avec ε.

Le point fondamental dans la construction des chocs faibles est l'obtention d'estimations a priori indépendantes de la force du choc, ε. La première étape est l'estimation L^2 (1.2.23) pour le système linéarisé. Les estimations sur les traces et φ

s'abîment quand ε tend vers zéro, mais on a des estimations uniformes pour la norme L^2 à l'intérieur. Ceci est conforme à notre attente de trouver à la limite les estimations L^2 du problème d'ondes soniques ([Mé1]). La partie la plus importante de ce travail est l'obtention d'estimations a priori pour les dérivées. Comme le problème limite est caractéristique, on distingue la régularité tangentielle ou conormale et la régularité normale comme indiqué plus haut au § 1.2.5 et on travaille dans des espaces anisotropes du style (1.2.19).

Nous renvoyons au chapitre 3 pour un énoncé précis des estimations a priori que nous obtenons. Nous nous contentons d'indiquer ici où se trouve la principale difficulté de la démonstration. Comme indiqué plus haut, on veut travailler dans des espaces W^s du type (1.2.19), en estimant d'abord les régularités tangentielles ou conormales. Pour obtenir des majorations des dérivées normales, on suit la même démarche que pour les problèmes caractéristiques. Ayant estimé les dérivées tangentes, on déduit de l'équation une majoration de $\mathcal{M}\partial_n v$. Rappelons que $\mathcal{M}$ n'a qu'une seule valeur propre petite, de taille $O(\varepsilon)$. Comme en (1.2.20), on note l un vecteur propre à gauche de $\mathcal{M}$. Il suffit donc d'estimer $l\cdot\partial_n v$. Comme au § 1.2.6, on établit une équation de transport pour $l\cdot\partial_n v$, dont le terme source contient des dérivées secondes tangentielles de v, comme pour les problèmes caractéristiques. On procède de façon similaire pour les dérivées d'ordre supérieur.

Le point central est donc d'obtenir une estimation uniforme de la régularité tangentielle (ou conormale). La méthode directe consisterait à dériver tangentiellement les équations (1.2.8) et (1.2.12), ce qui fait apparaître le linéarisé des équations. La nature hyperbolique du linéarisé *total* des équations ne se voit qu'en introduisant les *bonnes inconnues* comme dans [Al]. En notant $\dot u$, $\dot\Phi$ etc les variations de u, Φ etc, la linéarisation des équations (1.2.8) de la forme $\mathcal{L}(u, d\Phi) = f$ s'écrit

$$\dot f = L(u, d\Phi)\,\dot v + B\,\dot v + \dot\Phi\frac{\partial_n f}{\partial_n\Phi}, \quad \text{avec} \quad \dot v := \dot u - \dot\Phi\frac{\partial_n u}{\partial_n\Phi}. \tag{1.2.24}$$

où $L(u, d\Phi)$ est hyperbolique et où B est un opérateur de multiplication par une matrice. La dérivation de (1.2.8) conduit donc à des équations de la forme (1.2.24) pour les dérivées tangentes $\dot u = \partial_y u$, $\dot\Phi = \partial_y\Phi$. Pour estimer $2s$ dérivées de u, on dérive $2s-1$ fois les équations (1.2.24) satisfaites par $\partial_y u$. Mais comme les coefficients dépendent des dérivées normales $\partial_n u$ et $\partial_n\Phi$, les commutateurs font apparaître des dérivées $\partial_y^{2s-1}\partial_n(u,\Phi)$, qui ne sont pas contrôlées par la norme de (u,Φ) dans l'espace W^s. On ne peut donc pas conclure par un argument classique de bootstrap. C'est là que se trouve la difficulté principale du problème abordé dans cet article. Pour la contourner, nous reprenons la méthode de paralinéarisation utilisée dans [Mé1] et qui s'inspire des idées de J.-M. Bony et Y. Meyer ([Bo], [Mey], voir aussi [Hö2]).

1.2.8. Utilisation du calcul paradifférentiel. — Rappelons brièvement le principe du calcul paradifférentiel et comment il permet de contourner le manque apparent de régularité qu'on a signalé au § 1.2.7. On renvoie à [Bo], [Mey], [Hö2] pour des énoncés et estimations précises et au chapitre 7 pour un rappel précis des résultats de [Mé1]. D'une part, par une analyse fréquentielle, on décompose le produit au en trois termes

$$au = T_a u + T_u a + R(a,u),$$

où $T_a u$ a la régularité de u quel que soit $a \in L^\infty$, $T_u a$ a la régularité de a quel que soit $u \in L^\infty$ et $R(a,u)$ est plus régulier que a et u. Cette règle s'étend aux fonctions non linéaires de u sous la forme

$$f(u) = T_{f'(u)} u + R(u) \tag{1.2.25}$$

où $R(u)$ est plus régulier que u et le paraproduit T est comme au dessus.
Le deuxième ingrédient de la méthode est un théorème de commutation

$$\partial(T_a u) = T_a(\partial u) + r \tag{1.2.26}$$

où r a la même régularité que u, quelque soit a lipschitzien. On en déduit que pour u de régularité s et $|\alpha| \le s+1$, $\partial^\alpha T_a u - T_a \partial^\alpha u$ est de régularité $s - |\alpha|$, dès que a est lipschitzien. Ce calcul s'étend en un calcul symbolique complet.
En compilant les propriétés (1.2.25) et (1.2.26), on *paralinéarise* l'équation $\mathcal{L}(u, d\Phi) = 0$. On obtient alors une équation de la forme

$$\sum_{j=0}^{n} T_{A_j(u,d\Phi)}\, \partial_j u + T_B u - \sum_{j=0}^{n} T_{C_j(u,d\Phi)} \partial_j \Phi = f$$

avec f au moins aussi régulier que (u, Φ). En outre, le symbole

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(u, d\Phi)\, \xi_j \dot u + \sum_{j=0}^{n} C_j(u, d\Phi) \xi_j \dot\Phi$$

est exactement le symbole du linéarisé complet de l'équation. Comme en (1.2.24), il est donc de la forme

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(u, d\Phi)\, \xi_j \Big(\dot u - \frac{\partial_n u}{\partial_n \Phi} \dot\Phi\Big).$$

Il est alors naturel d'introduire une « bonne inconnue » et, grâce à (1.2.26), on voit que

$$T_L v := \sum_{j=0}^{n} T_{A_j(u,d\Phi)}\, \partial_j v + T_B\, v = f, \quad \text{avec} \quad v := \dot u - T_{\partial_n u/\partial_n \Phi} \dot\Phi. \tag{1.2.27}$$

avec f au moins aussi régulier que (u, Φ).

L'avantage de cette écriture est immédiat. Si on dérive l'équation (1.2.27), la règle (1.2.26) implique que

$$T_L \partial^\alpha v = \partial^\alpha f + c_\alpha$$

où c_α a la même régularité que v, dès que $(u, d\Phi)$ sont lipschitziens. Les équations (1.2.12) pour Φ sont de simples équations de transport et ne posent pas de problème.

Pour s assez grand, on contrôle donc la régularité d'ordre s de (u, Φ) par une régularité d'ordre inférieur. On voit alors comment conclure par un argument habituel du type « lemme de Gronwall », ou espace à poids ou encore temps petit.

L'écriture paradifférentielle (1.2.27) découple complètement les régularités (limitées) nécessaires au calcul symbolique (hyperbolicité, commutations) et la régularité (qu'on veut grande) de u. Cette technique a été introduite par J.-M. Bony pour étudier la propagation de la régularité microlocale des solutions d'équations non linéaires ([Bo], voir aussi [Hö2]). Pour l'étude des chocs, elle remplace avantageusement le calcul pseudodifférentiel à symbole H^s utilisé dans [Ma1] en améliorant les estimations et en cernant les régularités minimales (*cf.* [Mok], [Mét3], [Mét4]).

Cependant, la mise en œuvre de cette stratégie pose quelques difficultés. Comme on est en présence d'un problème aux limites, on pense d'abord à utiliser un calcul paradifférentiel tangentiel ou conormal par rapport au bord. Mais un tel calcul commute mal aux dérivations normales, les restes ne régularisent pas du tout dans les variables normales et c'est précisément dans ces variables que le fait d'avoir un bord presque caractéristique induit le plus de pertes. On sera donc amené à combiner ce calcul conormal à une autre quantification déjà utilisée dans [Mé1]. On renvoie au § 7 pour un rappel détaillé des propriétés de ces calculs paradifférentiels. Leur rôle essentiel est de régler les problèmes de commutations avec les dérivées conormales au bord et, à partir de l'estimation L^2 (1.2.23), ils nous permettront d'obtenir des estimations des dérivées conormales des solutions.

1.2.9. Données initiales. Conditions de compatibilité. — On s'intéresse principalement au problème de Cauchy pour le problème (1.1.1) (1.1.5). On se donne un changement de variables initial (1.2.7) qui redresse la surface initiale. On obtient alors des données initiales pour le problème (1.2.8) (1.2.12)

$$(u_0^\pm, \Phi_0^\pm) \quad \text{sur} \quad \pm x_n > 0, \qquad \text{avec} \quad [\Phi_0] = 0. \tag{1.2.28}$$

Comme en général pour les problèmes mixtes, pour des données arbitraires on ne peut pas espérer trouver de solutions régulières sur les demis-plans $\{\pm x_n > 0\}$. Rappelons la problématique générale. Considérons un problème mixte de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum A_j(u)\partial_j u = 0, & \text{pour} \quad x_n > 0,\ t > 0, \\ B(u) = 0, & \text{pour} \quad x_n = 0,\ t > 0, \\ u = u_0, & \text{pour} \quad x_n > 0,\ t = 0. \end{cases} \tag{1.2.29}$$

Supposons que la donnée initiale u_0 est assez régulière et que u est une solution elle aussi régulière. L'équation détermine de manière unique le développement de Taylor $\sum t^j u_j$ de u en $t = 0$ en fonction de u_0 et de ses dérivées. Cela détermine donc le développement de Taylor de $u_{|x_n=0}$ et de $B(u)_{|x_n=0}$. On doit donc avoir, au sens des développements de Taylor :

$$b_0 = b_1 = \cdots = 0 \qquad \text{si} \quad B\big(\sum t^j u_j\big)_{|x_n=0} \sim \sum t^j b_j. \tag{1.2.30}$$

On laisse de côté ici toute discussion précise des ordres de régularité et des ordres des développements de Taylor, les règles de calcul et les théorèmes de trace dépendant des espaces dans lesquels on travaille.

Réciproquement, il est connu que, pour un bon problème mixte hyperbolique, lorsque les *conditions de compatibilité* (1.2.30) sont satisfaites, on peut construire des solutions régulières au problème mixte (*cf.* [Ch-Pi], [Ma-Ra]). Pour clore l'analyse, il reste à expliciter les conditions (1.2.30) et à *construire des données compatibles.* On voit que b_j est une expression non linéaire $\mathcal{B}_j$ de u_0 et de ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à j. Les conditions de compatibilité s'écrivent alors

$$\mathcal{B}_j\big((\partial^\alpha u_0)_{|x_n=0};\ |\alpha|\le j\big)=0. \tag{1.2.31}$$

Par exemple, la première condition de compatibilité est simplement

$$B(u_{0|x_n=0})=0. \tag{1.2.32}$$

Si on note $N'\le N$ le nombre de conditions aux limites, (1.2.32) signifie que la trace de u_0 sur l'arête $x_n=0$ prend ses valeurs dans une variété de dimension $N-N'$. Plus généralement, par récurrence sur j, (1.2.31) apparaît comme une condition sur la trace $(\partial^j_{x_n}u_0)_{|x_n=0}$. On détermine ainsi les développements de Taylor en $x_n=0$ des données initiales u_0 vérifiant les conditions de compatibilité (1.2.31). On construit alors les données compatibles en relevant les traces de ces développements de Taylor compatibles et en ajoutant une fonction suffisamment plate en x_n.

Cette démarche générale est reprise dans [Ma2] pour la construction de données initiales pour les chocs, dans [Al] pour les ondes de raréfaction, dans [Mé1] pour les ondes soniques. Pour le problème (1.2.8)(1.2.12), l'analyse est menée au chapitre 6. Les calculs sont très voisins de ceux de Majda, à ceci près que nos équations (1.2.12) pour Φ diffèrent du choix (1.2.9) fait dans [Ma2]. La difficulté supplémentaire est qu'il faut construire des *familles* de données initiales, vérifiant des estimations uniformes. Par exemple, pour des données initiales (1.2.28), la première condition de compatibilité analogue à (1.2.32) s'explicite simplement sous la forme : il existe ϕ_1 tel que

$$\phi_1[f_0(u_0)]+\sum_{j=1}^{n-1}\partial_j\phi_0\,[f_j(u_0)]=\,[f_n(u_0)]\qquad\text{sur}\quad x_n=0, \tag{1.2.33}$$

où $\phi_0=\Phi^+_{0\,|x_n=0}=\Phi^-_{0\,|x_n=0}$. Cela veut dire que pour tout $y'=(y_1,\dots,y_{n-1})$, $u_0^+(y',0)$ et $u_0^-(y',0)$ sont sur la même courbe de Hugoniot associée à la direction $\partial'_y\phi_0$. On retrouve là un résultat bien connu dans le cas du problème de Riemann : comme on l'a rappelé plus haut, la solution du problème de Riemann est la juxtaposition de N ondes. Pour qu'elle ne présente qu'un seul choc, on doit choisir les états initiaux (u^-,u^+) sur une même courbe de Hugoniot (*cf.* [La], [Se], [Go-Ra], [Hö2]).

1.2.10. Solutions approchées. Problèmes de prolongement. — Pour résoudre le problème mixte, une méthode classique consiste à construire d'abord des solutions approchées (*cf.* [Ch-Pi], [Ma1], [Al], [Mé1]). Pour un problème (1.2.29), on construit le développement de Taylor $\sum t^j u_j$ à partir de u_0 et une solution approchée u_{app} en relevant les traces u_j. L'équation est vérifiée au sens des développements de Taylor en $t = 0$. Les conditions de compatibilités (1.2.30) impliquent que la condition aux limites est satisfaite au sens des développements de Taylor en $t = 0$.

On cherche alors la solution u sous la forme

$$u = u_{app} + v, \qquad v_{t<0} = 0. \tag{1.2.34}$$

L'équation pour v est un problème aux limites, avec données dans le passé $\{t < 0\}$. Il s'agit d'un problème de prolongement. En particulier, dans le cas linéaire, on a à résoudre un problème sur $]-\infty, T]$, qu'on peut étudier dans des espaces à poids $e^{-\gamma t}$ avec γ arbitrairement grand (*cf.* [Ch-Pi]). Pour les problèmes non linéaires, le principe reste le même ([Gu], [Ma1], [Al], [Me1]). On renvoie au chapitre 6 pour la mise en œuvre de cette idée dans le cadre du problème (1.2.8) (1.2.12), qui aboutit à la construction de *familles de solutions approchées* $(u^\varepsilon_{app}, \Phi^\varepsilon_{app})$ avec $\varepsilon \approx \big|\,[u^\varepsilon_{app}]\,\big|$.

1.2.11. Schémas itératifs. Méthode de Nash-Moser. — Pour résoudre les problèmes non linéaires on utilise des méthodes itératives. La plus simple est celle des itérations de Picard. C'est elle qu'on utilise pour la construction des solutions locales régulières du problème de Cauchy quasi-linéaire hyperbolique (*cf.* par exemple [Gå], [Ma3]). C'est elle aussi qu'utilise A. Majda [Ma2] pour la construction des chocs. L'essence de la méthode est la suivante. Considérons un problème de la forme (1.2.29) avec des conditions aux limites linéaires pour simplifier. Ayant construit une solution approchée u_{app}, on cherche la solution sous la forme $u = u_{app} + v$. On écrit les équations pour v sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{A}(v)\partial v = f, & \text{pour} \quad x_n > 0, \\ Bv = 0, & \text{pour} \quad x_n = 0, \\ v = 0, & \text{pour} \quad x_n > 0,\ t < 0. \end{cases} \tag{1.2.35}$$

Alors le schéma de résolution est de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{A}(v_\nu)\partial v_{\nu+1} = f, & \text{pour} \quad x_n > 0, \\ Bv_{\nu+1} = 0, & \text{pour} \quad x_n = 0, \\ v_{\nu+1} = 0, & \text{pour} \quad x_n > 0,\ t < 0. \end{cases} \tag{1.2.36}$$

Pour que ce schéma fonctionne, il faut que les équations (1.2.36) soient bien posées et que l'on puisse trouver la solution $v_{\nu+1}$ dans le même espace que celui où vivent les coefficients v_ν.

Pour le problème (1.2.8) (1.2.9), on voit donc que la pertinence du schéma de Picard utilisé dans [Ma2] est intimement liée à la validité des estimations maximales (1.2.18). En particulier, il est crucial que $d\Psi$ ait la même régularité que v, ce qui est assuré par le choix (1.2.9), la régularité des traces de u et l'ellipticité en φ des conditions de Rankine-Hugoniot.

Pour le problème (1.2.8) (1.2.12), Φ a la même régularité que u. Il en résulte que l'équation linéarisée (1.2.24) induit une perte de régularité des coefficients (u, Φ) vers la solution $\dot{u}$. On rencontre le même problème dans l'étude des ondes de raréfaction ([Al]). Ceci étant, la perte de régularité est fixe, et dans ce cas, on sait qu'on peut se tourner vers des schémas de type Nash-Moser (*cf.* [Na], [Mos], [Höl], [Al-Gé]). C'est la méthode suivie par S. Alinhac pour la construction d'ondes de raréfaction ([Al]). Pour construire *à ε fixé* des solutions de (1.2.8) (1.2.12), nous sommes donc amenés à mettre en place au chapitre 10 un schéma de type Nash-Moser. Rappelons le point de départ de la méthode. Écrivant l'équation sous la forme $\mathcal{L}(u, \Phi) = 0$, le schéma itératif est de la forme

$$\mathcal{L}'(S_\nu u_\nu, S_\nu \Phi_\nu) \cdot (u_{\nu+1} - u_\nu, \Phi_{\nu+1} - \Phi_\nu) = -\mathcal{L}(u_\nu, \Phi_\nu), \tag{1.2.37}$$

où $\mathcal{L}'$ désigne le linéarisé de $\mathcal{L}$ et S_ν des opérateurs de régularisation. Si on fait $S_\nu = \mathrm{Id}$, on est en présence du schéma classique de Newton. L'intérêt des régularisations est d'effacer la perte de régularité du linéarisé qui ne joue donc plus dans la définition de la suite (u_ν, Φ_ν). Quant à la convergence, on doit vérifier que l'on peut choisir $S_\nu \to \mathrm{Id}$, grâce au caractère quadratique des erreurs du schéma de Newton. On renvoie à [Höl] ou [Al-Gé] pour une description détaillée de la méthode de Nash-Moser et au chapitre 10 pour sa mise en place dans notre problème.

1.3. Exemples

1.3.1. Interaction d'une onde et d'un choc plan faible. — On considère un choc plan $\underline{u}$ de front $x_n = \sigma x_0$. C'est une solution $(\underline{u}^{\pm}, \underline{\nu})$ (1.1.2) avec $\underline{\nu} = (-\sigma, 0, \dots, 0, 1)$. On le suppose déterminé par la construction de Lax, associé à une valeur propre vraiment non linéaire. On note $\varepsilon = \big|[\underline{u}]\big|$ son amplitude supposée assez petite. Pour fixer les idées on supposera que $\underline{u}^+ = 0$.

On considère dans le passé $\{x_0 < 0\}$ une onde, i.e. une solution v de (1.1.1) dont le support est situé dans le demi plan $\{x_n > \sigma x_0\}$ et on suppose que $x_0 = 0$ est le premier instant où le support de v touche le front du choc. On peut par exemple construire v comme solution régulière de (1.1.1) et raisonner sur les supports par vitesse fine de propagation. Alors

$$\begin{cases} u = \underline{u} & \text{sur} \quad x_n < \sigma x_0, \\ u = v & \text{sur} \quad x_n > \sigma x_0, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

est une solution faible de (1.1.1). Sa trace en $x_0 = 0$ vérifie de façon évidente les conditions de compatibilités et nos résultats montrent donc que u se prolonge en une solution sur un intervalle de temps *indépendant de ε*. Cette solution présente un choc faible de front $x_n = \Phi(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, c'est une conséquence de [Ma2]. Notre contribution est de montrer que le prolongement existe sur un intervalle de temps indépendant de ε. Au paragraphe 2.5, on reviendra sur cet exemple dans les variables redressées.

1.3.2. Équations d'Euler. — Les résultats de cet article s'appliquent aux équations d'Euler de la dynamique des gaz. Rappelons l'écriture du système :

$$
(1.3.2) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) + \partial_j P = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq 3, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho E v + P v)) = 0. \end{cases}
$$

Comme d'habitude ρ désigne la densité, P la pression, $v = (v_1, v_2, v_3)$ la vitesse et $E = e + \frac{1}{2}|v|^2$ est la densité d'énergie totale. Les quantités ρ, P et e sont reliées par une loi d'état, vérifiant le second principe

$$
(1.3.3) \qquad de = TdS + \frac{P}{\rho^2}\, d\rho.
$$

On prendra comme inconnues $u := (\rho, v, S)$ et alors P et e sont des fonctions données $P(\rho, S)$, $e(\rho, S)$.

Pour les solutions *régulières*, (1.3.2) équivaut à

$$
(1.3.4) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \rho \partial_t v_j + \rho v \cdot \operatorname{grad} v_j + \partial_j P = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq 3, \\ \partial_t S + v \cdot \operatorname{grad} S = 0. \end{cases}
$$

Le système isentropique s'écrit

$$
(1.3.5) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) + \partial_j P = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq 3, \end{cases}
$$

où P est maintenant une fonction de ρ seul. On prend $P = P(\rho, S_0)$ pour une valeur fixée S_0 de l'entropie. Il est alors clair que les solutions *régulières* de (1.3.5) sont les solutions régulières de (1.3.4) d'entropie constante $S = S_0$. Il n'en n'est pas de même pour les solutions faibles. En particulier, pour les chocs, on notera que les conditions de Rankine-Hugoniot pour (1.3.5) n'impliquent pas celles de (1.3.2). Par exemple, les fronts diffèrent.

Ces systèmes nous servent de modèles, en particulier pour énoncer les hypothèses de structure au paragraphe 2.1. L'hyperbolicité est satisfaite pour des lois d'état $\rho \mapsto P(\rho, S)$ convexes. On sait alors ([Ma1]) que les chocs vérifiant les conditions de Lax (1.1.3) sont uniformément stables et que l'on a les estimations uniformes de type (1.1.6) ([Mé2]).

Au chapitre 12, on construira des données compatibles pour ces systèmes. On peut aussi appliquer la construction de l'exemple A) ci dessus. On en déduit l'existence de chocs faibles pour ces systèmes sur des domaines indépendant de la force du choc, pourvu qu'elle soit assez petite.

On peut aussi comparer les chocs faibles de (1.3.2) et (1.3.5). Pour des chocs plans de front de la forme $x_3 = \sigma t$ et pour une valeur $u^- = u_0$ fixée, l'analyse des conditions de Rankine-Hugoniot montre que les états $u^+(\varepsilon)$ et les vitesses de front

$\sigma(\varepsilon)$ entropiques et isentropiques vérifient

$$u^+_{ent} - u^+_{ise} = O(\varepsilon^3), \quad \sigma_{ent} - \sigma_{ise} = O(\varepsilon^2). \tag{1.3.6}$$

Pour comparer les chocs courbes, il faut d'une part se placer dans les variables redressées et d'autre part construire des données compatibles entropiques et isentropiques proches les unes des autres. Cela sera fait au chapitre 12. On peut par exemple adapter la construction de l'exemple A). En se basant sur les estimations uniformes, on peut alors comparer les solutions entropiques et isentropiques. On montrera que

$$\widetilde{u}_{ent} - \widetilde{u}_{ise} = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \Phi_{ent} - \Phi_{ise} = O(\varepsilon^{3/2}). \tag{1.3.7}$$

On a réintroduit la notation $\widetilde{u}$ pour rappeler que la comparaison a lieu dans les variables redressées. Cette approximation est moins bonne que (1.3.6). Le facteur $\varepsilon^{3/2}$ n'est peut-être pas optimal. Ce sont les variations tangentielles du front qui sont absentes pour (1.3.6), qui sont la source de la perte d'approximation. On renvoie au paragraphe 2.9 pour un énoncé précis.

1.4. Plan de l'article

Au chapitre 2, on donne une définition précise de la notion de famille de chocs faibles et on énonce les résultats principaux. Les définitions et les énoncés sont donnés à la fois dans les coordonnées initiales et dans les coordonnées ou le front est redressé. On donne aussi des versions locales et des versions globales.

La méthode de la preuve et les résultats intermédiaires sont présentés au chapitre 3. Les chapitres 4 et 5 contiennent quelques estimations non linéaires préliminaires et la définition des opérateurs de relèvement de traces utilisés pour définir $p^\pm$ dans (1.2.12) (1.2.13).

La première étape du travail est la construction au chapitre 6 de familles de données initiales compatibles, puis de familles de solutions approchées (*cf.* § 1.2.9).

Le point central est ensuite l'obtention d'estimations a priori uniformes. On présente d'abord (§ 7) le calcul paradifférentiel nécessaire à notre démonstration des estimations conormales (§ 8). On démontre ensuite les estimations L^∞ et les estimations du saut, ce qui permet de conclure la démonstration des estimations uniformes (§ 9).

On peut alors procéder à la construction de chocs faibles. Pour ε fixé, à partir d'une solution approchée, on construit au § 10 une solution sur un intervalle de temps dépendant de ε. Au § 11 on montre qu'elle a la régularité voulue. Alors, l'estimation a priori uniforme en ε permet d'itérer la construction et de prolonger la solution sur un intervalle de temps indépendant de ε.

Au chapitre 12, on applique nos résultats aux équations d'Euler des fluides compressibles, entropiques et isentropiques, et nous comparons les chocs faibles de ces deux systèmes.

CHAPITRE 2

RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans ce chapitre, nous énonçons d'abord les hypothèses que nous faisons sur le système. Nous analysons les conditions de Rankine-Hugoniot et donnons une définition précise de la notion de famille de chocs faibles. Nous introduisons le changement de variables qui redresse les fronts des chocs et énonçons les principaux résultats : existence de données initiales compatibles, existence de familles de chocs faibles, convergence des chocs faibles vers une onde sonique, application aux équation d'Euler.

2.1. Le système

Dans $\mathbb{R}^{n+1}$ on considère le système $N \times N$ de lois de conservation :

$$\sum_{j=0}^{n} \partial_j f_j(u) = 0. \tag{2.1.1}$$

Les flux f_j sont des fonctions C^∞ d'un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On supposera que $\underline{u} = 0$. On note $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\partial_j = \partial/\partial_{x_j}$. On note $A_j(u) = f_j'(u)$ la matrice jacobienne de f_j et on suppose le système hyperbolique symétrique dans la direction du temps $t = x_0$ (*cf.* [Fr1]).

Hypothèse 1. — *Il existe une matrice $S(u)$, C^∞ sur $\mathcal{U}$, telle que toutes les matrices SA_j sont symétriques, SA_0 étant en outre définie positive.*

Les chocs que l'on construit sont associés à une valeur propre vraiment non linéaire du système (voir [La], [Se]). Plus précisément, pour $u \in \mathcal{U}$ et pour $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on note

$$G(u,\theta) = A_0^{-1}(u)\Big[A_n(u) - \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j A_j(u)\Big]. \tag{2.1.2}$$

L'hypothèse 1 entraîne que toutes les valeurs propres de G sont réelles.

Hypothèse 2. — *$\lambda(u,\theta)$ est une valeur propre simple de $G(u,\theta)$ définie et C^∞ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On suppose qu'elle est vraiment non linéaire et on note $r(u,\theta)$ le vecteur propre (à droite) associé, normalisé par la condition*

$$r(u,\theta) \cdot \nabla_u \lambda(u,\theta) = 1. \tag{2.1.3}$$

Comme dans [Mé2], nous supposerons aussi que :

Hypothèse 3. — *i) Pour tout $(u, \theta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{O}$, la matrice hessienne $\lambda''_{\theta\theta}(u, \theta)$ est définie (positive où négative).*

ii) Ou bien λ est une valeur propre extrême de G, c'est-à-dire la plus grande ou la plus petite valeur propre, ou bien le système est strictement hyperbolique, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de G sont simples.

Par exemple ces hypothèses sont vérifiées par le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz.

2.2. Chocs faibles

Nous nous intéressons aux solutions u du système (2.1.1) discontinues sur une surface $\Sigma \subset \mathcal{U}$, d'équation $x_n = \phi(y)$, où $y = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Les traces u^+ et u^- de u sur Σ et le vecteur $\partial_y \phi = (\partial_0 \phi, \partial_1 \phi, \ldots, \partial_{n-1}\phi)$ vérifient la condition de Rankine-Hugoniot

$$\sum_{j=0}^{n-1} \partial_j \phi [f_j(u)] - [f_n(u)] = 0, \tag{2.2.1}$$

où $[v] = v^+ - v^-$ désigne le saut de v le long de Σ. On analyse ces conditions de Rankine-Hugoniot comme dans [La], [Se]. On introduit les matrices C^∞ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$

$$A_j(u^+, u^-) = \int_0^1 A_j(u^- + t[u])\, dt$$

et par analogie avec (2.1.2)

$$G(u^+, u^-, \theta) = A_0^{-1}(u^+, u^-)\Big[A_n(u^+, u^-) - \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j A_j(u^+, u^-)\Big]. \tag{2.2.2}$$

En notant $\partial'_y \phi = (\partial_1 \phi, \ldots, \partial_{n-1}\phi)$, (2.2.1) équivaut à

$$\big(\partial_t \phi \operatorname{Id} - G(u^+, u^-, \partial'_y \phi)\big)\, [u] = 0. \tag{2.2.3}$$

On peut supposer que $r(0,0) = (1, 0, \ldots, 0)$ est le premier vecteur de base. En restreignant au besoin $\mathcal{U}$ et $\mathcal{O}$, λ se prolonge en une valeur propre $\lambda(u^+, u^-, \theta)$ de $G(u^+, u^-, \theta)$ et r se prolonge en un vecteur propre $r(u^+, u^-, \theta)$ associé. De plus, on peut définir un vecteur propre $R(u^+, u^-, \theta)$ proportionnel à $r(u^+, u^-, \theta)$ tel que la première composante de R soit égale à 1.

Soit I_0 un voisinage de $\lambda(0,0)$ dans $\mathbb{R}$. Si les voisinages $\mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ et I_0 sont suffisamment petits, toutes les solutions $(u^+, u^-, \lambda, \theta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times I_0 \times \mathcal{O}$ de

$$\big(\lambda \operatorname{Id} - G(u^+, u^-, \theta)\big)[u] = 0 \tag{2.2.4}$$

sont de la forme suivante, si u_1 désigne la première composante de u :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda(u^+, u^-, \theta) \\ [u] = [u_1]\ R(u^+, u^-, \theta). \end{array} \right. \tag{2.2.5}$$

En outre, il existe ε_0 et des fonctions U^- et U^+, C^∞ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{O} \times I_1$, $I_1 = [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, telles que la seconde équation de (2.2.5) est, localement, équivalente à l'une ou l'autre des relations

$$u^+ = u^- + [u_1]\, U^-(u^-, \theta, [u_1]), \tag{2.2.6}$$

$$u^- = u^+ - [u_1]\, U^+(u^+, \theta, [u_1]). \tag{2.2.7}$$

On rappelle enfin que, avec la normalisation (2.1.3), la condition d'admissibilité de choc de Lax s'écrit :

$$[u_1] < 0. \tag{2.2.8}$$

Nous donnons maintenant la définition d'une *famille de chocs faibles*, solutions locales du système (2.1.1) (2.2.1) que nous notons (S_I). On se donne une boule ouverte centrée à l'origine $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et un intervalle ouvert J. On note $\Omega =]T_o, T[\times \omega \times J$.

Définition 2.2.1. — Une famille de chocs faibles de classe C^k est un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions sur Ω tel qu'il existe $\varepsilon_o > 0$, une constante K, des paramètres $T_o < 0 \leq T$ et des compacts $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{K}_2 \subset I_o \times \mathcal{O}$ tels que tout $(u, \phi) \in \mathcal{F}$ vérifie les propriétés suivantes.

(2.2.9) ϕ est de classe C^k sur $]T_o, T[\times \omega$ à valeurs dans J et ses dérivées d'ordre $\leq k$ sont bornées par K. De plus $(\partial_t, \phi, \partial'_y \phi)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{K}_2$.

(2.2.10) La fonction u est définie sur Ω et est discontinue sur la surface Σ d'équation $x_n = \phi(t, x')$. De plus u prend ses valeurs dans $\mathcal{K}_1$, les restrictions $u^\pm$ de u à chacun des ouverts $\Omega^\pm = \Omega \cap \{\pm x_n > \phi(t, x')\}$ sont de classe C^k jusqu'au bord et leurs dérivées d'ordre $\leq k$ sont bornées par K.

(2.2.11) Il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et $a \in C^k(]T_o, T[\times \omega)$, à dérivées d'ordre $\leq k$ bornées par K, tels que le saut sur Σ de la première composante de u est de la forme

$$[u_1(y, \phi(y))] = -\varepsilon\, e^{a(y)}$$

(2.2.12) Le saut de u vérifie

$$[u] = [u_1]\, U^-(u^-, \partial'_y \phi, [u_1])$$

Le point crucial est que le domaine de définition Ω et les bornes K des dérivées sont fixés, alors que la force du choc, i.e. l'amplitude du saut $[u]$ est de l'ordre de ε qui est arbitraire dans $]0, \varepsilon_o]$.

2.3. Changements de variables

Afin de fixer la géométrie, on procède comme dans [Ma2]. On redresse la surface de choc Σ d'équation $x_n = \phi(y)$ par le changement de variable inconnu :

$$\widetilde{\Phi} : (y, \widetilde{x}_n) \longmapsto (y, \Phi(y, \widetilde{x}_n)) \tag{2.3.1}$$

où $y = (t, y') = (t, x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $\Phi(y, 0) = \phi(y)$. Dans les coordonnées $(y, \widetilde{x}_n)$, l'équation de Σ est $\{\widetilde{x}_n = 0\}$. On note $\widetilde{u}$ la fonction déduite de u par le changement de variables (2.3.1) et $\widetilde{u}^{\pm}$ sa restriction aux deux demi-espaces $\{\pm\widetilde{x}_n > 0\}$. Alors, u est solution de (2.1.1) avec saut sur Σ si et seulement si

$$\text{(2.3.2)} \quad A_0(\widetilde{u}^{\pm})\partial_t\widetilde{u}^{\pm} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(\widetilde{u}^{\pm})\partial_j\widetilde{u}^{\pm} + \mathcal{M}(\widetilde{u}^{\pm}, \partial_y\Phi)\frac{\partial_n\widetilde{u}^{\pm}}{\partial_n\Phi} = 0, \quad \text{sur} \quad \pm\,\widetilde{x}_n > 0,$$

$$\text{(2.3.3)} \qquad \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j\phi[f_j(\widetilde{u})] - [f_n(\widetilde{u})] = 0, \quad \text{sur} \quad \widetilde{x}_n = 0.$$

Dans (2.3.2) $\mathcal{M}(u, \partial_y\Phi)$ désigne la matrice :

$$\text{(2.3.4)} \qquad \mathcal{M}(u, \partial_y\Phi) = A_n(u) - \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j\Phi A_j(u) = A_0(u)\big(G(u, \partial'_y\Phi) - \partial_t\Phi I\big)$$

Si u prend ses valeurs dans $\mathcal{U}$ et si $\partial_y\phi = (\partial_t\phi, \partial'_y\phi)$ prend ses valeurs dans $I_0 \times \mathcal{O}$ alors, d'après le paragraphe 2.2, la condition (2.3.3) est équivalente à :

$$\text{(2.3.5)} \qquad [\widetilde{u}] = [\widetilde{u}_1]R(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \partial'_y\phi),$$

$$\text{(2.3.6)} \qquad \partial_t\phi = \lambda(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \partial'_y\phi).$$

Nous construirons les solutions dans les variables redressées $(y, \widetilde{x}_n)$, en résolvant (2.3.2) (2.3.3) et pour alléger les notations nous oublions dorénavant les $\widetilde{\ }$.

Cependant les équations (2.3.2) (2.3.3) ne sauraient déterminer Φ puisque la seule chose requise sur le changement de variable (2.3.1) est qu'il transforme Σ en $\{x_n = 0\}$. Autrement dit, (2.3.3) ne détermine que la trace ϕ de Φ sur $x_n = 0$. Le choix de A. Majda était de prendre $\Phi(y, x_n) = x_n + \phi(y)$. Mais la perte de régularité sur ϕ induit un moins bon contrôle de Φ et ce choix conduit à des difficultés. Le cas limite où le saut est nul correspond au cas où (u, ϕ) est une onde sonique et Σ une surface caractéristique, i.e.

$$\text{(2.3.7)} \qquad \partial_t\phi = \lambda(u, \partial'_y\phi) \quad \text{sur} \quad x_n = 0.$$

Pour l'étude des ondes soniques dans [Mé1], Φ est fixé en demandant que l'équation (2.3.7) soit satisfaite partout, c'est à dire sur $\{x_n \geq 0\}$ et sur $\{x_n \leq 0\}$. Pour traiter le cas où le saut $[u]$ est petit on suit une démarche voisine en introduisant l'extension $\lambda(u^+, u^-, \theta)$ de la fonction $\lambda(u, \theta)$ et en résolvant

$$\text{(2.3.8)} \qquad \partial_t\Phi = \lambda(u^+, u^+ - p^+, \partial'_y\Phi) \quad \text{sur} \quad x_n \geq 0,$$

$$\text{(2.3.9)} \qquad \partial_t\Phi = \lambda(u^- + p^-, u^+, \partial'_y\Phi) \quad \text{sur} \quad x_n \leq 0.$$

On demande aux fonction $p^{\pm}$ de vérifier

$$\text{(2.3.10)} \qquad p^+_{|x_n=0} = p^-_{|x_n=0} = [u]$$

de sorte que la trace de (2.3.8) et (2.3.9) sur le bord $x_n = 0$ se réduise à (2.3.6). D'autre part, on demande aux fonctions $p^{\pm}$ de s'annuler quand $[u] = 0$, c'est-à-dire, compte tenu de (2.2.5), lorsque $[u_1] = 0$, de sorte qu'on retrouve alors l'équation eikonale utilisée pour les ondes soniques. De façon précise, on lie $p^\pm$ à $u^\pm$ et Φ de la manière suivante : on écrit $[u_1]$ sous la forme

$$[u_1] = -\varepsilon e^a. \tag{2.3.11}$$

La fonction $a(y)$ est définie sur le bord $x_n = 0$. Le paramètre ε mesure la force du choc. Le signe moins correspond à la condition de Lax (2.2.8). Par un opérateur de relèvement de trace, on détermine une fonction A telle que

$$\Gamma A := A_{|x_n=0} = a. \tag{2.3.12}$$

On définit alors, à l'aide des fonctions $U^\pm$ de (2.2.6) (2.2.7),

$$\begin{cases} p^+ = p^+(u^+, \partial'_y\Phi, A) = -\varepsilon e^A\, U^+(u^+, \partial'_y\Phi, -\varepsilon e^A) \\ p^- = p^-(u^-, \partial'_y\Phi, A) = -\varepsilon e^A\, U^-(u^-, \partial'_y\Phi, -\varepsilon e^A) \end{cases} \tag{2.3.13}$$

Il est clair que $p^\pm = 0$ lorsque $[u] = 0$ i.e. $\varepsilon = 0$. D'autre part, les conditions de Rankine-Hugoniot (2.3.5) impliquent bien la relation (2.3.10).

On cherche donc Φ comme une solution des équations :

$$[\Phi] = 0 \quad \text{sur } x_n = 0 \tag{2.3.14}$$

$$\partial_t\Phi^+ = \lambda(u^+, u^+ - p^+(u^+, \partial'_y\Phi^+, A), \partial'_y\Phi^+) \quad \text{sur } \Omega_T^+ \tag{2.3.15}$$

$$\partial_t\Phi^- = \lambda(u^- + p^-(u^-, \partial'_y\Phi^-, A), u^-, \partial'_y\Phi^-) \quad \text{sur } \Omega_T^- \tag{2.3.16}$$

En notant (S_R) le système constitué par les équations (2.3.2) (2.3.3) (2.3.14) (2.3.15) (2.3.16), nous définissons maintenant l'objet de notre étude.

Définition 2.3.1. — On considère $T_o < 0 \leq T$ et une boule ouverte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ centrée à l'origine. On note $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ la boule ouverte $\omega = \Gamma\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \ / \ (x', 0) \in \Omega\}$.

Une famille de solutions de classe C^k sur $]T_o, T[\times \Omega$ est un ensemble de fonctions (u, Φ) qui vérifient les propriétés suivantes.

(2.3.17) u et $\partial'_y\Phi$ prennent leurs valeurs dans des compacts fixés de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{O}$.

(2.3.18) En notant $\Omega^\pm = \Omega \cap \{\pm x_n > 0\}$, (u^+, Φ^+) [resp. (u^-, Φ^-)] appartient à un borné fixé de $C_b^k(\Omega^+)$ [resp. $C_b^k(\Omega^-)$] et pour $|\alpha| \leq k$ les fonctions $\partial^\alpha u^\pm$, $\partial^\alpha\Phi^\pm$ se prolongent continûment jusqu'au bord $\Omega \cap \{x_n = 0\}$.

(2.3.19) Sur $\{x_n = 0\}$, on a $[\Phi = 0]$ et il existe $\delta_1 > 0$ indépendant du choix de (u, Φ) tel que $\partial_n\Phi^\pm > \delta_1$ sur $\Omega^\pm$. De plus la fonction $\phi = \Gamma\Phi^+ = \Gamma\Phi^-$ appartient à un borné fixé de $C_b^k(]T_o, T[\times \omega)$.

(2.3.20) u est discontinue sur $\{x_n = 0\}$ et il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ tel que la première composante $[u_1]$ du saut de u vérifie

$$[u_1] = -\varepsilon\, e^a$$

où $a(y)$ appartient à dans un borné fixé de $C_b^k(]T_o, T[\times \omega)$.

(2.3.21) Il existe une fonction A appartenant à un borné fixé de $C_b^k(]T_o, T[\times \Omega)$ telle que $\Gamma A = a$.

(2.3.22) (u, Φ) est solution sur $]T_o, T[\times \Omega$ du système (S_R).

On a noté $C_b^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions u de classe C^k définies sur un ouvert Ω dont toute les dérivées sont bornées sur Ω.

Remarque 2.3.2. — Il résulte de (2.3.19) que l'application $(y, x_n) \mapsto (y, \Phi^+(y, x_n))$ [resp. $(y, \Phi^-(y, x_n))$] est un difféomorphisme de Ω^+ (resp. Ω^-) sur son image.

Il est clair par construction, que toute solution $(\widetilde{u}, \Phi)$ de (S_R) dans les variables redressées, fournit par le changement de variables (2.3.1) une solution faible, au sens de la définition 2.2.1, du système (S_I) dans les coordonnées initiales. La réciproque n'est pas aussi directe. Il faut montrer que l'on peut toujours imposer les conditions supplémentaires (2.3.15) (2.3.16). C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.3.3. — *Étant donnés un entier $k \geq 1$, des paramètres $T_o < 0 \leq T$, une boule ouverte $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ centrée à l'origine et un intervalle I, il existe T_o', T' et une boule ouverte $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ centrée à l'origine tels que*

(2.3.23) $$T_o \leq T_o' < 0 \leq T' \leq T \qquad \omega_1 := \Gamma\widetilde{\Omega} \subset \omega,$$

et pour toute famille de chocs faibles $\mathcal{F}$ de classe C^k sur $\Omega =]T_o, T[\times \omega \times I$ comme indiqué dans la définition 2.2.1, il existe une famille $\widetilde{\mathcal{F}}$ de solutions locales de classe C^k du système (S_R) sur $]T_o', T'[\times \widetilde{\Omega}$, telle que pour tout $(u, \phi) \in \mathcal{F}$ il existe $(\widetilde{u}, \Phi) \in \widetilde{\mathcal{F}}$ tel que

(2.3.24) $$\Phi(y, 0) = \phi(y) \qquad sur \quad]T_o', T'[\times \omega_1,$$

et pour tout $(y, \widetilde{x}_n) \in]T_o', T'[\times \widetilde{\Omega}^\pm$ on a $(y, \Phi^\pm(y, \widetilde{x}_n)) \in \Omega^\pm$ et

(2.3.25) $$\widetilde{u}^\pm(y, \widetilde{x}_n) = u^\pm(y, \Phi^\pm(y, \widetilde{x}_n)).$$

Démonstration. — On construit séparément Φ^+ et Φ^-. Construisons Φ^+. En effectuant des prolongements, on se ramène à la situation suivante : il existe une fonction $v^+(y, x_n)$ définie sur $]T_o, T[\times \mathbb{R}^n$ et appartenant à un borné fixé de $C_b^k(]T_o, T[\times \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$v^+(y, x_n) = u^+(y, x_n) \qquad \text{sur} \quad \Omega_1^\pm \subset \Omega^\pm,$$

où $\Omega_1^\pm = \{(y, x_n) \in]T_o, T[\times \omega_1 \times I_1$ avec $\omega_1 \subset \omega$ et $I_1 \subset I$. On choisit arbitrairement une fonction $A(y, \widetilde{x}_n)$ obtenue par relèvement de la fonction $a(y)$. On détermine Φ^+ en résolvant l'équation

(2.3.26) $$\partial_t \Phi^+ = \lambda(v^+(y, \Phi^+), v^+(y, \Phi^+) - p^+(\varepsilon, v^+(y, \Phi^+), \partial_y' \Phi^+, A), \partial_y' \Phi^+),$$

avec la condition initiale :

(2.3.27) $$\Phi^+_{|t=0} = \widetilde{x}_n + \phi(0, x').$$

Dans (2.3.26) p^+ désigne la fonction définie par :

(2.3.28) $$p^+(\varepsilon, v^+(y, \Phi^+), \partial_y' \Phi^+, A) = -\varepsilon e^A\, U^+(v^+(y, \Phi^+), \partial_y' \Phi, -\varepsilon e^A).$$

On notera que par le changement de variables (2.3.1), (2.3.26) est exactement l'équation (2.3.15). On se donne ensuite $0 < \delta_1 < 1$. Il existe alors $T_o \leq T'_o < 0 \leq T' \leq T$ et une boule ouverte $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ centrée à l'origine tels que $(y, \Phi^+(y, \widetilde{x}_n)) \in \Omega_1^+$ pour tout $(y, \widetilde{x}_n) \in]T'_o, T'[\times \widetilde{\Omega}_1^+$. Il en résulte que la fonction $\widetilde{u}^+$ définie sur $]T'_o, T'[\times \mathbb{R}^n$ par $\widetilde{u}^+(y, \widetilde{x}_n) = v^+(y, \Phi^+(y, \widetilde{x}_n))$ vérifie $\widetilde{u}^+(y, \widetilde{x}_n) = u^+(y, \Phi^+(y, \widetilde{x}_n))$ pour tout $(y, \widetilde{x}_n) \in]T'_o, T'[\times \widetilde{\Omega}_1^+$. De plus $\widetilde{u}$ vérifie l'équation (2.3.2).

On construit de même les fonctions Φ^- et $\widetilde{u}^-$. Les conditions de sauts (2.3.5) (2.3.6) résultent directement de (2.2.11), (2.2.12). □

2.4. Données de Cauchy

Le but de ce travail est de construire des familles $(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ de chocs, où le paramètre $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ mesure l'amplitude du choc. Cette construction sera d'abord effectuée dans les variables redressées par la résolution du problème de Cauchy pour le système (S_R).

Bien que l'on s'intéresse à un problème local, il est techniquement plus agréable de travailler globalement en espace. Nous précisons dans ce paragraphe les données de Cauchy pour le problème local et pour le problème global. Nous montrerons en particulier que les données de Cauchy locales se prolongent en données de Cauchy globales, de sorte que nous obtiendrons les solutions du problème local par restriction des solutions du problème global.

Nous construisons des solutions qui à l'infini sont voisines d'un choc plan. Pour simplifier, nous choisissons l'état de base à gauche $\underline{u}_\varepsilon^-$ de ce choc plan égal à 0. Quitte à changer les axes, on suppose que les hyperplans de sauts ont leur normales dans le plan engendré par $dt = dx_0$ et dx_n. Cela conduit à considérer la famille suivante $(\underline{u}_\varepsilon^\pm, \underline{\Phi}_\varepsilon)$ indexée par $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$:

$$(2.4.1) \qquad \begin{cases} \underline{u}_\varepsilon^- = 0, \\ \underline{u}_\varepsilon^+ = -\varepsilon\, U^-(0, 0, -\varepsilon), \\ \underline{\Phi}_\varepsilon(x) = x_n + \sigma_\varepsilon t \qquad \text{avec} \qquad \sigma_\varepsilon = \lambda(\underline{u}_\varepsilon^+, 0, 0). \end{cases}$$

On désigne ici par Ω un ensemble ouvert qui sera soit une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine, soit $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega^\pm$ et ω les ensembles ouverts :

$$\Omega^\pm = \Omega \cap \{\pm x_n > 0\}, \qquad \omega = \Gamma\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \ / \ (x', 0) \in \Omega\}.$$

On désigne par $p - H^s(\Omega)$ l'espace des fonctions dont la restriction à $\Omega^\pm$ est dans l'espace de Sobolev usuel $H^s(\Omega^\pm)$. Dans tout ce qui suit, s est un entier assez grand.

Au chapitre 6, on donnera la définition précise de *famille de données initiales compatibles* de régularité s. Elle fait intervenir les conditions de compatibilité qui garantissent que la discontinuité initiale n'engendre qu'un seul choc, et non pas tout l'éventail des singularités qui sont attendues dans la résolution générale d'un problème de Riemann. On rappelle que les conditions de compatibilité s'obtiennent simplement en analysant le développement de Taylor en $t = 0$ des équations et des conditions aux limites (*cf.* [Ch-Pi], [Ma-Ra] dans le cas linéaire et [Ma2], [Al], [Mé1] dans le cas des ondes de choc, ondes de raréfaction et ondes soniques). On renvoie au § 1.2.9 pour une introduction à cette discussion. À une famille $\mathcal{F}^o(s,\Omega)$ de données compatibles sont associés un réel $\varepsilon_o > 0$, des ensembles $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ bornées respectivement dans $p - H^s(\Omega)$, $p - H^{s+1}(\Omega)$ et $H^{s-1}(]T'_o, T'_1[\times \omega)$ et a des compacts $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{U}$ et de $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{O}$. En notant $u_o^\pm$ et $\Phi_o^\pm$ leurs restrictions à $\Omega^\pm$, les fonctions (u_o, Φ_o) de $\mathcal{F}^o_\varepsilon(2s,\Omega)$ vérifient :

(2.4.2) u_o et $\partial'_y \Phi_o$ prennent leurs valeurs dans $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$.

(2.4.3) Il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ tel que $u_o - \underline{u}_\varepsilon \in \mathcal{B}_1$ et $\Phi_o - x_n \in \mathcal{B}_2$.

(2.4.4) On a $[\Phi_o] = 0$ et il existe $\delta > 0$, indépendant de (u_o, Φ_o) tel que $\partial_n \Phi_o \geq \delta$.

(2.4.5) Il existe $a \in \mathcal{B}_3$ tel que la première composante $[u_{o1}]$ du saut de u_o vérifie $[u_{o1}] = -\varepsilon e^{a_o}$ où $a_o = a_{|t=0}$.

$$[u_o] = [u_{o1}]\, U^-(u_o^-, \partial'_y \phi_o, [u_{o1}]) \qquad \text{avec} \qquad \phi_o(y') = \Phi_o(y', 0) \tag{2.4.6}$$

La condition (2.4.6) est la première condition de compatibilité pour que les données initiales correspondent à celles d'un choc faible associé à la valeur propre λ. Les fonctions de $\mathcal{F}^o$ doivent vérifier un certain nombre (dépendant de s) de conditions de compatibilités supplémentaires qui sont nécessaires pour que la solution du problème de Cauchy ne présente qu'une seule onde dans un espace de régularité s (*cf.* [Ma2] ou [Mé1]). Nous renvoyons au chapitre 6 pour l'explicitation de ces conditions supplémentaires et la construction d'une classe très large de données compatibles.

Par rapport à [Ma2], la difficulté supplémentaire que nous aurons à résoudre, est de montrer que les conditions de compatibilité permettent de construire des solutions approchées sous forme de chocs faibles. En particulier il faut prolonger pour les solutions approchées l'information (2.4.4) à des temps ultérieurs.

Étant donnée une famille de données compatibles $\mathcal{F}(2s,\Omega)$, on note $\mathcal{F}^o_\varepsilon(2s,\Omega)$ l'ensemble des données initiales $(u_o, \Phi_o) \in \mathcal{F}^o(2s,\Omega)$ qui vérifient les conditions ci-dessus pour la valeur donnée de ε.

Enfin, comme nous l'avons mentionné plus haut, les données compatibles locales (cas où Ω est une boule ouverte) se prolongent en données compatibles globales (cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$). Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathcal{F}^o_\varepsilon(2s,\Omega)$ sera simplement noté $\mathcal{F}^o_\varepsilon(2s)$. La proposition suivante sera démontrée au chapitre 6.

Proposition 2.4.1. — *Pour toute famille de données initiales compatibles $\mathcal{F}^o(2s+1,\Omega)$ sur la boule ouverte Ω, il existe une boule ouverte $\Omega_1 \subset \Omega$ centrée à l'origine et une famille de données initiales compatibles sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}^o(2s,\mathbb{R}^n)$, telles que pour toute donnée compatible locale $(u_o, \Phi_o) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+1,\Omega)$, il existe une donnée compatible globale $(\widetilde{u}_o, \widetilde{\Phi}_o) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s,\mathbb{R}^n)$ telle que $(\widetilde{u}_o, \widetilde{\Phi}_o) = (u_o, \Phi_o)$ sur Ω_1.*

2.5. Un exemple

L'exemple suivant $(u_o^\varepsilon, \Phi_o^\varepsilon)$ de données initiales compatibles globales décrit l'interaction d'une perturbation et du choc plan faible $(\underline{u}_\varepsilon, \underline{\Phi}_\varepsilon)$ défini en (2.4.1).

Notons ici $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les variables d'espace. On se donne une fonction $v_o(x)$ C^∞ et à support compact dans l'ensemble $\{x_n \leq -1\} \subset \mathbb{R}^n$.

On désigne alors par $v(t,x)$ la solution régulière du problème de Cauchy :

$$
(2.5.1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} A_j(v)\partial_j v + \mathcal{M}(v, \partial_y \underline{\Phi}_\varepsilon)\partial_n v = 0, \\ v_{|t=0} = v_o(x). \end{cases}
$$

Il existe un temps $T > 0$ tel que $v(t,x)$ soit bien définie sur $[-T,T] \times \mathbb{R}^n$. De plus, par vitesse finie de propagation et en diminuant T au besoin, on peut faire en sorte que :

$$
(2.5.2) \qquad \operatorname{Supp} v \subset [-T,T] \times \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_n \leq 0\}.
$$

Le couple (u, Φ) défini sur $[-T,T] \times \mathbb{R}^n$ par :

$$
(2.5.3) \qquad \begin{cases} u^+(t,x) = \underline{u}_\varepsilon^+ & \text{sur} \quad x_n > 0 \\ u^-(t,x) = v(t,x) & \text{sur} \quad x_n < 0 \\ \Phi(t,x) = x_n + \sigma t \end{cases}
$$

est alors une solution exacte des équations (2.3.2) et des conditions de saut (2.3.5) (2.3.6), puisque que sur $\{x_n = 0\}$ on a $u^\pm(t,x',0) = \underline{u}_\varepsilon^\pm$.

On considère le problème de Cauchy avec données initiales à l'instant T :

$$
(2.5.4) \qquad \begin{cases} u_o^{\varepsilon+}(x) = \underline{u}_\varepsilon^+ & \text{sur} \quad x_n > 0 \\ u_o^{\varepsilon-}(x) = v(T,x) & \text{sur} \quad x_n < 0 \\ \underline{\Phi}_o^\varepsilon(x) = x_n. \end{cases}
$$

On peut vérifier que les données initiales ainsi définies sont compatibles au sens de la définition 6.2.1. Le cas le plus intéressant, est bien sûr celui où le support de v touche la frontière $\{x_n = 0\}$ à l'instant T.

Plus généralement, si les perturbations $v_o^\pm$ sont plates sur $\{x_n = 0\}$, les données initiales

$$
(2.5.5) \qquad \begin{cases} u_o^{\varepsilon,\pm}(x) = \underline{u}_\varepsilon^\pm + v_o^\pm & \text{sur} \quad \pm\, x_n > 0 \\ \underline{\Phi}_o^\varepsilon(x) = x_n \end{cases}
$$

sont compatibles

2.6. Le résultat principal

Comme indiqué au § 1.2.5, le caractère presque caractéristique des équations amène à travailler dans des espaces anisotropes du type (1.2.19). Pour une utilisation de ces espaces dans le cas de problèmes caractéristiques, on renvoie par exemple à [Ma-Os],

[Ra], [Gu], [Al], [Mé1]. Nous introduisons d'abord une définition précise des espaces utilisés. Pour $T \geq 0$, $\Omega_T^{\pm}$ désigne la bande :

$$\Omega_T^{\pm} = \{x = (y, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ 0 < t < T \text{ et } \pm x_n > 0\} \tag{2.6.1}$$

et on note $\Omega_T = \Omega_T^+ \cup \Omega_T^-$. On introduit d'autre part les dérivations $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ conormales au bord $\{x_n = 0\}$ définies par :

$$\delta_j = \partial_j \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq n-1, \qquad \delta_n = \rho(x_n)\partial_n \tag{2.6.2}$$

où ρ est une fonction C^∞ strictement croissante telle que

$$\rho(x_n) = x_n \quad \text{si} \quad |x_n| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \quad \rho(x_n) = \pm 1 \quad \text{si} \quad \pm x_n \geq 1.$$

Pour $\alpha \in N^{n+1}$, on note $\delta^\alpha = \delta_0^{\alpha_0}\delta_1^{\alpha_1}\cdots\delta_n^{\alpha_n}$.

Définition 2.6.1. — Pour s entier, $H^{0,s}(\Omega_T)$ désigne l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega_T)$ telles que $\delta^\alpha u \in L^2(\Omega_T)$ pour $|\alpha| \leq s$. On note $||u||_{s,T}^t$ la norme de cet espace.

Pour s entier, $W^{2s}(\Omega_T)$ désigne l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega_T)$ telles que $\delta^\alpha \partial_n^k u \in L^2(\Omega_T)$ pour $|\alpha| + 2k \leq 2s$. On note $||u||_{2s,T}$ la norme de cet espace.

L'espace $H^{0,s}$ est un espace de distributions *conormales* par rapport au bord $\{x_n = 0\}$ (*cf.* par exemple [Ra], [Mé5] [Gu] pour l'utilisation de ces espaces dans le contexte des problèmes aux limites non linéaires).

En désignant par s un entier tel que $2s > n/2 + 40$, nous énonçons un théorème d'existence pour les solutions du problème de Cauchy (2.3.2) (2.3.3) avec des conditions initiales globales (u_o, Φ_o) appartenant à $\mathcal{F}_\varepsilon^o(2s+3)$. Les étapes de la démonstration de ce théorème seront données au chapitre 3.

Théorème 2.6.2. — *Soit $\mathcal{F}^o(2s+3)$ une famille de données initiales compatibles au sens de la définition* 6.2.1. *Alors, il existe $\varepsilon_1 > 0$ (avec $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_o$), $T > 0$ et un sous-ensemble borné $\mathcal{B}$ de $W^{2s}(\Omega_T)$, tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$ et tout couple de données initiales $(u_o, \Phi_o) \in \mathcal{F}_\varepsilon^o(2s+3)$, il existe un couple (u, Φ) solution du système* (2.3.2)(2.3.3) *sur Ω_T et vérifiant*

i) $(u - \underline{u}_\varepsilon, \Phi - \underline{\Phi}_\varepsilon) \in \mathcal{B}$

ii) $u_{|t=0} = u_o$ *et* $\Phi_{|t=0} = \Phi_o$.

Remarque 2.6.3. — Comme on l'a noté dans [Mé2], pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$, les hypothèses 1 à 4 (chapitre 1) impliquent que les chocs plans d'amplitude ε définis par (2.4.1) sont uniformément stables au sens de A. Majda ([Ma1]). Suivant [Ma2], pour chaque donnée initiale (u_o, Φ_o) on sait qu'il existe un $T(\varepsilon) > 0$ et une solution (u, Φ) avec $u - \underline{u}_\varepsilon \in p - H^{2s}(\Omega_{T(\varepsilon)})$, et $\Phi - \underline{\Phi}_\varepsilon \in H^{2s+1}(\Omega_{T\varepsilon)})$. Le point important du théorème 2.6.1 est que la durée de vie T des solutions est minorée indépendamment de ε.

Remarque 2.6.4. — On ne peut pas espérer des estimations uniformes pour u dans $p - H^s$ car cela impliquerait des estimations dans $p - H^s$ pour les ondes soniques, et on sait que cela est faux en général. Les estimations uniformes dans $W^{2s}(\Omega_T)$ montrent qu'il y a seulement perte de contrôle des dérivées normales.

Remarque 2.6.5. — Le théorème 2.6.2 est un théorème d'existence, mais il ne garantit pas l'unicité de la solution (u, Φ). La démonstration du théorème inclut le choix d'un opérateur de relèvement de trace pour déterminer les fonctions $p^{\pm}$ vérifiant (2.3.10). Dès que cet opérateur aura été fixé, on assurera l'unicité des solutions du système (2.3.2) (2.3.3) (2.3.8) (2.3.9).

Nous terminons ce paragraphe en énonçant une version locale du théorème 2.6.2. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, on définit de manière analogue les espaces $H^{0,s}(\Omega)$ et $W^{2s}(\Omega)$. La proposition 2.4.1 permet alors de déduire du théorème 2.6.2 le corollaire suivant.

Corollaire 2.6.6. — *Étant donné une famille de données initiales compatibles $\mathcal{F}^o(2s+4, \Omega)$ sur une boule ouverte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe $T > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ avec $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_o$ et une boule ouverte $\Omega_1 \subset \Omega$ tels que pour tout $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_1]$ et tout couple de données initiales $(u_o, \Phi_o) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+4, \Omega)$, il existe un couple (u, Φ) solution du système (2.3.2) (2.3.3) sur $]0, T[\, \times \Omega_1$ vérifiant*

i) $(u - \underline{u}_\varepsilon, \Phi - \underline{\Phi}_\varepsilon) \in W^{2s}(]0, T[\, \times \Omega_1)$

ii) $u_{|t=0} = u_o$ *et* $\Phi_{|t=0} = \Phi_o$ *sur* Ω_1

En outre ces solutions restent bornées dans $W^{2s}(\Omega_T)$.

Remarque 2.6.7. — Avec la proposition 2.3.3, le corollaire 2.6.5 implique un théorème d'existence locale de chocs faibles dans les coordonnées initiales.

2.7. Prolongement d'une solution locale dans les variables initiales

Dans ce paragraphe nous énonçons un théorème de prolongement pour les chocs faibles (*cf.* définition 2.2.1). Nous l'énonçons dans les variables initiales. Étant donné un choc faible (u_o, ϕ_o) défini dans le passé, c'est à dire sur un intervalle de temps $]T_o, 0[$ avec $T_o < 0$, nous montrons qu'il existe un choc faible (u_1, ϕ_1) défini sur $]T_o, T[$ avec $T > 0$ qui prolonge (u_o, ϕ_o). La preuve de ce théorème sera donnée au chapitre 3.

Théorème 2.7.1. — *Étant donnés un entier k tel que $2k > n/2 + 44$ et une famille de chocs faibles au sens de la définition 2.2.1, $\mathcal{F}_o$, de classe C^{2k} sur un ouvert Ω_o de la forme $\Omega_o = \,]T_o, 0[\, \times \omega_o \times J_o$, il existe $T > 0$, une boule ouverte $\omega_1 \subset \omega_o$, un intervalle $J_1 \subset J_o$ et une famille de chocs faibles $\mathcal{F}_1$ de classe $C^{k'}$ sur $]T_o, T[\, \times \omega_1 \times J_1$ avec $k' < k - 3 - (n+1)/2$, tels que pour tout choc faible $(u_o, \phi_o) \in \mathcal{F}_o$ il existe un choc faible $(u_1, \phi_1) \in \mathcal{F}_1$ tel que :*

$$
\begin{aligned}
&u_1 = u_o && \textit{sur } \;]T_o, 0[\, \times \omega_1 \times J_1, \\
&\phi_1 = \phi_o && \textit{sur } \;]T_o, 0[\, \times \omega_1.
\end{aligned}
\tag{2.7.1}
$$

2.8. Convergence des solutions vers l'onde sonique

Le théorème 2.6.2 construit des solutions sur un domaine Ω_T indépendant de ε. On peut donc maintenant se demander quel est le comportement des solutions lorsque ε tend vers zéro. Comme on l'a indiqué au paragraphe 2.3, le système (2.3.2) (2.3.3) ne suffit pas pour déterminer (u, Φ). Nous construisons les solutions en complétant le système par les équations (2.3.8) (2.3.9). Le problème limite est alors naturellement celui des ondes soniques étudiées dans [Mél].

Théorème 2.8.1. — *Soit $(u_o^\varepsilon, \Phi_o^\varepsilon)$ une famille de données initiales compatibles dans $\mathcal{F}^o(2s+3)$, indexée par $\varepsilon \in\,]0, \varepsilon_1]$, telle que $(u_o^\varepsilon, \Phi_o^\varepsilon)$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers (u_o^o, Φ_o^o) lorsque ε tend vers 0. Alors il existe $T > 0$ et une famille de solutions $(u^\varepsilon, \Phi^\varepsilon)$, telles que $(u^\varepsilon - \underline{u}_\varepsilon, \Phi^\varepsilon - \underline{\Phi}_\varepsilon) \in W^{2s}(\Omega_T)$, et $(u^\varepsilon, \Phi^\varepsilon)$ converge dans $W^{2\sigma}$ sur tout compact pour tout $\sigma < s$, vers l'onde sonique (u^o, Φ^o) qui est la solution de (2.3.2)(2.3.8)(2.3.9) avec $p^\pm = 0$ et $[u^o] = 0$, avec conditions initiales :*

$$u^o_{|t=0} = u_o^o \qquad et \qquad \Phi^o_{|t=0} = \Phi_o^o.$$

Démonstration. — Le théorème 2.6.2 fournit une famille de solutions $(u^\varepsilon, \Phi^\varepsilon)$, bornée dans $W^{2s}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. On peut donc extraire une sous suite qui converge dans $W^{2\sigma}$ sur tout compact et pour tout $\sigma < s$. En outre, comme on le verra au § 3, Φ^ε est donné par les équations (2.3.15) (2.3.16), avec p donné par (2.3.13) et A^ε vérifiant

$$A^\varepsilon_{|x_n=0} = a^\varepsilon = \ln\big(-[u_1^\varepsilon]/\varepsilon\big).$$

Dans la démonstration du théorème 2.6.2, on construit les solutions de sorte que a^ε et A^ε sont bornées respectivement dans $H^{2s+1}([0,T] \times \mathbb{R}^{n-1})$ et dans $W^{2s}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, (2.3.13) implique que $p^{\pm,\varepsilon}$ converge fortement vers 0. On peut donc passer à la limite dans les équations pour trouver que la limite $(u, \Phi) \in W^{2s}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ vérifie

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_j(u^\pm)\partial_j u^\pm + \mathcal{M}(u^\pm, \partial_y \Phi^\pm)\frac{\partial_n u^\pm}{\partial_n \Phi^\pm} = 0 \quad \text{sur} \quad \pm x_n > 0. \tag{2.8.1}$$

$$\partial_t \Phi^\pm = \lambda(u^\pm, \partial'_y \Phi^\pm) \qquad \text{sur} \qquad \pm x_n > 0 \tag{2.8.2}$$

$$[\Phi] = 0, \quad [u] = 0 \qquad \text{sur} \quad x_n = 0, \tag{2.8.3}$$

$$u_{|t=0} = u_o^o, \quad \Phi_{|t=0} = \Phi_o^o. \tag{2.8.4}$$

C'est exactement le problème des ondes soniques étudié dans [Mél]. En particulier, il y a unicité de la solution, ce qui montre que la suite entière $(u^\varepsilon, \Phi^\varepsilon)$ converge vers (u, Φ).

Remarque 2.8.2. — On peut montrer directement que la limite (u_o^o, Φ_o^o) des données initiales $(u_o^\varepsilon, \Phi_o^\varepsilon)$ compatibles pour le problème des chocs faibles, vérifie les conditions de compatibilité pour le problème limite des ondes soniques, telles qu'elles sont écrites dans [Mél]. On sait alors qu'il existe une solution (u^o, Φ^o). Notons cependant que dans

[Mél], les solution sont construites dans un espace plus gros que W^{2s}, mais il n'est pas difficile d'en montrer la régularité W^{2s} et le théorème 2.8.1 redonne exactement les solutions de [Mél].

2.9. Application au système d'Euler de la dynamique des gaz

Nous rappelons tout d'abord l'écriture de ce système, noté (S.I), de taille 5, sous la forme conservative et en dimension 3 d'espace

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t\rho + \mathrm{div}_x(\rho v) = 0, & \\ \partial_t(\rho v_i) + \mathrm{div}_x(\rho v_i v) + \partial_i P = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq 3, \\ \partial_t(\rho E) + \mathrm{div}_x(\rho E v + P v) = 0. & \end{array}\right. \tag{2.9.1}$$

Dans (2.9.1) $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ρ désigne la densité, P la pression, $v = (v_1, v_2, v_3)$ la vitesse et $E = e + |v|^2/2$ est l'énergie totale par unité de volume et par unité de masse.

En désignant par S l'entropie, la fonction inconnue est $u = (\rho, v, S) \in \mathbb{R}^5$. La pression P, l'énergie interne spécifique e ainsi que la température T sont des fonctions données du couple (ρ, S), liées par la deuxième loi de la thermodynamique :

$$de = TdS + \frac{P}{\rho^2}d\rho. \tag{2.9.2}$$

Cette relation définit la loi d'état du gaz qui permet d'exprimer P comme une fonction $\mathcal{P}(\rho, S)$. Le système (2.9.1) est donc bien un système de cinq équations à cinq inconnues. Nous considérons également le système d'Euler isentropique, noté (S.II), constitué des quatre premières équations de (2.9.1) complétées de la loi d'état $P = \mathcal{P}(\rho, S_o)$, où S_o est une valeur fixée de l'entropie. Il est alors bien connu que si (ρ, v) est une solution *régulière* de (S.II), alors (ρ, v, S_o) est solution de (S.I). Ce n'est plus le cas pour les solutions faibles, car les conditions de Rankine-Hugoniot pour (S.II) n'impliquent pas celles de (S.I). En particulier, on sait que les conditions de choc pour (S.I) impliquent que le saut de S est non nul, mais cependant cubique par rapport à la force du choc. On peut donc penser que les chocs faibles de (S.II) sont voisins de chocs faibles de (S.I).

En notant c la vitesse locale du son définie par $c^2 = \partial P/\partial\rho$, les premières valeurs propres de chaque système sont vraiment non linéaires. En posant $\xi = (-\theta_1, -\theta_2, 1)$ elles s'écrivent :

$$\lambda_1(u, \theta) = v \cdot \xi - c(\rho, S)|\xi| \qquad \text{pour (S.I)}, \tag{2.9.3}$$

$$\lambda_2(\widetilde{u}, \theta) = v \cdot \xi - c(\rho, S_o)|\xi| \qquad \text{pour (S.II)}, \tag{2.9.4}$$

avec $u = (\rho, v, S)$ pour (S.I) et $\widetilde{u} = (\rho, v)$ pour (S.II). Nous considérons des chocs faibles associés à λ_1 et λ_2, en redressant les surfaces de choc comme indiqué au paragraphe 2.3.

On note $\mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u$ l'opérateur défini au premier membre de (2.3.2) et $g(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)$ la fonction définie au premier membre de (2.3.3). Après redressement, le système (S.I) s'écrit sous la forme :

$$(2.9.5) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ g(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi) = 0 & \text{sur } \omega_T. \end{cases}$$

En notant $u = (\widetilde{u}, S_o)$ la fonction inconnue du système (S.II), on obtient pour u les mêmes équations à l'intérieur, comme on l'a dit plus haut. Par contre, les conditions de saut diffèrent. On montre au chapitre 12, qu'après redressement, (S.II) s'écrit

$$(2.9.6) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ g(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi) = G & \text{sur } \omega_T. \end{cases}$$

où G est une fonction de la forme $G = [u_1]^3 h(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)$ avec u_1 désignant la première composante de u.

Considérons d'abord le cas des chocs plans. On prend les mêmes états gauches

$$\underline{u}_1^-(\varepsilon) = \underline{u}_2^-(\varepsilon) = u_o$$

où $u_o = (\rho_o, v_o, S_o)$ est fixé. Les états droits sont définis par les conditions de Rankine-Hugoniot de chaque système. Ils dépendent du paramètre ε, qu'on peut prendre égal au saut de densité $[\underline{\rho}]$. On démontre alors (voir chapitre 12) que

$$(2.9.7) \qquad |\underline{u}_1^+(\varepsilon) - \underline{u}_2^+(\varepsilon)| = O(\varepsilon^3) \qquad |\partial_t \underline{\Phi}_1(\varepsilon) - \partial_t \underline{\Phi}_2(\varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$$

En désignant par s un entier fixé tel que $2s > n/2 + 40$, on se donne maintenant deux familles de valeurs initiales compatibles globales au sens de la définition 6.2.1, $(u_{10}^\varepsilon, \Phi_{10}^\varepsilon) \in \mathcal{F}_\varepsilon^{10}(2s+3)$ pour le système (S.I) et $(u_{20}^\varepsilon, \Phi_{20}^\varepsilon) \in \mathcal{F}_\varepsilon^{20}(2s+3)$ pour le système (S.II). Le théorème 2.6.2 montre qu'il existe des solutions $(u_1^\varepsilon, \Phi_1^\varepsilon)$ de (S.I) et $(u_2^\varepsilon, \Phi_2^\varepsilon)$ de (S.II) définies sur un intervalle de temps $[0, T]$ indépendant de ε.

Pour comparer ces solutions, nous devons nous placer dans un domaine fixe, c'est-à-dire *dans les variables redressées.* Nous devons partir de données initiales proches, sachant que les conditions de compatibilité ne sont pas les mêmes pour les deux systèmes. On verra au chapitre 6 que ceci est réalisable. On verra aussi que les conditions de compatibilité font intervenir des choix largement arbitraire de fonctions A_1^ε et A_2^ε dans un borné fixé de $H^{2s+3}(]-T_1', T_1'[\times \mathbb{R}^3)$. En désignant par $(u_{io}^\varepsilon)' = u_{io}^\varepsilon - \underline{u}_i(\varepsilon)$, avec $i = 1, 2$, nous supposons que ces valeurs initiales sont très régulières sur chaque demi-espace $\{\pm x_n > 0\}$ et proches l'une de l'autre au sens suivant : il existe une constante K telle que :

$$(2.9.8) \quad \|(u_{10}^\varepsilon)' - (u_{20}^\varepsilon)'\|_{(p,2s+3)} + \|\Phi_{10}^\varepsilon - \Phi_{20}^\varepsilon\|_{(p,2s+4)} + \varepsilon \|A_1^\varepsilon - A_2^\varepsilon\|_{(2s+3,T_1')} \leq K\,\varepsilon^2.$$

Dans (2.9.8) $\|u\|_{(p,s)}$ désigne la norme de l'espace $p - H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\|u\|_{(s,T)}$ celle de l'espace $H^s(]-T, T[\times \mathbb{R}^3)$.

Nous donnerons au chapitre 12 un exemple de données compatibles vérifiant (2.9.8). En notant pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (u_i^\varepsilon)' &= u_i^\varepsilon - \underline{u}_i(\varepsilon), & (\Phi_i^\varepsilon)' &= \Phi_i^\varepsilon - \underline{\Phi}_i(\varepsilon), \\ v^\varepsilon &= (u_2^\varepsilon)' - (u_1^\varepsilon)', & \Psi^\varepsilon &= (\Phi_2^\varepsilon)' - (\Phi_1^\varepsilon)'. \end{aligned}$$

Le théorème de comparaison suivant est démontré au chapitre 12.

Théorème 2.9.1. — *Sous l'hypothèse* (2.9.8), *il existe* $T > 0$ *et une constante* $C > 0$ *tels que :*

$$\|v^\varepsilon\|_{4,T} + \|\Psi^\varepsilon\|_{4,T} \leq C\,\varepsilon^{3/2}. \tag{2.9.10}$$

Remarque 2.9.2. — Il n'est pas clair que la puissance $\varepsilon^{3/2}$ soit optimale. Pour les chocs plans, on a vu que $\underline{u}_{1,\varepsilon} - \underline{u}_{2,\varepsilon} = O(\varepsilon^3)$ (*cf.* (2.9.7). Cependant, en général on ne peut pas espérer mieux qu'une erreur en ε^2 puisque dans les variables redressées, la différence $u_2 - u_1$ s'écrit

$$\widetilde{u}_2(y, \widetilde{x}_n) - \widetilde{u}_1(y, \widetilde{x}_n) = u_2(y, \Phi_2(y, \widetilde{x}_n)) - u_1(y, \Phi_1(y, \widetilde{x}_n))$$

et que la différence $\Phi_2 - \Phi_1$ est au mieux d'ordre ε^2 comme indiqué dans (2.9.7).

CHAPITRE 3

LES ÉTAPES DES PREUVES

Dans ce chapitre, on détaille le plan de la démonstration du théorème principal. Dans un premier temps, partant de familles de données initiales compatibles, on construit des familles de solutions approchées. On reformule alors le problème de Cauchy en un problème de prolongement de solutions données dans le passé $\{t < 0\}$. Ensuite, l'étape essentielle est l'obtention d'estimations a priori uniformes pour les solutions du problème non linéaire. Elles permettent de définir un « temps d'existence a priori » T^* : on contrôle uniformément les solutions sur $[0, T^*]$ par leurs données dans le passé. Enfin, on énonce un théorème de prolongement des solutions à ε fixé. Les estimations uniformes, permettent de réutiliser ce théorème tant que $t < T^*$ et ainsi de prolonger la solution jusqu'au temps T^*.

3.1. Solutions approchées

Dans ce paragraphe nous introduisons des ensembles de solutions approchées qui serviront de point de départ pour la construction des solutions exactes du systèmes (S_R). Au chapitre 6 nous montrerons que pour chaque famille de données initiales compatibles $\mathcal{F}^o$ il existe une famille de solutions approchées au sens des développements de Taylor en $t = 0$, telle que pour chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$, $\mathcal{F}^a_{\varepsilon\,|t=0} = \mathcal{F}^o_\varepsilon$.

On désigne par Ω un ensemble ouvert qui sera, soit une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine, soit $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega^\pm$ et ω les ensembles ouverts :

$$\Omega^\pm = \Omega \cap \{\pm x_n > 0\}, \quad \omega = \Gamma\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \ / \ (x', 0) \in \Omega\}.$$

Enfin, on désigne par Γ l'opérateur de trace sur le bord $\{x_n = 0\}$.

On définit d'abord la notion de solution approchée, qui s'obtient en résolvant les équations au sens des développements de Taylor en t autour de $t = 0$.

Définition 3.1.1. — Soient T_o, T_1 et δ_1 des paramètres tels que $T_o < 0 < T_1$ et $\delta_1 > 0$. Une famille $\mathcal{F}^a(2s+1,]T_o, T_1[\times \Omega)$ de solutions approchées de régularité $2s+1$ est un ensemble de fonctions de $p-H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\Omega)$ tel qu'il existe des compacts $\mathcal{K}_1\subset\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}_2\subset\mathcal{O}$, un réel $\delta_1>0$ et des ensembles bornés $\mathcal{B}_1\subset p\text{--}H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\Omega)$, $\mathcal{B}_2\subset H^{2s+1}]T_o,T_1[\times\omega)$, $\mathcal{B}_3\subset H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\Omega)$, $\mathcal{B}_4\subset p\text{--}H^{2s}(]T_o,T_1[\times\Omega)$ et $\mathcal{B}_5\subset H^{2s-1}(]T_o,T_1[\times\omega)$, tels que pour tout couple (u_a,Φ_a) de la famille les conditions suivantes sont vérifiées.

(3.1.1) u_a et $\partial'_y\Phi_a$ prennent leurs valeurs dans $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$.

(3.1.2) Il existe $\varepsilon\in]0,\varepsilon_o]$ tel que $(u_a-\underline{u}_\varepsilon,\Phi_a-\underline{\Phi}_\varepsilon)\in\mathcal{B}_1\subset p\text{--}H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\Omega)$.

(3.1.3) $[\Phi_a]=0$ et $\partial_n\Phi_a\geq\delta_1$.

(3.1.4) Il existe $w_a\in\mathcal{B}_2\subset H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\omega)$ tel que la première composante du saut de $[u_a]$ vérifie $[u_{a1}]=-\varepsilon e^{w_a}$.

(3.1.5) Il existe une fonction $W_a\in\mathcal{B}_3\subset H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\Omega)$ telle que $\Gamma W_a=w_a$.

(3.1.6) Les fonctions Φ_a^+ et Φ_a^- sont solutions des équations

$$\begin{aligned}
\partial_t\Phi_a^+ &= \lambda(u_a^+,u_a^+-p^+(u_a^+,\partial'_y\Phi_a^+,W_a),\partial'_y\Phi_a^+) &\quad& \text{sur }]T_o,T_1[\times\Omega^+,\\
\partial_t\Phi_a^- &= \lambda(u_a^-+p^-(u_a^-,\partial'_y\Phi_a^-,W_a),u_a^-,\partial'_y\Phi_a^-) && \text{sur }]T_o,T_1[\times\Omega^-,
\end{aligned}$$

où p^+ et p^- désignent les fonctions définies en (2.3.13).

(3.1.7) Le saut $[u_a]$ est de la forme :

$$[u_a]=[u_{a,1}]\,U^-(u_a^-,\partial'_y\Phi_a,[u_{a1}]).$$

(3.1.8) La fonction

$$f_a=A_0(u_a)\partial_t u_a+\sum_{j=1}^{n-1}A_j(u_a)\partial_j u_a+\mathcal{M}(u_a,\partial_y\Phi_a)(\partial_n u_a/\partial_n\Phi_a)$$

est dans $\mathcal{B}_4\subset p\text{--}H^{2s}(]T_o,T_1[\times\Omega)$ et vérifie $\partial_t^k f_{a|t=0}=0$ si $k\in\{0,\dots,2s-1\}$.

(3.1.9) Le saut de f_a est tel que $\varepsilon^{-1}[f_a]\in\mathcal{B}_5\subset H^{2s-1}(]T_o,T_1[\times\omega)$.

Lorsque $\Omega=\mathbb{R}^n$ nous notons simplement $\mathcal{F}^a(2s+1)$ une famille de solutions approchées de régularité $2s+1$. On précisera l'intervalle de temps quand cela est nécessaire. On note $\mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1)$ l'ensemble des $(u_a,\Phi_a)\in\mathcal{F}^a$ qui vérifient les conditions ci-dessus pour le réel ε. On commettra souvent l'abus de langage qui consiste à parler de (u_a,Φ_a) comme d'une solution approchée locale ou globale sans faire de référence explicite à l'ensemble $\mathcal{F}^a(2s+1,]T_o,T_1[\times\Omega)$ considéré.

A partir d'un couple de données initiales compatibles globales (u_o,Φ_o) il est possible de construire une solution approchée globale (u_a,Φ_a) telle que $(u_{a|t=0},\Phi_{a|t=0})=(u_o,\Phi_o)$. Le théorème suivant sera démontré au chapitre 6.

Théorème 3.1.2. — *Pour toute famille $\mathcal{F}^o(2s+3)$ de données initiales compatibles globales, il existe $T_o<0<T_1$ et une famille de solutions approchées $\mathcal{F}^a(2s+1)$ sur $]T_o,T_1[\times\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_o]$ et pour tout couple de données initiales compatibles globales $(u_o,\Phi_o)\in\mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3)$ il existe une solution approchée globale $(u_a,\Phi_a)\in\mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1)$ telle que $(u_{a|t=0},\Phi_{a|t=0})=(u_o,\Phi_o)$.*

Réciproquement, étant donnée une famille $\mathcal{F}^a(2s+2)$ *de solutions approchées, l'ensemble des valeurs initiales* $(u_{a|t=0}, \Phi_{a|t=0})$ *lorsque* $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a(2s+2)$ *est une famille de données initiales compatibles de régularité* $2s$.

Étant donné que les données compatibles locales se prolongent en données compatibles globales, la proposition 2.4.1 permet de déduire du théorème 3.1.2 le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.3. — *Soit* $\mathcal{F}^o(2s+4, \Omega)$ *une famille de données initiales compatibles sur la boule ouverte* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Il existe* $T_o < 0 < T_1$, *une famille de solutions approchées globales* $\mathcal{F}^a(2s+1)$ *et une boule ouverte* $\Omega_1 \subset \Omega$ *tels que pour tout* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ *et pour tout couple de données initiales compatibles locales* $(u_o, \Phi_o) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+4, \Omega)$ *il existe une solution approchée globale* $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1)$ *telle que* $(u_{a|t=0}, \Phi_{a|t=0}) = (u_o, \Phi_o)$ *sur* Ω_1.

Au chapitre 6, nous montrerons également qu'il est possible de construire des solutions approchées globales qui prolongent des solutions approchées locales données.

Proposition 3.1.4. — *Soit* $\mathcal{F}^a(2s+4,]T_o, T_1[\times \Omega)$ *une famille de solutions approchées sur* $]T_o, T_1[\times \Omega$. *Il existe* $T_2 > 0$, *une boule ouverte* $\Omega_1 \subset \Omega$ *et une famille de solutions approchées globales* $\mathcal{F}^a(2s+1,]-T_2, T_2[\times \mathbb{R}^n)$ *tels que pour tout* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ *et pour toute solution approchée locale* $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+4,]T_o, T_1[\times \Omega_1)$ *il existe une solution approchée globale* $(\widetilde{u}_a, \widetilde{\Phi}_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1,]-T_2, T_2[\times \mathbb{R}^n)$ *vérifiant*

$$u_a = \widetilde{u}_a \quad et \quad \Phi_a = \widetilde{\Phi}_a \qquad sur \;\;]-T_2, T_2[\times \Omega_1.$$

Dans la démonstration du théorème du théorème 2.7.1, nous utiliserons le fait que toute solution locale de classe C^{2k} (*cf.* définition 2.3.1) définie dans le passé, c'est-à-dire sur un ouvert de la forme $]T_o, 0[\times \Omega$, se prolonge en une solution approchée locale. La proposition suivante sera établie au chapitre 6.

Proposition 3.1.5. — *Soit* $\mathcal{F}^-$ *une famille de solutions de classe* C^{2k} *sur* $]T_o, 0[\times \Omega$, *pour le problème* (S_R) *au sens de la définition* 2.3.1. *Il existe* $T_1 > 0$, *une boule ouverts* $\Omega_1 \subset \Omega$ *et une famille de solutions approchées globales* $\mathcal{F}^a(2k-2,]-T_o, T_1[\times \mathbb{R}^n)$ *tels que pour tout* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ *et tout* $(u_1, \Phi_1) \in \mathcal{F}^-$, *il existe une solution approchée locale* $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2k-2,]T_o, T_1[\times \Omega_1)$ *telle que*

$$u_a = u_1 \quad et \quad \Phi_a = \Phi_1 \qquad sur \;\;]T_o, 0[\times \Omega_1.$$

3.2. Les équations pour le problème non-linéaire

Soient T_o et T_1 tels que $T_o < 0 < T_1$. Pour tout $T \in [0, T_1]$, nous notons désormais

$$\Omega_T =]T_o, T[\times \mathbb{R}^n, \qquad \omega_T =]T_o, T[\times \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.2.1}$$

Au chapitre 5 nous construirons des opérateurs de relèvement de trace, dépendant du paramètres $T \geq 0$, notés $\mathcal{R}_T$ et qui vérifient les propriétés suivantes.

Proposition 3.2.1. — *Pour $T \geq 0$ il existe des opérateurs linéaires de relèvement de trace $\mathcal{R}_T$ qui opèrent de $H^{2s-1}(\omega_T)$ dans $W^{2s}(\Omega_T)$ et tels que pour tout $u \in H^{2s-1}(\omega_T)$, on a $\Gamma\mathcal{R}_T(u) = u$. En outre, si $0 \leq T \leq T'$, on a pour tout $u \in H^{2s-1}(\omega_{T'})$,*

$$\mathcal{R}_T(u) = \mathcal{R}_{T'}(u) \quad \textit{sur } \Omega_T \qquad \text{(3.2.2)}$$
$$\mathcal{R}_{T'}(u) = 0 \quad \textit{sur } \Omega_T \quad \textit{si } u = 0 \textit{ sur } \omega_T$$

La propriété (3.2.2), montre que $\mathcal{R}_T$ est essentiellement indépendant de T. Pour $t \leq T$, $\mathcal{R}_T u(t,.)$ ne dépend que de la restriction de u à ω_t. Il n'est cependant pas local, et dépend de T par son domaine de définition $H^s(\omega_T)$.

On se donne une famille de solutions approchées globales $\mathcal{F}^a(2s+1, \Omega_{T_1})$ définies sur Ω_{T_1}. Pour $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1, \Omega_{T_1})$, on note f_a la fonction définie en (3.1.8) et on désigne par f la fonction égale à f_a pour $t < 0$ et nulle pour $t > 0$. D'après (3.1.8), f reste dans un borné fixé de l'espace $p\text{–}H^{2s}(\Omega_{T_1})$.

On considère alors le problème :

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j u + \mathcal{M}(u, \partial_y \Phi)\frac{\partial_n u}{\partial_n \Phi} = f \qquad \text{sur } \Omega_T, \qquad \text{(3.2.3)}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \partial_j \phi[f_j(u)] - [f_n(u)] = 0 \qquad \text{sur } x_n = 0, \qquad \text{(3.2.4)}$$

$$[\Phi] = 0 \qquad \text{sur } x_n = 0, \qquad \text{(3.2.5)}$$

$$\partial_t \Phi^+ = \lambda(u^+, u^+ - p^+(u^+, \partial_y' \Phi^+, A), \partial_y' \Phi^+) \qquad \text{sur } \Omega_T^+, \qquad \text{(3.2.6)}$$

$$\partial_t \Phi^- = \lambda(u^- + p^-(u^-, \partial_y' \Phi^-, A), u^-, \partial_y' \Phi^-) \qquad \text{sur } \Omega_T^-, \qquad \text{(3.2.7)}$$

où A désigne la fonction définie sur Ω_T par

$$A = W_a + \mathcal{R}_T(a - w_a) \qquad \text{(3.2.8)}$$

et a la fonction définie sur ω_T par

$$a = \ln\Big(-\frac{[u_1]}{\varepsilon}\Big). \qquad \text{(3.2.9)}$$

Rappelons que les fonctions $p^\pm(u, \theta, A) = -\varepsilon e^A U^\pm(u, \theta, -\varepsilon e^A)$ sont définies en (2.3.13). On remarque que la fonction A vérifie bien $\Gamma A = a$. On demande en outre à u et Φ de vérifier les conditions dans le passé ($t < 0$) :

$$u^+ = u_a^+ \ \text{ sur } \Omega_0^+, \quad u^- = u_a^- \ \text{ sur } \Omega_0^-, \quad \Phi = \Phi_a \ \text{ sur } \Omega_0. \qquad \text{(3.2.10)}$$

En notant ϕ la trace de Φ sur $\{x_n = 0\}$, compte tenu de (3.1.10) (2.3.12) (2.3.13) on a

(3.2.11) $$\Gamma p^+ = p^+_{|x_n=0} = [u_1]\, U^+(\Gamma u^+, \partial'_y \phi, [u_1]) = [u],$$

(1) $$\Gamma p^- = p^-_{|x_n=0} = [u_1]\, U^-(\Gamma u^-, \partial'_y \phi, [u_1]) = [u].$$

(2) $$tag * (3.2.12)$$

Il en résulte que les équations (3.2.6) et (3.2.7) se traduisent sur le bord $\{x_n = 0\}$ par la condition aux limites :

(3.2.13) $$\partial_t \phi = \lambda(u^+, u^-, \partial'_y \phi)$$

Compte tenu de (3.1.5) et (3.2.8) on a de plus $a = w_a$ et $A = W_a$ pour $t < 0$.

Remarque 3.2.2. — Soit $(u_o, \Phi_o) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3)$ des données initiales compatibles globales. D'après le théorème 3.1.2, il existe une solution approchée globale $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1)$ vérifiant :

$$u_{a|t=0} = u_o, \qquad \Phi_{a|t=0} = \Phi_o$$

Il est alors clair que si (u, Φ) est solution de (3.2.3)... (3.2.10), alors (u, Φ) est solution de (2.3.2) (2.3.3) avec les données de Cauchy (u_o, Φ_o).

3.3. Les estimations a priori pour le problème non-linéaire

Un des objectifs majeurs de ce travail est d'obtenir des estimations a priori uniformes en ε pour les solutions du problème (3.2.3)... (3.2.10). Le théorème 2.6.1 en résultera par l'utilisation d'un principe de prolongement. Plusieurs étapes seront nécessaires pour obtenir ces estimations. La partie la plus délicate, que nous traiterons en premier, consiste à obtenir des inégalités d'énergie pour la régularité conormale. Le point de départ pour ces estimations, est l'inégalité L^2 de [Mé2]. Malheureusement, comme on l'a indiqué au paragraphe 1.2.7, les estimations des dérivées conormales ne s'obtiennent pas par un simple argument de commutation, essentiellement parce que l'équation (3.2.3) est complètement non linéaire en (u, Φ) et que les commutateurs font apparaître des termes non contrôlables en norme W^s. Comme dans [Mé1], nous contournerons cette difficulté en paralinéarisant l'équation, manœuvre qui met à jour les régularités nécessaires et fait apparaître la « bonne inconnue » comme dans [Al].

La seconde étape consiste à estimer les dérivées normales de u à partir des dérivées conormales en utilisant seulement l'équation (3.2.3) et en oubliant les conditions aux limites. Pour un problème non-caractéristique cette opération est élémentaire. Si u a k dérivées tangentes dans L^2 alors u a aussi k dérivées normales dans L^2. Par contre, pour un problème caractéristique ceci n'est plus vrai en général, et les espaces $p{-}H^s$ ne sont pas adaptés en général aux problèmes caractéristiques, voir [Ma-Os] pour un contre-exemple. La règle en vigueur est une règle de « 2 pour 1 » : il faut deux dérivées tangentes pour estimer une dérivée normale. En particulier, (voir par exemple [Ma-Os], [Ra-Re], dans le cas linéaire et [Gu], [Al], [Mé-Ra] [Me5] dans le cas non linéaire). Pour avoir des estimations uniformes en ε, nous sommes donc amenés à nous placer dans un cadre qui englobe le problème limite caractéristique pour $\varepsilon = 0$, et donc à travailler dans des espaces où la régularité normale est moitié de la régularité tangente. Ceci motive l'introduction des espaces W^{2s}.

En troisième lieu nous devrons estimer le saut de u. Pour cela nous montrerons que $[u]$ est solution d'une équation de transport, analogue à l'équation habituelle pour les singularités faibles. On notera l'importance primordiale de ce point qui justifie la pertinence de la notion de choc faible : si $[u]$ est d'ordre ε à un instant 0, il reste du même ordre de grandeur sur un intervalle de temps fixe, indépendant de ε.

La quatrième étape consistera à estimer la fonction Φ à partir des équations (3.2.6) (3.2.7).

On munit les espaces $H^{0,k}(\Omega_T)$ et $W^{2s}(\Omega_T)$ définis au paragraphe 2.6, des normes à poids

$$\|u\|^t_{k,\gamma,T} = \sum_{\mu+|\alpha|=k} (1+\gamma)^\mu \|e^{-\gamma t}\delta^\alpha u\|_{L^2(\Omega_T)} \qquad \text{si } u \in H^{0,k}(\Omega_T), \tag{3.3.1}$$

$$\|u\|_{2s,\gamma,T} = \sum_{\mu+|\alpha|+2k=2s} (1+\gamma)^\mu \|e^{-\gamma t}\delta^\alpha \partial_n^k u\|_{L^2(\Omega_T)} \qquad \text{si } u \in W^{2s}(\Omega_T). \tag{3.3.2}$$

De même, on munit l'espace de Sobolev $H^k(\omega_T)$ des normes

$$|u|_{k,\gamma,T} = \sum_{\mu+|\alpha|=k} (1+\gamma)^\mu |e^{-\gamma t}\partial_y^\alpha u|_{L^2(\omega_T)}. \tag{3.3.3}$$

Lorsque $\gamma = 0$, on omettra ce paramètre dans les notations ci-dessus.

Nous utiliserons constamment l'abus suivant : lorsque u et Φ sont de la forme $u = u' + \underline{u}_\varepsilon$, $\Phi = \Phi' + \underline{\Phi}_\varepsilon$ où $(\underline{u}_\varepsilon, \underline{\Phi}_\varepsilon)$ est le choc plan défini en (2.4.1), nous noterons $\|u\|^t_{k,\gamma,T}$, $\|u\|_{2s,\gamma,T}$, $\|\Phi\|^t_{k,\gamma,T}$, etc. les normes correspondantes de u', Φ'. On écrira alors $(u,\Phi) \in W^{2s}(\Omega_T)$ au lieu de $(u',\Phi') \in W^{2s}(\Omega_T)$. On procédera de même pour les traces de u et Φ sur ω_T.

Nous utiliserons en outre les espaces de Sobolev $W^{k,\infty}(\Omega_T)$ et $W^{k,\infty}(\omega_T)$ qui seront munis des normes usuelles :

$$\|u\|^*_{k,T} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega_T)}, \tag{3.3.4}$$

$$|u|^*_{k,T} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\omega_T)}. \tag{3.3.5}$$

Définition 3.3.1. — Étant donnés une famille de solutions approchées $\mathcal{F}^a(2s+1)$ et des compacts $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{O}$, pour $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$ et pour $T > 0$ on dit que le couple (u,Φ) appartient à $\mathcal{F}_\varepsilon(s,T)$ lorsque les conditions suivantes sont satisfaites.

(3.3.6) Il existe une solution approchée globale $(u_a,\Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1)$ telle que $u = u_a$ et $\Phi = \Phi_a$ pour $t < 0$.

(3.3.7) u et $\partial_y'\Phi$ prennent leurs valeurs respectivement dans $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$.

(3.3.8) $(u, \Phi) \in W^{2s}(\Omega_T)$, $\Gamma u \in H^{2s}(\omega_T)$, $\Gamma\Phi \in H^{2s+1}(\omega_T)$ et (u, Φ) est solution du problème non-linéaire (3.2.3)...(3.2.10).

On introduit d'autre part l'expression :

$$M^\infty(u, \Phi, T) = \|u - \underline{u}_\varepsilon\|^*_{4,T} + \|\Phi - \underline{\Phi}_\varepsilon\|^*_{4,T} + \|\frac{1}{\partial_n \Phi} - 1\|^*_{0,T} + |a|^*_{4,T} \tag{3.3.9}$$

Cette quantité dépend de ε, mais on omet d'indiquer cette dépendance dans la notation. On notera que la définition 3.1.1 des familles de solutions approchées implique qu'il existe $M_o > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et pour tout $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon$ on a

$$M^\infty(u_a, \Phi_a, 0) \leq M_o. \tag{3.3.10}$$

L'estimation de la régularité conormale de u s'exprime à l'aide de la quantité suivante qui étend à $s > 0$ la quantité estimée pour $s = 0$ dans le théorème principal de [Mé2] :

$$\begin{aligned} N_1(u, \Phi, \gamma, T) = \gamma\|u\|^t_{2s,\gamma,T} &+ \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma u|_{2s,\gamma,T} \\ &+ \gamma^{1/2}\varepsilon\,|\Gamma\Phi|_{2s+1,\gamma,T} + \gamma^{3/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma\Phi|_{2s,\gamma,T} \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Théorème 3.3.2. — *Il existe des fonctions $\varepsilon_o(\cdot)$, $\gamma_o(\cdot)$, $C(\cdot)$ telles que pour tout $T \geq 0$, tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o(M)[$, tout couple $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ vérifiant $M^\infty(u, \Phi, T) \leq M$, alors on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o(M)$*

$$\begin{aligned} N_1(u, \Phi, \gamma, T) \leq C(M) \Big\{ & N_1(u,\Phi, \gamma, 0) + \|f\|^t_{2s,\gamma,T} + \|u\|_{2s,\gamma,T} \\ &+ \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Ce théorème sera démontré au chapitre 8 en utilisant, comme mentionné plus haut, une paralinéarisation de l'équation qui sera menée au chapitre 7. Au chapitre 9, nous estimerons les dérivées normales de u, puis le saut de u et enfin la fonction Φ. Pour énoncer le résultat, nous introduisons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} N_2(u, \Phi, \gamma, T) = \gamma\|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} &+ \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma u|_{2s,\gamma,T} \\ &+ \gamma^{1/2}\varepsilon\,|\Gamma\Phi|_{2s+1,\gamma,T} + \gamma^{3/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma\Phi|_{2s,\gamma,T} \\ &+ \gamma|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} + \gamma\varepsilon\,\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}, \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

$$N_3(W_a, \gamma) = \|W_a\|_{2s,\gamma,T_1} + \|\partial_n W_a\|_{2s-1,\gamma,T_1} + |w_a|_{2s,\gamma,T_1}. \tag{3.3.14}$$

Théorème 3.3.3. — *Il existe des fonctions $\varepsilon_o(\cdot)$, $\gamma_o(\cdot)$, $C(\cdot)$ telles que pour tout $T \geq 0$, tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o(M)[$, tout couple $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ vérifiant $M^\infty(u, \Phi, T) \leq M$, alors on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o(M)$*

$$\begin{aligned} N_2(u, \Phi, \gamma, T) \leq C(M) \Big\{ & N_2(u, \Phi, \gamma, 0) + \varepsilon\, N_3(W_a, \gamma) \\ &+ \|f\|_{2s,\gamma,T} + |[f]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

3.4. Théorème de prolongement à ε fixé

Compte tenu des estimations a priori uniformes, pour construire des solutions, il suffit de montrer un théorème d'existence à ε fixé, sur un intervalle de temps pouvant dépendre de ε. En effet, comme on le verra au § 3.5, les estimations uniformes permettent d'itérer l'application du théorème d'existence et de pousser la solution sur un intervalle indépendant de ε.

On désigne par s un entier tel que $2s > n/2 + 40$. Nous énonçons maintenant le théorème de prolongement. Rappelons que M_o est défini en (3.3.10). Par ailleurs, on se donne un réel $H > 0$.

Théorème 3.4.1. — *Soit $(u_1, \Phi_1) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T_2)$ une solution exacte du problème non-linéaire (3.2.3)...(3.2.10) avec $T_2 \in [0, T_1]$ telle que $M^\infty(u_1, \phi_1, T_2) \leq M_o + H/2$. Alors il existe un temps $T_3 \in]T_2, T_1[$ (qui dépend de ε) et une solution exacte (u, Φ) appartenant à $\mathcal{F}_\varepsilon(s, T_3)$ et prolongeant (u_1, Φ_1), c'est à dire :*

$$u = u_1 \qquad \Phi = \Phi_1 \qquad \textit{sur } \Omega_{T_1} \tag{3.4.1}$$

De plus (u, Φ) vérifie la condition $M^\infty(u, \phi, T_3) \leq M_o + H$

Comme indiqué au § 1.2.11, les solutions des équations linéarisées en (u, Φ) sont moins régulières que (u, Φ). On ne peut donc pas construire la solution par un schéma itératif de Picard. Comme S. Alinhac dans l'étude des ondes de raréfaction, nous construisons les solutions à l'aide d'un schéma itératif de type Nash-Moser. Nous suivrons la présentation de cette technique qui est faite dans [Al], [Al-Gé], [Höl].

La preuve de ce théorème comporte deux étapes. Au chapitre 10, on montre que si $(u_1, \Phi_1) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T_2)$,il existe une solution exacte $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s - k, T_3)$, définie sur Ω_{T_3} avec $T_3 > T_2$ et qui prolonge (u_1, Φ_1). Ensuite, au chapitre 11, on établit un théorème de propagation de la régularité et on montre qu'en fait la solution (u, Φ) est dans $\mathcal{F}_\varepsilon(s, T_3)$.

3.5. Temps d'existence a priori et preuve du théorème 2.6.2

L'estimation a priori principale (3.3.15) permet de définir un temps d'existence a priori pour la solution du problème non-linéaire, indépendant de ε. On note $N(u, \Phi, T)$ l'expression

$$\begin{aligned} N(u, \Phi, T) = {} & \|u\|_{2s,T} + \|\Phi\|_{2s,T} + \varepsilon^{1/2} |\Gamma u|_{2s,T} + \varepsilon\, |\Gamma \Phi|_{2s+1,T} \\ & + \varepsilon^{1/2} |\Gamma \Phi|_{2s,T} + |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,T} + \varepsilon\, \|\partial_n \Phi\|^t_{2s-1,T} \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Théorème 3.5.1. — *Il existe une constante C_1 et un temps $T_1^* \in]0, T_1]$ tels que pour tout $T \in [0, T_1^*]$, tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et tout couple $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ vérifiant*

$M^\infty(u,\Phi,T) \le M_o + H$, *on a les estimations suivantes :*

$$N(u,\Phi,T) \le C_1, \tag{3.5.2}$$

$$M^\infty(u,\Phi,T) \le M_o + H/2. \tag{3.5.3}$$

Démonstration. — On applique le théorème 3.3.3 avec

$$M = M_o + H \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \gamma_o(M_o + H).$$

Par construction, $f = 0$ si $t > 0$ et $f = f_a$ si $t \le 0$. L'inégalité (3.3.15) implique que

$$\begin{aligned} N_2(u,\Phi,\gamma_1,T) \le C_2\Big\{ & N_2(u_a,\Phi_a,\gamma_1,0) + \varepsilon\, N_3(W_a,\gamma_1) \\ & + \|f_a\|_{2s,\gamma_1,0} + |[f_a]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma_1,0}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Compte tenu des propriétés des solutions approchées décrites au paragraphe 3.1, existe une constante M_1 telle que :

$$N_2(u,\Phi,\gamma_1,T) \le M_1. \tag{3.5.5}$$

L'estimation (3.5.2) en résulte. Pour la suite, on note aussi qu'il existe une constante C_3 telle que

$$|a|_{2s-3,T} \le C_3\, |[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,T}. \tag{3.5.6}$$

Pour démontrer (3.5.3) on utilise le lemme suivant, démontré au chapitre 4.

Lemme 3.5.2. — *Soit k un entier positif.*

i) Pour tout entier $\sigma > n/2 + k + 1$, il existe une constante C telle que pour tout $T \ge 0$ et pour tout $u \in H^\sigma(\omega_T)$ on a

$$|u|^*_{k,T} \le |u|^*_{k,0} + C\,T\,|u|_{\sigma,T}. \tag{3.5.7}$$

ii) Pour tout entier s tel que $2s > n/2 + 2k + 2$ il existe une constante C telle que pour tout $T \ge 0$ et pour tout $u \in W^{2s}(\Omega_T)$ on a :

$$\|u\|^*_{k,T} \le \|u\|^*_{k,0} + C\,T\,\|u\|_{2s,T}. \tag{3.5.8}$$

D'après ce lemme, il existe une constante C_4 telle que

$$\|\partial_n\Phi - \partial_n\Phi_a\|^*_{0,T} \le C_4 T. \tag{3.5.9}$$

D'après (3.1.3) on a $\partial_n\Phi_a > \delta_1$ et en posant $T_1' = \inf\{T_1, \delta_1/2C_4\}$ on déduit de (3.5.7) l'estimation

$$\Big\|\frac{1}{\partial_n\Phi} - \frac{1}{\partial_n\Phi_a}\Big\|^*_{0,T} \le \frac{2C_4T}{\delta_1^2} \qquad \text{si } \ 0 \le T \le T_1'. \tag{3.5.10}$$

Il en résulte qu'il existe une constante C_5 telle que

$$\Big\|\frac{1}{\partial_n\Phi} - 1\Big\|^*_{0,T} \le \Big\|\frac{1}{\partial_n\Phi_a} - 1\Big\|^*_{0,0} + C_5 T \qquad \text{si } \ 0 \le T \le T_1'. \tag{3.5.11}$$

En utilisant (3.5.2) (3.5.6) (3.5.11) et le lemme 3.5.2, on montre qu'il existe une constante C_6 telle que

$$M^\infty(u, \Phi, T) \leq M_o + C_6 T \qquad \text{si } \ 0 \leq T \leq T_1'. \tag{3.5.12}$$

On définit alors le temps d'existence a priori T_1^* par :

$$T_1^* = \inf\{T_1', H/(2C_6)\} \tag{3.5.13}$$

et on a bien $M^\infty(u, \Phi, T) \leq M_o + H/2$ ce qui prouve (3.5.3) et le théorème 3.5.1. □

On déduit des théorèmes 3.4.1 et 3.5.1 l'existence des solutions sur un intervalle de temps uniforme.

Théorème 3.5.3. — *Soit T_1^* le temps d'existence a priori défini par* (3.5.13). *Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et toute solution approchée $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}_\varepsilon^a(2s+1)$, il existe une solution exacte $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T_1^*)$ telle que $u = u_a$ et $\Phi = \Phi_a$ pour $t < 0$.*

Démonstration. — On se donne une solution approchée $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}_\varepsilon^a(2s+1)$ et on désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble des $T \in [0, T_1^*]$ tels qu'il existe une solution (u, Φ) appartenant à $\mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ et vérifiant :

$$\begin{aligned} &u = u_a, \quad \Phi = \Phi_a, \quad \text{pour } \ t \leq 0, \\ &M^\infty(u, \Phi, T) \leq M_o + H. \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

On remarque que $\mathcal{I}$ est non vide puisque $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, 0)$. On note $T^* = \operatorname{Sup} \mathcal{I}$. Le théorème 3.5.1 entraîne que $T^* \in \mathcal{I}$. Supposons que l'on ait $T^* < T_1^*$. Dans ce cas le théorème de prolongement 3.4.1 s'applique. Il existe $T_2 > T^*$, et une solution $(u_2, \Phi_2) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T_2)$ qui prolonge (u, Φ) et vérifie (3.5.14), ce qui contredit la définition de T^*. On a donc $T^* = T_1^*$ et le théorème 3.5.3 en résulte. □

Démonstration du théorème 2.6.2. — Considérons un couple de données initiales $(u_o, \Phi_o) \in \mathcal{F}_\varepsilon^o(2s+3)$. D'après le théorème 3.2.1 il existe une solution approchée $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}_\varepsilon^a(2s+1)$ telle que $(u_{a|t=0}, \Phi_{a|t=0}) = (u_o, \Phi_o)$. Il résulte du théorème 3.5.3 et de la remarque 3.2.2 que la solution $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T_1^*)$ est aussi solution du problème de Cauchy (2.3.2) (2.3.3) ce qui prouve le théorème 2.6.2. □

3.6. Prolongement d'un choc faible. Preuve du théorème 2.7.1

Soit Ω_o un ouvert de la forme $\Omega_o =]T_o, 0[\times \omega_o \times J_o$ (*cf.* définition 2.2.1). Soit (u_o, Φ_o) un élément d'une classe de chocs faibles de classe C^{2k} définis sur Ω_o. Par changement de variables, la proposition 2.3.3 fournit une solution locale (u_1, Φ_1) dans une famille de solutions de classe C^{2k} pour le système (S_R), au sens de la définition 2.3.1. Ces solutions locales sont définies sur un ouvert $]T_o', 0[\times \Omega_1$ avec $T_o \leq T_o' < 0$ et $\Gamma\Omega_1 = \omega_1 \subset \omega_o$.

Puisque Ω_1 est un ensemble borné, on a $C_b^{2k}(]T_o', 0[\times \Omega_1^\pm) \subset H^{2k}(]T_o', 0[\times \Omega_1^\pm)$ et d'après la proposition 3.1.5, il existe $T_2 > 0$, $\Omega_2 \subset \Omega_1$, une famille de solutions approchées $\mathcal{F}^a(2k-2,]T'_o, T_2[\times \Omega_2)$ et un élément (u_{a2}, Φ_{a2}) dans cette famille tel que $(u_{a2}, \Phi_{a2}) = (u_1, \Phi_1)$ sur $]T'_o, 0[\times \Omega_2$.

En posant $s = k-3$, la proposition 3.1.4 fournit une famille de solutions approchées globales $\mathcal{F}^a(2s+1,]-T_3, T_3[\times \mathbb{R}^n)$ et un élément (u_{a3}, Φ_{a3}) de cette famille qui coïncide avec (u_{a2}, Φ_{a2}) sur un ouvert $]-T_3, T_3[\times \Omega_3$ avec $\Omega_3 \subset \Omega_2$.

Le théorème 3.5.3 implique qu'il existe $T > 0$, un ensemble $\mathcal{F}(s,T)$ de solutions et $(u,\Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s,T)$ tel que $(u,\Phi) = (u_{a3}, \Phi_{a3}) = (u_1, \Phi_1)$ sur $]-T_3, 0[\times \Omega_3$. Alors, la restriction $(\widetilde{u}, \widetilde{\Phi})$ de (u,Φ) à $]-T_3, T[\times \Omega_3$ est une solution locale exacte du système (S_R) qui prolonge (u_1, Φ_1).

Étant donné que $(u,\Phi) \in W^{2s}(]-T_3, T[\times \mathbb{R}^n) \subset H^s(]-T_3, T[\times \mathbb{R}^n)$ et que $H^s \subset C_b^{k'}$ pour $k' < s - (n+1)/2$, on voit que $(\widetilde{u}, \widetilde{\Phi})$ est une solution locale de classe $C^{k'}$ avec $k' < k - 3 - (n+1)/2$. En revenant par changement de variable (*cf.* remarque 2.3.2) on a donc construit une famille de chocs faibles qui prolongent ceux de la famille donnée dans le passé, démontrant ainsi le théorème 2.7.1.

Remarque 3.6.1. — Il est possible de déterminer une solution exacte pour le système (S_R) et prolongeant (u_1, Φ_1) en procédant de manière un peu différente. Puisque (u_1, Φ_1) est solution locale (*cf.* définition 2.3.1), il existe une fonction $\rho_1 = -\varepsilon\, e^{A_1}$ définie sur $]T_o, 0[\times \Omega_1$, telle que $\Gamma A_1 = a_1 = \ln(-[u_{11}]/\varepsilon)$, où $[u_{11}]$ désigne la première composante du saut de u_1.

En prolongeant A_1 et en prenant les traces $(u_{10}, \Phi_{10}) = (u_{1|t=0}, \Phi_{1|t=0})$, on obtient des données initiales compatibles locales associées à cette fonction ρ_1. En appliquant le théorème 3.1.2, on construit alors une solution approchée globale que nous notons (u_{a4}, Φ_{a4}) et qui peut être différente de celle déjà construite en appliquant les propositions 3.1.5-3.1.4 que nous avons notée (u_{a3}, Φ_{a3}).

Cependant, si on prend la même fonction ρ_1 pour construire les deux solutions approchées, le théorème 3.5.3 donne deux solutions (u_4, Φ_4) et (u_3, Φ_3) qui sont identiques localement, grâce à la vitesse finie de propagation, c'est-à-dire sur un ouvert de la forme $]0, T[\times \Omega_3$ où Ω_3 est une boule ouverte centrée à l'origine.

CHAPITRE 4

ESTIMATIONS PRÉLIMINAIRES

On regroupe dans ce chapitre quelques inégalités utiles. Ce sont des variantes des inégalités de Gagliardo-Nirenberg et de Sobolev associées aux espaces W^{2s} et $H^{0,s}$ (voir par exemple [Ma3] ou [Mél]).

4.1. Inégalités non linéaires

Rappelons que $T_o < 0$ est fixé et que Ω_T est défini en (3.2.1). En désignant par L^p_γ l'espace L^p associé à la mesure $e^{-2\gamma t}\,dx$, nous commençons par rappeler les estimations de type Gagliardo-Nirenberg valables dans les espaces $H^{0,s}(\Omega_T)$ et $W^{2s}(\Omega_T)$.

Lemme 4.1.1. — *Soit s un entier positif.*

i) Il existe une constante C telle que pour tout $T \geq 0$, tout $\gamma \geq 0$, tout $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap H^{0,s}(\Omega_T)$ et tout multi-indice (μ, α) vérifiant $(\mu + |\alpha|)/s \leq 2/p \leq 1$, on a

$$\gamma^\mu \, ||\delta^\alpha u||_{L^p_\gamma(\Omega_T)} \leq C \, ||u||^{1-2/p}_{L^\infty(\Omega_T)} \left[||u||^t_{s,\gamma,T} \right]^{2/p}. \tag{4.1.1}$$

ii) Il existe une constante C telle que pour tout $T \geq 0$, tout $\gamma \geq 0$, tout tout $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap W^{2s}(\Omega_T)$ et tout multi-indice (μ, α, k) vérifiant $(\mu + |\alpha| + 2k)/2s \leq 2/p \leq 1$, on a

$$\gamma^\mu \, ||\delta^\alpha \partial^k_n u||_{L^p_\gamma(\Omega_T)} \leq C \, ||u||^{1-2/p}_{L^\infty(\Omega_T)} ||u||^{2/p}_{2s,\gamma,T}. \tag{4.1.2}$$

Démonstration. — Par prolongement (*cf.* [Mél]) on se ramène à démontrer ces inégalités pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{n+1}$. En intégrant $\delta_j\{e^{-2\gamma t} u \cdot \delta_j u \cdot |\delta_j u|^{p-2}\}$ on obtient l'estimation :

$$||\delta_j u||^2_{L^p_\gamma} \leq C \, ||u||_{L^q_\gamma} \Big\{ \sum_{|\alpha| \leq 2} \gamma^{2-\alpha} ||\delta^\alpha u||_{L^r_\gamma} \Big\} \quad \text{avec} \quad 1/q + 1/r = 2/p. \tag{4.1.3}$$

On montre de même en introduisant les normes :

$$||u||_{(k,\gamma,r)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \gamma^{k-|\alpha|} ||\delta^\alpha u||_{L^r_\gamma} \tag{4.1.4}$$

l'inégalité :

$$(4.1.5) \qquad \gamma^{\mu}\,\|\delta^{\alpha}u\|_{L^p_\gamma} \leq C\,\|u\|_{L^\infty}^{1-2/p}\Big[\|u\|^t_{k,\gamma}\Big]^{2/p} \quad \text{pour} \quad (\mu+|\alpha|)/k = 2/p \leq 1.$$

Par ailleurs l'estimation (4.1.1) est évidente pour $p = 2$. On l'obtient alors grâce à l'inégalité de Hölder dans le cas général $(\mu + |\alpha|)/s \leq 2/p \leq 1$.

Pour établir (4.1.2), on démontre d'abord que

$$(4.1.6) \qquad \|\partial_n v\|_{L^p_\gamma} \leq C\,\|v\|_{L^q_\gamma}\|\partial_n^2 u\|_{L^r_\gamma} \qquad \text{pour} \quad 1/q + 1/r = 2/p.$$

La démonstration est identique à celle de (4.1.3). On en déduit, en procédant comme pour établir (4.1.5) :

$$(4.1.7) \qquad \|\partial_n^k v\|_{L^p_\gamma} \leq C\,\|v\|_{L^\infty}^{1-2/p}\|\partial_n^s v\|_{L^2_\gamma}^{2/p} \quad \text{pour} \quad 2/p = k/s.$$

D'autre part, à partir de (4.1.3), on obtient l'estimation :

$$(4.1.8) \qquad \gamma^{\mu}\,\|\delta^{\alpha}u\|_{L^p_\gamma} \leq C\,\|u\|_{L^q_\gamma}^{1-\kappa}\Big[\|u\|^t_{\sigma,\gamma}\Big]^{\kappa},$$

où $\sigma > 0$ est un entier donné, $\kappa = (\mu + |\alpha|)/\sigma$, $0 \leq \mu + |\alpha| \leq \sigma$, $q = 2(\sigma + k_o)/k_o$ avec k_o entier > 0 et p est défini par $2/p = 2(1-\kappa)/q + \kappa$. On applique ensuite (4.1.7) à $\partial_n^k u$ avec q défini par $2/q = k/s$. En posant $v = \partial_n^k u$, et en appliquant (4.1.8), on obtient :

$$(4.1.9) \qquad \gamma^{\mu}\,\|\delta^{\alpha}\partial_n^k u\|_{L^p_\gamma} \leq C\,\|\partial_n^k u\|_{L^q_\gamma}^{1-\kappa}\Big[\|\partial_n^k u\|^t_{\sigma,\gamma}\Big]^{\kappa}.$$

On estime ensuite $\|\partial_n^k u\|_{L^q_\gamma}$ par (4.1.7) et on obtient l'inégalité (4.1.2) dans le cas limite $2/p = (\mu + |\alpha| + 2k)/2s$.

Le cas $p = 2$ est trivial et le cas général $(\mu + |\alpha| + 2k)/2s \leq 2/p \leq 1$, s'obtient grâce à l'inégalité de Hölder. □

On déduit du lemme 4.1.1 les trois lemmes suivants.

Lemme 4.1.2. — *Soit F une fonction C^∞ de ses arguments telle que $F(0) = 0$. Pour tout entier $s > 0$, il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que pour tout $T \geq 0$ et pour tout $\gamma \geq 0$ on a :*

i) pour tout $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap H^{0,s}(\Omega_T)$ vérifiant $\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq M$,

$$(4.1.10) \qquad \|F(u)\|^t_{s,\gamma,T} \leq C(M)\,\|u\|^t_{s,\gamma,T}.$$

ii) pour tout $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap W^{2s}(\Omega_T)$ vérifiant $\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq M$,

$$(4.1.11) \qquad \|F(u)\|_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,\|u\|_{2s,\gamma,T}.$$

Lemme 4.1.3. — *Pour tout s, il existe une fonction $C(\cdot)$ et une constante C_1 telles que :*

i) pour tout $u_1, u_2, \ldots, u_p \in L^\infty(\Omega_T) \cap H^{0,s}(\Omega_T)$, le produit $u_1 \cdot u_2 \cdots u_p$ est dans $L^\infty(\Omega_T) \cap H^{0,s}(\Omega_T)$. De plus, pour tout $(\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ tel que $\mu + \sum_{i=1}^p |\alpha_i| = s$, on a

$$\gamma^\mu \|\delta^{\alpha_1} u \times \delta^{\alpha_2} u \times \cdots \times \delta^{\alpha_p} u\|_{o,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ \sum_{i=1}^p \|u_i\|^t_{s,\gamma,T} \Big\}, \tag{4.1.12}$$

et, en posant $|\alpha| = \sum_{i=1}^p |\alpha_i|$,

$$\|\delta^{\alpha_1} u \times \delta^{\alpha_2} u \times \cdots \times \delta^{\alpha_p} u\|^t_{s-|\alpha|,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ \sum_{i=1}^p \|u_i\|^t_{s,\gamma,T} \Big\}. \tag{4.1.13}$$

où M est tel que $\sum_{i=1}^p \|u_i\|^t_{s,\gamma,T} \leq M$

ii) Pour tout a et tout u dans $L^\infty(\Omega_T) \cap W^{2s}(\Omega_T)$ le produit $a.u$ est dans $L^\infty(\Omega_T) \cap W^{2s}(\Omega_T)$. De plus, pour $\mu + |\alpha| + |\beta| + 2(k+l) = 2s$, on a :

$$\gamma^\mu \|\delta^\alpha \partial_n^k a \times \delta^\beta \partial_n^l u\|_{o,\gamma,T} \leq C_1 \Big\{ \|a\|^*_{o,T} \|u\|_{2s,\gamma,T} + \|u\|^*_{o,T} \|a\|_{2s,\gamma,T} \Big\} \tag{4.1.14}$$

Lemme 4.1.4. — *Il existe une constante C telle que pour $a \in L^\infty(\Omega_T) \cap H^{o,2s}(\Omega_T)$, $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap W^{2s}(\Omega_T)$ et $\mu + |\alpha| + |\beta| + 2k = 2s$ on a*

$$\gamma^\mu \|\delta^\alpha a \times \delta^\beta \partial_n^k u\|_{o,\gamma,T} \leq C \Big\{ \|a\|^*_{o,T} \|u\|_{2s,\gamma,T} + \|u\|^*_{o,T} \|a\|^t_{2s,\gamma,T} \Big\}. \tag{4.1.14}$$

4.2. Estimations L^∞

On utilisera différentes variantes des injections de Sobolev.

Lemme 4.2.1. — *Soit $k \geq 0$ un entier. Il existe une constante C telle que pour tout $T \geq 0$ et tout $\gamma \geq 0$ on a les injections et les inégalités suivantes.*

i) Pour tout entier $\sigma > n/2 + k$ et pour tout $u \in H^\sigma(\omega_T)$ on a $u \in W^{k,\infty}(\omega_T)$ et

$$|u|^*_{k,T} \leq C\, e^{\gamma T} |u|_{\sigma,\gamma,T}. \tag{4.2.1}$$

ii) Pour tout s tel que $2s > n/2 + 2k + 1$ et pour tout $u \in W^{2s}(\Omega_T)$ on a $u \in W^{k,\infty}(\Omega_T)$

$$\|u\|^*_{k,T} \leq C\, e^{\gamma T} \|u\|_{2s,\gamma,T}. \tag{4.2.2}$$

Démonstration. — Il existe un opérateur de prolongement par réflexions, E_T, de $H^\sigma(\omega_T)$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$|E_T(u)|_\sigma \leq C |u|_{\sigma,T}, \tag{4.2.3}$$

$$|u|_{\sigma,T} \leq e^{\gamma T} |u|_{\sigma,\gamma,T}, \tag{4.2.4}$$

où C est une constante indépendante de T. D'autre part, si $\sigma > \frac{n}{2} + k$,

$$\|E_T(u)\|^*_k \leq C |E_T(u)|_\sigma. \tag{4.2.5}$$

L'inégalité (4.2.1) en résulte.

Pour établir (4.2.2), on considère (*cf.* [Mé1]) l'espace $E^{s,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ muni de la norme :

(4.2.6) $$\|v\|_{s,1} = \sum_{\substack{|\alpha|+2k\leq s \\ k\leq 1}} \|\partial_y^\alpha \partial_n^k v\|_{L^2}$$

Par transformation de Fourier, on obtient une norme équivalente à (4.2.6)

(4.2.7) $$\|v\|_{s,2}^2 = \int [(1+|\xi'|^2) + |\xi_n|^2](1+|\xi'|^2)^{s-2} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Pour $2s > n/2 + 2k + 1$, on en déduit l'inégalité :

(4.2.8) $$\|v\|_k^* \leq C \, \|v\|_{2s}.$$

Comme précédemment, on conclut en utilisant un opérateur de prolongement, E_T de $W^{2s}(\Omega_T)$ dans $W^{2s}(\mathbb{R}^{n+1})$ ainsi que l'inégalité :

(4.2.9) $$\|u\|_{2s,T} \leq e^{\gamma T} \|u\|_{2s,\gamma,T}.$$

□

On en déduit immédiatement le lemme suivant.

Lemme 4.2.2. — *Soit k un entier tel que $k \geq 0$.*

i) Pour tout entier $\sigma > n/2 + k + 1$, il existe une constante C telle que pour tout $T \geq 0$, tout $T_1 \in [0, T]$, tout $\gamma \geq 0$ et tout $u \in H^\sigma(\omega_T)$, on a

(4.2.10) $$|u|_{k,T}^* \leq |u|_{k,T_1}^* + C(T - T_1) \, e^{\gamma T} \, |u|_{\sigma,\gamma,T}.$$

ii) Pour tout entier s tel que $2s > n/2 + 2k + 2$, il existe une constante C telle que pour tout $T \geq 0$, tout $T_1 \in [0, T]$, tout $\gamma \geq 0$ et tout $u \in W^{2s}(\Omega_T)$, on a

(4.2.11) $$\|u\|_{k,T}^* \leq \|u\|_{k,T_1}^* + C(T - T_1) \, e^{\gamma T} \, \|u\|_{2s,\gamma,T}.$$

CHAPITRE 5

OPÉRATEURS DE TRACES ET DE RELÈVEMENT DE TRACES

Dans ce chapitre on introduit et on étudie les opérateurs de relèvement de traces qui sont utilisés pour définir les fonctions $p^{\pm}$ qui interviennent dans les équations de Φ. On montre qu'ils vérifient la propriété (3.2.2) de la proposition 3.2.1.

5.1. Un lemme de trace

On se donne $T_o < 0$ et pour $T \geq 0$, Ω_T est défini par (3.2.1). Pour u définie sur Ω_T on note $u^{\pm}$ la restriction de u à $\Omega_T^{\pm}$ et $\Gamma u^{\pm}$ la trace de $u^{\pm}$ sur ω_T (lorsqu'elle est définie). On convient de noter Γu le couple de traces $(\Gamma u^+, \Gamma u^-)$.

Lemme 5.1.1. — *Pour $u \in W^{2s}(\Omega_T)$ avec $s \geq 1$, les traces $\Gamma u^{\pm}$ sont bien définies dans $H^{2s-1}(\omega_T)$ et on a*

$$|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} \leq C \, \|u\|_{2s,\gamma,T} \tag{5.1.1}$$

où C est une constante indépendante de γ et de T.

Démonstration. — Il suffit de faire la démonstration sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et d'étudier la trace de $v = e^{-\gamma t} u$ (voir la proposition 7.2.1 de [Mél]). On considère d'abord l'espace $E_\gamma^{2s,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ muni de la norme :

$$\|u\|_{2s,\gamma,1} = \sum_{\substack{|\alpha|+2k\leq s \\ k\leq 1}} (1+\gamma)^{\mu} \|\partial_y^{\alpha} \partial_n^k v\|_{L^2}. \tag{5.1.2}$$

En notant $\|u\|_{2s,\gamma}$ la norme de $W_\gamma^{2s}(\mathbb{R}^{n+1})$, on a clairement :

$$\|u\|_{2s,\gamma,1} \leq C \, \|u\|_{2s,\gamma} \tag{5.1.3}$$

où C est une constante indépendante de γ.

D'autre part, la norme $||u||_{2s,\gamma,1}$ est équivalente, avec des constantes indépendantes de γ, à la norme

$$(5.1.4)\quad ||u||^2_{2s,\gamma,2} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big[(1+\gamma)^2 + |\xi'|^2\Big]^{2s-2} \Big[(1+\gamma)^4 + |\xi'|^4 + (1+\gamma)^2\xi_n^2\Big] |\widehat{v}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

De même, dans $H^{2s-1}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ la norme de Γu s'écrit

$$(5.1.5)\qquad |\Gamma u|_{2s-1,\gamma} = \sum_{\mu+|\alpha|=2s-1} (1+\gamma)^\mu |e^{-\gamma t}\partial_y^\alpha u|_{L^2}.$$

Cette norme est équivalente, avec des constantes indépendantes de γ, à la norme $|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,1}$ définie par

$$(5.1.6)\qquad |\Gamma u|_{2s-1,\gamma,1} = \int_{\mathbb{R}^n} \Big[(1+\gamma)^2 + |\xi'|^2\Big]^{2s-1} |\widehat{\Gamma v}(\xi')|^2 \, d\xi'.$$

On remarque ensuite que :

$$(5.1.7)\qquad \widehat{\Gamma v}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}(\xi', \xi_n) \, d\xi_n.$$

En posant $g(\xi', \xi_n, \gamma) = (1+\gamma)^2 + |\xi'|^2 + (1+\gamma)^2\xi_n^2$, on obtient la majoration :

$$(5.1.8)\qquad |\widehat{\Gamma v}(\xi')|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}} [g(\xi', \xi_n, \gamma)]^{-1} d\xi_n \times \int_{\mathbb{R}} g(\xi', \xi_n, \gamma) |\widehat{v}(\xi')|^2 \, d\xi_n.$$

En reportant cette estimation dans (5.1.6), on voit que le second membre est majoré par (5.1.4), ce qui prouve le lemme. □

5.2. Construction d'un opérateur de relèvement de trace

On se donne un entier $m > 2s$. On choisit une fonction $\chi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$(5.2.1)\qquad \operatorname{Supp}\chi \subset \{t = y_o > 0\},$$

(5.2.2) la fonction $\theta(y) = \chi(y) - 2^{-n}\chi(y/2)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\theta(y) = \sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha f_\alpha(y) \qquad \text{avec} \quad f_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

(5.2.3) il existe une constante $C > 0$ telle que la transformée de Fourier-Laplace $\widehat{\theta}(\eta - i\gamma) = \widehat{\theta}(\eta_0 - i\gamma, \eta')$ de θ vérifie

$$|\widehat{\theta}(\eta - i\gamma)| \leq C\, |\eta - i\gamma|^m \qquad \text{si} \quad |\eta - i\gamma| \leq 1.$$

Un exemple de fonction χ ayant ces propriétés, s'obtient de la manière suivante. On considère d'abord une fonction $g_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $g_1(\eta') = 1$ sur un voisinage de 0. On définit ensuite dans le demi-plan $\mathcal{D} := \{\operatorname{Im}\tau < 1\}$ la fonction de la variable complexe τ

$$(5.2.4)\qquad g_2(\tau) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\ln(1 + i\tau)\Big).$$

Les fonctions g_2 et $1/g_2$ sont holomorphes dans $\mathcal{D}$ et il existe un polynôme P_m de degré m, ainsi qu'une fonction g_3 holomorphe dans $\{|\tau| < 1\}$, tels que :

(5.2.5) $$g_2(\tau) = P_m(\tau) + \tau^{m+1} g_3(\tau).$$

Pour $\tau \in \mathcal{D}$, on définit la fonction

(5.2.6) $$h(\tau) = g_2(\tau)\, P_m(\tau).$$

On définit χ au moyen de sa transformée de Fourier

(5.2.7) $$\widehat{\chi}(\tau, \eta') = h(\tau)\, g_1(\eta')$$

et on vérifie en utilisant (5.2.5) et (5.2.6) que χ vérifie les propriétés (5.2.1) (5.2.2) et (5.2.3). □

On se donne d'autre part une fonction $\varphi(x_n) \in C^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $\{|x_n| \leq 2\}$ et qui vaut 1 pour $|x_n| \leq 1$. On note $\chi_k(y)$ la fonction $\chi_k(y) = 2^{nk}\, \chi(2^k y)$ et pour $k \geq 1$, on note $\theta_k(y) = \chi_k(y) - \chi_{k-1}(y)$. On désigne alors par $R_j(y, x_n)$ la fonction

(5.2.8) $$R_j(y, x_n) = \varphi(x_n)\, \chi(y) + \sum_{k=1}^{j} \varphi(2^{2k} x_n)\, \theta_k(y) \qquad \text{pour} \quad (y, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

et on note $\mathcal{R}_j$ l'opérateur de convolution :

(5.2.9) $$\mathcal{R}_j u(y, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} R_j(y - y', x_n)\, u(y')\, dy'.$$

Lorsque $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit $\mathcal{R}u$ par la formule :

(5.2.10) $$\mathcal{R}u = \lim_{j \to +\infty} \mathcal{R}_j u.$$

On a alors $\mathcal{R}u(y, 0) = \lim_{j \to +\infty} \mathcal{R}_j u(y, 0) = u(y)$

Dans les paragraphes suivants, nous montrons qu'il est possible d'étendre la définition de $\mathcal{R}$ aux espaces $W^{k,\infty}(\omega_T)$ et $H^s(\omega_T)$. Pour cela nous utiliserons des opérateurs de prolongement dont les propriétés font l'objet du lemme suivant.

Lemme 5.2.1. — *Étant donnés s et μ, il existe des une constante C et des opérateurs de prolongement E_T de $W^{\mu,\infty}(\omega_T)$ dans $W^{\mu,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$ et de $H^s(\omega_T)$ dans $H^s_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$ tels que pour tout $T \geq 0$ et tout $\gamma \geq 0$,*

(5.2.11) $$|E_T(u)|^*_\mu \leq C |u|^*_{\mu,T},$$

(5.2.12) $$|E_T(u)|_{s,\gamma} \leq C \Big\{ e^{-2\gamma T_\circ} |u|_{s,\gamma,0} + |u|_{s,\gamma,T} \Big\}.$$

De plus, si $0 \leq T \leq T'$, alors,

(5.2.13) $$E_T(u) = E_{T'}(u) \qquad \textit{sur} \quad]-\infty, T] \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Démonstration. — On désigne par $\chi(t)$ une fonction C^∞, nulle pour $t \leq T_o$ et valant 1 pour $t \geq 0$. On prolonge $u_1 = \chi u$ par 0 pour $t \leq T_o$, puis par réflexion pour $t > T$:

$$\widetilde{u}_1 = \sum_{k=1}^{K} c_k \, u_1(T - k(t-T), x') \qquad \text{pour} \quad t > T, \tag{5.2.14}$$

où les c_k sont les coefficients usuels vérifiant

$$\sum_{k=1}^{K} c_k \, (-k)^j = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq K-1. \tag{5.2.15}$$

De même $u_2 = (1-\chi)\, u$ se prolonge par 0 pour $t \geq 0$, puis par

$$\widetilde{u}_2 = \sum_{k=1}^{K} c_k \, u_2(T_o - k(t-T_o), x') \qquad \text{pour} \quad t < T_o \tag{5.2.16}$$

Alors, si $K \geq s$ et $K \geq \mu$, l'opérateur

$$E_T(u) = \widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2 \tag{5.2.17}$$

vérifie les propriétés annoncées. □

5.3. Action de $\mathcal{R}$ dans les espaces $\mathbf{W}^{k,\infty}$

Proposition 5.3.1. — *i) L'opérateur $\mathcal{R}_T = \mathcal{R} \circ E_T$ opère de $L^\infty(\omega_T)$ dans $L^\infty(\Omega_T)$ et*

$$||\mathcal{R}_T(u)||^*_{0,T} \leq C|u|^*_{o,T}. \tag{5.3.1}$$

ii) Si $u \in W^{k,\infty}(\omega_T)$ on a $\delta^\alpha \mathcal{R}_T(u) \in L^\infty(\Omega_T)$ pour $|\alpha| \leq k$ et

$$||\delta^\alpha \mathcal{R}_T(u)||^*_{0,T} \leq C|u|^*_{k,T}. \tag{5.3.2}$$

iii) Pour $2k \leq m$, $\partial_n^k \mathcal{R}_T$ opère de $W^{2k,\infty}(\omega_T)$ dans $L^\infty(\Omega_T)$ et

$$||\partial_n^k \mathcal{R}_T(u)||^*_{0,T} \leq C|u|^*_{2k,T}. \tag{5.3.3}$$

iv) Si $0 \leq T \leq T'$, on a pour tout $u \in L^\infty(\omega_{T'})$

$$\begin{cases} \mathcal{R}_T(u_{|\omega_T}) = \mathcal{R}_{T'}(u) & \textit{sur } \Omega_T, \\ \mathcal{R}_{T'}(u) = 0 \quad \textit{sur } \Omega_T \textit{ si } u = 0 \textit{ sur } \omega_T. \end{cases} \tag{5.3.4}$$

Dans (5.3.1)(5.3.2) *et* (5.3.3), *C désigne une constante indépendante de $T \geq 0$.*

Démonstration. — Grâce au lemme 5.2.1, il suffit de montrer des estimations analogues pour $\mathcal{R}u$, lorsque u est définie sur $\mathbb{R}^n$. En posant $\psi(x_n) = \varphi(x_n) - \varphi(4x_n)$, on a d'après (5.2.8) :

$$R_j(y, x_n) = \sum_{k=0}^{j-1} \psi(2^{2k} x_n)\, \chi_k(y) + \varphi(2^{2j} x_n)\, \chi_j(y). \tag{5.3.5}$$

Puisque ψ est à support dans la couronne $\{1/4 \leq |x_n| \leq 2\}$, on a $\psi(2^{2k}x_n) \neq 0$ pour au plus trois entiers k de la somme. D'où :

(5.3.6) $$\|\mathcal{R}_j u\|_{L^\infty} \leq 3\|\psi\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\chi\|_{L^1} + \|\varphi\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\chi\|_{L^1}$$

ce qui prouve (5.3.1).

Pour établir (5.3.2), on remarque d'abord que $\mathcal{R}_j$ commute aux dérivations tangentielles ∂_y^α. Pour les dérivées conormales, on a

(5.3.7) $$\delta_n^p \mathcal{R}_j u(y, x_n) = R_j^1(y, x_n) * u(y)$$

où $R_j^1(y, x_n)$ a la même forme que $R_j u(y, x_n)$. L'estimation (5.3.2) en découle.

En notant $\varphi_1 = \partial_n^k \varphi$, on obtient

(5.3.8) $$\partial_n^k R_j(y, x_n) = \varphi_1(x_n)\chi_o(y) + \sum_{p=1}^{j} 2^{2pk}\varphi_1(2^{2p}x_n)\theta_p(y).$$

Si $2k \leq m$, on peut alors écrire en tenant compte de (5.2.2) :

(5.3.9) $$\theta(y) = \sum_{|\alpha|=2k} \partial^\alpha \theta_\alpha(y) \qquad \text{avec} \quad \theta_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On en déduit que

(5.3.10) $$2^{2pk}\theta_p(y) = \sum_{|\alpha|=2k} 2^{np}\partial^\alpha\{\theta_\alpha(2^p y)\},$$

et en posant $u_p(y) = 2^{2pk}\theta_p(y) * u(y)$, il vient

(5.3.11) $$\partial_n^k \mathcal{R}_j u(y, x_n) = \varphi_1(x_n)\chi_o(y) * u(y) + \sum_{p=1}^{j} \varphi_1(2^{2p}x_n) u_p(y).$$

Avec $C_1 = \sum_{|\alpha|=2k} \|\theta_\alpha\|_{L^1}$, (5.3.10) implique que

(5.3.12) $$\|u_p\|_{L^\infty} \leq C_1\, |u|_{2k}^*.$$

Comme les supports des fonctions $\varphi_1(2^{2p}x_n)$ sont deux à deux disjoints, on en déduit que

(5.3.13) $$\|\partial_n^k \mathcal{R}_j u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\chi_o\|_{L^1} + C_1\|\varphi_1\|_{L^\infty}\|u\|_{2k}^*$$

et l'estimation (5.3.3) en résulte.

Enfin, (5.3.4) découle du fait que $\mathcal{R}$ est un opérateur de convolution par un noyau à support dans $\{t > 0\}$. □

On déduit immédiatement de la proposition (5.3.1) le corollaire suivant.

Corollaire 5.3.2. — *L'opérateur $\mathcal{R}_T$ opère de $W^{2k,\infty}(\omega_T)$ dans $W^{k,\infty}(\Omega_T)$ et on a l'estimation*

(5.3.14) $$\|\mathcal{R}_T(u)\|_{k,T}^* \leq C\, |u|_{2k,T}^*,$$

où C désigne une constante indépendante de $T \geq 0$.

5.4. Action de $\mathcal{R}$ dans les espaces H^s

Proposition 5.4.1. — *i) Pour tout entier $s \geq 0$, $\mathcal{R}_T$ opère de $H^s(\omega_T)$ dans $H^{0,s+1}(\Omega_T)$ et*

$$\|\mathcal{R}_T(u)\|^t_{s+1,\gamma,T} \leq C\Big\{e^{-2\gamma T_o}\,|u|_{s,\gamma,0} + |u|_{s,\gamma,T}\Big\}. \tag{5.4.1}$$

ii) Pour $2k \leq s$, $\partial^k_n \mathcal{R}_T$ opère de $H^s(\omega_T)$ dans $H^{0,s+1-2k}(\Omega_T)$ et

$$\|\partial^k_n \mathcal{R}_T(u)\|^t_{s+1-2k,\gamma,T} \leq C\Big\{e^{-2\gamma T_o}\,|u|_{s,\gamma,0} + |u|_{s,\gamma,T}\Big\} \tag{5.4.2}$$

iii) Si $0 \leq T \leq T'$ on a pour tout $u \in H^s(\omega_{T'})$

$$\begin{cases} \mathcal{R}_T(u_{|\omega_T}) = \mathcal{R}_{T'}(u) & \textit{sur } \Omega_T, \\ \mathcal{R}_{T'}(u) = 0 \quad \textit{sur } \Omega_T \textit{ si } u = 0 \textit{ sur } \omega_T. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

iv) Pour tout $u \in H^{2s-1}(\omega_T)$,

$$\Gamma \mathcal{R}_T(u) = u. \tag{5.4.4}$$

Dans (5.4.1) *et* (5.4.2), *C désigne une constante indépendante de γ et T.*

Démonstration. — En utilisant le lemme 5.2.1, on se ramène au cas où u est définie sur $\mathbb{R}^n$. En posant $R^\gamma_j(y,x_n) = e^{-\gamma t} R_j(y,x_n)$, on définit d'abord l'opérateur de convolution

$$\mathcal{R}^\gamma_j u(y,x_n) = R^\gamma_j(y,x_n) * u(y). \tag{5.4.5}$$

On a alors

$$\mathcal{R}_j u = e^{\gamma t} \mathcal{R}^\gamma_j (e^{-\gamma t} u). \tag{5.4.6}$$

La transformée de Fourier en y de $R^\gamma_j(y,x_n)$ s'écrit

$$\Phi^\gamma_j(\eta,x_n) = \sum_{k=0}^{j-1} \psi(2^{2k}x_n)\widehat{\chi}(2^{-k}(\eta - i\gamma)) + \varphi(2^{2j}x_n)\widehat{\chi}(2^{-j}(\eta - i\gamma)) \tag{5.4.7}$$

où l'on a noté $\eta - i\gamma = (\eta_o - i\gamma, \eta')$ et $\widehat{\chi}(\eta - i\gamma)$ la transformée de Fourier-Laplace en y de χ. On désigne par $\Phi^\gamma_{1,j}(\eta,x_n)$ l'expression :

$$\Phi^\gamma_{1,j}(\eta,x_n) = \sum_{k=0}^{j-1} \psi(2^{2k}x_n)\widehat{\chi}(2^{-k}(\eta - i\gamma))$$

et (5.4.7) s'écrit sous la forme :

$$\Phi^\gamma_j(\eta,x_n) = \Phi^\gamma_{1,j}(\eta,x_n) + \Phi^\gamma_{2,j}(\eta,x_n). \tag{5.4.8}$$

La condition de support sur ψ implique que :

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi^\gamma_j(\eta,x_n)|^2\,dx_n \leq C \sum_{k=0}^{j} 2^{-2k} |\widehat{\chi}(2^{-k}(\eta - i\gamma))|^2. \tag{5.4.9}$$

On utilise ensuite l'estimation

$$|\widehat{\chi}(\eta - i\gamma)| \leq C|\eta - i\gamma|^{-2} \quad \text{si} \quad |\eta - i\gamma| \geq 1 \tag{5.4.10}$$

pour majorer $|\widehat{\chi}(2^{-k}(\eta - i\gamma))|$ par :

$$\begin{array}{ll} C, & \text{si } 2^{-k}\,|\eta - i\gamma| \leq 1, \\ C\,2^{2k}\,|\eta - i\gamma|^{-2}, & \text{si } 2^{-k}\,|\eta - i\gamma| > 1. \end{array}$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_j^\gamma(\eta, x_n)|^2\, dx_n \leq C[(1+\gamma)^2 + |\eta|^2]^{-1}. \tag{5.4.11}$$

En posant $v = e^{-\gamma t}u$, il en résulte que

$$(1+\gamma)||\mathcal{R}_j^\gamma v||_{L^2} + ||\partial_y \mathcal{R}_j^\gamma v||_{L^2} \leq C\,|v|_{L^2}. \tag{5.4.12}$$

Compte tenu de (5.4.6) on obtient :

$$(1+\gamma)||\mathcal{R}_j u||_{0,\gamma} + ||\partial_y \mathcal{R}_j u||_{0,\gamma} \leq C\,|u|_{0,\gamma}. \tag{5.4.13}$$

Comme $\delta_n^p R_j^\gamma(y, x_n)$ a la même forme que $R_j^\gamma(y, x_n)$, on a de même :

$$(1+\gamma)||\delta_n^p \mathcal{R}_j u||_{0,\gamma} + ||\partial_y \delta_n^p \mathcal{R}_j u||_{0,\gamma} \leq C\,|u|_{0,\gamma}. \tag{5.4.14}$$

Par ailleurs, $\mathcal{R}_j$ commute aux dérivations ∂_y. On en déduit l'estimation :

$$||\mathcal{R}_j u||^t_{s+1,\gamma} \leq C\,|u|_{s,\gamma} \tag{5.4.15}$$

où C désigne une constante indépendante de γ et j.

On définit ensuite

$$\Phi^\gamma(\eta, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(2^{2k}x_n)\widehat{\chi}(2^{-k}(\eta - i\gamma)) \tag{5.4.16}$$

et, en désignant par $R^\gamma(y, x_n)$ la transformée de Fourier inverse en de $\Phi^\gamma(\eta, x_n)$, on définit l'opérateur

$$\mathcal{R}^\gamma v(y, x_n) = R^\gamma(y, x_n) * v(y). \tag{5.4.17}$$

Avec (5.4.15), on vérifie que si $u \in H^s_\gamma(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{R}_j u$ converge dans $H^{0,s+1}_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$ vers $\mathcal{R}u$ que l'inégalité (5.4.15) est encore vérifiée pour $\mathcal{R}u$ avec la même constante C. L'estimation (5.4.1) découle alors de (5.4.15) et (5.2.12).

Pour établir (5.4.2), on introduit $\Phi^\gamma(\cdot, x_n)$, la transformée de Fourier $\partial_n^k R^\gamma(\cdot, x_n)$. On a

$$\Phi^\gamma(\eta, x_n) = \varphi_1(x_n)\widehat{\chi}(\eta - i\gamma) + \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2kp}\varphi_1(2^{2p}x_n)\widehat{\theta}(2^{-p}(\eta - i\gamma)) \tag{5.4.18}$$

où $\varphi_1 = \partial_n^k \varphi$ est à support dans la couronne $\{1 \leq |x_n| \leq 2\}$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_j^\gamma(\eta, x_n)|^2\, dx_n \leq C\Big\{|\widehat{\chi}(\eta - i\gamma)|^2 + \sum_{p=1}^{\infty} 2^{(4k-2)p}|\widehat{\theta}(2^{-p}(\eta - i\gamma))|^2\Big\}. \tag{5.4.19}$$

En utilisant (5.2.3) on majore les termes $|\widehat{\theta}(2^{-p}(\eta - i\gamma))|$ par

$$\begin{array}{ll} C\,2^{-pm}|\eta - i\gamma|^m & \text{si} \quad 2^{-p}|\eta - i\gamma| \leq 1, \\ C & \text{si} \quad 2^{-p}|\eta - i\gamma| > 1. \end{array}$$

On déduit alors de (5.4.19) l'estimation :

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_j^\gamma(\eta, x_n)|^2\, dx_n \leq C[(1+\gamma)^2 + |\eta|^2]^{2k-1}. \tag{5.4.20}$$

Il en résulte que

$$(1+\gamma)||\partial_n^k \mathcal{R}^\gamma v||_{L^2} + ||\partial_n^k \partial_y \mathcal{R}^\gamma v||_{L^2} \leq C \sum_{|\alpha|+\mu=2k} (1+\gamma)^\mu |\partial_y^\alpha v|_{L^2}. \tag{5.4.21}$$

Compte tenu de (5.4.6) on obtient, en notant $v = e^{-\gamma t}u$,

$$(1+\gamma)||\partial_n^k \mathcal{R} u||_{o,\gamma} + ||\partial_y \partial_n^k \mathcal{R} u||_{o,\gamma} \leq C\,|u|_{2k,\gamma}. \tag{5.4.22}$$

En commutant ensuite $\partial_n^k \mathcal{R}$ avec les dérivées ∂_y^α et en remarquant que l'opérateur $\delta_n^p \partial_n^k \mathcal{R}$ est de la même forme que $\partial_n^k \mathcal{R}$, on obtient

$$||\partial_n^k \mathcal{R}_T(u)||^t_{s+1-2k,\gamma} \leq C\,|u|_{s,\gamma}. \tag{5.4.23}$$

L'estimation (5.4.2) découle alors de (5.4.23) et (5.2.12). □

On déduit de la proposition 5.4.1 le corollaire suivant.

Corollaire 5.4.2. — *Pour tout entier $s \geq 0$, $\mathcal{R}_T$ opère de $H^{2s-1}(\omega_T)$ dans $W^{2s}(\Omega_T)$ et*

$$||\mathcal{R}_T(u)||_{2s,\gamma,T} \leq C\Big\{e^{-2\gamma T_o}\,|u|_{2s-1,\gamma,0} + |u|_{2s-1,\gamma,T}\Big\} \tag{5.4.24}$$

En outre, pour toute dérivée conormale δ, $\delta\mathcal{R}_T$ opère de $H^{2s}(\omega_T)$ dans $W^{2s}(\Omega_T)$ et

$$||\delta\mathcal{R}_T(u)||_{2s,\gamma,T} \leq C\Big\{e^{-2\gamma T_o}\,|u|_{2s,\gamma,0} + |u|_{2s,\gamma,T}\Big\} \tag{5.4.25}$$

Au chapitre 6, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 5.4.3. — *Soit $s \geq 1$ et soit k tel que $1 \leq k \leq s-1$. Pour tout $u \in H^{2s-1}(\omega_T)$, la trace de $\partial_n^k \mathcal{R}_T(u)$ est bien définie dans $H^{2s-2k-1}(\omega_T)$ et on a :*

$$\Gamma \partial_n^k \mathcal{R}_T(u) = 0. \tag{5.4.26}$$

Démonstration. — Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on vérifie que :

$$\Gamma \partial_n^k \mathcal{R}_j(u) = 0. \tag{5.4.27}$$

Il en résulte que $\Gamma \partial_n^k \mathcal{R}(u) = 0$ pour $u \in H_\gamma^{2s-1}(\mathbb{R}^n)$. □

CHAPITRE 6

COMPATIBILITÉS. CONSTRUCTIONS DE SOLUTIONS APPROCHÉES

Dans ce chapitre, on analyse les conditions de compatibilités que doivent vérifier les données initiales pour que la solution du problème mixte soit régulière de chaque côté $\{\pm x_n > 0\}$. La problématique a été présentée au § 1.2.9. L'idée générale est simple : le développement de Taylor en $t = 0$ de la solution (u, Φ) est déterminée de manière unique par la donné initiale (u_0, Φ_0) et ce développement de Taylor doit satisfaire les conditions aux limites au sens des développements de Taylor (voir par exemple [Ch-Pi], [Ma-Ra]). L'analyse est semblable à celle de [Ma2], à ceci près que nos équations pour Φ sont différentes. On peut aussi voir les calculs comme une extension aux chocs faibles de l'analyse des conditions de compatibilités pour les ondes soniques faite dans [Mél]. On renvoie aussi à [Al] pour une l'étude analogue des conditions de compatibiltés pour les ondes de raréfaction.

Au § 6.1 on explicite la forme du développement de Taylor des solutions. Les conditions de compatibilités sont énoncées au § 6.2. Elles sont analysées au § 6.3, où l'on construit des familles de données initiales compatibles (proposition 6.3.1). Au § 6.4, on démontre le théorème 3.1.2 qui construit des familles de solutions approchées à partir de données initiales compatibles. La version locale de ce résultat (proposition 2.4.1) est démontrée au § 6.5. Enfin, on montre au § 6.6 que l'on peut prolonger des solutions approchées locales en des solutions approchées globales et au § 6.7 que l'on peut prolonger des données initiales locales compatibles en données initiales globales compatibles. Ceci démontre les propositions 3.1.4 et 3.1.5.

6.1. Développement de Taylor des solutions

Soit (u, Φ) une solution exacte du problème (2.3.2) (2.3.3) (2.3.8) (2.3.9) sur $[T_o, T] \times \mathbb{R}^n$. On définit $z = \partial_n u / \partial_n \phi$. En notant $a = \ln(-[u_1]/\varepsilon)$ et A une fonction telle que $\Gamma A = a$ comme en 2.3.11) (2.3.12)), on définit $\rho = -\varepsilon\, e^A$. Les équations (2.3.2) (2.3.3)

(2.3.8) (2.3.9) s'écrivent

$$\partial_t u = -\sum_{j=1}^{n-1} A_0^{-1}(u)A_j(u)\partial_j u - A_0^{-1}(u)\mathcal{M}(u,\partial_y\Phi)z \qquad \text{sur } \Omega_T, \tag{6.1.1}$$

$$\partial_t\Phi^+ = \mathcal{F}^+(u^+,\partial'_y\Phi^+,\rho) \qquad \text{sur } \Omega_T^+, \tag{6.1.2}$$

$$\partial_t\Phi^- = \mathcal{F}^-(u^-,\partial'_y\Phi^-,\rho) \qquad \text{sur } \Omega_T^-, \tag{6.1.3}$$

$$[\Phi]=0, \quad \Phi_{|x_n=0}=\phi \quad et \quad \partial_t\phi = \lambda(u^+,u^-,\partial'_y\phi) \qquad \text{sur } \omega_T, \tag{6.1.4}$$

$$[u] = \rho\, U^-(u^-,\partial'_y\phi,\rho) \qquad \text{sur } \omega_T. \tag{6.1.5}$$

En définissant $\mathcal{U}_0(u^-,\partial'_y\phi,\rho) := \rho\mathcal{U}^-(u^-,\partial'_y\phi,\rho)$, (2.2.6) implique alors que

$$[u_1]=\rho \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^+(u^- + \mathcal{U}_0(u^-,\partial'_y\phi,\rho),\partial'_y\Phi^+,\rho) = \mathcal{F}^-(u^-,\partial'_y\Phi^-,\rho) \quad \text{sur } \omega_T,$$

où $[u_1]$ désigne la première composante de $[u]$.

On désigne par u_j, Φ_j, ϕ_j, z_j, ρ_j les traces sur $\{t=0\}$ des dérivées en temps $\partial_t^j u$, $\partial_t^j\Phi$, $\partial_t^j\phi$, $\partial_t^j z$, $\partial_t^j\rho$. En dérivant par rapport à t les équations (6.1.1) à (6.1.5), on obtient les relations de récurrence suivantes :

$$u_{j+1} = \sum_{l=0}^{j} C_j^l \mathcal{A}_{j-l} z_l + \mathcal{B}_j \qquad \text{sur } \{\pm x_n \geq 0\} \text{ pour } j\geq 0, \tag{6.1.6}$$

$$z_0 = \frac{\partial_n u_0}{\partial_n\Phi_0} \qquad \text{et} \quad z_j = \frac{\partial_n u_j}{\partial_n\Phi_0} + \mathcal{Z}_j \quad \text{sur } \{\pm x_n \geq 0\} \text{ pour } j \geq 1, \tag{6.1.7}$$

(6.1.8)
$$\Phi_{j+1}^+ = \mathcal{F}_j^+(u_0^+,\dots,u_j^+,\partial'_y\Phi_0^+,\dots,\partial'_y\Phi_j^+,\rho_0,\dots,\rho_j) \qquad \text{sur } \{x_n\geq 0\} \text{ pour } j\geq 0,$$

(6.1.9)
$$\Phi_{j+1}^- = \mathcal{F}_j^-(u_0^-,\dots,u_j^-,\partial'_y\Phi_0^-,\dots,\partial'_y\Phi_j^-,\rho_0,\dots,\rho_j) \qquad \text{sur } \{x_n\leq 0\} \text{ pour } j\geq 0,$$

(6.1.10)
$$[u_0] = \mathcal{U}_0(u_0^-,\partial'_y\Phi_0,\rho_0), \quad [u_j] = \rho_j\partial_\rho\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_j \qquad \text{sur } \{t=x_n=0\} \text{ pour } j\geq 1,$$

où

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_j(u_0,\dots,u_j,\partial'{}_y\Phi_0,\dots\partial'{}_y\Phi_j,\Phi_{j+1}),\\
&\mathcal{B}_j(u_0,\dots,u_j,\partial'{}_y u_0,\dots,\partial'{}_y u_j),\\
&\mathcal{Z}_j(\partial_n u_0,\dots,\partial_n u_{j-1},\partial_n\Phi_0,\dots,\partial_n\Phi_j),\\
&\mathcal{F}_j^+(u_0^+,\dots,u_j^+,\partial'{}_y\Phi_0^+,\dots,\partial'{}_y\Phi_j^+,\rho_0,\dots,\rho_j),\\
&\mathcal{F}_j^-(u_0^-,\dots,u_j^-,\partial'{}_y\Phi_0^-,\dots,\partial'{}_y\Phi_j^-,\rho_0,\dots,\rho_j),\\
&\mathcal{U}_0(u_0^-,\partial'{}_y\Phi_0,\rho_0),\\
&\mathcal{U}_j(u_0^-,\dots,u_j^-,\partial'{}_y\phi_0^-,\dots,\partial'{}_y\phi_j^-,\rho_0,\dots,\rho_{j-1}) \qquad \text{pour } j\geq 1,
\end{aligned}$$

sont des fonctions C^∞ de leurs arguments.

On note que $\mathcal{U}_0 = 0$ quand $\rho_0 = 0$ et que pour $j\geq 1$, on a

$$\mathcal{U}_j = 0 \quad \text{si} \quad \rho_0 = \cdots = \rho_{j-1} = 0. \tag{6.1.11}$$

La condition (6.1.4) entraîne aussi que $\Phi_j^+ = \Phi_j^- = \phi_j$ sur $\{t = x_n = 0\}$. Les fonctions $\mathcal{F}_j^+$ et $\mathcal{F}_j^-$ vérifient en outre sur $\{t = x_n = 0\}$ la propriété suivante :

(6.1.12)
$$\mathcal{F}_j^+(u_0^+, \dots, u_j^+, \partial_y' \Phi_0^+, \dots, \partial_y' \Phi_j^+, \rho_0, \dots, \rho_j) = \mathcal{F}_j^-(u_0^-, \dots, u_j^-, \partial_y' \Phi_0^-, \dots, \partial_y' \Phi_j^-, \rho_0, \dots, \rho_j)$$

lorsque les u_j^+, u_j^- sont liées par (6.1.10). On a alors $[\Phi_j] = 0$ pour $0 \leq j \leq 2s - 1$.

6.2. Conditions de compatibilités

On reprend dans ce paragraphe les notations introduites au paragraphe 2.4. On se donne des paramètres réels $T_o' < 0 < T_1'$ et on désigne par Ω un ensemble ouvert qui sera soit une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine, soit $\mathbb{R}^n$. En désignant par $\Omega^{\pm}$ et ω les ensembles ouverts définis au paragraphe 2.4, on se donne des ensembles $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ bornés respectivement dans $p\text{--}H^{2s+3}(\Omega)$, $p\text{--}H^{2s+4}(\Omega)$ et $H^{2s+3}(]T_o', T_1'[\times \Omega)$. Pour ε donné dans $]0, \varepsilon_o]$, on considère ensuite des fonctions $(u_0,\ \Phi_0,\ \rho)$ vérifiant les conditions suivantes :

(6.2.1) ρ est de la forme $\rho = -\varepsilon\, e^A$, $A \in \mathcal{B}_3$,

(6.2.2) $(u_0^+ - \underline{u}_\varepsilon^+,\ u_0^-) \in \mathcal{B}_1$,

(6.2.3) $(\Phi_0^+ - x_n,\ \Phi_0^- - x_n) \in \mathcal{B}_2$,

(6.2.4) $[\Phi_0] = 0$.

Les relations de récurrences (6.1.6), ..., (6.1.9) permettent alors de construire pour $1 \leq j \leq 2s - 1$ des fonctions $u_j^{\pm}$, $\Phi_j^{\pm}$, $z_{j-1}^{\pm}$ définies sur $\mathbb{R}_{\pm}^n$ et $\mathbb{R}_{-}^n$.

Définition 6.2.1. — Les données initiales (u_0, Φ_0) sont compatibles à l'ordre $2s-1$ s'il existe une fonction ρ de la forme (6.2.1) telle que les conditions (6.1.10) sont vérifiées sur l'arête $\{t = x_n = 0\}$ pour tout $j \in \{0, \dots, 2s - 1\}$.

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que les données initiales (u_0, Φ_0) appartiennent à l'ensemble $\mathcal{F}_\varepsilon^o(2s+3, \Omega)$ (noté simplement $\mathcal{F}_\varepsilon^o(2s+3)$ lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$). Nous dirons que la fonction ρ est associée à (u_0, Φ_0) et, par abus, on écrira encore $(u_0, \Phi_0, \rho) \in \mathcal{F}_\varepsilon^o(2s + 3, \Omega)$. D'après (2.2.6) et (6.1.12), on a dans ce cas :

$$\rho_0 = [u_{0,1}] \tag{6.2.5}$$

où $u_{0,1}$ désigne la première composante de u_0. De plus,

$$[\Phi_j]_{|\{t=x_n=0\}} = 0, \quad j \in \{0, \dots, 2s - 1\}. \tag{6.2.6}$$

Nous explicitons maintenant les conditions (6.1.10), afin de construire de larges classes de données compatibles. On vérifie par récurrence les formules suivantes.

Proposition 6.2.2. — *Soient* (u_0, Φ_0, ρ) *des fonctions vérifiant les conditions* (6.2.1) ... (6.2.4). *Pour* $j \in \{1, \ldots, 2s-1\}$, *il existe des fonctions* C^∞ *de leurs arguments* B_j, Q_j, F_j^+ *et* F_j^-, *telles que*

$$u_j = (\partial_n \Phi_0)^{-j} \mathcal{A}_0^j \partial_n^j u_0 + B_j(\partial^{\alpha_1} u_0,\, \partial^{\alpha_2} \Phi_0,\, \partial^{\alpha_3} \rho_k) \quad \textit{sur } \Omega^+ \textit{ et } \Omega^-, \tag{6.2.7}$$

où B_j *est une somme de termes*

$$C(u_0, \partial \Phi_0)\, \partial^{\alpha_1} u_0\, \partial^{\alpha_2} \Phi_0\, \partial^{\alpha_3} \rho_k$$

avec $|\alpha_1| \leq j$, $\partial^{\alpha_1} \neq \partial_n^j$, $|\alpha_2| \leq j+1$ *et* $|\alpha_3| + k \leq j-1$.

$$z_{j-1} = (\partial_n \Phi_0)^{-j} \mathcal{A}_0^{j-1} \partial_n^j u_0 + Q_{j-1}(\partial^{\alpha_1} u_0,\, \partial^{\alpha_2} \Phi_0,\, \partial^{\alpha_3} \rho_k) \quad \textit{sur } \Omega^+ \textit{ et } \Omega^-, \tag{6.2.8}$$

où Q_{j-1} *est une expression de la même forme que* B_j.

$$\begin{cases} \Phi_j^+ = F_j^+(\partial^{\alpha_1} u_0^+,\, \partial^{\alpha_2} \Phi_0^+,\, \partial^{\alpha_3} \rho_k) & \textit{sur } \Omega^+, \\ \Phi_j^- = F_j^-(\partial^{\alpha_1} u_0^-,\, \partial^{\alpha_2} \Phi_0^-,\, \partial^{\alpha_3} \rho_k) & \textit{sur } \Omega^-, \end{cases} \tag{6.2.9}$$

où F_j^+, F_j^- *sont des sommes de termes* $C(u_0, \partial \Phi_0)\, \partial^{\alpha_1} u_0^\pm\, \partial^{\alpha_2} \Phi_0\, \partial^{\alpha_3} \rho_k$ *avec* $|\alpha_1| \leq j$, $\partial^{\alpha_1} \neq \partial_n^j$, $|\alpha_2| \leq j$, $\partial^{\alpha_2} \neq \partial_n^j$ *et* $|\alpha_3| + k \leq j-1$.

Par abus on a noté ici $\partial^\alpha u$ un produit de dérivés de u, la somme des ordres étant $|\alpha|$. On notera que sous les hypothèses (6.2.1) à (6.2.4) avec $2s+3 > n/2$, les formules ci-dessus définissent bien $u_j \in p\text{–}H^{2s+3-j}(\Omega)$, $z_j \in p\text{–}H^{2s+2-j}(\Omega)$ et $\Phi_j \in H^{2s+4-j}$.

On rappelle que $\mathcal{A}_0(u_0, \partial_y' \Phi_0, \Phi_1) = \Phi_1 I - G(u_0, \partial_y' \Phi_0)$. Sur $\{t = x_n = 0\}$ on introduit la matrice :

$$\mathcal{A}_0^+ = \mathcal{A}_0^+(u_0^+, \partial_y' \Phi_0, \phi_1) = \phi_1 I - G(u_0^+, \partial_y' \Phi_0) \tag{6.2.10}$$

En notant $g_0 = \phi_1 - \lambda(u_0^+, \partial_y' \Phi_0)$ et $\mathcal{M}_0^+ = \lambda(u_0^+, \partial_y' \Phi_0) I - G(u_0^+, \partial_y' \Phi_0)$, on réécrit cette matrice sous la forme :

$$\mathcal{A}_0^+ = g_0 I + \mathcal{M}_0^+. \tag{6.2.11}$$

Par hypothèse, la matrice $\mathcal{M}_0^+$ a un noyau de dimension un dont un vecteur de base a été noté $R(u_0^+, \partial_y' \Phi_0)$ au chapitre 2. Elle est conjuguée à une matrice symétrique. On désigne par $p_1 = p_1(u_0^+, \partial_y' \Phi_0)$ le projecteur sur le noyau de $\mathcal{M}_0^+$ parallèlement à l'image de $\mathcal{M}_0^+$. On note $p_2 = p_2(u_0^+, \partial_y' \Phi_0) = \mathrm{Id} - p_1$ le projecteur sur l'image de $\mathcal{M}_0^+$.

Proposition 6.2.3. — *Il existe des fonctions* C^∞ *de leurs arguments* μ_0, F_1 *et pour* $j \geq 0$, E_j, R_j^+ *et* Z_j, *telles que si* ε *est assez petit et si* (u_0, Φ_0, ρ) *vérifient les conditions* (6.2.1) *à* (6.2.4), *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) Les données (u_0, Φ_0, ρ) *appartiennent à la famille* $\mathcal{F}_\varepsilon^o(2s+3, \Omega)$

ii) La condition $[u_0] = \mathcal{U}_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0)$ *est satisfaite, et pour* $j \in \{0, \dots, 2s-2\}$ *il existe des fonctions* ζ_j *appartenant à* $H^{2s+1-j}(\omega)$ *telles que :*

$$\rho_{j+1}(x', 0) = \zeta_j(x')\rho_0(x', 0)\mu_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0) + F_1(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0) \cdot E_j, \tag{6.2.12}$$

$$[z_j] = \sum_{l=0}^{j} C_j^l \zeta_l(x') R_{j-l}^+ + Z_j. \tag{6.2.13}$$

Les fonctions E_j, R_j^+ *et* Z_j *vérifient les propriétés suivantes.*

a) E_j *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}^N$ *et est une somme de termes de la forme*

$$C(u_0^-, \partial \Phi_0, \rho_0)\, \partial^{\alpha_1} u_{k_1}^-, \ \partial^{\alpha_2} \phi_{k_2}, \ \partial^{\alpha_3} \rho_{k_3}, z_{k_4}^-, \ \zeta_{k_5}$$

avec

$$\begin{array}{lll} |\alpha_1| + k_1 \le j+1, & |\alpha_1| \le 1, & \\ |\alpha_2| + k_2 \le j+2, & |\alpha_| \le 2, & k_2 \le j+1, \\ |\alpha_3| + k_3 \le j+1, & k_3 \le j, & \\ k_3 \le j, \quad k_5 \le j-1. & & \end{array}$$

En outre, $E_j = 0$ *quand* $\rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_j = 0$.

b) R_j^+ *est la fonction de* $(u_0^+, \dots, u_j^+, \partial_y' \phi_0, \dots, \partial_y' \phi_j)$ *telle que*

$$R_j^+(u_0^+, \dots, u_j^+, \partial_y' \phi_0, \dots, \partial_y' \phi_j) = \partial_t^j R(u^+, \partial_y' \phi)_{|t=0}$$

c) Z_j *désigne une fonction prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}^N$ *de la forme :*

$$Z_j = \rho_0(x', 0)\zeta_j(x') F_2(u_0^-, \partial_y' \phi_0, \rho_0) + M_2(u_0^-, \partial_y' \phi_0, \rho_0) E_j$$

où F_2 *désigne une fonction prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}^N$ *et* M_2 *une matrice de taille* N*. De plus les fonctions* Z_j *vérifient* $p_1(Z_j) = 0$.

Démonstration. — **a)** On suppose que $[u_0] = \mathcal{U}_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0)$, et on montre que la condition de compatibilité (6.1.10) pour $j = 1$ est équivalente à (6.2.12) (6.2.13) pour $j = 0$.

La relation (6.1.6) pour $j = 0$ implique que $[u_1] = \mathcal{A}_0^+[z_0] + [\mathcal{A}_0] z_0^- + [\mathcal{B}_0]$. Donc (6.1.10) pour $j = 1$ a lieu, si et seulement si

$$\Psi_0 := \mathcal{A}_0^+[z_0] - \rho_1 H_0 - E_0 = 0 \tag{6.2.14}$$

où l'on a posé $H_0 = \partial_\rho \mathcal{U}_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0)$ et $E_0 = \mathcal{U}_1 - [\mathcal{A}_0] z_0^- - [\mathcal{B}_0]$. Compte tenu de (6.2.11), on a :

$$\Psi_0 = \mathcal{M}_0^+[z_0] + g_0[z_0] - \rho_1 H_0 - E_0. \tag{6.2.15}$$

En projetant sur le noyau de $\mathcal{M}_0^+$, il vient

$$p_1 \Psi_0 = g_0 p_1[z_0] - \rho_1 p_1 H_0 - p_1 E_0. \tag{6.2.16}$$

Comme R_0^+ est une base de l'image de p_1, il existe une unique fonction scalaire $\zeta_0(x') \in H^{2s+1}(\omega)$ telle que

$$p_1[z_0] = \zeta_0(x') R_0^+. \tag{6.2.17}$$

Pour ε_0 assez petit le produit scalaire $\alpha_0 := (p_1 H_0) \cdot R_0^+$ est non nul et l'équation $p_1 \Psi_0 = 0$ équivaut à

$$\rho_1 = g_0 \zeta_0(x') \frac{|R_0^+|^2}{\alpha_0} - \frac{(p_1 E_0) \cdot R_0^+}{\alpha_0} . \tag{6.2.18}$$

On a remarqué après (6.1.12) que $[\Phi_1] = 0$ quand $\rho_0 = 0$ et $[u_0] = \mathcal{U}_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0)$. On en déduit que $g_0/\alpha_0 = \rho_0 \mu_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0)$ et la relation (6.2.12) pour $j = 0$ en découle. En outre, définition de E_0, la condition $[u_0] = \mathcal{U}_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0)$ et (6.1.11) impliquent que $E_0 = 0$ quand $\rho_0 = 0$.

Pour établir (6.2.13) on applique à (6.2.14) le projecteur p_2 qui commute avec $\mathcal{A}_0^+$. On obtient

$$p_2 \Psi_0 = \mathcal{A}_0^+ p_2 [z_0] - \rho_1 p_2 H_0 - p_2 E_0 . \tag{6.2.19}$$

Si ε_0 est suffisamment petit, (6.2.1) implique que $\mathcal{A}_0^+$ reste un isomorphisme de l'image de $\mathcal{M}_0^+$ sur elle même. En désignant alors par $(\mathcal{A}_0^+)^{-1}$ l'isomorphisme réciproque et en définissant $Z_0 = p_2 Z_0 = (\mathcal{A}_0^+)^{-1}(\rho_1 p_2(H_0) + p_2(E_0))$, on a

$$(\mathcal{A}_0^+)^{-1} p_2 \Psi_0 = p_2[z_0] - Z_0 . \tag{6.2.20}$$

Avec (6.2.17), on en déduit que si $\Psi_0 = 0$ alors

$$[z_0] = \zeta_0(x') R_0^+ + Z_0 , \tag{6.2.21}$$

ce qui est l'expression de (6.2.13) pour $j = 0$.

Réciproquement, compte tenu de la définition de Z_0, si (6.2.21) a lieu, en projetant par p_2 on voit que $p_2 \Psi_0 = 0$. De plus, comme $p_1 Z_0 = 0$ on a nécessairement (6.2.17) et, compte tenu des définitions de μ_0 et E_0, (3.2.12) implique que $p_1 \Psi_0 = 0$.

b) Pour les compatibilités d'ordre supérieur la démonstration se fait par récurrence sur j. Par (6.1.6), on a

$$[u_{j+1}] = \sum_{l=0}^{j} C_j^l [\mathcal{A}_{j-l} z_l] + [\mathcal{B}_j] \tag{6.2.21}$$

alors que la $j+1$-ème condition de compatibilité (6.1.10) s'écrit.

$$[u_{j+1}] = \rho_{j+1} H_0 + \mathcal{U}_{j+1} \tag{6.2.22}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit que (6.2.22) est équivalente à une équation de la forme

$$\mathcal{A}_0^+ w - \rho_{j+1} H_0 = E_j \tag{6.2.23}$$

où $w = [z_j] - \sum_{k=0}^{j-1} C_j^k \zeta_k R_{j-k}^+$ et où E_j est une fonction de la forme annoncée. On raisonne comme dans a), en projetant par p_1 et p_2. □

6.3. Construction d'une famille de données initiales compatibles globales

On se propose de construire des fonctions $(u_0, \Phi_0) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3)$ pour chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$.

Proposition 6.3.1. — *On se donne des ensembles $\mathcal{B}_1^-$, $\mathcal{B}_2^\pm$ et $\mathcal{B}_3^-$ bornés respectivement dans $H^{2s+4}(\mathbb{R}^n_-)$, $H^{2s+5}(\mathbb{R}^n_\pm)$ et $H^{2s+3}(\mathbb{R}^{n-1})$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une famille de données initiales compatibles $\mathcal{F}^o(2s+3)$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et tout $(u_0^-, \Phi_0^+, \Phi_0^-, b_0)$ vérifiant*

$$u_0^- \in \mathcal{B}_1^-, \tag{6.3.1}$$

$$\Phi_0^\pm - x_n \in \mathcal{B}_2^\pm, \tag{6.3.2}$$

$$[\Phi_0 = 0], \tag{6.3.3}$$

$$b_0(x') \in \mathcal{B}_3, \tag{6.3.4}$$

il existe une fonction $\rho(t, x', x_n)$ de la forme (6.2.1) vérifiant $\rho(0, x', 0) = -\varepsilon\, e^{b_0(x')}$ et une fonction u_0^+ telles que $(u_0, \Phi_0, \rho) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3)$. De plus, on peut choisir ρ de sorte que :

$$\partial_n^k \partial_t^j \rho(0, x', 0) = 0 \quad \text{pour } k \geq 1 \quad \text{et} \quad k + j \leq 2s - 2. \tag{6.3.5}$$

Pour établir cette proposition, on définit

$$\rho_0(x', 0) = -\varepsilon e^{b_0(x')}, \quad u_0^+(x', 0) = u_0^-(x', 0) + \mathcal{U}_0(u_0^-, \partial_y' \Phi_0, \rho_0)$$

et on démontre d'abord le lemme suivant.

Lemme 6.3.2. — *Il existe des fonctions*

$$\phi_j(x'),\ z_{j-1}^-(x', 0),\ u_j^-(x', 0),\ \zeta_{j-1}(x'),\ \rho_j(x', 0),\ u_j^+(x', 0),\ [z_{j-1}],\ \partial_n^j u_0^+(x', 0)$$

définies sur l'arête $\{t = x_n = 0\}$ pour $j \in \{1, \ldots, 2s-1\}$, vérifiant les relations (6.1.10) (6.2.7) (6.2.8) (6.2.9) (6.2.12) (6.2.13). *De plus, les ϕ_j restent bornées dans $H^{2s+4-j}(\mathbb{R}^{n-1})$ et les fonctions z_{j-1}^-, u_j^-, ζ_{j-1}, u_j^+, $[z_{j-1}]$, $\partial_n^j u_0^+$ sont dans un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^{n-1})$. La fonction $\rho_j(x', 0)$ est de la forme*

$$\rho_j(x', 0) = \varepsilon\, e^{a_o(x', 0)} g_j(x') \tag{6.3.6}$$

où g_j appartient à un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^{n-1})$.

La notation $\partial_n^j u_0^+(x', 0)$ ne désigne pas ici une dérivée normale de u_0^+, mais une fonction définie sur l'arête, qu'on substitue à l'endroit voulu dans les formules (6.2.7) et suivantes.

Démonstration. — La construction se fait par récurrence sur j.

a) Pour $j = 1$, on définit, en utilisant les relations (6.1.6) à (6.1.9)

$$\phi_1 = \mathcal{F}_o^-(u_0^-, \partial'_y \Phi_0, \rho_0) \in H^{2s+3}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$z_0^- = \partial_n u_0^- / \partial_n \Phi_0^- \in H^{2s+2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$u_1^- = \mathcal{A}_0^- z_o^- + \mathcal{B}_0^-$$

On se donne arbitrairement ζ_0 dans un ensemble borné de $H^{2s+2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et on utilise (6.2.12) pour définir

$$\rho_1(x',0) = \zeta_0(x')\rho_0(x',0)\mu_0(u_0^-, \partial_y'\Phi_0, \rho_0) + F_1(u_0^-, \partial_y'\Phi_0, \rho_0) \cdot E_0.$$

On note que ρ_1 est bien de la forme (6.3.6) puisque $E_0 = 0$ quand $\rho_0 = 0$.

On détermine $u_1^+(x',0)$ de sorte que (6.1.10) soit vérifié

$$u_1^+(x',0) = u_1^-(x',0) + \rho_1 H_0 + \mathcal{U}_1.$$

Enfin, $[z_0]$ est défini par (6.2.13)

$$[z_0] = \zeta_0 R_0^+ + z_0$$

et on pose

$$\partial_n u_0^+(x',0) = \partial_n \Phi_0^+(x',0)[z_o] + \partial_n \Phi_0^+(x',0) z_o^-.$$

b) Supposons que l'on a construit sur $\{t = x_n = 0\}$ les fonctions :

$$\phi_k,\ z_{k-1},\ u_k^-,\ \zeta_{k-1}^-,\ \rho_k,\ u_k^+,\ [z_{k-1}],\ \partial_n^k u_0^+,$$

avec les régularités indiquées dans le lemme 6.3.2, pour tout k tel que $1 \le k \le j$. On pose $w_j^\pm(x') = (\partial_n \Phi_0^\pm)^{-j} \partial_n^j u_0^\pm(x',0)$. On construit alors dans cet ordre les fonctions

$$\phi_{j+1},\ z_j^-,\ u_{j+1}^-,\ \zeta_j,\ \rho_{j+1},\ u_{j+1}^+,\ [z_j],\ [w_{j+1}],\ \partial_n^{j+1} u_0^+.$$

Suivant (6.1.8), on définit

$$\phi_{j+1} = \mathcal{F}_j^-(u_0^-, \ldots, u_j^-, \partial_y'\Phi_0, \ldots, \partial_y'\phi_j, \rho_0, \ldots, \rho_j).$$

Les fonctions u_{j+1}^- et z_{j+1}^- sont définies par (6.2.7) et (6.2.8). Suivant (6.2.8), on pose

$$\begin{cases} u^- j + 1 = \mathcal{A}_0^{j+1} w_{j+1}^- + B_{j+1}^-, \\ z_j^- = (\mathcal{A}_0^-)^j w_{j+1}^- + Q_j^- \quad \text{avec} \quad w_{j+1}^- = (\partial_n \Phi_0^-)^{-j-1} \partial_n^{j+1} u_0^-. \end{cases}$$

On détermine maintenant ζ_j de sorte que les projections par p_1 des équations (6.2.8) et (6.2.13) soient satisfaites. On choisit arbitrairement une fonction scalaire α_j dans un borné de $H^{2s+2-j}(\mathbb{R}^{n-1})$ et on définit

$$p_1[w_{j+1}] = \alpha_j(x') R_0^+. \tag{6.3.7}$$

En utilisant les relations $\partial_n^{j+1} u_0^+ = (\partial_n \Phi_0^+)^{j+1} w_{j+1} = (\partial_n \Phi_0^+)^{j+1}([w_{j+1}] + w_{j+1}^-)$, on voit que l'équation (6.2.8) à satisfaire s'écrit

$$[z_j] = (\mathcal{A}_0^+)^j [w_{j+1}] + [\mathcal{A}_0^j] w_{j+1}^- + [Q_j].$$

Comme $\mathcal{A}_0^+$ et p_1 commutent, sa projection par p_1 donne

$$p_1[z_j] = (\mathcal{A}_0^+)^j p_1[w_{j+1}] + \mathcal{H}_j = \widetilde{\alpha}_j R_0^+ + \mathcal{H}_j, \tag{6.3.8}$$

où $\mathcal{H}_j = p_1([\mathcal{A}_0^j] w_{j+1}^- + [Q_j])$ est déterminé grâce aux étapes précédentes et $\widetilde{\alpha}_j$ s'exprime à l'aide de α_j.

Par ailleurs, la projection de (6.2.13) par p_1 s'écrit

$$p_1[z_j] = \zeta_j R_0^+ + \sum_{l=0}^{j-1} C_j^l \zeta_l(x') R_{j-l}^+. \tag{6.3.9}$$

Les R_{j-l}^+ sont déterminés par les étapes précédentes. Comme p_1 projette sur $\mathbb{R}R_0^+$, on voit qu'il existe un unique $\zeta_j(x')$ tel que (6.3.8) et (6.3.9) soient satisfaites. En outre, ζ_j reste dans un borné de $H^{2s+2-j}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Connaissant ζ_j, on détermine ensuite ρ_{j+1} par (6.2.12). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on remarque que ρ_{j+1} est bien de la forme (6.3.6) car $E_j = 0$ quand $\rho_0 = \rho_1 = \cdots = \rho_j = 0$. En projetant (6.2.13) par p_2, on détermine $p_2[z_j]$. Avec (6.3.9), on en déduit que l'équation (6.2.13) est satisfaite.

On définit alors $u_{j+1}^+(x', 0)$ de sorte que la relation (6.1.10) soit satisfaite

$$u_{j+1}^+ = u_{j+1}^- + \rho_{j+1} H_0 + \mathcal{U}_{j+1}.$$

Il reste à déterminer $\partial_n^{j+1} u_0^+ = (\partial_n \Phi_0^+)^{j+1}([w_{j+1}] + w_{j+1}^-)$ pour que la relation (6.2.8) soit satisfaite. Par (6.3.8), on sait déjà que sa projection sur p_1 l'est. Comme $\mathcal{A}_0^+$ est un isomorphisme de l'image de $\mathcal{M}_0^+$ sur elle même, la projection par p_2 de (6.2.8)

$$p_2[z_j] = (\mathcal{A}_0^+)^j p_2[w_{j+1}] + p_2\Big([\mathcal{A}_0^j] w_{j+1}^- + [Q_j]\Big) \tag{6.3.11}$$

détermine $p_2[w_{j+1}]$. Avec (6.3.7) on connaît donc $[w_{j+1}]$, et donc $\partial_n^{j+1} u_0^+$.

On a construit $\Phi_{j+1} = \Phi_{j+1}^-$ par (6.1.8). La propriété (6.1.12) montre que $\Phi_{j+1} = \Phi_{j+1}^+$ vérifie aussi (6.1.9). □

Pour construire $\rho(t, x', x_n)$, on utilise le résultat suivant.

Lemme 6.3.3. — *Pour $j \in \{0, \dots, 2s-1\}$, considérons ρ_j vérifiant* (6.2.6). *Il existe une fonction $\widetilde{\rho}(t, x')$ de la forme*

$$\widetilde{\rho}(t, x') = -\varepsilon e^{a(t,x')} \tag{6.3.12}$$

où $a(t, x')$ appartient à un borné fixé de $H^{2s+3}(\mathbb{R}^n)$, telle que :

$$\partial_t^j \widetilde{\rho}_{|t=0} = \rho_j(x', 0) \qquad \textit{pour} \quad 0 \le j \le 2s-1.$$

Démonstration. — Si $h < 0$ et si $a = \ln(-h/\varepsilon)$, il existe des fonctions C^∞ de leurs arguments, f_j, telles que :

$$\partial_t^j a_{|t=0} = f_j(h_0/\varepsilon, h_1/\varepsilon, \dots, h_j/\varepsilon).$$

Connaissant les ρ_j, on définit les fonctions $a_j(x') = f_j(\rho_0/\varepsilon, \rho_1/\varepsilon, \dots, \rho_j/\varepsilon)$, pour $0 \le j \le 2s-1$. Alors, $a_j \in H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^{n-1})$ et il existe $a(t, x')$ tel que $\partial_t^j a_{|t=0} = a_j$. La fonction $\widetilde{\rho}(t, x') = -\varepsilon e^{a(t,x')}$ vérifie les propriétés annoncées. □

Démonstration de la proposition 6.3.1. — Une fois que l'on connaît les fonctions $h_j(x') = \partial_n^j u_0^+(x',0) \in H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^{n-1})$ on définit $u_0^+(x',x_n)$ sur $\mathbb{R}^n_+$ en relevant de manière classique les traces $h_j(x')$. On obtient ainsi une fonction $u_0^+(x',x_n)$ appartenant à un borné fixé de $H^{2s+3}(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour construire ρ, on détermine a comme au lemme 6.3.3 et on détermine $A \in H^{2s+3}(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifiant

$$A_{|x_n=0} = a \quad \text{et} \quad \partial_n^k A_{|x_n=0} = 0 \quad \text{pour } k \geq 1. \tag{6.3.13}$$

On définit

$$\rho(t,x',x_n) = -\varepsilon e^{A(t,x',x_n)}. \tag{6.3.14}$$

Il en résulte que pour $k \geq 1$ et $j + k \leq 2s - 2$,

$$\partial_n^k \rho_j(x',0) = 0. \tag{6.3.15}$$

On construit ensuite les fonctions $u_j^\pm, \Phi_j^\pm, z_{j-1}^\pm$ sur $\mathbb{R}^n_+$ et $\mathbb{R}^n_-$ à partir de $u_0^\pm, \Phi_0^\pm$ et ρ au moyen des formules (6.2.7) (6.2.8) et (6.2.9). La construction et la proposition 6.2.3 impliquent que $(u_0, \Phi_0) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3)$. $\square$

6.4. Construction d'une famille de solutions approchées

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème 3.1.2. Pour cela, on se donne une famille de données initiales compatibles $\mathcal{F}^o(2s+3)$ et on considère $(u_0, \Phi_0) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3)$. On désigne par $\rho = -\varepsilon\, e^A$ la fonction associée comme indiqué en (6.2.1). On construit alors dans cet ordre les fonctions :

$$u^-(t,x',x_n),\ \Phi^-(t,x',x_n),\ z^-(t,x',x_n),\ u^+(t,x',0),\ \Phi^-(t,x',0),$$
$$z^+(t,x',0),\ \partial_n\Phi^-(t,x',0), \partial_n u^+(t,x',0),\ u^+(t,x',x_n),\ \Phi^+(t,x',x_n).$$

a) Construction de $u^-(t,x',x_n)$. — On détermine $u_j^\pm(x',x_n), \Phi_j^\pm(x',x_n), z_{j-1}^\pm(x',x_n)$ sur $\mathbb{R}^n_+$ et $\mathbb{R}^n_-$ à partir de (u_0, Φ_0, ρ) en appliquant les formules (6.2.7) (6.2.8) (6.2.9). Puisque $u_0^- \in H^{2s+3}$, $\Phi_0^- \in H^{2s+4}$ et $\rho = -\varepsilon\, e^A$ avec $A \in H^{2s+3}(\Omega_{T_o'T_1'})$, les formules (6.2.7) (6.2.8) (6.2.9) montrent que :

(6.4.2) u_j^- est dans un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^n_-)$ pour $1 \leq j \leq 2s-1$,
(6.4.3) u_j^+ est dans un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $1 \leq j \leq 2s-1$,
(6.4.4) $\Phi_1^- - \sigma_\varepsilon$ est dans un borné fixé de $H^{2s+2}(\mathbb{R}^n_-)$,
$\Phi_1^+ - \sigma_\varepsilon$ est dans un borné fixé de $H^{2s+2}(\mathbb{R}^n_+)$,
Φ_j^- est dans un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^n_-)$ pour $2 \leq j \leq 2s-1$,
Φ_j^+ est dans un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $2 \leq j \leq 2s-1$,
(6.4.5) z_{j-1}^- est dans un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^n_-)$ pour $1 \leq j \leq 2s-1$,
z_{j-1}^+ est dans un borné fixé de $H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $1 \leq j \leq 2s-1$.

On définit $u^-(t, x', x_n)$ en relevant de manière classique les traces $u_j^- \in H^{2s+3-j}(\mathbb{R}^n_-)$ pour $0 \leq j \leq 2s-1$. La fonction $u^-(t, x'x_n)$ ainsi obtenue est dans un borné fixé de $H^{2s+3}(\mathbb{R}^{n+1}_-)$

b) Construction de $\Phi^-(t, x', x_n)$. — Lorsque u^- est connue, on détermine $\Phi^-(t, x', x_n)$ sur $\Omega^-_{T_oT_1} =]T_o, T_1[\times \mathbb{R}^n_-$ avec T_o et T_1 tels que $T'_o < T_o < 0 < T_1 < T'_1$ en résolvant l'équation du premier ordre

$$\partial_t \Phi^- = \lambda(u^- + \mathcal{U}_0(u^-, \partial'_y \Phi^-, \rho), u^-, \partial'_y \Phi^-) \quad \text{sur } \Omega^-_{T_oT_1}, \tag{6.4.6}$$

avec la condition initiale :

$$\Phi^-_{|t=0} = \Phi^-_0(x', x_n). \tag{6.4.7}$$

Pour T_o et T_1 assez petits, on obtient une solution $\Phi^-(t, x', x_n)$ telle que

$$\Phi^- - \underline{\Phi}_\varepsilon \quad \text{appartient à un borné de} \quad H^{2s+3}(\Omega^-_{T_oT_1}). \tag{6.4.8}$$

c) Construction de $z^-(t, x', x_n)$. — u^- et Φ^- étant construites, on définit

$$z^- = \frac{\partial_n u^-}{\partial_n \Phi^-} \tag{6.4.9}$$

qui appartient à un borné de $H^{2s+2}(\Omega^-_{T_oT_1})$.

d) Construction de $u^+(t, x', 0)$. — On définit $u^+(t, x', 0)$ par la formule :
(6.4.10)

$$u^+(t, x', 0) = u^-(t, x', 0) + \mathcal{U}_0(u^-, \partial'_y \phi^-, \rho) = u^-(t, x', 0) + \rho U^-(u^-, \partial'_y \phi^-, \rho).$$

D'après (6.1.5) on a $[u_1] = \rho(t, x', 0)$ et, d'après (6.4.8), $\partial'_y \phi^-(t, x', 0) \in H^{2s+1}(\omega^-_{T_oT_1})$. Il en résulte que

$$u^+(t, x', 0) - \underline{u}^+_\varepsilon \quad \text{appartient à un borné de} \quad H^{2s+1}(\omega^-_{T_oT_1}). \tag{6.4.11}$$

e) Construction de $\Phi^+(t, x', 0)$. — On définit $\Phi^+(t, x', 0)$ par la formule :

$$\Phi^+(t, x', 0) = \Phi^-(t, x', 0) = \phi(t, x'). \tag{6.4.12}$$

On remarque que sur $\{x_n = 0\}$, ϕ est solution de :

$$\partial_t \phi = \lambda(u^+, u^-, \partial'_y \phi)$$

avec la condition initiale $\phi_{|t=0} = \Phi^+_0(x', 0) = \Phi^-_0(x', 0)$.

f) Construction de $z^+(t, x', 0)$. — On utilise les notations de la proposition 6.2.3. Sur $\{t = x_n = 0\}$, les fonctions $[z_j]$ vérifient (6.2.13) pour $0 \leq j \leq 2s-2$. On construit par relèvement des traces, une fonction $\zeta(t, x')$ telle que :

$$\partial_t^j \zeta_{|t=0} = \zeta_j(x') \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq 2s-2. \tag{6.4.13}$$

On peut choisir cette fonction de sorte qu'elle reste dans un borné de $H^{2s+1}(\mathbb{R}^n)$.

On construit de même une fonction $w_2(t, x')$ telle que :

$$\partial_t^j w_{2|t=0} = Z_j(x') \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq 2s-2. \tag{6.4.14}$$

D'après la proposition 6.2.3, les fonctions Z_j sont de la forme $Z_j = \varepsilon\, g_j$ avec g_j dans un borné de $H^{2s+1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Avec le lemme 6.3.3, on peut choisir w_2 de la forme :

$$w_2(t,x') = \varepsilon\, g(t,x') \tag{6.4.15}$$

où g appartient à un borné de $H^{2s+1}(\mathbb{R}^n)$. On définit ensuite la fonction :

$$w(t,x') = \zeta(t,x')R(u^+(t,x',0), \partial'_y\phi(t,x')) + w_2(t,x'). \tag{6.4.16}$$

Il est clair que :

$$\partial_t^j w_{|t=0} = [z_j]. \tag{6.4.17}$$

Finalement, on définit

$$z^+(t,x',0) = z^-(t,x',0) + w(t,x'). \tag{6.4.18}$$

g) Construction de $\partial_n\Phi^+(t,x',0)$. — La fonction $\Phi^+(t,x',x_n)$ doit être solution de

$$\partial_t\Phi^+ = \lambda(u^+, u^+ - \rho\, U^+(u^+, \partial'_y\Phi^+, \rho), \partial'_y\Phi^+) = \mathcal{F}^+(u^+, \partial'_y\Phi^+, \rho) \tag{6.4.19}$$

sur $\{x_n \geq 0\}$. En dérivant cette équation par rapport à x_n, on obtient pour $\phi_n(t,x') = \partial_n\Phi^+(t,x',0)$ une équation de la forme :

$$\begin{aligned}\partial_t\phi_n = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j(u^+, \partial'_y\phi^+, \rho)\partial_j\phi_n &+ \frac{\partial\mathcal{F}^+}{\partial u}(u^+, \partial'_y\phi^+, \rho)\partial_n u^+ \\ &+ \frac{\partial\mathcal{F}^+}{\partial\rho}(u^+, \partial'_y\phi^+, \rho)\partial_n\rho.\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

On exprime $\partial_n u^+(t,x',0)$ en fonction de $\partial_n\Phi^+(t,x',0)$ en posant

$$\partial_n u^+ = z^+\partial_n\Phi^+ = z^+\phi_n \qquad \text{sur} \quad \{x_n = 0\}. \tag{6.4.21}$$

Étant donné que $z^+(t,x',0)$ a été déterminé en f) et que $\partial_n\rho(t,x',0) = 0$, on obtient pour $\phi_n(t,x')$ une équation linéaire du premier ordre

$$\partial_t\phi_n = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j(u^+, \partial'_y\phi^+, \rho)\partial_j\phi_n + \frac{\partial\mathcal{F}^+}{\partial u}(u^+, \partial'_y\phi^+, \rho)\cdot z^+\cdot\phi_n \tag{6.4.22}$$

et la condition initiale :

$$\phi_{n|t=0} = \partial_n\Phi_0^+(x',0). \tag{6.4.23}$$

On résout cette équation sur $[T_o, T_1]$ et on utilise la notation $\partial_n\Phi^+(t,x',0) = \phi_n(t,x')$. Alors

(6.4.24) $\partial_n\Phi^+(t,x',0) - \partial_n\underline{\Phi}_\varepsilon$ appartient à un borné de $H^{2s+1}(]T_o, T_1[\times\mathbb{R}^{n-1})$.

h) Construction de $\partial_n u^+(t,x',0)$. — On définit $\partial_n u^+(t,x',0)$ par la formule :

$$\partial_n u^+(t,x',0) = z^+(t,x',0)\partial_n\Phi^+(t,x',0), \tag{6.4.25}$$

et $\partial_n u^+(t,x',0)$ appartient à un borné $H^{2s+1}(]T_o, T_1[\times\mathbb{R}^{n-1})$.

i) Construction de $u^+(t,x',x_n)$. — On construit $u^+(t,x',x_n)$ en procédant comme dans [Mél]. On désigne par g_0 et g_1 les fonctions définies par :

$$g_0(t,x') = u^+(t,x',0) \in H^{2s+1}(\mathbb{R}^n), \tag{6.4.26}$$

$$g_1(t,x') = \phi_n(t,x')z^+(t,x',0) \in H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times \mathbb{R}^{n-1}). \tag{6.4.27}$$

On utilise ensuite le ensuite le lemme suivant.

Lemme 6.4.1. — *Les fonctions g_0 et g_1 vérifient sur l'arête $\{t = x_n = 0\}$ les conditions de compatibilités suivantes :*

$$\partial_t^j g_{0|t=0} = u_j^+{}_{|x_n=0} \quad \textit{pour} \quad 0 \le j \le 2s-1, \tag{6.4.28}$$

$$\partial_t^j g_{1|t=0} = (\partial_n u_j^+)_{|x_n=0} \quad \textit{pour} \quad 0 \le j \le 2s-1. \tag{6.4.29}$$

Démonstration. — Puisque les données (u_0,Φ_0) sont dans $\mathcal{F}_\varepsilon^o$, la condition (6.4.28) découle de (6.1.10). Pour établir (6.4.29), on remarque d'abord que :

$$\partial_n u_j^+ = \sum_{l=0}^{j} C_j^l z_l^+ \partial_n \Phi_{j-l}^+. \tag{6.4.30}$$

En dérivant (6.4.27) par rapport à t, il vient

$$\partial_t^j g_{1|t=0} = \sum_{l=0}^{j} C_j^l z_l^+(x',0)\partial_t^{j-l}\phi_n(0,x'). \tag{6.4.31}$$

La relation (6.4.29) résulte alors de l'égalité :

$$\partial_t^j \phi_n(0,x') = \partial_n \Phi_j^+(x',0) \quad \text{pour } 0 \le j \le 2s-1. \tag{6.4.32}$$

□

Par relèvement de traces (voir par exemple [Li-Ma], chapitre.4), le lemme 6.4.1 montre qu'il existe une fonction $u^+(t,x',x_n) \in H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times \mathbb{R}^n_+)$ telle que :

$$\begin{cases} \Gamma_n(\partial_n u^+) = g_1(t,x') & \text{sur }]T_o,T_1[\times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \Gamma_n(u^+) = g_0(t,x') & \text{sur }]T_o,T_1[\times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \partial_t^j u^+_{|t=0} = u_j^+(x',x_n) & \text{sur } \mathbb{R}^n_+ \text{ pour } 0 \le j \le 2s-1. \end{cases} \tag{6.4.33}$$

j) Construction de $\Phi^+(t,x',x_n)$. — La fonction u^+ étant déterminée sur $\Omega^+_{T_oT_1} =]T_o,T_1[\times \mathbb{R}^n_+$, on détermine Φ^+ en résolvant l'équation :

$$\partial_t \Phi^+ = \lambda(u^+, u^+ - \mathcal{U}_0^+(u^+,\partial_y'\Phi^+,\rho), \partial_y'\Phi^+) \tag{6.4.34}$$

avec la condition initiale :

$$\Phi^+{}_{|t=0} = \Phi_0^+(x',x_n). \tag{6.4.35}$$

Quitte à diminuer T_o et T_1, mais uniformément par rapport aux données, on obtient alors une solution sur $\Omega^+_{T_oT_1}$ telle que :

$$\Phi^+ - \underline{\Phi}_\varepsilon \text{ appartient à un borné de } H^{2s+1}(\Omega^+_{T_oT_1}). \tag{6.4.36}$$

Les fonctions u, Φ et ρ que nous venons de construire, vérifient bien les conditions (3.1.1) à (3.1.8) du paragraphe 3.1. Pour terminer la preuve du théorème 3.1.2, il reste à démontrer (3.1.9) ce qui est l'objet du lemme suivant.

Lemme 6.4.2. — *Le saut de* $F = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j u + \mathcal{M}(u, \partial_y \Phi)(\partial_n u / \partial_n \Phi)$ *est de la forme :*

$$[F] = \varepsilon H \tag{6.4.37}$$

où H reste dans un borné fixé de $H^{2s-1}(\omega_{T_o T_1})$.

Démonstration. — D'après (6.4.10), $[u] = \rho U^-(u, \partial'_y \Phi, \rho)$ et $\rho = -\varepsilon e^a$. Les termes $[A_j(u)\partial_j u]$ sont donc bien de la forme (6.4.37). Comme $[\mathcal{M}z] = \mathcal{M}^+[z] + [\mathcal{M}]z^-$, il suffit de prouver que $\mathcal{M}^+[z]$ est aussi de la forme (6.4.37). Compte tenu de (6.4.16) on a :

$$\mathcal{M}^+[z] = \zeta \mathcal{M}^+ R^+ + \mathcal{M}^+ w_2 \tag{6.4.38}$$

avec $\mathcal{M}^+ = A_0(u^+)(G(u^+, \partial'_y \phi) - \partial_t \phi I)$ et $R^+ = R(u^+, \partial'_y \phi)$. Le lemme découle alors de (6.4.15) et de l'identité

$$\mathcal{M}^+ R^+ = (\lambda(u^+, \partial'_y \phi) - \lambda(u^+, u^-, \partial'_y \phi)) A_0(u^+) R^+. \tag{6.4.39}$$

□

6.5. Données initiales compatibles locales. Prolongement

Dans ce paragraphe, on se propose de construire des données initiales compatibles globales qui prolongent des données initiales compatibles locales données ce qui établira la proposition 2.4.1. Soit Ω une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine et $\mathcal{F}^o(2s+3, \Omega)$, une famille de données initiales compatibles sur Ω.

Proposition 6.5.1. — *Il existe une boule ouverte $\Omega_1 \subset \Omega$ centrée à l'origine, $T'_o < 0$, $T'_1 > 0$ et une famille de données initiales globales $\mathcal{F}^o(2s+3)$, tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et tout $(u_0, \Phi_0, \rho) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3, \Omega)$, il existe $(\widetilde{u}_0, \widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\rho}) \in \mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+2)$ tel que*

$$\begin{array}{lll} \widetilde{u}_0^+ = u_0^+, & \widetilde{\Phi}_0^+ = \Phi_0^+ & \textit{sur } \Omega_1^+, \\ \widetilde{u}_0^- = u_0^-, & \widetilde{\Phi}_0^- = \Phi_0^- & \textit{sur } \Omega_1^-, \\ \widetilde{\rho} = \rho & & \textit{sur }]T'_o, T'_1[\times \Omega_1, \end{array}$$

et pour $0 \leq j \leq 2s-1$

$$\widetilde{u}_j^\pm = u_j^\pm, \qquad \widetilde{\Phi}_j^\pm = \Phi_j^\pm, \qquad \widetilde{z}_{j-1}^\pm = z_{j-1}^\pm \qquad \textit{sur } \Omega_1^\pm.$$

Démonstration

a) Construction de $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{u}_j^-$, $\widetilde{\Phi}_j^-$, $\widetilde{z}_j^-$, $\widetilde{\Phi}_0^+$. — On se donne une fonction de troncature $\chi(x', x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\begin{aligned} \chi(x', x_n) &= 1 \qquad \text{si } (x', x_n) \in \Omega_1, \\ \chi(x', x_n) &= 0 \qquad \text{si } (x', x_n) \notin \Omega. \end{aligned}$$

On définit $\widetilde{\rho} = -\varepsilon e^{\widetilde{A}}$ sur $]T_o', T_1'[\times \mathbb{R}^n$ avec

$$\widetilde{A}(t, x', x_n) = \chi(x', x_n)\, A(t, x', x_n).$$

On définit ensuite $\widetilde{u}_0^-$, $\widetilde{\Phi}_0^-$, $\widetilde{\Phi}_0^+$ sur $\mathbb{R}_-^n$, par troncature et prolongement en posant

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_0^-(x', x_n) &= \chi(x', x_n)\, u_0^-(x', x_n), \\ \widetilde{\Phi}_0^-(x', x_n) &= \chi(x', x_n)\, \Phi_0^-(x', x_n), \qquad (6.5.1) \\ \widetilde{\Phi}_0^+(x', x_n) &= \chi(x', x_n)\, \Phi_0^+(x', x_n). \end{aligned}$$

Par construction, on a bien $\widetilde{u}_0^- = u_0^-$, $\widetilde{\Phi}_0^\pm = \Phi_0^\pm$ sur $\Omega_1^\pm$. Les relations (6.2.7) (6.2.8) et (6.2.9) permettent de construire pour $1 \le j \le 2s-1$ des fonctions $\widetilde{u}_j^-$, $\widetilde{\Phi}_j^-$ et $\widetilde{z}_{j-1}^-$ sur $\mathbb{R}_-^n$ telles que

$$\widetilde{u}_j^- = u_j^- \qquad \widetilde{\Phi}_j^- = \Phi_j^- \qquad \widetilde{z}_{j-1}^- = z_{j-1}^- \qquad \text{sur} \quad \Omega_1^- \qquad (6.5.2)$$

b) Construction des fonctions $\widetilde{u}_j^+(x', 0)$ et $\partial_n^j \widetilde{u}_0^+(x', 0)$. — On construit d'abord les traces sur $\{x_n = 0\}$ des fonctions $\partial_n^j \widetilde{u}_0^+$ et $\widetilde{w}_j^+$, où l'on utilise la notation $w_j = (\partial_n \Phi_0)^{-j} \partial_n^j u_0$. En notant $p_1 = p_1(u_0^+, \partial_y' \Phi_0)$ le projecteur sur $\operatorname{Ker} \mathcal{M}_0^+ = \mathbb{R} R_0^+ = R(u_0^+, \partial_y' \Phi_0)$ parallèlement à $\operatorname{Im} \mathcal{M}_0^+$, il existe une fonction $\alpha_j(x') \in H^{2s+1-j}(\omega)$ telle que :

$$p_1[w_{j+1}] = \alpha_j(x') R_0^+. \qquad (6.5.3)$$

On définit alors

$$\widetilde{\alpha}_j(x') = \chi(x', 0)\, \alpha_j(x') \qquad (6.5.4)$$

On pose $\widetilde{\zeta}_0(x') = \widetilde{\alpha}_o(x')$ et on construit $\widetilde{u}_0^+(x', 0)$, $[\widetilde{z}_0(x', 0)]$, $\partial_n \widetilde{u}_0^+(x', 0)$ en utilisant les formules (6.1.10) et (6.2.13). On construit ensuite dans cet ordre, par récurrence sur j et en procédant comme au paragraphe 6.3 les fonctions :

$$\widetilde{\zeta}_{j-1}(x'),\ \widetilde{u}_j^+(x', 0),\ [\widetilde{z}_{j-1}(x', 0)],\ \partial_n \widetilde{u}_j^+(x', 0) \quad \text{pour} \quad 1 \le j \le 2s-1.$$

Là où $\chi = 1$, on retrouve évidemment les fonctions associées à (u_0, Φ_0, ρ).

c) Construction de $\widetilde{u}_0^+(x', x_n)$. — À partir des $\widetilde{h}_j(x') = \partial_n^j \widetilde{u}_0^+(x', 0) \in H^{2s+2-j}(\mathbb{R}^{n-1})$, sachant que $\widetilde{h}_j = \partial_n^j u_0^+$ sur $\Omega_1 \cap \{x_n = 0\}$, on détermine $\widetilde{u}_0^+$ sur $\mathbb{R}_+^n$ en construisant, par relèvement des traces $\widetilde{h}_j$, une fonction qui coïncide avec la fonction $u_0^+(x', x_n)$ sur une demi-boule Ω_2^+. Cette construction est possible grâce au lemme suivant que l'on démontre en utilisant une partition de l'unité de l'ensemble compact $\overline{\Omega_1^+} \subset \mathbb{R}_+^n$.

Lemme 6.5.2. — *Il existe une boule ouverte centrée à l'origine $\Omega_2 \subset \Omega_1$ et une fonction $v(x', x_n) \in H^{2s+2}(\mathbb{R}^n_+)$ telle que*

i) $v(x', x_n) = u_0^+(x', x_n)$ *sur* Ω_2^+

ii) $\partial_n^j v(x', 0) = \widetilde{h}_j(x')$ *sur* $\mathbb{R}^{n-1}$ *pour* $0 \leq j \leq 2s - 1$

On définit alors $\widetilde{u}_0^+(x', x_n) \in H^{2s+2}(\mathbb{R}^n_+)$ en posant $\widetilde{u}_0^+(x', x_n) = v(x', x_n)$ et la proposition 6.5.1 est démontrée. □

6.6. Solutions approchées locales. Prolongement

Le but de ce paragraphe est de construire des solutions approchées globales qui prolongent des solutions approchées locales données ce qui établira la proposition 3.1.4. On se donne donc une famille $\mathcal{F}^a(2s+4,]T_o, T_1[\times \Omega)$ de solutions approchées locales au sens de la définition 3.1.1.

Proposition 6.6.1. — *Étant donnés $T_o < 0 < T_1$, et une boule ouverte $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ centrée à l'origine, il existe $T_2 > 0$, une boule ouverte $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ centrée à l'origine et une famille de solutions approchées globales, $\mathcal{F}^a(2s+1,]-T_2, T_2[\times \mathbb{R}^n)$ tels que*

i) $T_o \leq -T_2 < 0 < T_2 \leq T_1$ *et* $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

ii) Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et tout $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+4,]T_o, T_1[\times \Omega_1)$ il existe $(\widetilde{u}_a, \widetilde{\Phi}_a) \in \mathcal{F}^a_\varepsilon(2s+1)$ telle que

$$u_a = \widetilde{u}_a \quad \textit{et} \quad \Phi_a = \widetilde{\Phi}_a \qquad \textit{sur} \quad]-T_2, T_2[\times \Omega_2.$$

Démonstration. — Pour simplifier, nous noterons (u, Φ) au lieu de (u_a, Φ_a). Le couple $(u_0, \Phi_0) = (u_{|t=0}, \Phi_{|t=0})$ est un couple de données compatibles locales et en appliquant la proposition 6.5.1, on peut construire des fonctions $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{\Phi}_0$ et $\widetilde{\rho}$ telles que

(6.6.1) $(\widetilde{u}_0, \widetilde{\Phi}_0)$ sont des données compatibles globales appartenant à $\mathcal{F}^o_\varepsilon(2s+3)$.

De plus, il existe une boule ouverte $\Omega_2 \subset \Omega_1$ telle que

$$\widetilde{u}_0 = u_0, \quad \widetilde{\Phi}_0 = \Phi_0 \quad \text{sur } \Omega_2, \quad \widetilde{\rho} = \rho \quad \text{sur }]T_o, T_1[\times \Omega_2. \tag{6.6.2}$$

Nous construisons maintenant les solutions approchées $\widetilde{u}^\pm$ et $\widetilde{\Phi}^\pm$ en procédant par étapes.

a) Construction de $\widetilde{u}^-(t, x', x_n)$. — On construit tout d'abord les fonctions $\widetilde{u}_j^\pm(x', x_n)$, $\widetilde{\Phi}_j^\pm(x', x_n)$, $\widetilde{z}_{j-1}^\pm(x', x_n)$ sur $\mathbb{R}^n_+$ et $\mathbb{R}^n_-$ à partir de $(\widetilde{u}_0, \widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\rho})$ en appliquant les formules (6.2.7) (6.2.8) (6.2.9). En utilisant une partition de l'unité de l'ensemble compact $\overline{\Omega_2^-} \subset \mathbb{R}^n_-$, on démontre le résultat suivant.

Lemme 6.6.2. — *Il existe $T_2 > 0$ vérifiant $T_o \leq -T_2 < 0 < T_2 \leq T_1$ et une fonction $\widetilde{u}^-(t, x', x_n) \in H^{2s+3}(]-T_o, T_1[\times \mathbb{R}^n_-)$ tels que*

i) $\widetilde{u}^- = u^-$ *sur* $]-T_2, T_2[\times \Omega_2^-$,

ii) *pour* $0 \leq j \leq 2s-1$, $\partial_t^j \widetilde{u}^-_{|t=0} = \widetilde{u}_j^-(x', x_n)$ *sur* $\mathbb{R}^n_-$).

b) Construction de $\widetilde{\Phi}^-(t,x',x_n)$. — Lorsque $\widetilde{u}^-$ est connue, on détermine $\widetilde{\Phi}^-(t,x',x_n)$ en résolvant l'équation du premier ordre

$$\partial_t\widetilde{\Phi}^- = \lambda(\widetilde{u}^- + \mathcal{U}_0(\widetilde{u}^-,\partial'_y\widetilde{\Phi}^-,\widetilde{\rho}),\widetilde{u}^-,\partial'_y\widetilde{\Phi}^-), \tag{6.6.3}$$

avec la condition initiale

$$\widetilde{\Phi}^-_{|t=0} = \widetilde{\Phi}^-_o(x',x_n). \tag{6.6.4}$$

Il existe $T'_1 > 0$, avec $T_o \leq -T'_1 < 0 < T'_1 < T_1$, tel que la solution de (6.6.3) (6.6.4) existe sur $]-T'_1,T'_1[\times\mathbb{R}^n_-$ et vérifie

$$\widetilde{\Phi}^- - \underline{\Phi}_\varepsilon \text{ appartient à un borné de } H^{2s+3}(]-T'_1,T'_1[\times\mathbb{R}^n_-). \tag{6.6.5}$$

De plus, par vitesse finie de propagation, quitte à diminuer T_2 et Ω_2, on a $\widetilde{\Phi}^- = \Phi^-$ sur $]-T_2,T_2[\times\Omega_2^-$.

c) Construction de $\widetilde{z}^-(t,x',x_n)$. — $\widetilde{u}^-$ et $\widetilde{\Phi}^-$ étant construites, on définit

$$\widetilde{z}^- = \frac{\partial_n\widetilde{u}^-}{\partial_n\widetilde{\Phi}^-} \tag{6.6.5}$$

qui reste dans un borné de $H^{2s+2}(]-T_2,T_2[\times\mathbb{R}^n_-)$.

d) Construction de $\widetilde{u}^+(t,x',0)$. — On définit $\widetilde{u}^+(t,x',0)$ par la formule :

$$\widetilde{u}^+(t,x',0) = \widetilde{u}^-(t,x',0) + \widetilde{\rho}U^-(\widetilde{u}^-,\partial'_y\widetilde{\phi}^-,\widetilde{\rho}). \tag{6.6.6}$$

D'après (6.1.5), on a donc $[\widetilde{u}_1] = \widetilde{\rho}(t,x',0)$. De plus

$$\widetilde{u}^+(t,x',0) - \underline{u}^+_\varepsilon \text{ appartient à un borné de } H^{2s+1}(]-T_2,T_2[\times\mathbb{R}^{n-1}). \tag{6.6.7}$$

e) Construction de $\widetilde{\Phi}^+(t,x',0)$. — On définit $\widetilde{\Phi}^+(t,x',0)$ sur $]-T_2,T_2[\times\mathbb{R}^{n-1}$ par la formule :

$$\widetilde{\Phi}^+(t,x',0) = \widetilde{\Phi}^-(t,x',0) = \widetilde{\phi}(t,x'). \tag{6.6.8}$$

D'après (6.6.3) et (6.6.6), $\widetilde{\phi}$ vérifie sur $\{x_n = 0\}$

$$\partial_t\widetilde{\phi} = \lambda(\widetilde{u}^+,\widetilde{u}^-,\partial'_y\widetilde{\phi})$$

avec la condition initiale $\widetilde{\phi}_{|t=0} = \widetilde{\Phi}^+_0(x',0) = \widetilde{\Phi}^-_0(x',0)$.

f) Construction de $\widetilde{z}^+(t,x',0)$. — On considère la matrice $\mathcal{M}^+_1 = \lambda(u^+,\partial'_y\phi) - G(u^+,\partial'_y\phi)$ dont la restriction à $t=0$ est la matrice $\mathcal{M}^+_0$ de (6.2.11). On note encore p_1 le projecteur sur $\operatorname{Ker}\mathcal{M}^+_1$ parallèlement à $\operatorname{Im}\mathcal{M}^+_1$. Sur l'ouvert $]T_o,T_1[\times\omega_1$, le saut $[z(t,x',0)]$ est défini et appartient à $H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\omega_1)$. On décompose $[z(t,x',0)]$ en

$$[z] = p_1[z] + (I-p_1)[z] = w_1 + w_2. \tag{6.6.9}$$

Étant donné que $\mathcal{F}_1$ est engendré par $R^+ = R(u^+,\partial'_y\phi)$, il existe une fonction $\zeta(t,x') \in H^{2s+1}(]T_o,T_1[\times\omega_1)$ telle que

$$w_1 = p_1[z] = \zeta(t,x')R(u^+,\partial'_y\phi) \quad \text{sur }]T_o,T_1[\times\omega_1. \tag{6.6.10}$$

Puisque les fonctions $\widetilde{u}_0$ et $\widetilde{\Phi}_0$ sont des données compatibles, il existe, d'après la proposition 6.2.3, des fonctions $\widetilde{\zeta}_j$, $\widetilde{Z}_j \in H^{2s+1-j}(\mathbb{R}^{n-1})$ telles que

$$(6.6.11) \qquad [\widetilde{z}_j] = \sum_{l=0}^{j} C_j^l \,\widetilde{\zeta}_l \,\widetilde{R}_{j-l}^+ + \widetilde{Z}_j \qquad \text{pour } 0 \leq j \leq 2s-2.$$

En comparant avec (6.6.10), on montre que

$$(6.6.12) \qquad \widetilde{\zeta}_j = \partial_t^j \zeta_{|t=0} \quad \text{et} \quad \widetilde{Z}_j = \partial_t^j w_{2\,|t=0} \qquad \text{pour } x' \in \omega_2 \subset \omega_1.$$

Quitte à diminuer ω_2, on construit alors des fonctions $\widetilde{\zeta}(t,x')$ et $\widetilde{w}_2(t,x')$ définies sur $\mathbb{R}^n$ et telles que

$$(6.6.13) \qquad \widetilde{\zeta}(t,x') = \zeta(t,x') \quad \text{et} \quad \widetilde{w}_2(t,x') = w_2(t,x') \qquad \text{sur }]-T_2,T_2[\,\times \omega_2,$$

$$(6.6.14) \qquad \partial_t^j \widetilde{\zeta}_{|t=0} = \widetilde{\zeta}_j \quad \text{et} \quad \partial_t^j \widetilde{w}_{2\,|t=0} = \widetilde{Z}_j \qquad \text{sur } \mathbb{R}^{n-1}.$$

D'autre part, comme (u,Φ) est une solution approchée locale, w_2 est de la forme $w_2 = \varepsilon\, g$, avec g dans un borné de $H^{2s+1}(]T_o,T_1[\,\times \omega_1)$. On peut alors construire $\widetilde{w}_2$ tel que

$$(6.6.15) \qquad \widetilde{w}_2(t,x') = \varepsilon\, \widetilde{g}(t,x')$$

avec $\widetilde{g}$ appartenant à un borné de $H^{2s+1}(]-T_2,T_2[\,\times \mathbb{R}^{n-1})$. On définit alors

$$(6.6.16) \qquad \widetilde{z}^+(t,x',0) = \widetilde{z}^-(t,x',0) + \widetilde{\zeta}\, R(\widetilde{u}^+, \partial_y' \widetilde{\phi}) + \widetilde{w}_2(t,x').$$

Sur $]-T_2,T_2[\,\times \omega_2$, on a bien $\widetilde{z}^+(t,x',0) = z^+(t,x',0)$.

g) Construction de $\partial_n \widetilde{\Phi}^+(t,x',0)$. — La fonction $\widetilde{\Phi}^+(t,x',x_n)$ que l'on veut construire doit être solution de :

$$(6.6.17) \qquad \partial_t \widetilde{\Phi}^+ = \lambda(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^+ - \mathcal{U}_0^+(\widetilde{u}^+, \partial_y' \widetilde{\Phi}^+, \widetilde{\rho}), \partial_y' \widetilde{\Phi}^+).$$

En dérivant cette équation par rapport à x_n, on obtient pour $\phi_n(t,x') = \partial_n \widetilde{\Phi}^+(t,x',0)$ une équation de la forme (6.4.20). On détermine ainsi $\partial_n \widetilde{\Phi}^+(t,x',0)$ en résolvant les analogues de (6.4.22) (6.4.23) sur $]-T_2,T_2[\,\times \mathbb{R}^{n-1}$.

h) Construction de $\partial_n \widetilde{u}^+(t,x',0)$. — On définit

$$(6.6.18) \qquad \partial_n \widetilde{u}^+(t,x',0) = \widetilde{z}^+(t,x',0)\, \partial_n \widetilde{\Phi}^+(t,x',0)$$

i) Construction de $\widetilde{u}^+(t,x',x_n)$. — On définit alors $\widetilde{u}^+(t,x',x_n)$ comme la solution $v(t,x',x_n)$ du problème de relèvement de traces suivant.

Lemme 6.6.5. — *Il existe $0 < T_3 < T_2$ et une fonction $v \in H^{2s+1}(]-T_2,T_2[\,\times \mathbb{R}_+^n)$ tels que :*

i) $v = u^+$ *sur* $]-T_3,T_3[\,\times \Omega_2^+$,

ii) $\partial_t^j v_{/t=0} = \widetilde{u}_j^+(x',x_n)$ *sur* $\mathbb{R}_+^n$ *pour* $0 \leq j \leq 2s-1$,

iii) $v(t,x',0) = \widetilde{u}^+(t,x',0)$ *sur* $]-T_3,T_3[\,\times \mathbb{R}^{n-1}$,

iv) $\partial_n v(t,x',0) = \partial_n \widetilde{u}^+(t,x',0)$ *sur* $]-T_3,T_3[\,\times \mathbb{R}^{n-1}$.

j) Construction de $\widetilde{\Phi}^+(t,x',x_n)$. — $\widetilde{u}^+$ étant connue sur $]-T_2,T_2[\times\mathbb{R}^n_+$, on détermine Φ^+ sur $]-T_2',T_2'[\times\mathbb{R}^n_+$, avec $0<T_2'<T_2$ en résolvant l'équation (6.6.17) avec la condition initiale

$$\widetilde{\Phi}^+_{|t=0} = \widetilde{\Phi}^+_0(x',x_n). \tag{6.6.19}$$

Quitte à diminuer T_2, on obtient une solution $\widetilde{\Phi}^+$ telle que

$$\widetilde{\Phi}^+ - \underline{\Phi}_\varepsilon \text{ appartient à un borné de } H^{2s+1}(]-T_2,T_2[\times\mathbb{R}^n_+) \tag{6.6.20}$$

En comparant les équations (6.6.3) et (6.6.17), on vérifie que la trace de $\widetilde{\Phi}^+$ sur $\{x_n=0\}$ coïncide bien avec la fonction $\widetilde{\phi}$ de (6.6.8). En particulier le saut de $\widetilde{\Phi}$ est nul.

On vérifie que les fonctions $\widetilde{u}$, $\widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{\rho}$ que nous venons de construire sont bien des solutions approchées globales prolongeant u,Φ et ρ, ce qui termine la preuve de la proposition 6.6.1. □

6.7. Solutions locales exactes dans le passé. Prolongement

Dans ce paragraphe nous montrons que toute solution locale du système (S_R) définie dans le passé se prolonge en une solution approchée locale, ce qui établira la proposition 3.1.5. Pour cela, on se donne une solution locale (u_1,Φ_1) de classe C^{2k} du système (S_R) définie sur l'ouvert $]T_o,0[\times\Omega_1)$ et on construit un prolongement (u_a,Φ_a).

a) Construction de u_a^- *et* ρ_a. — On prolonge u_1^- en une fonction u_a^- appartenant à $H^{2k}(]T_o,T_1[\times\Omega_2^-)$ avec $T_1>0$ et $\Omega_2\subset\Omega_1$, telle que $u_a^-=u_1^-$ sur $]T_o,0[\times\Omega_2)$. En prolongeant A on obtient de même un prolongement ρ_a de $\rho_1=-\varepsilon e^A$.

b) Construction de Φ_a^- *et* z_a^-. — On détermine Φ_a^- en résolvant l'équation (2.3.16)

$$\partial_t\Phi = \lambda(u_a^- + \rho_a U^-(u_a^-,\partial_y'\Phi,\rho_a),u_a^-,\partial_y'\Phi), \quad \Phi_{t<0}=\Phi_1. \tag{6.7.1}$$

La solution obtenue Φ_a^- est définie sur un ouvert inclus dans $]T_o,T_1[\times\Omega_2^-$ mais que nous noterons encore $]T_o,T_1[\times\Omega_2^-$. On construit ensuite z_a^- en posant $z_a^- = \partial_n u_a^-/\partial_n\Phi_a^-$.

c) Construction de $u_a^+(t,x',0)$, $\Phi_a^+(t,x',0)$ *et* $z_a^+(t,x',0)$. — On définit

$$u_a^+(t,x',0) = u_a^-(t,x',0) + \rho_a U^-(u_a^-,\partial_y'\Phi_a^-,\rho_a), \tag{6.7.2}$$

$$\Phi_a^+(t,x',0) = \Phi_a^-(t,x',0) = \phi_a(t,x'). \tag{6.7.3}$$

Ces fonctions sont bien définies sur un ouvert de la forme $]T_o,T_1[\times\omega_2$ où $T_1>0$ et ω_2 est une boule ouverte de $\mathbb{R}^{n-1}$ centrée à l'origine. Afin de construire $z_a^+(t,x',0)$

nous introduisons les notations suivantes

$$\mathcal{A}(u, \partial_y \phi) = -A_0^{-1}(u)\mathcal{M}(u, \partial_y \phi), \tag{6.7.4}$$

$$\mathcal{B}(u, \partial'_y u) = -\sum_{j=1}^{n-1} A_0^{-1}(u)A_j(u)\partial_j u, \tag{6.7.5}$$

$$\mathcal{M}_1(u, \partial_y \phi) = \lambda(u, \partial'_y \phi)I - G(u, \partial'_y \phi). \tag{6.7.6}$$

On note $\mathcal{A}^\pm$, $\mathcal{B}^\pm$, $\mathcal{M}_1^\pm$ les matrices :

$$\mathcal{A}^\pm = \mathcal{A}(u_a^\pm, \partial_y \phi_a), \quad \mathcal{B}^\pm = \mathcal{B}(u_a^\pm, \partial'_y u_a^\pm), \quad \mathcal{M}_1^\pm = \mathcal{M}_1(u_a^\pm, \partial_y \phi).$$

Ces matrices sont bien définies sur $]T_o, T_1[\times \omega_2$. On considère (*cf.* paragraphe 6.2) le projecteur p_1 sur $\operatorname{Ker} \mathcal{M}_1^+$ parallèlement à $\operatorname{Im} \mathcal{M}_1^+$. On note p_2 le projecteur $p_2 = I - p_1$.

On définit ensuite la fonction $E(t, x')$ sur $]T_o, T_1[\times \omega_2$ en posant :

$$E(t, x') = [\partial_t u_a] - [\mathcal{A}]z_a^- - [\mathcal{B}] \tag{6.7.7}$$

Puisque u_a est solution exacte dans le passé, on a

$$\mathcal{A}^+[z] = E \quad \text{sur }]T_o, 0[\times \omega_2. \tag{6.7.8}$$

Par ailleurs, il existe une fonction $\zeta(t, x')$ définie sur $]T_o, 0[\times \omega_2$ telle que

$$p_1 z = \zeta(t, x')R(u_1^+, \partial'_y \phi_1),$$

où $z = \partial_n u_1/\partial_n \Phi_1$. Soit $\zeta_a(t, x')$ une fonction définie sur $]T_o, T_1[\times \omega_2$ qui prolonge $\zeta(t, x')$. On définit un prolongement v_1 de $p_1[z]$ en posant

$$v_1 = \zeta_a(t, x')R(u_a^+, \partial'_y \phi_a). \tag{6.7.9}$$

En notant $g = \partial_t \phi_a - \lambda(u_a^+, \partial'_y \phi_a) = \lambda(u_a^+, u_a^-, \partial'_y \phi_a) - \lambda(u_a^+, \partial'_y \phi_a)$, on a

$$\mathcal{A}^+ = gI + \mathcal{M}_1^+. \tag{6.7.10}$$

Comme g est d'ordre ε, $\mathcal{A}^+$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} \mathcal{M}_1^+$ sur lui même et en notant $(\mathcal{A}^+)^{-1}$ l'isomorphisme réciproque, on définit un prolongement v_2 de $p_2[z]$ en posant

$$v_2 = (\mathcal{A}^+)^{-1} p_2 E. \tag{6.7.11}$$

La fonction

$$z_a^+(t, x', 0) = z_a^-(t, x', 0) + v_1(t, x') + v_2(t, x') \tag{6.7.12}$$

est définie sur $]T_o, T_1[\times \omega_2$ et prolonge à des temps positifs la fonction donnée $z(t, x', 0)$ donnée dans le passé.

d) Construction de $\partial_n\Phi_a^+(t,x',0)$, $u_a^+(t,x',x_n)$, $\Phi_a^+(t,x',x_n)$. — On construit ces trois fonctions en procédant exactement comme au paragraphe 6.4. On définit tout d'abord $\partial_n\Phi_a^+(t,x',0)$ comme solution de l'équation linéaire du premier ordre (6.4.22) avec la condition dans le passé $\partial_n\Phi_a^+(t,x',0) = \partial_n\Phi_1^+(t,x',0)$.

On désigne ensuite par $g_0(t,x')$ et $g_1(t,x')$ les fonctions définies par

$$g_0(t,x') = u_a^+(t,x',0) \qquad g_1(t,x') = \partial_n\Phi_a^+(t,x',0)z_a^+(t,x',0)$$

et on construit $u_a^+(t,x',x_n)$ de sorte que :

$$\left\{\begin{array}{l} u_a^+(t,x',0) = g_0(t,x') \\ \partial_n u_a^+(t,x',0) = g_1(t,x') \\ u_a^+(t,x',x_n) = u_1^+(t,x',x_n) \end{array}\right. \qquad \text{pour } t<0. \tag{6.7.13}$$

Enfin, on construit $\Phi_a^+(t,x',x_n)$ en résolvant l'équation eikonale (6.4.34) avec la condition dans le passé $\Phi_a^+(t,x',x_n) = \Phi_1^+(t,x',x_n)$.

Le couple (u_a,Φ_a) ainsi construit est défini sur un ouvert de la forme $]T_o,T_1[\times\Omega_2$, avec $T_1>0$ et $\Omega_2\subset\Omega_1$, et il est clair que $(u_a,\Phi_a)=(u_1,\Phi_1)$ sur $]T_o,0[\times\Omega_2$.

De plus $(u_a,\Phi_a)\in p\text{–}H^{2k-2}(]T_o,T_1[\times\Omega_2)$. Nous terminons ce paragraphe en montrant que (u_a,Φ_a) est bien une solution approchée. Il est facile de voir que les conditions (3.1.1) à (3.1.8) du paragraphe 3.1 sont réalisées et il reste à établir (3.1.9). Pour cela, on définit :

$$f_a = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u_a)\partial_j u_a + \mathcal{M}(u_a,\partial_y\Phi_a)\frac{\partial_n u_a}{\partial_n\Phi_a} \tag{6.7.14}$$

et on doit montrer que $[f_a]$ est de la forme

$$[f_a] = \varepsilon\, H \tag{6.7.15}$$

avec H appartenant à un borné de $H^{2k-2}(]T_o,T_1[\times\omega_2)$. Le dernier terme de la somme $[f_a]$ s'écrit $[\mathcal{M}(u_a,\partial_y\Phi_a)z_a] = \mathcal{M}^+[z_a]+[\mathcal{M}]z_a^-$ et d'après (6.7.2) les termes $[\mathcal{M}]z_a^-$ et $[A_j(u_a)\partial_j u_a]$ sont bien de la forme (6.7.15).

Enfin $\mathcal{M}^+[z_a] = -A_0(u_a^+)\mathcal{A}^+[z_a]$ et on a $\mathcal{A}^+[z_a] = \mathcal{A}^+v_1+\mathcal{A}^+v_2$ où v_1 et v_2 sont donnés par (6.7.9) et (6.7.11). Étant donné que $g=\lambda(u_a^+,u_a^-,\partial_y'\phi_a)-\lambda(u_a^+,\partial_y'\phi_a)$ et E donné par (6.7.7) sont de la forme (6.7.15), il en est de même des termes $\mathcal{A}^+v_1 = gv_1$ et $\mathcal{A}^+v_2 = p_2(E)$. La condition (3.1.9) est vérifiée et la proposition 3.1.5 est démontrée. □

CHAPITRE 7

PARALINÉARISATION

Le but de ce chapitre est de préparer la démonstration du théorème 3.3.2 en paralinéarisant l'équation (3.3.2). Le besoin du recours au calcul paradifférentiel a été expliqué au § 1.2.7. Comme indiqué au § 1.2.8, la paralinéarisation permet de découpler les régularités limitées nécessaires au calcul de commutateurs et la régularité effective, beaucoup plus grande, des solutions. Les principes du calcul ont été posés par J.-M. Bony [Bo] (voir aussi [Mey], [Hö2]). Nous utiliserons un calcul paradifférentiel conormal à paramètre et localisé en temps introduit dans [Mé1]

Dans un premier temps (§ 7.1) nous rappelons les définitions et résultats tirés de [Mé1]. Puis dans la suite du chapitre, nous paralinéariserons les équations et les conditions aux limites, dans l'esprit esquissé au § 1.2.8.

7.1. Le paraproduit

On se donne deux réels $T_o < T_1 < 0$ et un entier m (très grand devant $2s$). Les ouverts $\Omega_T = \Omega_T^+ \cup \Omega_T^-$ sont définis en (2.6.1). On note aussi $\omega_T =]T_o, T_1[\times \mathbb{R}^{n-1}$. Pour μ entier ≥ 0, on note $\Lambda^\mu \Omega_T)$ l'espace des fonctions $a \in L^\infty(\Omega_T)$ dont les dérivées conormales $\delta^\alpha a$ sont dans $L^\infty(\Omega_T)$ pour $|\alpha| \leq \mu$. Ces espaces sont munis de la norme évidente que l'on note $\|u\|^{**}_{\mu,T}$. Parallèlement, on notera aussi $\Lambda^\mu(\omega_T)$ l'espace $W^{\mu,\infty}(\omega_T)$ et sa norme est notée $|u|^*_{\mu,T}$ (voir 3.3.5).

Les espaces $H^{0,\sigma}$ ont été définis au paragraphe 3.3 pour σ entier ≥ 0. La définition s'étend de façon habituelle aux $\sigma < 0$ (voir [Mé1]).

Dans [Mé1] sont construits des opérateurs de paraproduits « conormaux, à paramètre γ et localisés dans les bandes $T_o \leq t \leq T$ ». Ils sont notés $P^{II,\gamma,T}$ dans [Mé1], et nous les noterons plus simplement $P^{\gamma,T}$ ci-dessous.

Ce sont des applications bilinéaires de $\Lambda^0(\Omega_T) \times H^{0,-m}(\Omega_T)$ dans $H^{0,-m}(\Omega_T)$ définies pour $T \geq 0$ et $\gamma \geq 0$ dont nous rappelons brièvement la construction.

On note $x = (x_0, \ldots, x_n) = (y, x_n)$ la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on fixe une décomposition dyadique en se donnant une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, positive ou nulle, à support dans la boule de rayon 2, et valant 1 sur la boule de rayon 1. Pour $j \geq 0$, on note :

$$\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi), \qquad S_j = \varphi_j(D_x), \qquad \Delta_{j+1} = S_{j+1} - S_j. \tag{7.1.1}$$

Pour $j \geq 3$, on définit le paraproduit

$$U_a^j = U^j(a,u) = S_{j-3}a \cdot S_j u + \sum_{k>j} S_{k-3}a.\Delta_k u \tag{7.1.2}$$

On définit maintenant un paraproduit noté $U^\gamma(a,u)$ qui dépend du paramètre $\gamma \geq 1$. Afin de rendre la dépendance en γ régulière, on se donne une fonction $\zeta \in C_0^\infty \in \mathbb{R}$, à support dans $]1/4, 1[$, et telle que $\sum_{j=0}^\infty \zeta(2^{-j}\gamma) = 1$. On définit alors :

$$U^\gamma(a,u) = \sum_{j=0}^\infty \zeta(2^{-j+3}\gamma) U^j(a,u). \tag{7.1.3}$$

On introduit ensuite le conjugué de U^γ par le poids $\varepsilon^{\gamma t}$, :

$$Z^\gamma(a,u) = e^{\gamma t} U^\gamma(a, e^{-\gamma t}u). \tag{7.1.4}$$

D'après le lemme 6.3.1 de [Mél], il existe des opérateurs de prolongement notés π_T et $\pi_{\gamma,T}$ opérant de $W^\mu(\Omega_T)$ dans $W^\mu(\mathbb{R}^{n+1})$ et de $H^s(\Omega_T)$ dans $H^s(\mathbb{R}^{n+1})$. Pour s et μ entiers ≥ 0, on a noté $H^s(\Omega_T)$ et $W^\mu(\Omega_T) = W^{\mu,\infty}(\Omega_T)$ les espaces de Sobolev usuels. Ces opérateurs de prolongement permettent de définir pour $(a,u) \in W^\mu(\Omega_T) \times H^s(\Omega_T)$ le paraproduit localisé

$$Z^{\gamma,T}(a,u) = \Big\{ Z^\gamma(\pi_T a, \pi_{\gamma,T} u) \Big\}_{|\Omega_T} \tag{7.1.5}$$

On se donne d'autre part une partition C^∞ de l'unité :

$$1 = \theta_0(x_n) + \sum_{j=1}^\infty \theta(2^j x_n) \tag{7.1.6}$$

où θ_o est une fonction à support dans $|x_n| \geq 2/3$ valant 1 pour $|x_n| \geq 1$ et θ est à support dans $1 \leq |x_n| \leq 2$. Pour $j \geq 1$, on note $\theta_j(x_n) = \theta(2^j x_n)$.

Par ailleurs, on se donne des fonctions ψ_0 et ψ. ψ_0 vaut 1 pour $|x_n| \geq 1/2$ et est à support dans $|x_n| \geq 1/3$. ψ est à support dans $1/2 \leq |x_n| \leq 4$ et vaut 1 pour $2/3 \leq |x_n| \leq 3$. Pour $j \geq 1$, on note $\psi_j(x_n) = \psi(2^j x_n)$.

En outre, pour $j \in \mathbb{Z}$, on introduit les dilatations M_j définies par

$$M_j u(y, x_n) = u(y, 2^{-j} x_n).$$

On définit alors le paraproduit

$$P^{\gamma,T}(a,u) = \sum_{k=0}^\infty \theta_k M_{-k}\{Z^{\gamma,T}(M_k\psi_k a, M_k \psi_k u).\} \tag{7.1.7}$$

On notera aussi $P^{\gamma,T}(a,u) = P_a^{\gamma,T} u$.

Les propriétés suivantes sont démontrées dans [Mél].

Action. — $P_a^{\gamma,T}$ opère de $H^{0,s}(\Omega_T)$ dans lui-même pour $s \in [-m, m]$ et il existe une constante indépendante de T, γ, s et de (a, u) telle que :

$$\|P^{\gamma,T}(a,u)\|^t_{s,\gamma,T} \le C\, \|a\|^{**}_{0,T}\|u\|^t_{s,\gamma,T} \tag{7.1.8}$$

De façon générale, on désigne ci-dessous par C des constantes indépendantes de $T \ge 0, \gamma \ge 0$ et des fonctions $a, u, \ldots$ qui interviennent. Nous remarquons d'autre part que $W^{\mu,\infty}(\Omega_T) \subset \Lambda^\mu(\Omega_T)$ de sorte que toutes les propriétés énoncées ci-dessous restent valables en remplaçant partout les normes $\|a\|^{**}_{\mu,T}$ par $\|a\|^{*}_{\mu,T}$.

Localisation. — Pour $0 \le \mu \le m$, $0 \le s \le m$, $a \in \Lambda^\mu(\Omega_T)$ et $u \in H^{0,s-\mu}(\Omega_T)$ tel que $u = 0$ pour $t \le T_1$, la restriction de $P^{\gamma,T}(a,u)$ à Ω_{T_1} appartient à $H^{0,s}(\Omega_{T_1})$ et

$$\|P^{\gamma,T}(a,u)\|^t_{s,\gamma,T_1} \le C\, \|a\|^{**}_{\mu,T}\|u\|^t_{s-\mu,\gamma,T}. \tag{7.1.9}$$

Calcul symbolique. — Pour a et b dans $\Lambda^\mu(\Omega_T)$, avec $0 \le \mu \le m$, $P_a^{\gamma,T} \circ P_b^{\gamma,T} - P_{a\,b}^{\gamma,T}$ opère de $H^{0,s-\mu}(\Omega_T$ dans $H^{0,s}(\Omega_T)$ pour $0 \le s \le m$ et

$$\begin{aligned}\|(P_a^{\gamma,T} \circ P_b^{\gamma,T} - P_{ab}^{\gamma,T})u\|^t_{s,\gamma,T} &\le \\ &C\Big\{\|a\|^{**}_{\mu,T}\|b\|^{**}_{0,T} + \|a\|^{**}_{0,T}\|b\|^{**}_{\mu,T}\Big\}\|u\|^t_{s-\mu,\gamma,T}.\end{aligned} \tag{7.1.10}$$

Commutation aux dérivations conormales. — Pour $a \in \Lambda^1(\Omega_T)$, $0 \le s \le m$ et $|\alpha| \le s+1$, le commutateur $[\delta^\alpha,\, P_a^{\gamma,T}]$ opère de $H^{0,s}(\Omega_T)$ dans $H^{0,s-|\alpha|+1}(\Omega_T)$ et :

$$\|[\delta^\alpha,\, P_a^{\gamma,T}]\, u\|^t_{s,\gamma,T} \le C\, \|a\|^{**}_{1,T}\|u\|^t_{s,\gamma,T}. \tag{7.1.11}$$

Paralinéarisation 1. — Pour $a \in \Lambda^1(\Omega_T) \cap H^{0,s}(\Omega_T)$ et $u \in \Lambda^0(\Omega_T) \cap H^{0,s-\mu}(\Omega_T)$ avec $\mu \ge 0$ et $0 \le s \le m$, la différence $r = a\,u - P^{\gamma,T}(a,u)$ est dans $H^{0,s}(\Omega_T)$ et :

$$\|r\|^t_{s,\gamma,T} \le C\Big\{\|a\|^{**}_{\mu,T}\|u\|^t_{s-\mu,\gamma,T} + \|u\|^{**}_{o,T}\|a\|^t_{s,\gamma,T}\Big\}. \tag{7.1.12}$$

Paralinéarisation 2. — Pour $a \in \Lambda^\mu(\Omega_T) \cap H^{0,s-\nu}(\Omega_T)$ et $u \in \Lambda^\nu(\Omega_T) \cap H^{0,s-\mu}(\Omega_T)$ avec $\mu \ge 0$, $\nu \ge 0$, $\mu + \nu \le s \le m$, et $u = 0$ pour $t < T_1$, la différence $r = a\,u - P^{\gamma,T}(a,u) - P^{\gamma,T}(u,a)$ est dans $H^{0,s}(\Omega_T)$ et :

$$\|r\|^t_{s,\gamma,T} \le C\Big\{\|a\|^{**}_{\mu,T}\|u\|^t_{s-\mu,\gamma,T} + \|u\|^{**}_{\nu,T}\|a\|^t_{s-\nu,\gamma,T}\Big\}. \tag{7.1.13}$$

Paralinéarisation 3. — Pour $a \in \Lambda^1(\Omega_T)$, $u \in L^2(\Omega_T)$ et $0 \le j \le n-1$, la différence $r = a\partial_j u - P_a^{\gamma,T}\partial_j u$ est dans $L^2(\Omega_T)$ et :

$$\|r\|^t_{0,\gamma,T} \le C\, \|a\|^{**}_{1,T}\|u\|^t_{0,\gamma,T}. \tag{7.1.14}$$

Paralinéarisation 4. — Si F est une fonction C^∞ de ses arguments, telle que $F(0) = 0$, si $u \in \Lambda^\mu(\Omega_T) \cap H^{0,s-\mu}(\Omega_T)$ et si $\chi(t)$ est une fonction C^∞ nulle pour $t < T_1$ et valant 1 pour $t \ge 0$, alors la différence $r = \chi\, F(u) - P^{\gamma,T}(F'(u), \chi u)$ est dans $H^{0,s}(\Omega_T)$. En outre

$$\|r\|^t_{s,\gamma,T} \le C(\|u\|^{**}_{\mu,T})\|u\|^t_{s-\mu,\gamma,T}. \tag{7.1.15}$$

Paralinéarisation 5. — Si a est une fonction C^∞, alors pour $u \in H^{0,-m}(\Omega_T)$ la différence $r = a\,u - P_a^{\gamma,T}u$ est dans $H^{0,m}(\Omega_T)$ et

$$\|r\|^t_{m,\gamma,T} \le C\,\|a\|^{**}_{2m,T}\|u\|^t_{-m,\gamma,T}. \tag{7.1.16}$$

La quantification P a l'inconvénient majeur de mal commuter à la dérivation ∂_n. Pour contourner cette difficulté, on a construit dans [Mél] une autre quantification $\Pi^{\gamma,T}$. Pour l'introduire, nous devons d'abord rappeler la définition du paraproduit tangentiel, noté $P^{I,\gamma,T}$ dans [Mél]. On commence par fixer une décomposition dyadique tangentielle en se donnant une fonction $\varphi' \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive où nulle, à support dans la boule de rayon 2, et valant 1 sur la boule de rayon 1. En notant $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$ les variables duales dans $\mathbb{R}^n$, on définit pour $j \ge 0$,

$$\varphi'_j(\eta) = \varphi'(2^{-j}\eta), \qquad S'_j = \varphi'_j(D_y), \qquad \Delta'_{j+1} = S'_{j+1} - S'_j. \tag{7.1.17}$$

Comme précédemment, on définit ensuite les paraproduits :

$$T_a^j = T^j(a,u) = S'_{j-3}a.S'_ju + \sum_{k>j} S'_{k-3}a.\Delta'_ku, \tag{7.1.18}$$

$$T^\gamma(a,u) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta(2^{-j+3}\gamma)T^j(a,u), \tag{7.1.19}$$

$$P^{I,\gamma}(a,u) = e^{\gamma t}T_a^\gamma(e^{-\gamma t}u). \tag{7.1.20}$$

Pour s entier, on note $E^{0,s}(\Omega_T)$ l'espace des fonctions u telles que

$$e^{-\gamma t}\partial_y^\alpha u \in L^2(\Omega_T) \qquad \text{pour } |\alpha| \le s. \tag{7.1.21}$$

où ∂_y^α désigne un produit de dérivées tangentielles $\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_{n-1}$. D'après le lemme 6.3.1 de [Mél], les opérateurs de prolongement notés π_T et $\pi_{\gamma,T}$, opèrent aussi de $\Lambda^\mu(\Omega_T)$ dans $\Lambda^\mu(\mathbb{R}^{n+1})$ et de $E^{0,s}(\Omega_T)$ dans $E^{0,s}(\mathbb{R}^{n+1})$, ce qui permet de définir un paraproduit localisé sur $\Lambda^\mu(\Omega_T) \times E^{0,s}(\Omega_T)$,

$$P^{I,\gamma,T}(a,u) = \left\{P^{I,\gamma}(\pi_T a, \pi_{\gamma,T}u)\right\}_{|\Omega_T}. \tag{7.1.22}$$

Ce paraproduit jouit de propriétés analogues à celles listées plus haut, pour le calcul tangentiel, dans la chaîne des espaces $H^{0,s}$.

On définit ensuite les espaces $\Lambda^{\mu,1}(\Omega_T)$ [resp. $E^{s,1}(\Omega_T)$] des $u \in \Lambda^\mu(\Omega_T)$ [resp. $u \in H^{0,s}(\Omega_T)$] tels que $\partial_n u \in \Lambda^{\mu-2}(\Omega_T)$ [resp. $\partial_n u \in H^{0,s-2}(\Omega_T)$]. Pour $a \in \Lambda^{\mu,1}(\Omega_T)$, avec $\mu \ge 2$, on note

$$a^0(y,x_n) = \begin{cases} a(y,0+) & \text{si } x_n > 0 \\ a(y,0-) & \text{si } x_n < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \sigma a = a - a^0,$$

où $a(y,0\pm)$ désignent les traces de a sur $\{x_n = 0\}$, à droite et à gauche.

Pour $u \in E^{s,1}(\Omega_T)$ on note Γu les traces (à droite et à gauche) de u et $\rho^{\gamma,T}u = R^{\gamma,T}\Gamma u$, où $R^{\gamma,T}$ est l'opérateur de relèvement de trace défini à la proposition 7.2.2 de

[Mél]. En posant $\sigma^{\gamma,T}u = u - \rho^{\gamma,T}u$, on peut maintenant définir pour $a \in \Lambda^{2,1}(\Omega_T)$ et $u \in E^{2,1}(\Omega_T)$

$$\Pi^{\gamma,T}(a,u) = P^{\gamma,T}(a,\sigma^{\gamma,T}u) + P^{\gamma,T}(\sigma a,\rho^{\gamma,T}u) + P^{I,\gamma,T}(a^o,\rho^{\gamma,T}u). \tag{7.1.23}$$

Ce paraproduit jouit des propriétés suivantes (*cf.* [Mél]).

Comparaison de Π *et* P. — Pour $2 \leq \mu \leq m$, $2 \leq s \leq m$, $T \geq 0$, $a \in \Lambda^\mu(\Omega_T)$ et $u \in E^{s,1}(\Omega_T)$, la fonction $f = \Pi^{\gamma,T}(a,u) - P^{\gamma,T}(a,u)$ est dans $H^{0,s+\mu}(\Omega_T)$ et

$$\|f\|^t_{s+\mu,\gamma,T} \leq C\,\|a\|^{**}_{\mu,T}\Big\{\|u\|^t_{s,\gamma,T} + \|\partial_n u\|^t_{s-2,\gamma,T}\Big\}. \tag{7.1.24}$$

Commutation de Π *à* ∂_n. — Si $a \in \Lambda^{2,1}(\Omega_T)$ et $u \in E^{s,1}(\Omega_T)$ avec $s \geq 0$, alors la différence $r = \partial_n \Pi^{\gamma,T}(a,u) - P^{\gamma,T}(a,\partial_n u)$ est dans $H^{0,s}(\Omega_T)$ et

$$\|r\|^t_{s,\gamma,T} \leq C\Big\{\|a\|^{**}_{2,T} + \|\partial_n a\|^{**}_{0,T}\Big\}\Big\{\|u\|^t_{s,\gamma,T} + \|\partial_n u\|^t_{s-2,\gamma,T}\Big\}. \tag{7.1.25}$$

La règle suivante se déduit aisément de (7.1.8), (7.1.10) et (7.1.16)

Commutation avec une fonction lisse. — Si ρ est une fonction C^∞ et bornée ainsi que toute ses dérivées, si $a \in \Lambda^\mu(\Omega_T)$ où $0 \leq \mu \leq m$ et si $u \in H^{0,s-\mu}(\Omega_T)$ où $0 \leq s \leq m$, la différence $r = P^{\gamma,T}(a\rho,u) - P^{\gamma,T}(a,\rho u)$ est dans $H^{0,s}(\Omega_T)$ et

$$\|r\|^t_{s,\gamma,T} \leq C\,\|a\|^{**}_{\mu,T}\|u\|^t_{s-\mu,\gamma,T}, \tag{7.1.26}$$

où C est une constante qui ne dépend que de ρ.

On déduit également de (7.1.8) et (7.1.24) l'action de $\Pi^{\gamma,T}$ dans $E^{s,1}(\Omega_T)$.

Action. — Pour $0 \leq s \leq m$, $T \geq 0$, $a \in \Lambda^\mu(\Omega_T)$ et $u \in E^{s,1}(\Omega_T)$, $\Pi^{\gamma,T}_a$ opère de $E^{s,1}(\Omega_T)$ dans $H^{0,s}(\Omega_T)$ et

$$\|\Pi^{\gamma,T}_a u\|^t_{s,\gamma,T} \leq C\|a\|^{**}_{2,T}\Big\{\|u\|^t_{s,\gamma,T} + \|\partial_n u\|^t_{s-2,\gamma,T}\Big\}. \tag{7.1.27}$$

Notons que la construction de P et Π est faite séparément sur Ω^+_T et Ω^-_T. Par conséquent, tous les résultats rappelés ci-dessus sont vrais sur Ω^+_T et Ω^-_T séparément.

On introduit de façon similaire sur les ouverts ω_T des paraproduits tangentiels, encore notés $P^{\gamma,T}$. Ils sont définis comme en (7.1.22) et agissent sur les fonctions de y. Ils opèrent dans les espaces $W^{\mu,\infty}(\omega_T)$ et $H^s(\omega_T)$. Ils possèdent des propriétés analogues à celles décrites ci-dessus. Les estimations (7.1.8) à (7.1.16) sont valables pour ce paraproduit en remplaçant toutefois dans (7.1.11) les dérivations conormales δ^α par les dérivations tangentielles ∂^α_y.

Enfin, en notant comme ci-dessus Γu les traces sur $\{x_n = 0\}$ de la fonction u, on a :

Traces. — Si $a \in \Lambda^{2,1}(\Omega^\pm_T)$ et $u \in E^{s,1}(\Omega^\pm_T)$ on a

$$\Gamma\Pi^{\gamma,T}(a,u) = P^{\gamma,T}(\Gamma a,\Gamma u). \tag{7.1.28}$$

7.2. Généralités sur l'équation (3.2.3)

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'opérateur linéaire associé à l'équation (3.2.3). Il est défini par

$$\mathcal{L}v = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j v + \mathcal{M}(u, \partial_y \Phi)\frac{\partial_n v}{\partial_n \Phi}. \tag{7.2.1}$$

Puisque $\lambda(u, \partial'_y \Phi)$ est valeur propre de $G(u, \partial'_y \Phi)$ et que

$$\mathcal{M}(u, \partial_y \Phi) = A_o(u)\Big[G(u, \partial'_y \Phi) - \partial_t \Phi \,\mathrm{Id}\Big],$$

il existe des matrices $W(u, \theta)$ et $V(u, \theta)$, C^∞ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{O}$, inversibles et vérifiant :

$$W(u, \partial'_y \Phi)\mathcal{M}(u, \partial_y \Phi)V(u, \partial'_y \Phi) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix}, \tag{7.2.2}$$

où h est la fonction

$$h = \lambda(u, \partial'_y \Phi) - \partial_t \Phi. \tag{7.2.3}$$

On se donne une famille de solutions (3.2.3)... (3.2.10) notée $\mathcal{F}(s, T)$, comme indiqué au paragraphe 3.3. Lorsque $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$, on a, d'après (2.3.13),

$$\begin{cases} h^+ = \lambda(u^+, \partial'_y \Phi^+) - \lambda(u^+, u^+ - p^+, \partial'_y \Phi^+) & \text{sur } \Omega_T^+, \\ h^- = \lambda(u^-, \partial'_y \Phi^-) - \lambda(u^- + p^-, u^-, \partial'_y \Phi^-) & \text{sur } \Omega_T^-, \end{cases} \tag{7.2.4}$$

avec $p^+ = -\varepsilon\, e^A\, U^+(u^+, \partial'_y \Phi^+, -\varepsilon\, e^A)$ et $p^- = -\varepsilon\, e^A\, U^-(u^-, \partial'_y \Phi^-, -\varepsilon\, e^A)$.

En effectuant un développement de Taylor on obtient :

$$\begin{cases} h^+ = \dfrac{1}{2}p^+ \cdot d_u\lambda(u^+, \partial'_y \Phi^+) + \displaystyle\sum_{|\alpha|=2} (p^+)^\alpha g_\alpha^+(u^+, p^+, \partial'_y \Phi^+), \\ h^- = -\dfrac{1}{2}p^- \cdot d_u\lambda(u^-, \partial'_y \Phi^+) + \displaystyle\sum_{|\alpha|=2} (p^-)^\alpha g_\alpha^-(u^-, p^-, \partial'_y \Phi^-), \end{cases} \tag{7.2.5}$$

où les $g_\alpha^\pm$ sont des fonctions C^∞ de leurs arguments.

En considérant d'autre part le choc plan $(\underline{u}_\varepsilon, \underline{\Phi}_\varepsilon)$ associé à (u, Φ), on définit les constantes

$$\begin{aligned} &\underline{p}_\varepsilon^+ = \underline{p}_\varepsilon^- = [\underline{u}_\varepsilon], \\ &\underline{h}_\varepsilon^+ = \lambda(\underline{u}_\varepsilon^+, 0) - \lambda(\underline{u}_\varepsilon^+, 0, 0), \qquad && \underline{h}_\varepsilon^- = \lambda(0,0) - \lambda(\underline{u}_\varepsilon^+, 0, 0), \\ &\underline{b}_\varepsilon^+ = \ln(-\underline{h}_\varepsilon^+/\varepsilon), && \underline{b}_\varepsilon^- = \ln(\underline{h}_\varepsilon^-/\varepsilon). \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Lemme 7.2.1. — *Si $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$, il existe des fonctions b^+, b^-, g_1^+, g_1^-, g_2^+ et g_2^- telles que :*

$$\begin{aligned} &h^+ = -\varepsilon\, e^{b^+} \qquad \text{sur } \Omega_T^+, \\ &h^- = \varepsilon\, e^{b^-} \qquad \text{sur } \Omega_T^-, \\ &b^\pm = A + \ln(g_1^\pm/2 + \varepsilon\, e^A\, g_2^\pm). \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

Dans (7.2.7) $a = \ln(-[u_1]/\varepsilon)$ *et* $A = \mathcal{R}_T(a)$, *où* $\mathcal{R}_T$ *est l'opérateur de relèvement de traces défini au paragraphe* 5.3. *De plus,* $g_1^\pm$ *et* $g_2^\pm$ *sont des fonctions de la forme* $g_j^\pm(u^\pm, \partial'_y\Phi^\pm)$ *et il existe une constante* $\delta_1 > 0$ *telle que* $g_1^\pm \geq \delta_1 > 0$.

En outre, il existe une fonction $C(\cdot)$ *telle que* $b' = (b'^+, b'^-) = b - \underline{b}_\varepsilon$ *vérifie*

$$\|b'\|^*_{2,T} \leq C(M) \tag{7.2.8}$$

où $M = M^\infty(u, \Phi, T)$ *est défini en* (3.3.9).

Démonstration. — On écrit p^+ sous la forme :

$$p^+ = -\varepsilon\, e^A\, U^+(u^+, \partial'_y\Phi^+, 0) + \varepsilon^2\, e^{2A} g_3(u^+, \partial'_y\Phi^+, -\varepsilon e^A). \tag{7.2.9}$$

En vertu de l'hypothèse 2 (*cf.* chapitre 2), il existe $\delta_1 > 0$ tel que :

$$U^+(u^+, \partial'_y\Phi^+, 0) \cdot d_u\lambda(u^+, \partial'_y\Phi^+) \geq \delta_1. \tag{7.2.10}$$

En reportant (7.2.9) dans (7.2.5), il vient

$$h^+ = -\frac{1}{2}\varepsilon\, e^A g_1(u^+, \partial'_y\Phi^+) + \varepsilon^2\, e^{2A} g_2(u^+, \partial'_y\Phi^+, -\varepsilon e^A) \tag{7.2.11}$$

où g_1 vérifie $g_1(u^+, \partial'_y\Phi^+) \geq \delta_1$. On en déduit (7.2.7).

D'après le corollaire 5.3.2, on a

$$\|A\|^*_{2,T} \leq C|a|^*_{4,T}. \tag{7.2.12}$$

L'estimation (7.2.8) en résulte. □

Nous utiliserons en outre les estimations suivantes de $p' = p - \underline{p}_\varepsilon$, $h' = h - \underline{h}_\varepsilon$, $b' = b - \underline{b}_\varepsilon$ qui résulte directement de l'hypothèse $(u, \Phi) \in \mathcal{F}(\varepsilon, T)$.

Lemme 7.2.2. — *Sous les hypothèses du lemme* 7.2.1 *et pour* σ *entier dans* $\{1, \ldots, 2s\}$, *on a les estimations*

$$\|p'\|^t_{\sigma,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M) \Big\{ |[u_1]/\varepsilon\,|_{\sigma-1,\gamma,T} + \|u\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{\sigma+1,\gamma,T} \Big\}, \tag{7.2.13}$$

$$\|h'\|^t_{\sigma,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M) \Big\{ |[u_1]/\varepsilon\,|_{\sigma-1,\gamma,T} + \|u\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{\sigma+1,\gamma,T} \Big\}, \tag{7.2.14}$$

$$\|b'\|^t_{\sigma,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ |[u_1]/\varepsilon\,|_{\sigma-1,\gamma,T} + \|u\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{\sigma+1,\gamma,T} \Big\}, \tag{7.2.15}$$

$$|\Gamma b'|_{\sigma,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ |[u_1]/\varepsilon\,|_{\sigma,\gamma,T} + |\Gamma u|_{\sigma,\gamma,T} + |\Gamma\Phi|_{\sigma+1,\gamma,T} \Big\}. \tag{7.2.16}$$

Si $(u, \Phi) \in W^{2s}(\Omega_T)$ n'est pas solution du problème non-linéaire, nous supposerons que h s'écrit encore sous la forme (7.2.7). En introduisant la matrice :

$$W_1 = \begin{bmatrix} e^{-b} & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} W, \tag{7.2.17}$$

la formule (7.2.2) implique que

$$W_1(u, b, \partial'_y\Phi)\mathcal{M}(u, \partial_y\Phi)V(u, \partial'_y\Phi) = J \tag{7.2.18}$$

où J désigne la matrice :

$$J = J^+ = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{sur } \Omega_T^+, \qquad J = J^- = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{sur } \Omega_T^-.$$

Pour $0 \leq j \leq n-1$, nous définissons les matrices B_j

(7.2.19) $$B_j = (\partial_n \Phi) W_1 A_j V.$$

On introduit l'opérateur paradifférentiel :

(7.2.20) $$L^{\gamma,T} v = \sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(B_j, \partial_j v) + J \partial_n v.$$

Comme dans [Mél] et [Al], nous définissons maintenant *la bonne inconnue*

(7.2.21) $$v_1 = \Pi^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi v) - \Pi^{\gamma,T}(\zeta, \chi \Phi'),$$

où $\zeta = V^{-1}(\partial_n v / \partial_n \Phi)$, $\Phi' = \Phi - \underline{\Phi}_\varepsilon$ et la fonction $\chi(t)$ est comme indiqué au paragraphe paralinéarisation 4.

Dans les formules (7.2.20) (7.2.21), $P^{\gamma,T}(B_j, .)$ et $\Pi^{\gamma,T}(V^{-1}, .)$ sont des matrices $N \times N$ d'opérateurs agissant sur des fonctions vectorielles à N composantes, alors que $\Pi^{\gamma,T}(\zeta, .)$ est un vecteur colonne d'opérateurs agissant sur des fonctions scalaires.

7.3. Paralinéarisation de l'équation pour le problème linéaire

On se donne une famille de solutions approchées et des fonctions (u, Φ, F) telles qu'il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et des fonctions $(u_a, \Phi_a) \in \mathcal{F}_\varepsilon^a$ vérifiant

(7.3.1) $$u = u_a, \quad \Phi = \Phi_a \quad \text{si } t < 0,$$

(7.3.2) $$(u, \Phi) \in W^{2s}(\Omega_T),$$

(7.3.3) $$F \in W^{2s}(\Omega_T).$$

On considère alors une fonction $v \in W^{2s}(\Omega_T)$ solution de l'équation

(7.3.4) $$\mathcal{L} v = F$$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème de paralinéarisation suivant.

Théorème 7.3.1. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que si $T \geq 0$ et si (v, u, Φ, F) vérifient* (7.3.1)...(7.3.3) *et l'équation* (7.3.4), *alors la bonne inconnue v_1 définie en* (7.2.21) *vérifie pour tout $\gamma \geq 1$, $L^{\gamma,T} v_1 \in H^{0,2s}(\Omega_T)$ et*

(7.3.5) $$\|L^{\gamma,T}(v_1)\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ \|v\|_{2s,\gamma,T} + \|F\|^t_{2s,\gamma,T} + K_o \{ \|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} \} \Big\}$$

où M est tel que :

(7.3.6) $$\|u'\|^*_{2,T} + \|\Phi'\|^*_{3,T} + \|b'\|^*_{2,T} \leq M$$

et où $K_0 = \|F\|^*_{2,T} + \|v\|^*_{3,T}$.

Pour alléger les notations, nous omettons d'écrire les paramètres γ et T dans les paraproduits. D'autre part, on dira qu'une expression e est un reste si $e \in H^{0,2s}(\Omega_T)$ et si $\|e\|^t_{2s,\gamma,T}$ est majoré par le membre de droite de (7.3.5) pour une certaine constante $C(M)$.

La démonstration comprend plusieurs étapes. On écrit la bonne inconnue sous la forme $v_1 = \widetilde{v} - \widetilde{\Phi}$ où $\widetilde{v} = \Pi(V^{-1}, \chi\, v)$ et $\widetilde{\Phi} = \Pi(\zeta, \chi\, \Phi')$.

Proposition 7.3.2. — $\widetilde{v} = \Pi(V^{-1}, \chi\, v)$ *vérifie*

$$L^{\gamma,T}(\widetilde{v}) = \sum_{j=0}^{n-1} P_{W_1} \circ P_{\partial_n \Phi . A_j} \partial_j(\chi\, v) + P_{W_1} \circ P_{\mathcal{M}} \partial_n(\chi\, v) + r \tag{7.3.7}$$

où r est un reste.

Démonstration. — $L^{\gamma,T}(\widetilde{v})$ est donné par la formule (7.2.20). On étudie chaque terme.

Notons $\widehat{v} = P(V^{-1}, \chi\, v)$. La règle de commutation (7.1.11), implique que

$$\|\partial_j \widehat{v} - P(V^{-1}, \partial_j(\chi\, v))\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C\, \|(u, \partial'_y \Phi)\|^*_{1,T} \|v\|^t_{2s,\gamma,T}. \tag{7.3.8}$$

Ensuite (7.1.10) implique que

$$\|\partial_j(\chi\, v) - P_V(\partial_j \widehat{v})\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C\, \|(u, \partial'_y \Phi)\|^*_{1,T} \|v\|^t_{2s,\gamma,T}. \tag{7.3.9}$$

Puisque $\partial_n \Phi, W_1, A_j$ et B_j sont bornés dans $W^{1,\infty}(\Omega_T)$, on voit que $\partial_j(\chi\, v) - P_V(\partial_j \widehat{v})$ est un reste et en appliquant l'opérateur $P(\partial_n \Phi\, W_1 A_j, .)$ et le calcul symbolique il en résulte que

$$P_{W_1} \circ P_{\partial_n \Phi . A_j} \partial_j(\chi\, v) - P(B_j, \partial_j \widehat{v}) \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.10}$$

On compare ensuite $P(B_j, \partial_j \widehat{v})$ à $P(B_j, \partial_j \widetilde{v})$. On a d'après (7.1.24)

$$\|\widehat{v} - \widetilde{v}\|^t_{2s+1,\gamma,T} \leq C\, \|V^{-1}\|^*_{2,T} \{\|v\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n v\|^t_{2s-2,\gamma,T}\},$$

ce qui prouve que $\partial_j(\widehat{v} - \widetilde{v})$ est un reste. Il en est de même de $P(B_j, \partial_j \widehat{v}) - P(B_j, \partial_j \widetilde{v})$. Avec (7.3.10), cela implique que

$$P(B_j, \partial_j \widetilde{v}) - P_{W_1} \circ P_{\partial_n \Phi . A_j} \partial_j(\chi\, v) \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.11}$$

On étudie ensuite la différence $\partial_n \widetilde{v} - P(V^{-1}, \partial_n(\chi\, v))$. En commutant Π et ∂_n on obtient d'après (7.1.25)

$$\|\partial_n \widetilde{v} - P(V^{-1}, \partial_n(\chi\, v))\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C\, \|V^{-1}\|^*_{2,T} \{\|v\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n v\|^t_{2s-2,\gamma,T}\}.$$

On en déduit que

$$J \partial_n \widetilde{v} - J P(V^{-1}, \partial_n(\chi\, v)) \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.12}$$

Puisque J est une matrice constante, on a $JP(V^{-1}, .) = P(JV^{-1}, .)$ et d'après (7.2.25) $JV^{-1} = W_1 \mathcal{M}$. Il en résulte que

$$J \partial_n \widetilde{v} - P_{W_1} \circ P_{\mathcal{M}} \partial_n(\chi\, v) \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.13}$$

ce qui, compte tenu de (7.3.11) achève la démonstration de la proposition 7.3.2. □

On évalue ensuite $L^{\gamma,T}(\widetilde{\Phi})$ en commençant par le terme $J\partial_n\widetilde{\Phi}$. On note que χv vérifie l'équation

$$\mathcal{L}(\chi v) = f' = \chi F + (\partial_t\chi)A_0(u)v. \tag{7.3.14}$$

En désignant par w la fonction

$$w = f' - \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j(\chi v) \tag{7.3.15}$$

et en tenant compte de (7.3.14), on obtient :

$$w = (\partial_n\Phi)^{-1}\mathcal{M}(u, \partial_y'\Phi)\partial_n(\chi v). \tag{7.3.16}$$

Il en résulte immédiatement que

$$W_1 w = W_1\mathcal{M}V(\chi\zeta) = J(\chi\zeta). \tag{7.3.17}$$

Lemme 7.3.3. — *Avec les notations précédentes, $\widetilde{\Phi} = \Pi(\zeta, \chi\Phi')$ vérifie l'estimation*

$$J\partial_n\widetilde{\Phi} - P_{W_1} \circ P_w\,\partial_n\Phi' \quad \textit{est un reste.} \tag{7.3.18}$$

Démonstration. — Puisque W_1 et w sont bornés dans $W^{2,\infty}(\Omega_T)$, on a par le calcul symbolique :

$$\|P_{W_1} \circ P_w\partial_n\Phi' - P_{W_1 w}\partial_n\Phi'\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,K_o\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-2,\gamma,T}. \tag{7.3.19}$$

D'après (7.3.17), on a d'autre part :

$$P(W_1 w, \partial_n\Phi') = P(J\chi\zeta, \partial_n\Phi') = JP(\chi\zeta, \partial_n\Phi'). \tag{7.3.20}$$

En utilisant (7.1.26) et l'estimation $\|\zeta\|^*_{2,T} \leq C(M)K_0$, on obtient

$$P(\chi\zeta, \partial_n\Phi') - P(\zeta, \partial_n(\chi\Phi')) \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.21}$$

La règle de commutation (7.1.25) implique que

$$P(\zeta, \partial_n(\chi\Phi')) - \partial_n\Pi(\zeta, \chi\Phi') \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.22}$$

Il résulte alors de (7.3.20) (7.3.21) et (7.3.22) que

$$P_{W_1 w}\partial_n\Phi' - J\partial_n\Pi(\zeta, \chi\Phi') \quad \text{est un reste,} \tag{7.3.23}$$

ce qui prouve le lemme 7.3.3. □

Lemme 7.3.4. — *Pour $0 \leq j \leq n-1$ la différence $P(B_j, \partial_j\widetilde{\Phi}) - P_{W_1} \circ P_{A_j\partial_n(\chi v)}\partial_j\Phi'$ est un reste.*

Démonstration. — D'après (7.1.24), $\partial_j\widetilde{\Phi} - \partial_j P(\zeta, \chi\Phi')$ est un reste. En commutant ∂_j et P on obtient que

$$\partial_j\widetilde{\Phi} - P(\zeta, \partial_j(\chi\Phi')) \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.24}$$

En appliquant l'opérateur $P(B_j, .)$ on en déduit que

$$P(B_j, \partial_j\widetilde{\Phi}) - P(B_j\zeta, \partial_j(\chi\Phi')) \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.25}$$

Comme $B_j\zeta = W_1 A_j \partial_n v$ on a

$$P(B_j\zeta, \partial_j(\chi\,\Phi')) - P_{W_1} \circ P_{A_j\partial_n v}\partial_j(\chi\,\Phi') \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.26}$$

En commutant χ et ∂_j et en appliquant la règle (7.1.26), il vient

$$P_{A_j\partial_n v}\chi\,\partial_j\Phi' - P_{A_j\partial_n(\chi\, v)}\partial_j\Phi' \quad \text{est un reste.} \tag{7.3.27}$$

Il résulte alors de (7.3.25) (7.3.26) et (7.3.27) que

$$P(B_j, \partial_j\widetilde{\Phi}) - P_{W_1} \circ P_{A_j\partial_n(\chi\, v)}\partial_j\Phi' \quad \text{est un reste,} \tag{7.3.28}$$

ce qui prouve le lemme 7.3.4. □

En rassemblant les résultats de la proposition 7.3.2 et des lemmes 7.3.3 et 7.3.4, on obtient que

$$L^{\gamma,T}(v_1) = P(W_1, g) + r \tag{7.3.29}$$

où r est un reste et

$$g = \sum_{j=0}^{n-1} P_{\partial_n\Phi . A_j}\partial_j(\chi\, v) + P_{\mathcal{M}}\partial_n(\chi\, v) - \Big\{\sum_{j=0}^{n-1} P_{A_j\partial_n(\chi\, v)}\partial_j\Phi' + P_w\partial_n\Phi'\Big\} \tag{7.3.30}$$

Le théorème 7.3.1 sera donc entièrement démontré si on prouve que g est un reste. Pour cela, nous reprenons les termes $P_{\partial_n\Phi . A_j}\partial_j(\chi\, v)$ et $P_{\mathcal{M}}\partial_n(\chi\, v)$ figurant dans g et nous comparons le produit et le paraproduit.

On utilisera le résultat suivant qui découle directement de la règle (7.1.13).

Lemme 7.3.5. — *Soit $A(u)$ une matrice $N \times N$, C^∞ en u. On note $\widetilde{A}(u) = A(u) - A(0)$ et ${}^tA$ la matrice transposée. Pour $u \in \Lambda^\mu(\Omega_T) \cap H^{0,s-\nu}(\Omega_T)$ et $v \in \Lambda^\nu(\Omega_T) \cap H^{0,s-\mu}(\Omega_T)$ la différence :*

$$r = A(u)\,\chi\, v - P^{\gamma,T}(A(u), \chi\, v) - {}^tP^{\gamma,T}({}^t(\chi\, v), {}^t\widetilde{A}(u))$$

est dans $H^{0,s}(\Omega_T)$ et on a l'estimation

$$\|r\|^t_{s,\gamma,T} \le \Big\{\|A(u)\|^{**}_{\mu,T}\|v\|^t_{s-\mu,\gamma,T} + \|v\|^{**}_{\nu,T}\|\widetilde{A}(u)\|^t_{s-\nu,\gamma,T}\Big\}. \tag{7.3.31}$$

Lemme 7.3.6. — *On a*

$$P_{\partial_n\Phi . A_j(u)}\partial_j(\chi\, v) = \partial_n\Phi . A_j(u)\partial_j(\chi\, v) - P_{A_j(u)\partial_j(\chi\, v)}\partial_n\Phi' + r \tag{7.3.32}$$

où r est un reste.

Démonstration. — En appliquant la règle (7.1.13) on obtient tout d'abord :

$$\partial_n\Phi' . \partial_j(\chi\, v) = P(\partial_n\Phi', \partial_j(\chi\, v)) + P(\partial_j(\chi\, v), \partial_n\Phi') + r_1 \tag{7.3.33}$$

où r_1 est un reste. On applique ensuite à (7.3.33) l'opérateur $P(A_j(u), .)$ et on obtient en vertu du calcul symbolique (7.1.10) et du fait que $\partial_n\Phi = 1 + \partial_n\Phi'$

$$P_{\partial_n\Phi . A_j(u)}\partial_j(\chi\, v) = P_{A_j(u)}\partial_n\Phi . \partial_j(\chi\, v) - P_{A_j(u)\partial_j(\chi\, v)}\partial_n\Phi' + r_2 \tag{7.3.34}$$

où r_2 est un reste. En utilisant le lemme 7.3.5, on obtient que

$$P_{A_j(u)}\partial_n\Phi.\partial_j(\chi v) = \partial_n\Phi.A_j(u)\partial_j(\chi v) - {}^tP_{\partial_n\Phi^t\partial_j(\chi v)}{}^t\widetilde{A}_j(u) + r_3 \tag{7.3.35}$$

où $\widetilde{A}_j(u) = A_j(u) - A_j(0)$ et r_3 est un reste. En utilisant (7.1.8), on en déduit que ${}^tP_{\partial_n\Phi^t\partial_j(\chi v)}{}^t\widetilde{A}_j(u)$ est aussi un reste et le lemme résulte alors de (7.3.34) et (7.3.35). □

Lemme 7.3.7. — *On a*

$$P_{\mathcal{M}}\partial_n(\chi v) = \mathcal{M}\partial_n(\chi v) + \sum_{j=0}^{n-1} P_{A_j(u)\partial_n(\chi v)}\partial_j\Phi' + r \tag{7.3.36}$$

où r est un reste.

Démonstration. — On part de l'identité

$$P_{\mathcal{M}}\partial_n(\chi v) = P_{A_n(u)}\partial_n(\chi v) - \Big\{\sum_{j=0}^{n-1} P_{\partial_j\Phi A_j(u)}\partial_n(\chi v)\Big\}. \tag{7.3.37}$$

Le lemme 7.3.5 implique que

$$P_{A_n(u)}\partial_n(\chi v) = A_n(u)\partial_n(\chi v) + r_1 \tag{7.3.38}$$

où r_1 est un reste. Étant donné que $\Phi = \Phi' + \sigma t + x_n$ et que, d'après (7.1.16), $\sigma\partial_n(\chi v) - P(\sigma I, \partial_n(\chi v))$ est un reste, on obtient en appliquant (7.1.13)

$$\partial_j\Phi\partial_n(\chi v) = P(\partial_j\Phi, \partial_n(\chi v)) + P(\partial_n(\chi v), \partial_j\Phi') + r_2 \tag{7.3.39}$$

où r_2 est un reste. On applique ensuite à (7.3.39) l'opérateur $P(A_j, .)$ et on obtient par le calcul symbolique :

$$P(\partial_j\Phi A_j(u), \partial_n(\chi v)) = P(A_j(u), \partial_j\Phi\partial_n(\chi v)) - P(A_j(u)\partial_n(\chi v), \partial_j\Phi') + r_3 \tag{7.3.40}$$

avec un reste r_3. D'après le lemme 7.3.5, on a de plus :

$$P(A_j(u), \partial_j\Phi\partial_n(\chi v)) = \partial_j\Phi A_j(u)\partial_n(\chi v) - {}^tP(\partial_j\Phi\partial_n{}^t(\chi v), {}^t\widetilde{A}_j(u)) + r_4 \tag{7.3.41}$$

avec un reste r_4. En utilisant (7.1.8) on voit que le terme ${}^tP(\partial_j\Phi\partial_n{}^t(\chi v), {}^t\widetilde{A}_j(u))$ est aussi un reste. En revenant à (7.3.37) et en tenant compte de (7.3.38)... (7.3.41), on obtient (7.3.36) et le lemme est démontré. □

En reprenant maintenant (7.3.30) et en appliquant les lemmes 7.3.6 et 7.3.7, on obtient après simplification :

$$g = \partial_n\Phi.\mathcal{L}(\chi v) - P(f', \partial_n\Phi') + r_1 \tag{7.3.42}$$

où f' est donné par (7.3.14) et r_1 est un reste. On en déduit que

$$g = f' + \partial_n\Phi\, f' - P(f', \partial_n\Phi') + r_1. \tag{7.3.44}$$

En appliquant (7.1.13), on montre que

$$\partial_n\Phi\, f' - P(f', \partial_n\Phi') = P(\partial_n\Phi', f') + r_2 \tag{7.3.45}$$

avec un reste r_2. Enfin, en remarquant que $f' = \chi f + \partial_t \chi . A_0(u)v$ est aussi un reste, il résulte de (7.3.44) et (7.3.45) que g est un reste, ce qui achève la démonstration du théorème 7.3.1.

7.4. Paralinéarisation de l'équation pour le problème non-linéaire

On se donne maintenant un couple de fonctions $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s,T)$. Alors, d'après (3.2.3), $v = u' = u - \underline{u}_\varepsilon$ est solution de (7.3.4) avec $F = f$, le prolongement par 0 pour $t > 0$ de la fonction f_a de (3.1.8). On désigne ici par v_1 la bonne inconnue associée à $v = u' = u - \underline{u}_\varepsilon$

(7.4.1) $$v_1 = \Pi^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi u') - \Pi^{\gamma,T}(\zeta, \chi \Phi')$$

avec

(7.4.2) $$\zeta = V^{-1}(\partial_n u / \partial_n \Phi)$$

En appliquant le théorème 7.3.1 nous obtenons alors directement le corollaire suivant.

Corollaire 7.4.1. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que si $T \geq 0$ et si $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s,T)$, alors pour tout $\gamma \geq 1$ on a $L^{\gamma,T}(v_1) \in W^{2s}(\Omega_T)$ et*

(7.4.3) $$\|L^{\gamma,T}(v_1)\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ \|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T} \Big\},$$

où $M = M^\infty(u, \Phi, T)$ est défini en (3.3.9).

Démonstration. — On sait que f est nulle pour $t \geq 0$ et que sur Ω_0, f ne dépend que de (u_a, Φ_a). Comme $M(u^a, \Phi^a, 0)$ est uniformément borné, ceci implique que

(7.4.4) $$\|f\|^*_{2,T} \leq C.$$

Ceci entraîne que $K_0 \leq C + \|v\|^*_{3,T} \leq C(M)$ et l'estimation (7.3.5) donne le résultat. □

7.5. Paralinéarisation des conditions aux limites pour le problème linéaire

On reprend les notations du paragraphe 7.3. On se donne à nouveau des fonctions (v, u, Φ, F) vérifiant les conditions (7.3.1) à (7.3.4) et on suppose en outre que

$$\Gamma u' \in H^{2s}(\omega_T), \quad \Gamma \Phi' \in H^{2s+1}(\omega_T), \quad \Gamma b' \in H^{2s}(\omega_T)$$

On se donne de plus deux autres fonctions g et ψ appartenant à $H^{2s}(\omega_T)$ et on suppose que $(\Gamma v, \psi)$ vérifie sur ω_T l'équation :

(7.5.1) $$[\mathcal{M}(\Gamma u, \partial_y \phi)\Gamma v] - X_u(\psi) = g$$

où X_u désigne l'opérateur du premier ordre :

$$X_u(\psi) = \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j \psi [f_j(u)]. \tag{7.5.2}$$

L'opérateur linéaire en $(\Gamma v, \psi)$ qui apparaît au premier membre de (7.5.1) est le linéarisé de l'opérateur

$$(\Gamma u, \phi) \mapsto [f_n(u)] - \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j \phi [f_j(u)]$$

que l'on trouve au premier membre de (3.2.4) (conditions de Rankine-Hugoniot).

On désigne par v_1 la bonne inconnue (7.2.21). D'après (7.1.28), on a

$$\Gamma v_1 = P^{\gamma,T}(\Gamma V^{-1}, \chi \Gamma v) - P^{\gamma,T}(\Gamma \zeta, \chi \phi'). \tag{7.5.3}$$

En multipliant (7.5.1) par χW_1^+ on obtient l'équation équivalente

$$[J v_2] + E v_2^- - X_1(\chi \psi) = G, \tag{7.5.4}$$

où l'on a posé :

$$v_2 = V^{-1} \chi \Gamma v, \tag{7.5.5}$$

$$X_1(\chi \psi) = W_1^+ X_u(\chi \psi), \tag{7.5.6}$$

$$E = J^- - W_1^+ \mathcal{M}^- V^- = \{I - W_1^+ (W_1^-)^{-1}\} J^-, \tag{7.5.7}$$

$$G = \chi W_1^+ g + W_1^+ (\partial_t \chi) \psi [f_o(u)]. \tag{7.5.8}$$

Nous introduisons d'autre part l'opérateur paradifférentiel $X_1^{\gamma,T}$ associé à X_1,

$$X_1^{\gamma,T}(\psi) = \sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(b_j, \partial_j \psi) \tag{7.5.9}$$

où $b_j = W_1^+[f_j(u)]$.

Enfin, on note $Q^{\gamma,T}$ l'opérateur paradifférentiel associé à l'opérateur figurant au premier membre de (7.5.4),

$$Q^{\gamma,T}(v, \psi) = [J v] + P^{\gamma,T}(E, v^-) - X_1^{\gamma,T}(\psi). \tag{7.5.10}$$

Proposition 7.5.1. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que si $T \geq 0$ et si $(\Gamma v, \psi, \Gamma u, \phi, g)$ vérifient (7.5.1) et les hypothèses ci-dessus, alors on a $Q^{\gamma,T}(\Gamma v_1, \chi \psi) \in H^{2s}(\omega_T)$ pour tout $\gamma \geq 1$ et*

$$\begin{aligned} |Q^{\gamma,T}(\Gamma v_1, \chi \psi)|_{2s,\gamma,T} \leq & C(M) \Big\{ |\Gamma v|_{2s-1,\gamma,T} + |\psi|_{2s,\gamma,T} + |g|_{2s,\gamma,T} \\ & + K_1 \{ |\Gamma b|_{2s,\gamma,T} + |\Gamma u|_{2s,\gamma,T} + |\phi|_{2s+1,\gamma,T} \} \Big\}, \end{aligned} \tag{7.5.11}$$

où M est tel que

$$\|u'\|_{2,T}^* + \|\Phi'\|_{2,T}^* + \|b'\|_{2,T}^* \leq M \tag{7.5.12}$$

et où $K_1 = |\psi|_{1,T}^* + |\Gamma v|_{1,T}^* + |g|_{o,T}^*$.

Démonstration. — Dans la preuve, et afin d'alléger les notations, nous écrirons v au lieu de Γv. D'autre part, nous dirons ici qu'une expression e est un reste si $e \in H^{2s}(\omega_T)$ et si $|e|_{2s,\gamma,T}$ est majoré par le membre de droite de (7.5.11) pour une certaine constante $C(M)$.

D'après (7.1.12), $P^{\gamma,T}(b_j, \partial_j(\chi\,\psi)) - b_j\,\partial_j(\chi\,\psi)$ est un reste. Cela implique que

(7.5.13) $$X_1^{\gamma,T}(\chi\,\psi) - X_1(\chi\,\psi) \quad \text{est un reste.}$$

Par ailleurs,

$$v_1 - v_2 = P^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi\,v) - V^{-1}(\chi\,v) - P^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\phi').$$

D'après (7.1.12), $P^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi\,v) - V^{-1}(\chi\,v)$ est un reste et il en est de même de $P^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\phi')$. On en déduit que

(7.5.14) $$[Jv_1] - [Jv_2] \quad \text{est un reste.}$$

On remarque que $P^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\phi')$ est lui même un reste. En outre, (7.1.10) et (7.1.12) impliquent que,

$$P_E \circ P_{V^{-1}}(\chi\,v) - E\,V^{-1}(\chi\,v) \quad \text{est un reste.}$$

On en déduit que

(7.5.15) $$P^{\gamma,T}(E, v_1^-) - Ev_2^- \quad \text{est un reste.}$$

On déduit alors de (7.5.13), (7.5.14) et (7.5.15) que :

(7.5.16) $$Q^{\gamma,T}(v_1, \chi\,\psi) = G + r$$

où r est un reste.

On vérifie directement d'après la définition (7.5.8) que G est aussi un reste. La proposition 7.5.1 en résulte. □

7.6. Paralinéarisation des conditions aux limites pour le problème non-linéaire

Dans ce paragraphe, nous paralinéarisons les conditions aux limites (3.2.4). Comme au paragraphe 7.4, on se donne un couple de fonctions $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ et nous désignons par v_1 la bonne inconnue (7.4.1). D'après (7.1.28), on a

(7.6.1) $$\Gamma v_1 = P^{\gamma,T}(\Gamma V^{-1}, \chi\,\Gamma u') - P^{\gamma,T}(\Gamma\zeta, \chi\,\phi')$$

avec $\Gamma\zeta = \Gamma V^{-1}(\partial_n u/\partial_n \Phi)$. On rappelle que $Q^{\gamma,T}$ est l'opérateur paradifférentiel défini par (7.5.10).

Proposition 7.6.1. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que si $T \geq 0$ et si $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$, alors pour tout $\gamma \geq 1$ on a $Q^{\gamma,T}(\Gamma v_1, \chi\,\phi') \in H^{2s}(\omega_T)$ et*

(7.6.2) $$|Q^{\gamma,T}(\Gamma v_1, \chi\,\phi')|_{2s,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M) \Big\{ |\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} + |\phi|_{2s,\gamma,T} + |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} \Big\}$$

où M est tel que

$$M^\infty(u,\Phi,T) \le M \tag{7.6.3}$$

Nous dirons ici qu'une expression r est un reste, si $r \in H^{2s}(\omega_T)$ et si $|r|_{2s,\gamma,T}$ est majoré par le membre de droite de (7.6.2) pour une certaine constante $C(M)$. Dans les calculs qui suivent, on notera r_1, $r_2, \dots$ différents restes. Pour alléger les notations, nous écrirons $\underline{u}$ au lieu de $\underline{u}_\varepsilon$ et $\underline{\phi}$ au lieu de $\underline{\phi}_\varepsilon$. Nous omettrons aussi d'écrire l'opérateur de traces Γ.

Lemme 7.6.2. — *Soit F une fonction C^∞ de ses arguments. Alors l'expression*

$$r = \chi\,[F(u) - F(\underline{u}_\varepsilon)] - [P^{\gamma,T}(F'(u),\chi\,u')] \tag{7.6.4}$$

est un reste.

Démonstration. — On a $[F(u)] = G(u^+,u^-)[u]$ où G est une fonction C^∞ de ses arguments. Soit $G_1(u'^+,u'^-) = G(u^+,u^-) - G(\underline{u}^+,\underline{u}^-)$. Alors, en notant $u' = u - \underline{u}$,

$$\chi\,[F(u) - F(\underline{u})] = \chi\,G(u^+,u^-)[u'] + \chi\,G_1(u'^+,u'^-)[\underline{u}]. \tag{7.6.5}$$

Les propriétés de paralinéarisation des produits, impliquent que

$$\chi\,G(u^+,u^-)[u'] = {}^tP^{\gamma,T}({}^t[u'],\chi\,{}^tG_1) + P^{\gamma,T}(G,\chi\,[u']) + r_1 \tag{7.6.6}$$

avec un reste r_1.

En remplaçant $[u']$ par $[u] - [\underline{u}]$ et en remarquant que ${}^tP^{\gamma,T}({}^t[\underline{u}],\chi\,{}^tG_1) - \chi\,G_1[\underline{u}]$ est un reste, (7.6.6) implique que

$$\chi\,G(u^+,u^-)[u'] = {}^tP^{\gamma,T}({}^t[u],\chi\,{}^tG_1) + P^{\gamma,T}(G,\chi\,[u']) - \chi\,G_1[\underline{u}] + r_2. \tag{7.6.7}$$

On note G_{ij} le terme d'indices (i,j) de la matrice $G(u^+,u^-)$. Si v est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, on désigne par $P^{\gamma,T}\Big(\partial G/\partial u^+, v\Big)$ la matrice $N\times N$ dont le terme d'indices (i,j) est donné par :

$$\sum_{k=1}^N P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial G_{ij}}{\partial u_k^+}, v_k\Big).$$

On procède de façon analogue pour $P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial G}{\partial u^-}, v\Big)$. En utilisant (7.1.15) on obtient,

$$\chi\,{}^tG_1 = P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial^t G_1}{\partial u^+},\chi\,u'^+\Big) + P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial^t G_1}{\partial u^-},\chi\,u'^-\Big) + r_3. \tag{7.6.8}$$

En écrivant ensuite la formule explicite :

$$G(u^+,u^-) = \int_o^1 F'(u^- + t[u])\,dt \tag{7.6.9}$$

on voit que pour tout triplet (i,j,k) on a :

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial u_k^+} = \frac{\partial G_{ik}}{\partial u_j^+} \qquad et \qquad \frac{\partial G_{ij}}{\partial u_k^-} = \frac{\partial G_{ik}}{\partial u_j^-}$$

En posant $B_1 = \partial^t G_1/\partial u^+$ et $B_2 = \partial^t G_1/\partial u^-$ et en utilisant le calcul symbolique, on obtient les formules :

$$ {}^t\Big(P^{\gamma,T}_{{}^t[u]} \circ P^{\gamma,T}_{B_1}(\chi\, u'^+)\Big) = P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial G_1}{\partial u^+}, \chi\, u'^+\Big) + r_4, \tag{7.6.10}$$

$$ {}^t\Big(P^{\gamma,T}_{{}^t[u]} \circ P^{\gamma,T}_{B_2}(\chi\, u'^-)\Big) = P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial G_1}{\partial u^-}, \chi\, u'^-\Big) + r_5. \tag{7.6.11}$$

En appliquant l'opérateur ${}^tP^{\gamma,T}_{{}^t[u]}$ à (7.6.11), on obtient ainsi

$$ {}^tP^{\gamma,T}({}^t[u], \chi\, {}^tG_1) = P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial G_1}{\partial u^+}, \chi\, u'^+\Big) + P^{\gamma,T}\Big(\frac{\partial G_1}{\partial u^-}, \chi\, u'^-\Big) + r_6. \tag{7.6.12}$$

En dérivant sous le signe somme dans (7.6.9) on obtient d'autre part :

$$ G(u^+, u^-) + \frac{\partial G_1}{\partial u^+}[u] = F'(u^+), \tag{7.6.13}$$

$$ G(u^+, u^-) - \frac{\partial G_1}{\partial u^-}[u] = F'(u^-). \tag{7.6.14}$$

En reportant ces relations dans (7.6.12), on obtient

$$ {}^tP^{\gamma,T}({}^t[u], \chi\, {}^tG_1) = [P^{\gamma,T}(F'(u), \chi\, u')] - P^{\gamma,T}(G, \chi\, [u']) + r_7. \tag{7.6.15}$$

Enfin, en revenant à (7.6.7) et en tenant compte de (7.6.15), il vient

$$ \chi\, G(u^+, u^-)[u'] = [P^{\gamma,T}(F'(u), \chi\, u')] - \chi\, G_1[\underline{u}] + r_8. \tag{7.6.16}$$

Compte tenu de (7.6.15), le lemme en résulte. □

Lemme 7.6.3. — *Soient $\alpha = \Gamma F(u, \partial_y\Phi)$ et $\beta = \Gamma G(u, \partial_y\Phi)$ où F et G sont des fonctions C^∞ de leurs arguments. Alors*

$$[P^{\gamma,T}_\alpha \circ P^{\gamma,T}_\beta(\chi\, u')] - [P^{\gamma,T}_{\alpha.\beta}(\chi\, u')]$$

est un reste

Démonstration. — En notant $\xi = \Gamma\chi\, u'$, on a

$$ [P^{\gamma,T}_\alpha \circ P^{\gamma,T}_\beta \xi] = P^{\gamma,T}_{[\alpha]} \circ P^{\gamma,T}_{\beta^+}\xi^+ + P^{\gamma,T}_{\alpha^-} \circ P^{\gamma,T}_{[\beta]}\xi^+ + P^{\gamma,T}_{\alpha^-} \circ P^{\gamma,T}_{\beta^-}[\xi], \tag{7.6.17}$$

$$ [P^{\gamma,T}_{\alpha.\beta}\xi] = P^{\gamma,T}_{[\alpha]\beta^+}\xi^+ + P^{\gamma,T}_{\alpha^-[\beta]}\xi^+ + P^{\gamma,T}_{\alpha^-\beta^-}[\xi]. \tag{7.6.18}$$

On remarque que α, β et $[\alpha]/\varepsilon$ sont bornés dans $W^{1,\infty}(\omega_T)$ par $C(M)$. En appliquant (7.1.10), on en déduit que

$$ P^{\gamma,T}_{[\alpha]} \circ P^{\gamma,T}_{\beta^+}\xi^+ = P^{\gamma,T}_{[\alpha]\beta^+}\xi^+ + r_1, \tag{7.6.19}$$

$$ P^{\gamma,T}_{\alpha^-} \circ P^{\gamma,T}_{[\beta]}\xi^+ = P^{\gamma,T}_{\alpha^-[\beta]}\xi^+ + r_2. \tag{7.6.20}$$

D'après (7.1.10), et en remarquant que $|\alpha^-|^*_{3,T} + |\beta^-|^*_{3,T} \le C(M)$, on en déduit que

$$ |P^{\gamma,T}_{\alpha^-} \circ P^{\gamma,T}_{\beta^-}[\xi] - P^{\gamma,T}_{\alpha^-\beta^-}[\xi]|_{2s,\gamma,T} \le C(M)\,\varepsilon\, |[u']/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} \tag{7.6.21}$$

et le lemme suit. □

Lemme 7.6.4. — *Pour $0 \leq j \leq n-1$ on pose $d_j = [f_j(u)]$, $\underline{d}_j = [f_j(\underline{u})]$ et $d'_j = d_j - \underline{d}_j$. Alors*

$$\chi\, \partial_j \phi\, d_j - \chi\, \partial_j \underline{\phi}\, \underline{d}_j - P^{\gamma,T}(\partial_j \phi, \chi\, d'_j) - P^{\gamma,T}(d_j, \partial_j(\chi\, \phi'))$$

est un reste

Démonstration. — En utilisant (7.1.13), et l'estimation :

$$|\chi\, d'_j|_{2s-3,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M) \Big\{ |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} + |\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} \Big\}, \tag{7.6.22}$$

on vérifie que

$$\chi\, \partial_j \phi'\ d'_j = P^{\gamma,T}(\partial_j \phi', \chi\, d'_j) + P^{\gamma,T}(\chi\, d'_j, \partial_j \phi') + r_1. \tag{7.6.23}$$

D'autre part, on a

$$\chi\, \partial_j \phi\, d_j - \chi\, \partial_j \underline{\phi}\, \underline{d}_j = \chi\, \partial_j \phi'\ d'_j + \chi\, \partial_j \underline{\phi}\, d'_j + \chi\, \partial_j \phi'\ \underline{d}_j. \tag{7.6.24}$$

D'après (7.1.26), et en remarquant que $P^{\gamma,T}(d'_j, (\partial_j \chi)\phi')$ est un reste, on obtient

$$P^{\gamma,T}(\chi\, d'_j, \partial_j \phi') = P^{\gamma,T}(d'_j, \partial_j(\chi\, \phi')) + r_2. \tag{7.6.25}$$

Puisque $\underline{d}_j$ est un vecteur fixe et que $P^{\gamma,T}(\underline{d}_j, (\partial_j \chi)\phi')$ est un reste, on a :

$$\chi\, \partial_j \phi'\ \underline{d}_j = P^{\gamma,T}(\underline{d}_j, \partial_j(\chi\, \phi')) + r_3. \tag{7.6.26}$$

En reportant dans (7.6.24) et en tenant compte de (7.6.23) (7.6.25) et (7.6.26), on montre que

$$\begin{aligned} \chi\, \partial_j \phi\, d_j - \chi\, \partial_j \underline{\phi}\, \underline{d}_j = P^{\gamma,T}(\partial_j \phi', \chi\, d'_j) + P^{\gamma,T}(d'_j, \partial_j(\chi\, \phi')). \\ + P^{\gamma,T}(\underline{d}_j, \partial_j(\chi\, \phi')) + \chi\, \partial_j \underline{\phi}\, d'_j + r_4. \end{aligned} \tag{7.6.27}$$

Par ailleurs,

$$\chi\, \partial_j \underline{\phi}\, d'_j = P^{\gamma,T}(\partial_j \underline{\phi}, \chi\, d'_j) + r_5. \tag{7.6.28}$$

En reportant dans (7.6.27) on obtient

$$\chi\, \partial_j \phi\, d_j - \chi\, \partial_j \underline{\phi}\, \underline{d}_j = P^{\gamma,T}(\partial_j \phi, \chi\, d'_j) + P^{\gamma,T}(d_j, \partial_j(\chi\, \phi')) + r_6, \tag{7.6.29}$$

ce qui prouve le lemme. □

Lemme 7.6.5. — *L'expression*

$$r = [P^{\gamma,T}(\mathcal{M}(u, \partial_y \phi), \chi\, u')] - \sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(d_j, \partial_j(\chi\, \phi'))$$

est un reste.

Démonstration. — On part des conditions de Rankine-Hugoniot (2.3.3) que nous multiplions par $\chi(t)$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \chi\, \partial_j \phi [f_j(u)] - \chi\, [f_n(u)] = 0 \tag{7.6.30}$$

nous appliquons le lemme 7.6.4 à chaque terme $\chi\,\partial_j\phi[f_j(u)]$ et au terme $\chi\,[f_n(u)]$. Il vient

$$\sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(\partial_j\phi, \chi\, d'_j) + \sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(d_j, \partial_j(\chi\,\phi')) - [P^{\gamma,T}(A_n(u), \chi\, u')] = r_1. \tag{7.6.31}$$

D'après le lemme 7.6.2,

$$\chi\, d'_j = [P^{\gamma,T}(A_j(u), \chi\, u')] + r_2. \tag{7.6.32}$$

On en déduit que

$$P^{\gamma,T}(\partial_j\phi, \chi\, d'_j) = [P^{\gamma,T}_{\partial_j\phi} \circ P^{\gamma,T}_{A_j(u)}\chi\, u'] + r_3. \tag{7.6.33}$$

En appliquant le lemme 7.6.3, cela implique que

$$P^{\gamma,T}(\partial_j\phi, \chi\, d'_j) = [P^{\gamma,T}(\partial_j\phi\, A_j(u), \chi\, u')] + r_4. \tag{7.6.34}$$

Enfin, en revenant à (7.6.31) on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(d_j, \partial_j(\chi\,\phi')) - [P^{\gamma,T}(\mathcal{M}(u, \partial_y\phi), \chi\, u')] = r_5, \tag{7.6.35}$$

ce qui prouve le lemme. □

En notant $\widetilde{u} = P^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi\, u')$, la bonne inconnue v_1 s'écrit sous la forme :

$$v_1 = \widetilde{u} - P^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\phi')$$

En posant $Z = (W_1)^{-1}$.

Lemme 7.6.6. — *L'expression*

$$r = [J\widetilde{u}] - P^{\gamma,T}_{W_1^+} \circ P^{\gamma,T}_{Z^+}[J\widetilde{u}]$$

est un reste.

Démonstration. — Sur $\{x_n = 0\}$ la fonction b est de la forme

$$b = f([u_1]/\varepsilon, u, \partial'_y\phi) \tag{7.6.36}$$

où f est une fonction C^∞ de ses arguments. En utilisant (7.1.10), et la majoration $|b|^*_{3,T} \leq C(M)$, on obtient

$$P^{\gamma,T}_{W_1^+} \circ P^{\gamma,T}_{Z^+}[J\widetilde{u}] = [J\widetilde{u}] + r_1, \tag{7.6.37}$$

où r_1 vérifie l'estimation :

$$|r_1|_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\, |[J\widetilde{u}]|_{2s-3,\gamma,T}, \tag{7.6.38}$$

Par ailleurs,

$$[J\widetilde{u}] = J^+[\widetilde{u}] + (J^+ - J^-)\widetilde{u}^-. \tag{7.6.39}$$

En tenant compte de la forme de la matrice $J^+ - J^-$, on obtient :

$$|(J^+ - J^-)\widetilde{u}^-|_{2s-3,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\, |\Gamma u'|_{2s-3,\gamma,T}. \tag{7.6.40}$$

D'autre part :

$$[\widetilde{u}] = P^{\gamma,T}((V^{-1})^+, [\chi\, u']) + P^{\gamma,T}([V^{-1}], \chi\, u'). \tag{7.6.41}$$

En remarquant que $[V^{-1}]$ peut s'écrire sous la forme :

$$[V^{-1}] = [u]\, g(u^+, u^-, \partial'_y\phi), \tag{7.6.42}$$

on en déduit que

$$|[\widetilde{u}]|_{2s-3,\gamma,T} \leq C(M)\,\{|[u']|_{2s-3,\gamma,T} + \varepsilon\,|\Gamma u'|_{2s-3,\gamma,T}\}. \tag{7.6.43}$$

En revenant à (7.6.38) et en tenant compte de (7.6.40) et (7.6.43) on en déduit que r_1 est bien un reste, ce qui prouve le lemme. □

Lemme 7.6.7. — *On a l'estimation*

$$|[Z]|^*_{1,T} \leq \varepsilon\, C(M).$$

Démonstration. — Sur $\{x_n = 0\}$ on a $p^+ = p^- = [u] = [u_1]R(u^+, u^-, \partial'_y\phi)$, d'après (1.2.6). Avec (2.3.13) et (7.2.6) (7.2.7), on peut alors écrire

$$\Gamma h^+ = \frac{1}{2}[u_1]g_1(u^+, \partial'_y\phi) + [u_1]^2 g_2^+(u^+, \partial'_y\phi, [u_1]), \tag{7.6.44}$$

$$\Gamma h^- = -\frac{1}{2}[u_1]g_1(u^-, \partial'_y\phi) + [u_1]^2 g_2^-(u^-, \partial'_y\phi, [u_1]), \tag{7.6.45}$$

où :

$$g_1(u, \partial'_y\phi) = R(u, \partial'_y\phi)\cdot d_u\lambda(u, \partial'_y\phi) \geq \delta_1 > 0 \tag{7.6.46}$$

et g_2 est une fonction régulière de ses arguments. Puisque $\Gamma b^+ = \ln(-\Gamma h^+/\varepsilon)$ et $\Gamma b^- = \ln(\Gamma h^-/\varepsilon)$, on en déduit l'estimation

$$|\Gamma b^+ - \Gamma b^-|^*_{1,T} \leq \varepsilon\, C(M). \tag{7.6.47}$$

On écrit ensuite

$$[Z] = Z(u^+, b^+, \partial'_y\phi) - Z(u^-, b^-, \partial'_y\phi) \tag{7.6.48}$$

et le lemme résulte alors de (7.6.47) et de la majoration $|[u]|^*_{1,T} \leq \varepsilon\, C(M)$. □

Lemme 7.6.8. — *L'expression*

$$r = P^{\gamma,T}_{W_1^+} \circ P^{\gamma,T}_{[Z]}(J^-\widetilde{u}^-) - P^{\gamma,T}_E(\widetilde{u}^-)$$

est un reste.

Démonstration. — L'identité $E = W_1^+[Z]J^-$ implique que

$$P^{\gamma,T}_E(\widetilde{u}^-) = P^{\gamma,T}_{W_1^+[Z]}(J^-\widetilde{u}^-). \tag{7.6.49}$$

Le lemme 7.6.7 et le calcul symbolique donnent ensuite l'estimation

$$|r|_{2s,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\,|J^-\widetilde{u}^-|_{2s-1,\gamma,T}. \tag{7.6.50}$$

□

Lemme 7.6.9. — *L'expression*

$$r = [J\widetilde{u}] + P_E^{\gamma,T}(\widetilde{u}^-) - X_1^{\gamma,T}(\chi\,\phi')$$

est un reste.

Démonstration. — L'égalité $P_{Z^+}^{\gamma,T}[J\widetilde{u}]+P_{[Z]}^{\gamma,T}(J^-\widetilde{u}^-) = [P_Z^{\gamma,T}(J\widetilde{u})]$ et les lemmes 7.6.6 et 7.6.8, impliquent que

$$[J\widetilde{u}] + P_E^{\gamma,T}(\widetilde{u}^-) = P_{W_1^+}^{\gamma,T} \circ [P_Z^{\gamma,T}(J\widetilde{u})] + r_1 \tag{7.6.51}$$

où r_1 est un reste. Comme $J = W_1\mathcal{M}V$, $P_Z^{\gamma,T}(J\widetilde{u}) - P_{\mathcal{M}V}^{\gamma,T}(\widetilde{u})$ est un reste, avec le lemme 7.6.3 on obtient

$$[P_Z^{\gamma,T}(J\widetilde{u})] = [P_{\mathcal{M}}^{\gamma,T}(\chi\,u')] + r_2 \tag{7.6.52}$$

avec un reste r_2. Le lemme 7.6.5 implique alors

$$[J\widetilde{u}] + P_E^{\gamma,T}(\widetilde{u}^-) = \sum_{j=0}^{n-1} P_{W_1^+}^{\gamma,T} \circ P_{d_j}^{\gamma,T}\partial_j(\chi\,\phi') + r_3 \tag{7.6.53}$$

D'autre part, on a

$$X_1^{\gamma,T}(\chi\,\phi') = \sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(W_1^+ d_j, \partial_j(\chi\,\phi')). \tag{7.6.54}$$

Puisque $d_j = [f_j(u)]$, on a la majoration $|d_j|_{1,T}^* \leq \varepsilon\, C(M)$ et en utilisant le calcul symbolique on obtient

$$\sum_{j=0}^{n-1} P_{W_1^+}^{\gamma,T} \circ P_{d_j}^{\gamma,T}\partial_j(\chi\,\phi') = X_1^{\gamma,T}(\chi\,\phi') + r_4 \tag{7.6.55}$$

Le lemme découle alors de (7.6.53) et (7.6.55). □

Lemme 7.6.10. — *L'expression*

$$[J\,P^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\phi')]$$

est un reste.

Démonstration. — On remarque d'abord que

$$[J\,P^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\phi')] = P^{\gamma,T}([J\,\zeta], \chi\,\phi'), \tag{7.6.56}$$

et

$$J\,\zeta = W_1 f - \sum_{j=0}^{n-1} W_1 A_j(u)\partial_j u. \tag{7.6.57}$$

En utilisant l'estimation (7.6.47), on obtient :

$$|[W_1]|_{0,T}^* \leq \varepsilon\, C(M). \tag{7.6.58}$$

Comme $[W_1 f] = W_1^+[f] + [W_1]f^-$, l'estimation (3.1.9) sur le saut de f implique que

(7.6.59) $$|[W_1 f]|^*_{0,T} \leq \varepsilon\, C(M).$$

On montre de même que

(7.6.60) $$|[W_1 A_j(u)\partial_j u]|^*_{o,T} \leq \varepsilon\, C(M).$$

Il en résulte que $|[J\,\zeta]|^*_{0,T} \leq \varepsilon\, C(M)$ et, avec (7.1.8), que $P^{\gamma,T}([J\,\zeta], \chi\,\phi')$ est un reste. □

Démonstration de la proposition 7.6.1. — On part de l'égalité

(7.6.61) $$Q^{\gamma,T}(\Gamma v_1, \chi\,\phi') = Q^{\gamma,T}(\widetilde{u}, \chi\,\phi') - [J\,P^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\phi')] - P_E^{\gamma,T} \circ P_{\zeta^-}^{\gamma,T}(\chi\,\phi').$$

D'après les lemmes 7.6.9 et 7.6.10, les deux premiers termes du membre de droite sont des restes.

En utilisant (7.1.8), on obtient les deux estimations :

(7.6.62) $$|P_{\zeta^-}^{\gamma,T}(\chi\,\phi')|_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,|\phi'|_{2s,\gamma,T},$$

(7.6.63) $$|P_E^{\gamma,T} \circ P_{\zeta^-}^{\gamma,T}(\chi\,\phi')|_{2s,\gamma,T} \leq C\,|E|^*_{o,T}|\phi'|_{2s,\gamma,T}.$$

Étant donné que $E = W_1^+[Z]J^-$, on a $|E|^*_{0,T} \leq \varepsilon\, C(M)$. Il en résulte que $P_E^{\gamma,T} \circ P_{\zeta^-}^{\gamma,T}(\chi\,\phi')$ est un reste, ce qui termine la preuve de la proposition 7.6.1. □

CHAPITRE 8

ESTIMATIONS D'ÉNERGIE CONORMALES

L'essentiel de ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème 3.3.2 qui donne une estimation a priori des dérivées conormales de la solution (u, Φ). Comme indiqué au § 1.2.8, l'avantage crucial de la forme paradifférentielle des équations obtenues au chapitre 7, est qu'elle résiste bien aux dérivations tangentielles et conormales, ce que ne fait pas la forme initiale. En effet, dans la forme paradifférentielle, les commutateurs sont uniformément bornés dès que l'on contrôle un nombre fini, indépendant de s, de dérivées des coefficients. On obtient donc assez facilement les estimations conormales à partir des estimations L^2 de [Mé2].

8.1. La stabilité L^2

Dans ce paragraphe, nous commençons par rappeler l'estimation L^2 qui constitue l'inégalité de base et qui est aussi le prototype des estimations d'énergie que nous voulons établir.

Nous considérons le problème linéaire suivant, qui est une linéarisation de (3.2.3) (3.2.4) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\,v = f \\ [\mathcal{M}(u, \partial_y \Phi)v] - X_u(\psi) = g \end{cases} \tag{8.1.1}$$

où $\mathcal{L}\,v$ est donné par (7.2.1) et $X_u(\psi)$ par (7.5.2).

On se donne $T_o < T'_o < 0$, et on utilise les notations des chapitres précédents.

Théorème 8.1.1. — *Sous les hypothèses* 1 *à* 4 *du paragraphe* 1.1, *il existe un voisinage compact $\mathcal{U}$ de* 0 *dans $\mathbb{R}^N$, un voisinage compact $\mathcal{O}$ de* 0 *dans $\mathbb{R}^{n-1}$, un voisinage compact I de $\lambda(0,0)$ dans $\mathbb{R}$, et des fonctions $\varepsilon_o(\cdot)$, $\gamma_o(\cdot)$, $C(\cdot)$ telles que pour tout $T \geq 0$, tout $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_o(M)]$, $u \in W^{2,\infty}(\Omega_T)$ prenant ses valeurs dans $\mathcal{U}$, $\Phi \in W^{3,\infty}(\Omega_T)$ tel que $(\partial_t \Phi, \partial'_y \Phi)$ prend ses valeurs dans $I \times \mathcal{O}$, vérifiant*

$$\|u\|^*_{2,T} + \|\nabla \Phi\|^*_{2,T} + \|(\partial_n \Phi)^{-1}\|^*_{2,T} \leq M \tag{8.1.2}$$

et

$$(8.1.3)\qquad \begin{cases} [\Phi] = 0, \\ [u] = -\varepsilon\, e^a\, R(u^+, \partial_y'\Phi) + \varepsilon^2 a_1, \\ \Gamma h^+ = \lambda(u^+, \partial_y'\phi) - \partial_t\phi, \\ \Gamma h^- = \lambda(u^-, \partial_y'\phi) - \partial_t\phi, \end{cases}$$

avec

$$(8.1.4)\qquad |a|_{1,T}^* + |a_1|_{0,T}^* + |b^\pm|_{1,T}^* \leq M,$$

alors, pour toute solution (v, ψ, f, g) de (8.1.1) nulle pour $t \leq T_o'$, on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o(M)$ l'estimation suivante

$$(8.1.5)\qquad \begin{aligned} \gamma\|v\|_{0,\gamma,T}^t + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma v|_{0,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon\, |\psi|_{1,\gamma,T} + \gamma^{3/2}\varepsilon^{1/2}|\psi|_{0,\gamma,T} \\ \leq C(M)\left\{\|f\|_{0,\gamma,T}^t + \gamma^{1/2}\varepsilon^{-1/2}\, |g|_{0,\gamma,T}\right\}. \end{aligned}$$

Ce théorème est démontré dans [Mé2] pour $T = \infty$ avec des coefficients donnés sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et des solutions dans les espaces à poids $e^{\gamma t}L^2$. Suivant la procédure habituelle, on montre que v et ψ sont nulles pour $t < T$ si f et g le sont. Cela implique aussi que l'estimation se localise en temps sous la forme (8.1.5) (*cf.* [Ch-Pi]).

Pour ε fixé, on retrouve l'estimation L^2 donnée par A. Majda ([Ma1]). Ce théorème précise le comportement des constantes lorsque ε tend vers 0. Il analyse ainsi la perte de stabilité des traces Γv et du front ψ lorsque la force du choc tend vers zéro.

8.2. Estimations pour le problème paradifférentiel

Pour toute la suite du chapitre 8, on suppose donnée une famille $\mathcal{F}^a(2s+3)$ de solutions approchées au sens de la définition 3.1.1. Avec les notations du paragraphe 3.3, on se donne une solution exacte $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ du problème non-linéaire (3.2.3)... (3.2.10) et on se propose d'obtenir des estimations d'énergie pour la solution (v, ψ) du problème paradifférentiel

$$(8.2.1)\qquad \begin{cases} L^{\gamma,T} v = F, \\ [J\, v] + P_E^{\gamma,T}(\Gamma v^-) - X_1^{\gamma,T}(\psi) = G, \end{cases}$$

où $L^{\gamma,T}$, $X_1^{\gamma,T}$ et E ont été définis respectivement en (7.2.27) (7.5.9) et (7.5.7).

Nous comparerons aussi (8.2.1) au système différentiel :

$$(8.2.2)\qquad \begin{cases} Lv = F, \\ [J\, v] + E\Gamma v^- - X_1(\psi) = G, \end{cases}$$

où L et X_1 sont les opérateurs :

$$(8.2.3)\qquad Lv = \sum_{j=0}^{n-1} B_j\partial_j v + J\partial_n v,$$

$$X_1(\psi) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \partial_j \psi. \tag{8.2.4}$$

L agit sur des fonctions vectorielles, alors que X_1 agit sur des fonctions scalaires.

Nous considérons maintenant des fonctions v, ψ, F et G telles que

$$v \in W^{2s}(\Omega_T), \quad \Gamma v \in H^{2s}(\omega_T), \quad \psi \in H^{2s+1}(\omega_T), \tag{8.2.5}$$

$$F \in W^{2s}(\Omega_T), \quad G \in H^{2s}(\omega_T). \tag{8.2.6}$$

Théorème 8.2.1. — *Il existe des fonctions $\varepsilon_o(\cdot)$, $\gamma_o(\cdot)$, $C(\cdot)$ telles que si $T \geq 0$ et si (v, ψ, F, G) vérifient* (8.2.5)(8.2.6) *et* (8.2.1), *alors, pour tout $\gamma \geq \gamma_o(M)$, on a*

$$N_1(v, \psi, \gamma, T) \leq C(M) \Big\{ N_1(v, \psi, \gamma, 0) + ||F||^t_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2} \varepsilon^{-1/2} \left| G \right|_{2s,\gamma,T} \Big\} \tag{8.2.7}$$

où M est tel que

$$M^\infty(u, \Phi, T) \leq M \tag{8.2.8}$$

et où l'on a posé

$$\begin{aligned} N_1(v, \psi, \gamma, T) = \gamma ||v||^t_{2s,\gamma,T} &+ \gamma^{1/2} \varepsilon^{1/2} |\Gamma v|_{2s,\gamma,T} \\ &+ \gamma^{1/2} \varepsilon \, |\psi|_{2s+1,\gamma,T} + \gamma^{3/2} \varepsilon^{1/2} |\psi|_{2s,\gamma,T}. \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

Nous commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 8.2.2. — *Si (v, ψ, f, g) sont solutions du système* (8.1.1), *alors*

$$N_2(v, \psi, \gamma, T) \leq C(M) \Big\{ N_2(v, \psi, \gamma, 0) + ||f||^t_{0,\gamma,T} + \gamma^{1/2} \varepsilon^{-1/2} \left| g \right|_{0,\gamma,T} \Big\}, \tag{8.2.10}$$

où $N_2(v, \psi, \gamma, T)$ désigne l'expression définie par (8.2.9) *pour $s = 0$.*

Démonstration. — Soit $\chi(t)$ une fonction C^∞, nulle pour $t \leq T'_o$ et valant 1 pour $t \geq 0$. En posant $\widetilde{f} = \chi f + A_0(u)(\partial_t \chi) v$ et $\widetilde{g} = \chi g - [f_0(u)](\partial_t \chi) \psi$, on voit que $(\chi v, \chi \psi, \widetilde{f}, \widetilde{g})$ sont solutions de (8.1.1). Ces fonctions sont nulles pour $t \leq T'_o$. De plus les conditions portant sur u et Φ impliquent (8.1.2) (8.1.3) (8.1.4). D'après le théorème 8.1.1, $(\chi v, \chi \psi, \widetilde{f}, \widetilde{g})$ vérifient (8.1.5) et (8.2.10) en résulte. □

Lemme 8.2.3. — *Si (v, ψ, F, G) sont solutions du système* (8.2.1), *alors l'estimation (8.2.10) est satisfaite.*

Démonstration. — Soit (v, ψ) une solution du système différentiel (8.2.2). Puisque $B_j = (\partial_n \Phi) W_1 A_j V$ et $J = W_1 \mathcal{M} V$, on a

$$\mathcal{L}(Vv) = \widetilde{F} := (\partial_n \Phi)^{-1} (W_1)^{-1} F + Dv \tag{8.2.11}$$

où D est une matrice dont les coefficients sont des fonctions de u, b, $\partial^\alpha u$, $\partial^\beta \Phi$ avec $|\alpha| \leq 1$ et $|\beta| \leq 2$. On a donc

$$||D||^*_{0,T} \leq C(M). \tag{8.2.12}$$

On a d'autre part

$$[J\,v] + E\Gamma v^- - X_1(\psi) = W_1^+\{[\mathcal{M}(u, \partial_y\Phi)v] - X_u(\psi)\}. \tag{8.2.13}$$

On en déduit que (Vv, ψ) est solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(Vv) = \widetilde{F}, \\ [\mathcal{M}(u, \partial_y\Phi)v] - X_u(\psi) = \widetilde{G} := (W_1^+)^{-1}G. \end{cases} \tag{8.2.14}$$

Le lemme 8.2.2, implique que (v, ψ) vérifie l'estimation (8.2.10).

On considère maintenant une solution (v, ψ) du système paradifférentiel (8.2.1). Alors

$$\begin{cases} Lv = F_1, \\ [J\,v] + E\Gamma v^- - X_1(\psi) = G_1, \end{cases} \tag{8.2.15}$$

où l'on a posé :

$$F_1 = F + Lv - L^{\gamma,T}v, \tag{8.2.16}$$

$$G_1 = G + \{E\Gamma v^- - P_E^{\gamma,T}\Gamma v^-\} - \{X_1(\psi) - X_1^{\gamma,T}(\psi)\}. \tag{8.2.17}$$

La première partie de la preuve implique que

$$N_2(v, \psi, \gamma, T) \leq C(M)\Big\{N_2(v, \psi, \gamma, 0) + ||\widetilde{F}||^t_{0,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{-1/2}\,|\widetilde{G}|_{0,\gamma,T}\Big\}. \tag{8.2.18}$$

En utilisant le résultat de paralinéarisation (7.1.14) et l'estimation $||B_j||^*_{1,T} \leq C(M)$, on obtient

$$||F_1||^t_{0,\gamma,T} \leq ||F||^t_{0,\gamma,T} + C(M)\,||v||^t_{0,\gamma,T}. \tag{8.2.19}$$

Comme $E = W_1^+[Z]J^-$, on a par le lemme 7.6.7, $|E|^*_{1,T} \leq \varepsilon\, C(M)$. En appliquant (7.1.14), on obtient

$$|E\Gamma v^- - P_E^{\gamma,T}\Gamma v^-|_{0,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\,\{|\Gamma v^-|_{0,\gamma,0} + \frac{1}{\gamma}|\Gamma v^-|_{0,\gamma,T}\}. \tag{8.2.20}$$

On remarque ensuite que $b_j = W_1^+[f_j(u)]$ factorise par $[u]$, et donc que $|b_j|^*_{1,T} \leq \varepsilon\, C(M)$. En appliquant à nouveau (7.1.14) on obtient :

$$|X_1(\psi) - X_1^{\gamma,T}(\psi)|_{0,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\,|\psi|_{0,\gamma,T}. \tag{8.2.21}$$

Finalement, en reportant dans(8.2.18) les estimations (8.2.19) (8.2.20) et (8.2.21) et en prenant γ assez grand pour absorber les termes $||v||^t_{0,\gamma,T}$, $\gamma^{-1/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma v^-|_{0,\gamma,T}$ et $\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\psi|_{0,\gamma,T}$ du second membre, on obtient que (v, ψ) vérifie (8.2.10). □

On commute maintenant les dérivations conormales au système paradifférentiel (8.2.1).

Lemme 8.2.4. — *Si (v,ψ) est solution de (8.2.1), pour tout α tel que $|\alpha|\leq 2s$, on a*

$$\gamma^{2s-|\alpha|}|||[\delta^\alpha, L^{\gamma,T}]v|||^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\,\{|||v|||^t_{2s,\gamma,T} + |||F|||^t_{2s,\gamma,T}\}. \tag{8.2.22}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{2s-|\alpha|}|[\partial_y^\alpha, P_E^{\gamma,T}]\Gamma v^-|_{0,\gamma,T} + \gamma^{2s-|\alpha|}|[\partial_y^\alpha, X_1^{\gamma,T}]\psi|_{0,\gamma,T}& \\ \leq \varepsilon\, C(M)\,\{|\Gamma v^-|_{2s-1,\gamma,T} + |\psi|_{2s,\gamma,T}\}&.\end{aligned} \tag{8.2.23}$$

Démonstration. — En appliquant (7.1.11), on obtient que

$$\gamma^{2s-|\alpha|}|||[\delta^\alpha, P_{B_j}^{\gamma,T}]\partial_j v|||^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\,|||v|||^t_{2s,\gamma,T}. \tag{8.2.24}$$

On commute ensuite δ^α à

$$J\partial_n v = F - \sum_{j=0}^{n-1} P_{B_j}^{\gamma,T}\partial_j v. \tag{8.2.25}$$

On obtient l'estimation

$$\gamma^{2s-|\alpha|}|||[\delta^\alpha, J\partial_n]v|||^t_{0,\gamma,T} \leq \sum_{|\beta|\leq|\alpha|-1} \gamma^{2s-|\alpha|}|||\delta^\beta F - \sum_{j=0}^{n-1}\delta^\beta P_{B_j}^{\gamma,T}\partial_j v|||^t_{0,\gamma,T}. \tag{8.2.26}$$

Avec (7.1.8), il vient :

$$\gamma^{2s-|\alpha|}|||[\delta^\alpha, J\partial_n]v|||^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\,\{|||v|||^t_{2s,\gamma,T} + |||F|||^t_{2s,\gamma,T}\}. \tag{8.2.27}$$

L'estimation (8.2.22) découle alors directement de (8.2.24) et (8.2.27).

La seconde partie du lemme résulte immédiatement de l'estimation

$$|E|^*_{1,T} + |b_j|^*_{1,T} \leq \varepsilon\, C(M) \tag{8.2.28}$$

et de la règle (7.1.11) pour le paraproduit sur le bord. □

On considère maintenant une solution w du système paradifférentiel :

$$\begin{cases} L^{\gamma,T}w^\pm = F^\pm, \\ \Gamma w^\pm = 0. \end{cases} \tag{8.2.29}$$

Lemme 8.2.5. — *Soit $w \in L^2(\Omega_T)$ une solution de* (8.2.29) *nulle pour $t \leq T_o'$. On a l'estimation d'énergie suivante*

$$\gamma|||w|||_{0,\gamma,T} \leq C(M)\,|||F|||_{0,\gamma,T}. \tag{8.2.30}$$

Démonstration. — Comme pour le lemme 8.2.2, il suffit d'établir (8.2.30) lorsque w est solution du système différentiel :

$$\begin{cases} Lw^\pm = F^\pm, \\ \Gamma w^\pm = 0. \end{cases} \tag{8.2.31}$$

Le système initial étant supposé symétrique, l'opérateur L est symétrisable et une intégration par parties standard conduit à (8.2.30). □

Démonstration du théorème 8.2.1. — Soit (v, ψ) une solution de (8.2.1). Pour $|\alpha| \leq 2s$, on note $w_\alpha = \gamma^{2s-|\alpha|}\delta^\alpha v$ et $\psi_\alpha = \gamma^{2s-|\alpha|}\delta^\alpha \psi$.

Supposons d'abord que δ^α ne contient pas de dérivée δ_n. Alors on peut commuter $\delta^\alpha = \partial_y^\alpha$ à l'équation et aux conditions aux limites. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} L^{\gamma,T} w_\alpha = F_\alpha, \\ [J\, w_\alpha] + P_E^{\gamma,T}(\Gamma w_\alpha^-) - X_1^{\gamma,T}(\psi_\alpha) = G_\alpha, \end{array} \right. \tag{8.2.32}$$

avec

$$F_\alpha = \gamma^{2s-|\alpha|}\Big\{\delta^\alpha F - [\delta^\alpha, L^{\gamma,T}]v\Big\},$$

$$G_\alpha = \gamma^{2s-|\alpha|}\Big\{\delta^\alpha G - [\delta^\alpha, P_E^{\gamma,T}]\Gamma v^- + [\delta^\alpha, X_1^{\gamma,T}]\psi\Big\}.$$

En utilisant le lemme 8.2.4, il vient :

$$\|F_\alpha\|^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\|v\|^t_{2s,\gamma,T} + \|F\|^t_{2s,\gamma,T}\right\}. \tag{8.2.33}$$

En utilisant l'estimation (8.2.23) du lemme 8.2.4, on obtient

$$|G_\alpha|_{0,\gamma,T} \leq |G|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon\, C(M)\left\{|\Gamma v^-|_{2s-1,\gamma,T} + |\psi|_{2s,\gamma,T}\right\}. \tag{8.2.34}$$

Le lemme 8.2.3 implique alors que

(8.2.35)

$$\begin{aligned} N_2(w_\alpha, \psi_\alpha, \gamma, T) \leq C(M)\Big\{&N_2(w_\alpha, \psi_\alpha, \gamma, 0) + \|v\|^t_{2s,\gamma,T} + \|F\|^t_{2s,\gamma,T} \\ &+ \gamma^{1/2}\varepsilon^{-1/2}|G|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma v^-|_{2s-1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\psi|_{2s,\gamma,T}\Big\}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que δ^α comporte une dérivée δ_n. Dans ce cas on a $\Gamma w_\alpha = 0$ sur $\{x_n = 0\}$ et w_α vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} L^{\gamma,T} w_\alpha^\pm = F_\alpha^\pm, \\ \Gamma w_\alpha^\pm = 0. \end{array} \right.$$

F_α vérifie encore l'estimation (8.2.33) et le lemme 8.2.5 implique que

$$\gamma\|w_\alpha\|^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\|v\|^t_{2s,\gamma,T} + \|F\|^t_{2s,\gamma,T}\right\}. \tag{8.2.36}$$

En sommant les estimations (8.2.35) (8.2.36) pour tous les α tels que $|\alpha| \leq 2s$, et en choisissant $\gamma \geq \gamma_o(M)$ assez grand pour absorber les termes

$$\|v\|^t_{2s,\gamma,T}, \quad \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\Gamma v^-|_{2s-1,\gamma,T} \quad \text{et} \quad \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\psi|_{2s,\gamma,T}$$

du membre de droite par le membre de gauche, on obtient l'estimation (8.2.7) et le théorème est démontré. □

8.3. Estimation d'énergie pour le problème non-linéaire

Nous démontrons ici le théorème 3.3.2. On considère une solution $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ du problème non-linéaire (3.2.3)... (3.2.10). On introduit la bonne inconnue v_1 comme en (7.4.1) et on pose $F = L^{\gamma,T}(v_1)$ et $G = Q^{\gamma,T}(\Gamma v_1, \chi\,\phi')$.

a) Estimation d'énergie pour $(v_1, \chi\,\phi')$. — D'après le corollaire 7.4.1 et la proposition 7.6.1, $F \in H^{0,2s}(\Omega_T)$ et $G \in H^{2s}(\omega_T)$ avec

$$\|F\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T}\right\}, \tag{8.3.1}$$

$$|G|_{2s,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\left\{|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} + |\phi|_{2s,\gamma,T} + |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\right\}. \tag{8.3.2}$$

D'après le théorème 8.2.1, on a alors

$$\begin{aligned} N_1(v_1, \chi\,\phi', \gamma, T) \leq C(M)\Big\{&N_1(v_1, \chi\,\phi', \gamma, 0) + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} \\ &+\|f\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\{|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} + |\phi|_{2s,\gamma,T} + |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\}\Big\}. \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

b) Estimation de $\gamma\|\chi\,u'\|^t_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\chi\,\Gamma u|_{2s,\gamma,T}$. — On note $\widetilde{u} = \Pi^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi\,u')$ et $\widetilde{\Phi} = \Pi^{\gamma,T}(\zeta, \chi\,\Phi')$. Alors, $v_1 = \widetilde{u} - \widetilde{\Phi}$. En appliquant (7.1.8) et (7.1.24), on obtient

$$\|\widetilde{\Phi}\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}, \tag{8.3.4}$$

$$\|\widetilde{u}\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,\{\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T}\}. \tag{8.3.5}$$

Comme $\chi\,u' - P^{\gamma,T}(V, \widetilde{u}) = \chi\,u' - P^{\gamma,T}(I, \chi\,u') + P^{\gamma,T}(I, \chi\,u') - P^{\gamma,T}(V, \widetilde{u})$, on obtient en utilisant (7.1.16),

$$\gamma\|\chi\,u' - P^{\gamma,T}(I, \chi\,u')\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,\|u\|^t_{2s,\gamma,T}, \tag{8.3.6}$$

et d'après (7.1.10) et (7.1.24) :

$$\gamma\|P^{\gamma,T}(I, \chi\,u') - P^{\gamma,T}(V, \widetilde{u})\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,\|u\|_{2s,\gamma,T}. \tag{8.3.7}$$

On en déduit que

$$\gamma\|\chi\,u' - P^{\gamma,T}(V, \widetilde{u})\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,\|u\|_{2s,\gamma,T}. \tag{8.3.8}$$

D'autre part, puisque $\widetilde{u} = v_1 + \widetilde{\Phi}$, on tire de (8.3.4) que l'on a

$$\gamma\|P^{\gamma,T}(V, \widetilde{u})\|^t_{2s,\gamma,T} \leq \gamma\, C(M)\,\{\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|v_1\|^t_{2s,\gamma,T}\}. \tag{8.3.9}$$

Compte tenu de (8.3.8), il vient

$$\gamma\|\chi\,u'\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|v_1\|^t_{2s,\gamma,T}\right\}. \tag{8.3.10}$$

On obtient des estimations similaires de la trace $\chi\,\Gamma u'$. On a successivement

$$|\chi\,\Gamma u' - P^{\gamma,T}(V, \Gamma\widetilde{u})|_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,|\chi\,\Gamma u'|_{2s-1,\gamma,T}, \tag{8.3.11}$$

$$|P^{\gamma,T}(V, \Gamma\widetilde{u})|_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\,\{|\Gamma\widetilde{u} - \Gamma v_1|_{2s,\gamma,T} + |\Gamma v_1|_{2s,\gamma,T},\} \tag{8.3.12}$$

(8.3.13)
$$\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|\chi\,\Gamma u'|_{2s,\gamma,T} \leq \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\, C(M)\left\{|\chi\,\Gamma u'|_{2s-1,\gamma,T} + |\Gamma\Phi|_{2s,\gamma,T} + |\Gamma v_1|_{2s,\gamma,T}\right\}.$$

On déduit alors de (8.3.3) (8.3.10) et (8.3.13) que

$$\begin{aligned} N_1(\chi u',\chi\phi',\gamma,T) \leq C(M)\Big\{&N_1(v_1,\chi\phi',\gamma,o) + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} \\ &+\|f\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\{|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} + |\phi|_{2s,\gamma,T} + |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\}\Big\} \end{aligned} \tag{8.3.14}$$

c) Estimation de $N_1(v_1,\chi\phi',\gamma,0)$. — On a $\widetilde{u} = \Pi^{\gamma,T}(V^{-1},\chi u') - P^{\gamma,T}(V^{-1},\chi u') + P^{\gamma,T}(V^{-1},\chi u')$ et par suite

$$\gamma\|\widetilde{u}\|^t_{2s,\gamma,o} \leq C(M)\,\{\gamma\|\chi u'\|^t_{2s,\gamma,o} + \|u\|_{2s,\gamma,T}\}. \tag{8.3.15}$$

Puisque $v_1 = \widetilde{u} - \widetilde{\Phi}$, on a d'après (8.3.4) et (8.3.15)

$$\gamma\|v_1\|^t_{2s,\gamma,0} \leq C(M)\,\{\gamma\|\chi u'\|^t_{2s,\gamma,0} + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}\}. \tag{8.3.16}$$

On obtient de même

$$\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|\Gamma v_1|_{2s,\gamma,0} \leq \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,C(M)\,\{|\chi\,\Gamma u'|_{2s,\gamma,o} + |\phi'|_{2s,\gamma,T}\}. \tag{8.3.17}$$

On déduit alors de (8.3.14) (8.3.16) et (8.3.17) l'estimation

$$\begin{aligned} N_1(\chi u',\chi\phi',\gamma,T) \leq C(M)\Big\{&N_1(\chi u',\chi\phi',\gamma,0) + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} \\ &+\|f\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\{|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} + |\phi|_{2s,\gamma,T} + |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\}\Big\}. \end{aligned} \tag{8.3.18}$$

d) Estimation de $N_1(u',\phi',\gamma,T)$. — On a $u' = \chi u' + (1-\chi)u'$ et $\phi' = \chi\phi' + (1-\chi)\phi'$. Comme $1-\chi(t) = 0$ pour $t \geq 0$, on a donc

$$N_1(u',\phi',\gamma,T) \leq N_1(\chi u',\chi\phi',\gamma,T) + C\,N_1(u',\phi',\gamma,0). \tag{8.3.19}$$

on déduit alors de (8.3.18) :

(8.3.20)

$$\begin{aligned} N_1(u',\phi',\gamma,T) \leq C(M)\Big\{&N_1(u',\phi',\gamma,0) + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T} \\ &+\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\{|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} + |\phi|_{2s,\gamma,T} + |[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\}\Big\}. \end{aligned}$$

En prenant $\gamma \geq \gamma_o(M)$ assez grand, les termes

$$\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} \quad \text{et} \quad \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|\phi|_{2s,\gamma,T}$$

s'absorbent de droite à gauche et la démonstration du théorème 3.3.2 est achevée.

8.4. Estimation d'énergie pour le problème linéaire

Dans ce paragraphe, on donne une variante des estimations ci-dessus, qui nous sera utile dans la démonstration du théorème 3.4.1 de prolongement des solutions.

On se donne T_1 et T_2 tels que $0 \leq T_2 < T_1$ et, avec les notations du paragraphe 3.3, on considère une solution exacte $(u_1,\Phi_1) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s,T_2)$ sur Ω_{T_2} du problème non-linéaire. Nous supposerons de plus :

$$M^\infty(u_1,\Phi_1,T_2) \leq M_o + H/2 \tag{8.4.1}$$

où M_o est défini en (3.3.10) et $H > 0$ est fixé.

On considère $(\widetilde{u}_1, \widetilde{\Phi}_1) \in W^{2s}(\Omega_{T_1})$ un prolongement de (u_1, Φ_1) à Ω_{T_1}. On considère un couple (u, Φ) défini sur Ω_T pour un $T \in]T_2, T_1]$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(8.4.2) \qquad (u, \Phi) \in W^{2s}(\Omega_T) \qquad \Gamma u \in H^{2s}(\omega_T) \qquad \Gamma\Phi \in H^{2s+1}(\omega_T)$$

$$(8.4.3) \qquad u = u_1 = \widetilde{u}_1 \qquad \Phi = \Phi_1 = \widetilde{\Phi}_1 \qquad \text{pour } \ t \leq T_2$$

La proposition suivante est une version à ε fixé du théorème 8.2.1. Elle nous permettra d'obtenir, au paragraphe 8.5, une estimation d'énergie pour le problème linéaire à ε fixé.

Proposition 8.4.1. — *Il existe des constantes positives C_o, γ_o, M_1 et $T_1' \in]T_2, T_1]$ telles que :*

i) pour tout couple (u, Φ) vérifiant (8.4.2)(8.4.3) *avec $T \in]T_2, T_1']$ ainsi que la condition*

$$(8.4.4) \qquad \|u - \widetilde{u}_1\|_{4,T}^* + \|\Phi - \widetilde{\Phi}_1\|_{4,T}^* \leq M_1,$$

on a

$$(8.4.5) \qquad M^\infty(u, \Phi, T) \leq M_o + H.$$

ii) pour tout couple (u, Φ) vérifiant (8.4.2)(8.4.3)(8.4.4) *avec $T \in]T_2, T_1']$, pour tout couple (v, ψ) solution du problème* (8.2.1), *on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o$ l'estimation :*

$$(8.4.6) \qquad N_1(v, \psi, \gamma, T) \leq C_o \Big\{ N_1(v, \psi, \gamma, 0) + \|F\|_{2s,\gamma,T}^t + \gamma^{1/2}\ |G|_{2s,\gamma,T} \Big\}$$

où $N_1(v, \psi, \gamma, T)$ est défini ici par

$$(8.4.7) \qquad N_1(v, \psi, \gamma, T) = \gamma \|v\|_{2s,\gamma,T}^t + \gamma^{1/2} |\Gamma v|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2} |\psi|_{2s+1,\gamma,T}$$

Nous reprenons dans ce paragraphe les hypothèses du paragraphe 8.3. Pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et $T_2 \in [0, T_1[$ fixés, on considère un couple (u, Φ) vérifiant (8.3.2) (8.3.3) et on se donne des fonctions F et G telles que

$$(8.4.8) \qquad F \in W^{2s}(\Omega_T) \qquad G \in H^{2s}(\omega_T).$$

Afin de préparer la démonstration du théorème 3.4.1, nous établissons des estimations d'énergie pour les solutions (v, ψ) du système différentiel linéaire :

$$(8.4.9) \qquad \begin{cases} \mathcal{L} v = F, \\ [\mathcal{M}(u, \partial_y \Phi) v] - X_u(\psi) = G. \end{cases}$$

Théorème 8.4.2. — *Il existe des constantes positives C_o, γ_o, M_1 et $T_1' \in]T_2, T_1]$ telles que pour tout couple (u, Φ) vérifiant* (8.4.2)(8.4.3)(8.4.4) *avec $T \in]T_2, T_1']$ et pour tout* *couple* (v, ψ) *solution du système* (8.4.9), *on a pour tout* $\gamma \geq \gamma_o$ *l'estimation*

$$N(v,\psi,\gamma,T) \leq C_o\Big\{N(v,\psi,\gamma,0) + \|v\|_{2s,\gamma,T} + \|F\|^t_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|G|_{2s,\gamma,T} + K_o(T)K_1(T)\Big\}, \tag{8.4.10}$$

où l'on a posé

$$N(v,\psi,\gamma,T) = \gamma\|v\|^t_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma v|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\psi|_{2s+1,\gamma,T}, \tag{8.4.11}$$

$$K_o(T) = \|F\|^*_{2,T} + \|v\|^*_{3,T} + |\psi|^*_{1,T} + |G|^*_{0,T}, \tag{8.4.12}$$

$$K_1(T) = \|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma u|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\phi|_{2s+1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma b|_{2s,\gamma,T}. \tag{8.4.13}$$

Démonstration. — On désigne par v_1 la bonne inconnue, définie ici par

$$v_1 = \Pi^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi\, v) - \Pi^{\gamma,T}(\zeta, \chi\, \Phi') \tag{8.4.14}$$

avec $\zeta = V^{-1}(\partial_n u/\partial_n \Phi)$. La démonstration suit les mêmes étapes que celles du théorème 3.3.2. La première étape consiste à établir une estimation d'énergie pour $(v_1, \chi\,\psi)$. La proposition 8.4.1 s'applique et fournit les constantes M_1 et T_1'. Pour $T \in\,]T_2, T_1']$, on a alors $M^\infty(u,\Phi,T) \leq M_o + H$. Le lemme 7.2.1 s'applique et, avec les notations de ce lemme, on en déduit l'estimation

$$\|b'\|^*_{2,T} \leq C(M_o + H). \tag{8.4.15}$$

D'après le théorème 7.3.1, il existe une constante C_1 qui ne dépend que de M_o et H, telle que :

$$\|L^{\gamma,T}(v_1)\|^t_{2s,\gamma,T} \leq C_1\Big\{\|v\|_{2s,\gamma,T} + \|F\|^t_{2s,\gamma,T} + K_o\{\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T}\}\Big\}, \tag{8.4.16}$$

où $K_o = \|F\|^*_{2,T} + \|v\|^*_{3,T}$. De même, en appliquant la proposition 7.5.1, on voit qu'il existe une constante C_2 telle que :

$$|Q^{\gamma,T}(\Gamma v_1, \chi\,\psi)|_{2s,\gamma,T} \leq C_2\Big\{|\Gamma v|_{2s-1,\gamma,T} + |\psi|_{2s,\gamma,T} + |G|_{2s,\gamma,T} + K_o'\{|\Gamma b|_{2s,\gamma,T} + |\Gamma u|_{2s,\gamma,T} + |\phi|_{2s+1,\gamma,T}\}\Big\}. \tag{8.4.17}$$

où $K_o' = |\psi|^*_{1,T} + |\Gamma v|^*_{1,T} + |G|^*_{0,T}$. La proposition 8.4.1 donne alors l'estimation

$$N(v_1,\chi\,\psi,\gamma,T) \leq C_3\Big\{N(v_1,\chi\,\psi,\gamma,0) + \|v\|_{2s,\gamma,T} + \|F\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\Gamma v|_{2s-1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\psi|_{2s,\gamma,T} + K_o(T)K_1(T)\}\Big\}. \tag{8.4.18}$$

où $N(v_1, \chi\,\psi, \gamma, T)$, $K_o(T)$ et $K_1(T)$ sont définis par (8.4.11) (8.4.12) et (8.4.13). La suite de la preuve est en tout point identique à celle du théorème 3.3.2. □

CHAPITRE 9

ESTIMATIONS A PRIORI POUR LE PROBLÈME NON-LINÉAIRE

Dans ce chapitre, on démontre le théorème 3.3.3. Comme indiqué au chapitre 3, on commence par estimer les dérivées normales de u. On majore ensuite le saut de u, puis les fonctions p, h et b définies au paragraphe 7.2 et enfin la fonction Φ.

Toutes ces estimations, ainsi que l'estimation d'énergie donnée par le théorème 3.3.2 seront alors utilisées pour établir l'estimation a priori principale constituant le théorème 3.3.3. Dans tout le chapitre 9, nous supposons que $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ est solution du problème non-linéaire.

9.1. Estimation de $\partial_n u$

Pour un problème non caractéristique, il est clair qu'une régularité tangentielle d'ordre $2s$ se traduit par une régularité du même ordre dans les dérivées normales. Par contre, pour un problème caractéristique, on sait qu'en général il faut deux dérivées tangentes pour estimer une dérivée normale (*cf.* par exemple [Ma-Os], [Ra-Re], [Al] ou [Mé-Ra] pour une illustration de cette règle).

Pour chaque $\varepsilon > 0$, le problème (3.2.3) est non caractéristique, et les solutions $H^{0,2s}$ de (3.2.1) sont automatiquement H^{2s}. Néanmoins, pour avoir des estimations uniformes en $\varepsilon > 0$, nous devons travailler dans les espaces W^{2s}. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la première dérivée $\partial_n u$, les dérivées normales d'ordre supérieur seront estimées au paragraphe suivant.

Proposition 9.1.1. — *Il existe des fonctions $\varepsilon(\cdot) > 0$, $C(\cdot)$ et $\gamma_o(\cdot)$ telles que si $T \geq 0$ et si $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$, on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o(M)$ et tout $\varepsilon \leq \varepsilon(M)$, l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} \gamma \|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ & \gamma \|u\|_{2s,\gamma,o} + \|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \gamma \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} \\ & + \varepsilon \, \|\partial_n \Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|b\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T} \Big\}, \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

où M est tel que :

$$M^\infty(u, \Phi, T) \leq M. \tag{9.1.2}$$

Au paragraphe 7.2, on a vu qu'il existe des matrices $W(u, \partial'_y\Phi)$ et $V(u, \partial'_y\Phi)$ telles que

$$WMV = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} \tag{9.1.3}$$

où $h = \lambda(u, \partial'_y\Phi) - \partial_t\Phi$. En outre, le premier vecteur colonne de V est le vecteur propre $r(u, \partial'_y\Phi)$ associé à la valeur propre $\lambda(u, \partial'_y\Phi)$ de la matrice $G(u, \partial'_y\Phi)$ introduite en (2.1.2) et normalisé par (2.1.3). On a donc :

$$\mathcal{M}(u, \partial'_y\Phi)r(u, \partial'_y\Phi) = h\, A_0(u)r(u, \partial'_y\Phi). \tag{9.1.4}$$

De plus, le premier vecteur ligne de $W(u, \partial'_y\Phi)$, noté $l(u, \partial'_y\Phi)$ est choisi tel que :

$$lA_0r = 1 \quad \text{et} \quad l\mathcal{M} = hlA_0. \tag{9.1.5}$$

Comme au paragraphe 7.2, nous notons $z = \partial_n u/\partial_n\Phi$ et $\zeta = V^{-1}z = (\zeta_1, \zeta') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$.

a) Estimation de ζ'. — En multipliant l'équation (3.2.3) par $W(u, \partial'_y\Phi)$, on obtient :

$$W\mathcal{M}V\zeta = W\Big(f - \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j u\Big), \tag{9.1.6}$$

d'où en tenant compte de (9.1.3) :

$$\zeta' = W'(f - \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j u); \tag{9.1.7}$$

Comme $||f||^*_{1,T} \leq C(M_o)$, on déduit de (9.1.7) les estimations

$$||\zeta'||^*_{1,T} \leq C(M), \tag{9.1.8}$$

$$||\zeta'||^t_{2s-1,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{||u||^t_{2s,\gamma,T} + ||\Phi||^t_{2s,\gamma,T} + ||f||^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}. \tag{9.1.9}$$

b) Équation de transport pour ζ_1. — En appliquant $(\partial_n\Phi)^{-1}\partial_n$ à l'équation, on voit que z vérifie

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j z + \mathcal{M}(u, \partial_y\Phi)\frac{\partial_n z}{\partial_n\Phi} + E(u, \partial_y u, \partial_y\Phi, z)z = \frac{\partial_n f}{\partial_n\Phi} \tag{9.1.10}$$

où E désigne une fonction C^∞ de ses arguments.

Remarque 9.1.2. — Le système (3.2.3) a été obtenu à partir de (2.1.1) par le changement de variable (2.3.1). On remarque que z est la fonction qui correspond à la dérivée normale ∂_n de l'inconnue dans les variables initiales, et qu'appliquer $(\partial_n\Phi)^{-1}\partial_n$ à (3.2.3) revient simplement à appliquer ∂_n au système initial (2.1.1). Ceci explique pourquoi dans (9.1.10) n'apparaissent pas de dérivée d'ordre 2 de Φ.

En multipliant (9.1.10) par $W(u, \partial'_y\Phi)$ et en y remplaçant z par $V\zeta$, il vient

$$\sum_{j=0}^{n-1}(WA_jV)\partial_j\zeta + (W\mathcal{M}V)\frac{\partial_n\zeta}{\partial_n\Phi} = WE_1\zeta + W\frac{\partial_n f}{\partial_n\Phi}, \tag{9.1.11}$$

avec

$$E_1 = -EV - \sum_{j=0}^{n-1} A_j\partial_j V - \mathcal{M}\frac{\partial_n V}{\partial_n\Phi}. \tag{9.1.12}$$

La première composante du système (9.1.11), s'écrit

$$h\partial_n\zeta_1 + \sum_{j=0}^{n-1} X_j\partial_j\zeta_1 = F = \sum_{k=1}^{6} F_k, \tag{9.1.13}$$

où

$$X_j = \partial_n\Phi\, l(u, \partial'_y\Phi)\, A_j(u)\, r(u, \partial'_y\Phi), \tag{9.1.14}$$

et où les F_k sont des fonctions de la forme :

$$\begin{array}{ll} F_1 = \partial_n\Phi\, g_1(u, \partial'_y\Phi)\, \partial_j\zeta', & F_2 = \partial_n\Phi\, g_2(u, \partial'_y\Phi) \times \partial_y(u, \partial'_y\Phi) \times \zeta, \\ F_3 = \partial_n\Phi\, g_3(u, \partial'_y\Phi) \times \zeta \times \zeta, & F_4 = \partial_n\Phi\, h\, g_4(u, \partial'_y\Phi) \times \zeta \times \zeta, \\ F_5 = h\, g_5(u, \partial'_y\Phi) \times \partial_n\partial'_y\Phi \times \zeta, & F_6 = h\, g_6(u, \partial'_y\Phi) \times \partial_n f. \end{array}$$

c) Estimation de ζ_1 dans $H^{0,\sigma}(\Omega_T)$. — On note $X = X^\pm$ l'opérateur du premier ordre défini par :

$$X = h\partial_n + \sum_{j=0}^{n-1} X_j\partial_j \tag{9.1.15}$$

Lemme 9.1.3. — *En notant $v = (u, \partial'_y\Phi, \partial_n\Phi, b)$, la fonction ζ_1 vérifie l'estimation*

$$\gamma\|\zeta_1\|^t_{\sigma,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\gamma\|\zeta_1\|^t_{\sigma,\gamma,0} + \|X\zeta_1\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^t_{\sigma,\gamma,T}\right\}. \tag{9.1.16}$$

Démonstration. — Les coefficients de X sont bornés dans $W^{1,\infty}(\Omega_T)$ et d'après (9.1.5) le coefficient X_0 de ∂_t est $\partial_n\Phi \geq \delta > 0$. En intégrant par parties $e^{-2\gamma t}(X\varphi)\varphi$ on en déduit que :

$$\gamma\|\varphi\|^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\{\gamma\|\varphi\|^t_{0,\gamma,0} + \|X\varphi\|^t_{0,\gamma,T}\} \tag{9.1.17}$$

On commute ensuite le champ $e^{-b}X$ aux dérivations conormales δ^α. En posant $X\zeta_1 = F$ on a

$$X(\delta^\alpha\zeta_1) = e^b\delta^\alpha(e^{-b}F) - e^b[\delta^\alpha, e^{-b}X]\zeta_1. \tag{9.1.18}$$

D'où en appliquant (9.1.17),

$$\begin{aligned} \gamma\|\delta^\alpha\zeta_1\|^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\{\gamma\|\delta^\alpha\zeta_1\|^t_{0,\gamma,0} &+ \|e^b\delta^\alpha(e^{-b}F)\|^t_{0,\gamma,T} \\ &+ \|e^b[\delta^\alpha, e^{-b}X]\zeta_1\|^t_{0,\gamma,T}\}. \end{aligned} \tag{9.1.19}$$

D'après le lemme 4.1.3, on obtient :

$$\gamma^{\sigma-|\alpha|}\|e^b\delta^\alpha(e^{-b}F)\|^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\,\{\|F\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|b'\|^t_{\sigma,\gamma,T}\}. \tag{9.1.20}$$

On écrit ensuite :

$$e^b[\delta^\alpha, e^{-b}X]\zeta_1 = -\varepsilon\, e^b[\delta^\alpha, \partial_n]\zeta_1 + \sum_{j=0}^{n-1} e^b[\delta^\alpha, e^{-b}X_j\partial_j]\zeta_1. \tag{9.1.21}$$

On évalue d'abord

$$A = \gamma^{\sigma-|\alpha|}\|e^b[\delta^\alpha, e^{-b}X_j\partial_j]\zeta_1\|^t_{0,\gamma,T}. \tag{9.1.22}$$

Il est majoré par une somme de termes de la forme :

$$\gamma^{\sigma-|\alpha|}\|e^b\,\delta^{\alpha_1}(e^{-b}X_j)\,\delta^{\alpha_2}\partial_j\zeta_1\|^t_{0,\gamma,T} \qquad \text{avec} \quad |\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| \quad \text{et} \quad \alpha_1 \neq 0$$

et le lemme 4.1.3 donne alors l'estimation :

$$A \leq C(M)\,\{\|\zeta_1\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^t_{\sigma,\gamma,T}\}. \tag{9.1.23}$$

On évalue ensuite le terme

$$B = \gamma^{\sigma-|\alpha|}\varepsilon\,\|e^b[\delta^\alpha, \partial_n]\zeta_1\|^t_{0,\gamma,T}. \tag{9.1.24}$$

La définition $\delta_n = \rho(x_n)\partial_n$, montre que $\varepsilon\,[\delta^\alpha, \partial_n]\zeta_1$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme $m = \varepsilon\,\rho'\,\delta^\beta\,\partial_n\zeta_1$ où $\rho'(x_n)$ désigne une dérivée de ρ et où $|\beta| \leq |\alpha| - 1$. En revenant à l'équation, on a

$$\varepsilon\,\partial_n\zeta_1 = -e^{-b}F + \sum_{j=0}^{n-1} e^{-b}X_j\partial_j\zeta_1 \tag{9.1.25}$$

et on en déduit que $B \leq B_1 + B_2$ avec

$$\begin{aligned} B_1 &= C(M)\gamma^{\sigma-|\alpha|}\|\delta^\beta(e^{-b}F)\|^t_{0,\gamma,T} && \text{avec} \quad |\beta| \leq |\alpha| - 1, \\ B_2 &= C(M)\gamma^{\sigma-|\alpha|}\|\delta^\beta(e^{-b}X_j\partial_j\zeta_1)\|^t_{0,\gamma,T} && \text{avec} \quad |\beta| \leq |\alpha| - 1. \end{aligned} \tag{9.1.26}$$

En utilisant le lemme 4.1.3 et l'estimation $\|F\|^*_{0,T} \leq C(M)$, on montre que

$$\begin{aligned} B_1 &\leq C(M)\,\{\|F\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^t_{\sigma,\gamma,T}\}, \\ B_2 &\leq C(M)\,\{\|\zeta_1\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^t_{\sigma,\gamma,T}\}. \end{aligned} \tag{9.1.27}$$

En revenant à l'inégalité (9.1.19) que l'on multiplie par $\gamma^{\sigma-|\alpha|}$ et en tenant compte de (9.1.23) et (9.1.27) on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} \gamma^{\sigma-|\alpha|}.\gamma\|\delta^\alpha\zeta_1\|^t_{0,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\gamma\|\delta^\alpha\zeta_1\|^t_{0,\gamma,o} + \|F\|^t_{\sigma,\gamma,T} \\ &+ \|v\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|\zeta_1\|^t_{\sigma,\gamma,T}\Big\}. \end{aligned} \tag{9.1.28}$$

En sommant sur α et en prenant γ assez grand on obtient (9.1.16). □

d) Estimation de F dans $H^{0,\sigma}(\Omega_T)$

Lemme 9.1.4. — *On a la majoration suivante :*

$$\begin{aligned}\|F\|^t_{\sigma,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\|\zeta'\|^t_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\zeta_1\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|u\|^t_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{\sigma+2,\gamma,T}\\ &+ \|\partial_n\Phi\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|\varepsilon\,\partial_n\Phi\|^t_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\partial_n f\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|b'\|^t_{\sigma,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.1.29}$$

Démonstration. — Puisque $M^\infty(u,\Phi,T) \leq M$, on voit que l'on contrôle la norme L^∞ de $\partial_n\Phi$, u, $\partial'_y\Phi$, ζ et $\partial_y\zeta'$. L'estimation (9.1.29) est donc claire pour les termes F_k avec $1 \leq k \leq 4$. Pour le terme F_6 on utilise le lemme 4.1.3 et le fait que $\|f\|^*_{1,T} \leq C(M_o)$.

Dans F_5, on note que $h\,\partial_n\partial'_y\Phi$ est borné dans $L^\infty(\Omega_T)$ par $C(M)$ et on a

$$\|F_5\|^t_{\sigma,\gamma,T} \leq C(M)\,\{\|h\,\partial_n\partial'_y\Phi\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|\zeta\, g_5(u,\partial'_y\Phi)\|^t_{\sigma,\gamma,T}\}.$$

Le second terme à droite est majoré par (9.1.29). Par ailleurs, $h^\pm = \mp\varepsilon\, e^{b^\pm}$, d'où

$$\|h\,\partial_n\partial'_y\Phi\|^t_{\sigma,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\,\{\|b'\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|\partial_n\Phi\|^t_{\sigma+1,\gamma,T}\}$$

et le lemme suit. □

Démonstration de la proposition 9.1.1. — En remarquant que

$$\gamma\|\zeta'\|^t_{2s-2,\gamma,T} \leq \|\zeta'\|^t_{2s-1,\gamma,T}$$

et en sommant les estimations (9.1.9) et (9.1.16), on obtient

$$\begin{aligned}\gamma\|\zeta\|^t_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\gamma\|\zeta_1\|^t_{2s-2,\gamma,o} + \|F\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|v\|^t_{2s-2,\gamma,T}\\ &+\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} + \|f\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.1.30}$$

Avec le lemme 9.1.4, en prenant γ assez grand pour absorber $\|\zeta_1\|^t_{2s-2,\gamma,T}$, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma\|\zeta\|^t_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\gamma\|\zeta_1\|^t_{2s-2,\gamma,o} + \|u\|^t_{2s,\gamma,T}\\ &+\|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|\varepsilon\,\partial_n\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}\\ &+ \|b'\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|\partial_n f\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|f\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.1.31}$$

En écrivant que $\partial_n u = \partial_n\Phi\, V(u,\partial'_y\Phi)\zeta$, il vient

$$\begin{aligned}\gamma\|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\gamma\|\zeta\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \gamma\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T}\\ &+ \|u\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.1.32}$$

On majore ensuite

$$\begin{aligned}\gamma\|\zeta_1\|^t_{2s-2,\gamma,0} \leq \gamma\, C(M)\Big\{&\|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,0} + \|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T}\\ &+ \|u\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.1.33}$$

On majore enfin $\gamma\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T}$ par $\gamma\|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}$ et l'estimation (9.1.3) résulte alors de (9.1.31) (9.1.32) et (9.1.33). □

Pour terminer nous donnons une estimation du terme $\varepsilon\partial_n u$.

Proposition 9.1.5. — *Sous les hypothèses de la proposition* 9.1.1 *on a l'estimation*

$$\begin{aligned}\varepsilon\,\|\partial_n u\|^t_{2s-1,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\\ &+\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|f\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}\end{aligned} \tag{9.1.34}$$

Démonstration. — **a)** Avec (9.1.6) et (9.1.3), on voit que

$$h\zeta = F_1(u,\partial'_y\Phi)f + F_2(u,\partial'_y\Phi).\partial_y u \tag{9.1.35}$$

avec des fonctions régulières F_1 et F_2. Il en est de même de hz et il en résulte que :

$$\|hz\|^t_{2s-1,\gamma,T} \le C(M)\Big\{\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} + \|f\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}. \tag{9.1.36}$$

En remarquant que $h\delta^\alpha z = \delta^\alpha(hz) + [h,\delta^\alpha]z$, on obtient ensuite

$$\begin{aligned}\gamma^{2s-1-|\alpha|}\|h\,\delta^\alpha z\|^t_{0,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\\ &+ \|f\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|h\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|z\|^t_{2s-2,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.1.37}$$

On a d'autre part

$$\|h\|^t_{2s-1,\gamma,T} \le C(M)\{\|u\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\}. \tag{9.1.38}$$

Avec (9.1.37), on en déduit que

$$\begin{aligned}\gamma^{2s-1-|\alpha|}\|h\,\delta^\alpha z\|^t_{0,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\\ &+ \|f\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|z\|^t_{2s-2,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.1.39}$$

b) On a $|h| = \varepsilon\, e^b$ et $\|b\|^*_{0,T} \le C(M)$. On en déduit que $\gamma^{2s-1-|\alpha|}\|\varepsilon\,\delta^\alpha z\|^t_{0,\gamma,T}$ est majoré par le membre de droite de (9.1.39). En sommant ces estimations sur α, on obtient que $\varepsilon\,\|z\|^t_{2s-1,\gamma,T}$ est lui aussi majoré par le membre de droite de (9.1.39).

c) On écrit $\partial_n u = z\,\partial_n\Phi$ et on obtient avec le lemme 4.1.3

$$\varepsilon\,\|\partial_n u\|^t_{2s-1,\gamma,T} \le C(M)\{\varepsilon\,\|z\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}\}, \tag{9.1.40}$$

$$\|z\|^t_{2s-2,\gamma,T} \le C(M)\{\|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T}\}. \tag{9.1.41}$$

En reportant (9.1.40) dans l'estimation obtenue en b) pour $\varepsilon\,\|z\|^t_{2s-1,\gamma,T}$ et en tenant compte de (9.1.41) on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\varepsilon\,\|\partial_n u\|^t_{2s-1,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\|u\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} + \|f\|^t_{2s-1,\gamma,T}\\ &+\|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}\end{aligned} \tag{9.1.42}$$

et la proposition 9.1.5 est démontrée. □

9.2. Estimations des dérivées normales

Proposition 9.2.1. — *Il existe des fonctions $\varepsilon(\cdot) > 0$, $C(\cdot)$ et $\gamma_o(\cdot)$ telles que pour $T \geq 0$, $\varepsilon < \varepsilon(M)$ et $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ vérifiant* (9.1.2), *on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o(M)$ et tout $k \leq s$,*

(9.2.1)
$$\begin{aligned}\gamma\|\partial_n^k u\|^t_{2s-2k,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{&\gamma\|u\|_{2s,\gamma,o} + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T} \\ &+\gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n \Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|b\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Comme $\partial_n u = z\,\partial_n\Phi$, on obtient grâce au lemme 4.1.3

(9.2.2)
$$\|\partial_n^k u\|^t_{2s-2k,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\|z\|_{2s-2,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T}\right\}.$$

Il suffit donc de prouver que $\gamma\|z\|_{2s-2,\gamma,T}$ est majoré par le membre de droite de (9.2.1). Compte tenu de la définition (3.3.2) de la norme, il suffit de majorer, pour $k \leq s$, $\gamma\|\partial_n^k z\|^t_{2s-2k-2,\gamma,T}$ par le membre de droite de (9.2.1).

Pour $k = 0$, l'estimation résulte de l'inégalité

(9.2.3)
$$\gamma\|z\|^t_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\gamma\|\partial_n u\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}\right\}.$$

Pour $k \geq 1$, on commute ∂_n^k à l'équation (9.1.10). On voit alors que $z^{(k)} = \partial_n^k z$ vérifie

(9.2.4)
$$\sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j z^{(k)} + \mathcal{M}(u, \partial_y\Phi)\frac{\partial_n z^{(k)}}{\partial_n\Phi} = f^{(k)}$$

avec

(9.2.5)
$$f^{(k)} = \sum_{j=0}^{n-1}[\partial_n^k, A_j(u)]\partial_j z + [\partial_n^k, (\partial_n\Phi)^{-1}\mathcal{M}]\partial_n z + \partial_n^k(Ez) + \partial_n^k((\partial_n\Phi)^{-1}f).$$

On introduit $\zeta^{(k)} = V^{-1}(u, \partial_y'\Phi)\partial_n^k z = (\zeta_1^{(k)}, \zeta'^{(k)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$. Avec des notations évidentes, on a alors

(9.2.6)
$$\partial_n^k z = \zeta_1^{(k)} V_1(u, \partial_y'\Phi) + V_2(u, \partial_y'\Phi)\zeta'^{(k)}$$

On multiplie par $W(u, \partial_y'\Phi)$ l'équation (9.2.4) à l'ordre $k-1$. Les $N-1$ dernières lignes donnent

(9.2.7)
$$\zeta'^{(k)} = \partial_n\Phi\, W'(u, \partial_y'\Phi)\Big\{f^{(k-1)} - \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j z^{(k-1)}\Big\}$$

où $f^{(k-1)}$ est donné par (9.2.5).

D'autre part, on multiplie (9.2.4) par $W(u, \partial_y'\Phi)$. La première ligne donne l'équation

(9.2.8)
$$h\,\partial_n\zeta_1^{(k)} + \sum_{j=0}^{n-1} X_j\partial_j\zeta_1^{(k)} = F = \sum_{k=1}^{4} F_k$$

où les X_j sont les mêmes qu'en (9.1.14) et où les F_k sont maintenant de la forme :

$$F_1 = \partial_n\Phi\, g_1(u, \partial_y'\Phi)\, \partial_y\zeta'^{(k)}, \qquad F_2 = \partial_n\Phi\, g_2(u, \partial_y'\Phi)\, f^{(k)},$$
$$F_3 = \partial_n\Phi\, g_3(u, \partial_y'\Phi) \times (\partial_y u, \partial_y\partial_y'\Phi) \times \zeta^{(k)}, \quad F_4 = h\, g_4(u, \partial_y'\Phi) \times (\partial_n u, \partial_n\partial_y'\Phi) \times \zeta^{(k)}.$$

a) Estimation de $\zeta'^{(k)}$. — On majore la norme $H^{0,2s-2k-1}$ du second membre de (9.2.7) en utilisant les lemmes 4.1.3 et 4.1.4. On obtient

$$\gamma\|\zeta'^{(k)}\|^t_{2s-2k-2,\gamma,T} \le C(M)\,\{\|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T}\} \tag{9.2.9}$$

b) Estimation de $\zeta_1^{(k)}$. — Pour $\sigma = 2s - 2k - 2$ et $v = (u, \partial_y'\Phi, \partial_n\Phi, b)$, le lemme 9.1.3 fournit l'estimation :

$$\gamma\|\zeta_1^{(k)}\|^t_{\sigma,\gamma,T} \le C(M)\,\{\gamma\|\zeta_1^{(k)}\|^t_{\sigma,\gamma,o} + \|F\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^t_{\sigma,\gamma,T}\}. \tag{9.2.10}$$

En utilisant les lemmes 4.1.3 et 4.1.4, on obtient ensuite

$$\begin{aligned}\|F\|^t_{\sigma,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T}\\ &+\|f\|_{2s,\gamma,T} + \|b\|^t_{2s-2,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.2.11}$$

On déduit alors de (9.2.10) et (9.2.11)

$$\begin{aligned}\gamma\|\zeta_1^{(k)}\|^t_{2s-2k-2,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\gamma\|\zeta_1^{(k)}\|^t_{2s-2k-2,\gamma,0} + \|u\|_{2s,\gamma,T}\\ &+\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T} + \|b\|^t_{2s-2,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.2.12}$$

c) Estimation de $\gamma\|\partial_n^k z\|^t_{2s-2k-2,\gamma,T}$. — Avec (9.2.6) et les estimations (9.2.9) (9.2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\gamma\|\partial_n^k z\|^t_{2s-2k-2,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\gamma\|\zeta_1^{(k)}\|^t_{2s-2k-2,\gamma,0} + \|u\|_{2s,\gamma,T}\\ &+\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T} + \|b\|^t_{2s-2,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.2.13}$$

Comme $\zeta^{(k)} = V^{-1}(u, \partial_y'\Phi)\partial_n^k z$, on en déduit que dans le passé

$$\gamma\|\zeta_1^{(k)}\|^t_{2s-2k-2,\gamma,0} \le C(M)\,\Big\{\gamma\|u\|_{2s,\gamma,0} + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}\Big\}. \tag{9.2.14}$$

En revenant à (9.2.12), on en déduit que $\gamma\|\partial_n^k z\|^t_{2s-2k-2,\gamma,T}$ est majoré par le membre de droite de (9.2.1) et la proposition suit. □

9.3. Estimation du saut de u

Dans l'énoncé du théorème 3.3.2, on voit apparaître le terme $|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}$ au second membre de l'inégalité d'énergie (3.3.12). Le but de ce paragraphe est de donner une estimation de ce terme afin de préparer la démonstration du théorème 3.3.3. L'idée est de montrer que $[u]$ est solution d'une équation de transport le long de la surface de choc $\{x_n = 0\}$, similaire à l'équation de transport habituelle pour les singularités faibles.

Proposition 9.3.1. — *Il existe des fonctions $\varepsilon(\cdot) > 0$, $C(\cdot)$ et $\gamma_o(\cdot)$ telles que pour $T \geq 0$, $\varepsilon < \varepsilon(M)$ et $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$ vérifiant* (9.1.2), *on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o(M)$*

$$\text{(9.3.1)} \quad \begin{aligned} \gamma|[u]/\varepsilon|_{2s-3,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ &\gamma|[u]/\varepsilon|_{2s-3,\gamma,o} + |[f]/\varepsilon|_{2s-3,\gamma,T} + \|u\|_{2s,\gamma,T} \\ &+ \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|f\|_{2s-2,\gamma,T} \Big\}. \end{aligned}$$

On multiplie (3.2.3) par $l(u, \partial'_y \Phi)$, premier vecteur ligne de $W(u, \partial'_y \Phi)$. Avec (9.1.5), il vient

$$\text{(9.3.2)} \quad \sum_{j=0}^{n-1} [l \cdot A_j(u) \partial_j u] + [h\, l \cdot A_0 z] = [l \cdot f]$$

Lemme 9.3.2. — *$[u_1]$ vérifie une équation de transport de la forme :*

$$\text{(9.3.3)} \quad \sum_{j=0}^{n-1} F_j(v) \partial_j [u_1] + G(w)\, [u_1] = H(v)\, [f]$$

où

$$v = (\Gamma u'^+, \Gamma u'^-, \partial'_y \phi), \quad w = (v, \partial_y v, \Gamma z^+, \Gamma z^-, \Gamma f^+, \Gamma f^-),$$

et F_j, G et H sont des fonctions C^∞ de leurs arguments vérifiant $G(0) = 0$ et $F_0 \geq \delta_1 > 0$ sur le domaine considéré.

Démonstration. — D'après (2.2.6) on a $[u] = [u_1] R(u^+, u^-, \partial'_y \phi)$, d'où

$$\text{(9.3.4)} \quad [l \cdot A_j(u) \partial_j u] = F_j(v) \partial_j [u_1] + [u_1] G_j(v) \partial_y v$$

avec $F_j(v) = l(u^+, \partial'_y \phi)\, A_j(u^+)\, R(u^+, u^-, \partial'_y \phi)$. En reportant dans (9.3.2), on obtient :

$$\text{(9.3.5)} \quad \sum_{j=0}^{n-1} F_j(v) \partial_j [u_1] + G(v, \partial_y v)\, [u_1] + [h\, l \cdot A_0 z] = [l \cdot f]$$

Si $[u]$ est suffisamment petit, il résulte alors de (9.1.5) que

$$\text{(9.3.6)} \quad F_0(v) = l(u^+, \partial'_y \phi)\, A_0(u^+)\, R(u^+, u^-, \partial'_y \phi) \geq \delta_1 > 0.$$

D'autre part, sur $\{x_n = 0\}$, on a $\Gamma p^+ = \Gamma p^- = [u]$ et on déduit de (7.2.6) (7.2.7) que

$$\text{(9.3.7)} \quad \Gamma h^+ = [u_1] g_1(v), \qquad \Gamma h^- = [u_1] g_2(v),$$

avec des fonctions lisses g_1 et g_2. Il en résulte que l'on a aussi

$$\text{(9.3.8)} \quad [h\, l \cdot A_0 z] = [u_1] G_1(w).$$

Enfin le terme $[l \cdot f]$ au second membre de (9.3.5) s'écrit sous la forme :

$$\text{(9.3.9)} \quad [l \cdot f] = [u_1] g_3(v) \cdot f^+ + l(u^+, \partial'_y \phi) \cdot [f].$$

En reportant dans (9.3.5), on obtient (9.3.3) et le lemme est démontré. □

En divisant (9.3.3) par $F_0(v)$, on voit que

$$X[u_1] := \partial_t[u_1] + \sum_{j=1}^{n-1} X_j(v)\partial_j[u_1] = F, \tag{9.3.10}$$

où

$$X_j(v) = \frac{F_j(v)}{F_0(v)} \qquad F = \frac{H(v)}{F_0(v)}[f] - \frac{G(w)}{F_0(v)}[u_1]. \tag{9.3.11}$$

Le résultat suivant ([Mél1], proposition 3.2.1) fournit une estimation de $[u_1]$.

Lemme 9.3.3. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que pour $(\phi, v, F) \in W^{1,\infty}(\omega_T) \cap H^\sigma(\omega_T)$ vérifiant $X\,\phi = F$, on a pour tout $\gamma \geq 1$, l'estimation suivante*

$$\gamma|\phi|_{\sigma,\gamma,T} \leq C(M_1)\Big\{\gamma|\phi|_{\sigma,\gamma,0} + |F|_{\sigma,\gamma,T} + |v|^*_{1,T}\,|\phi|_{\sigma,\gamma,T} + |\phi|^*_{1,T}\,|v|_{\sigma,\gamma,T}\Big\} \tag{9.3.12}$$

où M_1 est tel que $|v|^*_{0,T} \leq M_1$.

Démonstration de la proposition 9.3.1. — On déduit du lemme 9.3.3 l'estimation :

$$\gamma|[u_1]|_{2s-3,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\gamma|[u_1]|_{2s-3,\gamma,0} + |F|_{2s-3,\gamma,T} + |[u_1]|_{2s-3,\gamma,T} + \varepsilon\,|v|_{2s-3,\gamma,T}\right\}. \tag{9.3.13}$$

Par (3.1.9), on sait que $[f]/\varepsilon$ est uniformément borné dans $L^\infty(\omega_T)$, ce qui permet de majorer F, v et w dans H^{2s-3}. On obtient

$$\begin{aligned}\gamma|[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\gamma|[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,0} + |[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} + |[f]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\\ &+|\Gamma u|_{2s-2,\gamma,T} + |\phi|_{2s-1,\gamma,T} + |\Gamma z|_{2s-3,\gamma,T} + |\Gamma f|_{2s-3,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.3.14}$$

D'après le lemme 5.1.1, on a

$$\begin{aligned}&|\Gamma u|_{2s-2,\gamma,T} \leq C\,||u||_{2s,\gamma,T},\\ &|\phi|_{2s-1,\gamma,T} \leq C\,||\Phi||_{2s,\gamma,T},\\ &|\Gamma z|_{2s-3,\gamma,T} \leq C(M)\{||u||_{2s,\gamma,T} + ||\Phi||_{2s,\gamma,T}\}.\end{aligned} \tag{9.3.15}$$

En revenant à (9.3.14), on en déduit :

$$\begin{aligned}\gamma|[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\gamma|[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,0} + |[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\\ &+|[f]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} + ||u||_{2s,\gamma,T} + ||\Phi||_{2s,\gamma,T} + ||f||_{2s-2,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.3.16}$$

Pour γ assez grand, on peut absorber le terme $|[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}$ du membre de droite par le membre de gauche. Enfin, puisque $[u] = [u_1]\,R(u^+, u^-, \partial'_y\phi)$ on a

$$|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} \leq C(M)\left\{|[u_1]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} + |\Gamma u|_{2s-3,\gamma,T} + |\phi|_{2s-2,\gamma,T}\right\}. \tag{9.3.17}$$

Avec (9.3.15), on voit que $\gamma|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}$ est encore majoré par le second membre de (9.3.1) et la proposition 9.3.1 est démontrée. □

9.4. Estimation de Φ

Le terme $\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}$ apparaît au second membre de l'inégalité d'énergie (3.3.12), tandis que le le terme $\varepsilon\,\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}$ apparaît au second membre de (9.1.1). Il est donc nécessaire d'estimer ces deux termes.

On rappelle que tout $(u,\Phi)\in\mathcal{F}_\varepsilon(s,T)$ prolonge une solution approchée $(u_a,\Phi_a)\in\mathcal{F}^a(2s+3)$ (*cf.* définition 3.3.1). En outre, Φ est solution des équations (3.2.6) et (3.2.7), avec $p^\pm = -\varepsilon\, e^A\, U^\pm(u^+,\partial'_y\Phi^+,-\varepsilon\, e^A)$ donnés par (2.3.13) et $A = W_a + \mathcal{R}_T(a-w_a)$ comme en (2.3.8). De plus $a=\ln(-[u_1]/\varepsilon)$ et W_a est associé à la solution approchée (u_a,Φ_a) comme indiqué en (3.1.4) (3.1.5) (3.1.6).

Proposition 9.4.1. — *Il existe des fonctions $\varepsilon(\cdot)$, $C(\cdot)$ et $\gamma_o(\cdot)$ telles que si $T\geq 0$ et si $(u,\Phi)\in\mathcal{F}_\varepsilon(s,T)$ vérifie (9.1.2), alors, pour tout $\gamma\geq\gamma_o(M)$ et tout $\varepsilon<\varepsilon(M)$, on a*

$$\gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}\leq C(M)\,\{\gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,0}+\varepsilon\,\|W_a\|_{2s,\gamma,T_1}+\|u\|_{2s,\gamma,T}\}. \tag{9.4.1}$$

Démonstration. — Nous faisons la démonstration pour Φ^+. L'équation (3.2.6) est de la forme

$$\partial_t\Phi' = \mu(\varepsilon,v,\partial'_y\Phi') \quad \text{avec} \quad v=(u',\varepsilon(e^A-1)) \tag{9.4.2}$$

où μ est une fonction C^∞ de ses arguments telle que $\mu(\varepsilon,0,0)=0$.

a) Estimation de $\|\Phi\|^t_{0,\gamma,T}$. — Nous écrivons d'abord l'équation (9.4.2) sous la forme

$$\partial_t\Phi' - \sum_{j=1}^{n-1}\mu_j(\varepsilon,v,\partial'_y\Phi')\partial_j\Phi' = \mu(\varepsilon,v,0). \tag{9.4.3}$$

Puisque $|[u'_1]/\varepsilon\,|^*_{2,T}\leq M$, on a $|a|^*_{2,T}\leq C(M)$ et on déduit du corollaire 5.3.2

$$\|A\|^*_{1,T}\leq C(M). \tag{9.4.4}$$

Le lemme 9.3.3 donne alors l'estimation

$$\gamma\|\Phi\|^t_{0,\gamma,T}\leq C(M)\left\{\gamma\|\Phi\|^t_{0,\gamma,0}+\|u\|^t_{0,\gamma,T}+\|\Phi\|^t_{0,\gamma,T}+\varepsilon\,\|A\|^t_{0,\gamma,T}\right\}. \tag{9.4.5}$$

La proposition 5.4.1 et le lemme 5.1.1 donnent ensuite le majoration

$$\varepsilon\,\|A\|^t_{2s,\gamma,T}\leq C(M)\,\{\varepsilon\,\|W_a\|_{2s,\gamma,T_1}+\|u\|_{2s,\gamma,T}\}. \tag{9.4.6}$$

En multipliant (9.4.5) par γ^{2s} et en tenant compte de (9.4.6) on obtient

$$\begin{aligned}\gamma^{2s+1}\|\Phi\|^t_{0,\gamma,T}\leq C(M)\Big\{&\gamma\|\Phi\|^t_{2s,\gamma,0}+\varepsilon\,\|W_a\|_{2s,\gamma,T_1}\\ &+\|u\|_{2s,\gamma,T}+\|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.4.7}$$

b) Estimation de $\gamma\|\delta\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}$. — En appliquant à l'équation (9.4.3) une dérivée conormale δ, on voit que $\psi = \delta\Phi'$ vérifie

$$\partial_t\psi - \sum_{j=1}^{n-1}\mu_j(v,\partial'_y\Phi')\partial_j\psi = F(v,\partial'_y\Phi')\delta v \tag{9.4.8}$$

En appliquant le lemme 9.3.3 avec $\sigma = 2s-1$, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma\|\psi\|^t_{2s-1,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\gamma\|\psi\|^t_{2s-1,\gamma,0} + \|v\|^t_{2s,\gamma,T}\\ &+ \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\psi\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\},\end{aligned} \tag{9.4.9}$$

car $\|v\|^*_{1,T} + \|\Phi'\|^*_{2,T} \le C(M)$. D'après (9.4.6), on obtient ensuite

$$\|v\|^t_{2s,\gamma,T} \le C(M)\,\{\varepsilon\,\|W_a\|_{2s,\gamma,T_1} + \|u\|_{2s,\gamma,T}\}. \tag{9.4.10}$$

Compte tenu de (9.4.9) (9.4.10), il vient :

$$\begin{aligned}\gamma\|\delta\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T} \le C(M)\Big\{&\gamma\|\Phi\|^t_{2s,\gamma,0} + \varepsilon\,\|W_a\|_{2s,\gamma,T_1}\\ &+ \|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.4.11}$$

On déduit alors de (9.4.7) et (9.4.11) l'estimation :

$$\gamma\|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} \le C(M)\Big\{\gamma\|\Phi\|^t_{2s,\gamma,0} + \varepsilon\,\|W_a\|_{2s,\gamma,T_1} + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\Big\}. \tag{9.4.12}$$

c) Estimation de $\gamma\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-2,\gamma,T}$. — En dérivant l'équation (9.4.3) par rapport à x_n on voit que $\psi = \partial_n\Phi'$ vérifie une équation de la forme

$$X\psi = \partial_t\psi - \sum_{j=1}^{n-1}\mu_j(v,\partial'_y\Phi')\partial_j\psi = F(v,\partial'_y\Phi')\partial_n v. \tag{9.4.13}$$

En posant $w = (v,\partial'_y\Phi')$ On utilise le lemme suivant.

Lemme 9.4.2. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que pour $(\psi,F) \in W^{1,\infty}(\Omega_T) \cap W^{2\sigma}(\Omega_T)$ et $w \in W^{2,\infty}(\Omega_T) \cap W^{2\sigma}(\Omega_T)$, vérifiant $X\psi = F$, on a pour tout $\gamma \ge 1$,*

$$\begin{aligned}\gamma\|\psi\|_{2\sigma,\gamma,T} \le C(M_1)\Big\{&\gamma\|\psi\|_{2\sigma,\gamma,0} + \|F\|_{2\sigma,\gamma,T}\\ &+\|w\|^*_{2,T}\|\psi\|_{2\sigma,\gamma,T} + \|\psi\|^*_{1,T}\|w\|_{2\sigma,\gamma,T}\Big\},\end{aligned} \tag{9.4.14}$$

où M_1 est tel que $\|w\|^*_{0,T} \le M_1$.

Démonstration. — On part de l'inégalité classique :

$$\gamma\|\psi\|_{0,\gamma,T} \le C(M_1)\Big\{\gamma\|\psi\|_{0,\gamma,0} + \|F\|_{0,\gamma,T} + \|w\|^*_{1,T}\|\psi\|_{0,\gamma,T}\Big\}. \tag{9.4.15}$$

On commute ensuite $\delta^\alpha\partial^k_n$ au champ X

$$X(\delta^\alpha\partial^k_n\psi) = \delta^\alpha\partial^k_n F + [X,\delta^\alpha\partial^k_n]\psi. \tag{9.4.16}$$

Avec (9.4.15), on voit que l'inégalité (9.4.14) sera établie si on prouve que pour $\mu + |\alpha| + 2k \leq 2\sigma$, $\gamma^\mu \| [X, \delta^\alpha \partial_n^k] \psi \|_{0,\gamma,T}$ est majoré par le membre de droite de (9.4.14). Or, ce commutateur est une somme de termes de la forme :

$$m = \gamma^\mu \, \delta^{\alpha_1} \partial_n^{k_1} (\mu_j(w)) \times \delta^{\alpha_2} \partial_n^{k_2} (\partial_j u) \tag{9.4.17}$$

où $|\alpha_1| + k_1 \neq 0$ et $\mu + |\alpha_1| + |\alpha_2| + 2(k_1 + k_2) = 2\sigma$. Les estimations non linéaires du lemme 4.1.3 donnent les majorations

$$\|m\|_{0,\gamma,T} \leq C(M_1) \Big\{ \|w\|^*_{2,T} \|\psi\|_{2\sigma,\gamma,T} + \|\psi\|^*_{1,T} \|w\|_{2\sigma,\gamma,T} \Big\} \tag{9.4.18}$$

et le lemme en résulte. □

Revenons à la démonstration de la proposition 9.4.1. Le lemme 9.4.2 appliqué avec $\sigma = s - 1$ implique que

$$\begin{aligned} \gamma \|\partial_n \Phi'\|_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ & \gamma \|\Phi\|_{2s,\gamma,0} + \|F(v, \partial'_y \Phi') \partial_n v\|_{2s-2,\gamma,T} \\ & + \|w\|^*_{2,T} \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|w\|_{2s-2,\gamma,T} \Big\}. \end{aligned} \tag{9.4.19}$$

On déduit du corollaire 5.3.2 que $\|A\|^*_{2,T} \leq C(M)$, d'où $\|w\|^*_{2,T} \leq C(M)$. On a alors,

$$\begin{aligned} & \|w\|_{2s-2,\gamma,T} \leq \|v\|_{2s-2,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T}, \\ & \|F(v, \partial'_y \Phi') \partial_n v\|_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M) \{ \|v\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} \}, \\ & \|v\|_{2s,\gamma,T} \leq \|u\|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon \, C(M) \, \|A\|_{2s,\gamma,T}. \end{aligned} \tag{9.4.20}$$

Comme $a - w_a = 0$ pour $t < 0$, le corollaire 5.4.2 et le lemme 5.1.1 donnent l'estimation

$$\varepsilon \, \|A\|_{2s,\gamma,T} \leq C(M) \{ \varepsilon \, \|W_a\|_{2s,\gamma,T_1} + \|u\|_{2s,\gamma,T} \}. \tag{9.4.21}$$

En reportant les estimations (9.4.20) à (9.4.23) dans (9.4.19), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \gamma \|\partial_n \Phi'\|_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ & \gamma \|\Phi\|_{2s,\gamma,0} + \varepsilon \, \|W_a\|_{2s,\gamma,T_1} \\ & + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} \Big\}. \end{aligned} \tag{9.4.22}$$

Avec (9.4.12), (9.4.22) et l'égalité $\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} = \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n \Phi'\|_{2s-2,\gamma,T}$, on voit que $\gamma \|\Phi\|_{2s,\gamma,T}$ est majoré par le second membre de (9.4.22). En prenant $\gamma \geq \gamma_o(M)$ assez grand, la proposition 9.4.1 en résulte. □

En introduisant la notation

$$N_3(W_a, \gamma) = \varepsilon \, \{ \|W_a\|_{2s,\gamma,T_1} + \|\partial_n W_a\|^t_{2s-1,\gamma,T_1} + |w_a|_{2s,\gamma,T_1} \} \tag{9.4.23}$$

on prouve maintenant une estimation de $\varepsilon \, \|\partial_n \Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T}$.

Proposition 9.4.3. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que si $T \geq 0$ et si $(u,\Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s,T)$ vérifie (9.1.2), alors pour tout $\gamma \geq 1$, on a*

(9.4.24)
$$\gamma\varepsilon\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\Big\{\gamma\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,o} + \varepsilon\, N_3(W_a,\gamma) + \|u\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T} + |\Gamma u|_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n u\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\}.$$

Démonstration. — $\partial_n\Phi'$ vérifie l'équation (9.4.13) et le lemme 9.3.3, que l'on applique avec $\sigma = 2s-1$, donne l'estimation :

$$\gamma\,\varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\Big\{\gamma\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,o} + \|F(v,\partial'_y\Phi')\partial_n v\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|w\|^*_{1,T}\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|w\|^t_{2s-1,\gamma,T}\Big\} \tag{9.4.25}$$

D'après le corollaire 5.3.2, on a $\|w\|^*_{1,T} \leq C(M)$. Ensuite, on a les majorations

$$\|w\|^t_{2s-1,\gamma,T} \leq \|v\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}, \tag{9.4.26}$$

(9.4.27)
$$\|F(v,\partial'_y\Phi')\partial_n v\|^t_{2s-1,\gamma,T} \leq C(M)\,\{\|v\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\partial_n v\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\Phi\|^t_{2s,\gamma,T}\}$$

$$\|v\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\partial_n v\|^t_{2s-1,\gamma,T} \leq \|u\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\partial_n u\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \varepsilon\, C(M)\,\{\|A\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\partial_n A\|^t_{2s-1,\gamma,T}\} \tag{9.4.28}$$

La proposition 5.4.1 donne la majoration

$$\varepsilon\,\{\|A\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|\partial_n A\|^t_{2s-1,\gamma,T}\} \leq C(M)\,\{\varepsilon\, N_3(W_a,\gamma) + |\Gamma u|_{2s,\gamma,T}\}. \tag{9.4.29}$$

En reportant ces estimations dans (9.4.25), on obtient finalement (9.4.24). □

9.5. Estimation a priori principale. Preuve du théorème 3.3.3

Nous reprenons les notations $N_1(u,\Phi,\gamma,T)$ et $N_2(u,\Phi,\gamma,T)$ définies respectivement en (3.3.11) et (3.3.13). On a

$$N_2(u,\Phi,\gamma,T) = N_1(u,\Phi,\gamma,T) + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\partial_n u\|_{2s-2,\gamma,T} + \gamma\,|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} + \varepsilon\,\gamma\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T}. \tag{9.5.1}$$

L'estimation de $N_1(u,\Phi,\gamma,T)$ fait l'objet du théorème 3.3.2. Pour $\gamma \geq \gamma_o(M)$, on a

(9.5.2)
$$N_1(u,\Phi,\gamma,T) \leq C(M)\Big\{N_1(u,\Phi,\gamma,0) + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \|f\|^t_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\Big\}.$$

Le termes $\gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}$ et $\varepsilon\,\gamma\,\|\partial_n\Phi\|^t_{2s-1,\gamma,T}$ sont estimés dans les propositions 9.4.1 et 9.4.3. Avec les propositions 9.1.1 et 9.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma\|\partial_n u\|_{2s-2,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{&\gamma\|u\|_{2s,\gamma,0} + \|u\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}\\ &+ \varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \|b\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{9.5.3}$$

Le terme $\gamma\,|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}$ est à la proposition 9.3.1. En sommant les différentes majorations, on voit que
(9.5.4)

$$\begin{aligned}N_2(u,\Phi,\gamma,T) \leq C(M)\Big\{&N_2(u,\Phi,\gamma,0) + \varepsilon\,N_3(W_a,\gamma) + \|u\|_{2s,\gamma,T}\\ &+ \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n u\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \varepsilon\,|\Gamma u|_{2s,\gamma,T}\\ &+ \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}. + \|b'\|^t_{2s-2,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T} + |[f]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}$$

On majore ensuite les termes $\varepsilon\,\|\partial_n u\|^t_{2s-1,\gamma,T}$ et $\|b'\|^t_{2s-2,\gamma,T}$ au second membre de (9.5.4), en utilisant la proposition 9.1.5 et le lemme 7.2.2. On en déduit
(9.5.5)

$$\begin{aligned}N_2(u,\Phi,\gamma,T) \leq C(M)\Big\{&N_2(u,\Phi,\gamma,0) + \varepsilon\,N_3(W_a,\gamma) + \|u\|_{2s,\gamma,T}\\ &+ \|\Phi\|_{2s,\gamma,T} + \varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T} + \varepsilon\,|\Gamma u|_{2s,\gamma,T}\\ &+ \gamma^{1/2}\,|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T} + \|f\|_{2s,\gamma,T} + |[f]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}$$

Enfin, en prenant γ suffisamment grand, on voit que les termes $\|u\|_{2s,\gamma,T}$, $\|\Phi\|_{2s,\gamma,T}$, $\varepsilon\,\|\partial_n\Phi'\|^t_{2s-1,\gamma,T}$, $\varepsilon\,|\Gamma u|_{2s,\gamma,T}$, $\gamma^{1/2}\,|[u]/\varepsilon\,|_{2s-3,\gamma,T}$ situés à droite, sont absorbés par le membre de gauche et le théorème 3.3.3 est démontré. □

CHAPITRE 10

LE THÉORÈME DE PROLONGEMENT À ε FIXÉ

Comme indiqué au chapitre 3, une fois obtenue l'estimation d'énergie uniforme, pour terminer la démonstration du théorème principal d'existence, il nous suffit de construire pour chaque ε une solution exacte du problème non linéaire, sur un intervalle de temps dépendant de ε (théorème 3.4.1). Dans ce chapitre, on construit une solution moins régulière dans l'avenir que dans le passé. La régularité sera regagnée par propagation au chapitre suivant.

10.1. Énoncé du résultat

On se donne une famille de solutions approchées $\mathcal{F}^a(s)$ avec $2s > n/2 + 40$. On se donne M_o vérifiant (3.3.10) et $H > 0$. Soit T_1 le temps d'existence à priori défini par (3.5.9). Dans toute la suite de ce paragraphe, $\varepsilon > 0$ est fixé et, à la grande différence des paragraphes précédents, les différentes « constantes » peuvent dépendre de ε.

Théorème 10.1.1. — *Soit $T_2 \in [0, T_1[$ et $(u_1, \Phi_1) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T_2)$ vérifiant*

$$M^\infty(u_1, \Phi_1, T_2) \leq M_o + H/2.$$

Alors il existe $T_3 > T_2$ et une solution exacte $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s - 12, T_3)$, prolongeant (u_1, Φ_1) et vérifiant

$$M^\infty(u, \Phi, T_3) \leq M_o + H. \tag{10.1.1}$$

Comme on l'a indiqué au § 1.2.11, les équations linéarisées donnent lieu à une perte de régularité et l'utilisation d'un schéma de Picard comme dans [Ma2] semble impossible. La preuve du théorème 10.1.1 repose sur la mise en œuvre d'un schéma itératif de type Nash-Moser que nous construirons en nous efforçant de suivre l'esprit et les notations de [Höl], [Al] et [Al-Gé].

Pour des raisons pratiques, on note $s_1 = s - 3$ et $s_0 = s - 19$, de sorte que

$$\begin{cases} 2s_0 > n/2 + 2, \\ s_1 = s_0 + 16. \end{cases} \tag{10.1.2}$$

Ces choix sont justifiés aux remarques 10.5.4 et 10.7.2. Le schéma itératif sera présenté au paragraphe 10.3. Pour le moment nous introduisons quelques notations utiles et faisons quelques remarques sur la forme des équations. On note

(10.1.3)
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,\nabla\Phi)v &= \sum_{j=0}^{n-1} A_j(u)\partial_j v + \mathcal{M}(u,\partial_y\Phi)\frac{\partial_n v}{\partial_n \Phi},\\ g(\Gamma u^+,\Gamma u^-,\partial_y\phi) &= \sum_{j=0}^{n-1}[f_j(u)]\partial_j\phi - [f_n(u)],\end{aligned}$$

de sorte que les équations (3.2.3)(3.2.4) s'écrivent

$$\mathcal{L}(u,\nabla\Phi)u = 0 \quad \text{et} \quad g(\Gamma u^+,\Gamma u^-,\partial_y\phi) = 0$$

avec $\phi = \Gamma\Phi^+ = \Gamma\Phi^-$.

Cependant, les équations pour $\Phi^\pm$ donnent lieu à la difficulté suivante. Pour les solutions exactes, il est crucial que les restrictions à $\{x_n = 0\}$ des équations (3.2.6) (3.2.7) pour $\Phi^\pm$ donnent toutes les deux l'équation (3.2.13) qui résulte des conditions de Rankine-Hugoniot. Autrement dit, les conditions de Rankine-Hugoniot (3.2.4) et les équations (3.2.6) et (3.2.7) sont compatibles avec les conditions $\Gamma\Phi^+ = \Gamma\Phi^- = \phi$. Dans le schéma itératif, les approximations (u_ν,ϕ_ν) ne vérifient pas exactement les conditions de Rankine-Hugoniot. Il en résulte qu'une linéarisation brutale des équations (3.2.4) (3.2.6) (3.2.7) conduit à des équations incompatibles avec les conditions $\Gamma\Phi^+_\nu = \Gamma\Phi^-_\nu = \phi_\nu$. C'est pourquoi on modifie les équations (3.2.6) (3.2.7) en introduisant des termes de correction, $C^\pm$, nuls lorsque les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites et qui garantissent dans tous les cas que $[\Phi] = 0$. L'idée est de rajouter aux fonctions $p^\pm$ qui interviennent dans les équations (3.2.6) (3.2.7), des fonctions $C^\pm$, telles que $\Gamma(u^+ - p^+ - C^+) = \Gamma u^-$ et $\Gamma(u^- + p^- + C^-) = \Gamma u^+$. Rappelons que le choix (2.3.13) des fonctions $p^\pm$ a été fait pour que ces conditions soient satisfaites avec $C^\pm = 0$ lorsque les conditions de Rankine-Hugoniot sont vérifiées. Les conditions ci-dessus déterminent les traces $c^\pm = \Gamma C^\pm$ et on en déduit $C^\pm$ en appliquant un opérateur de relèvement de traces. Suivant ces idées, on introduit les notations suivantes. En posant $\theta = (\theta_o,\theta') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$, on introduit les fonctions

(10.1.4)
$$h(u^+,u^-,\theta) = \theta_o - \lambda(u^+,u^-,\theta'),$$

(10.1.5)
$$\begin{aligned}f_p^+(u^+,\theta',A) &= -\varepsilon\, e^A\, U^+(u^+,\theta',-\varepsilon\, e^A),\\ f_p^-(u^-,\theta',A) &= -\varepsilon\, e^A\, U^-(u^-,\theta',-\varepsilon\, e^A),\end{aligned}$$

(10.1.6)
$$\begin{aligned}f_c^+(u^+,u^-,\theta') &= [u] - [u_1]\, U^+(u^+,\theta',[u_1]),\\ f_c^-(u^+,u^-,\theta') &= [u] - [u_1]\, U^-(u^-,\theta',[u_1]).\end{aligned}$$

On introduit aussi les fonctions

(10.1.7)
$$\begin{aligned}h_*^+(w^+) &= \theta_o - \lambda(u^+,u^+ - f_p^+(u^+,\theta',A) - C^+,\theta'),\\ h_*^-(w^-) &= \theta_o - \lambda(u^- + f_p^-(u^-,\theta',A) + C^-,u^-,\theta')\end{aligned}$$

des variables $w^\pm = (u^\pm, A, C^\pm, \theta)$. On introduit aussi la fonction

$$f_a(u^+, u^-) = \ln(-[u_1]/\varepsilon). \tag{10.1.8}$$

Avec ces notations, l'équation (3.2.6) s'écrit

$$h_*^+(u^+, A, 0, \partial_y\Phi^+) = 0, \tag{10.1.9}$$

avec $A = W_a + \mathcal{R}_T(a - w_a)$ définie en (3.2.8) et $a = f_a(\Gamma u^+, \Gamma u^-)$. Comme les conditions de Rankine-Hugoniot $g(u^+, u^-, \theta) = 0$ impliquent que $f_c^\pm(u^+, u^-, \theta') = 0$, pour les solutions de (3.2.4), l'équation (10.1.9) est équivalente à

$$h_*^+(u^+, A, C^+, \partial_y\Phi^+) = 0, \tag{10.1.10}$$

avec $C^+ = \mathcal{R}_T(c^+)$ et $c^+ = f_c^+(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y'\phi)$. Par ailleurs, la trace de (10.1.10) sur le bord $\{x_n = 0\}$ est l'équation (3.2.13)

$$h(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y\phi) = 0, \tag{10.1.11}$$

sous les seules conditions que $\Gamma\Phi^+ = \phi$, $a = f_a(\Gamma u^+, \Gamma u^-)$.

Pour démontrer le théorème 10.1.1 on se donne $(u_1, \Phi_1) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s_1 + 3, T_2)$. On note (u_0, Φ_0) un prolongement de (u_1, Φ_1) sur Ω_{T_1} tel que $[\Phi_0] = 0$ et

$$u_0' = u_0 - \underline{u}_\varepsilon, \quad \Phi_0' = \Phi_0 - \underline{\Phi}_\varepsilon, \quad \partial_y'\Phi_0 \quad \text{sont dans } W^{2s_1+6}(\Omega_{T_1}). \tag{10.1.12}$$

Pour des fonctions $u^\pm$ et $\Phi^\pm$ vérifiant $\Gamma\Phi^+ = \Gamma\Phi^- = \phi$, on note

$$\begin{aligned} &a = f_a(\Gamma u^+, \Gamma u^-), \quad A = W_a + \mathcal{R}_T(a - w_a), \\ &c^\pm = f_c^\pm(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial'_y\phi), \quad C^\pm = \mathcal{R}_T(c^\pm), \quad w^\pm = (u^\pm, A, C^\pm, \partial_y\Phi^\pm). \end{aligned} \tag{10.1.13}$$

En particulier, on note a_0, A_0, ϕ_0, c_0, C_0 et $w_0^\pm$ les quantités associées à (u_0, Φ_0). On introduit

$$F = f - \mathcal{L}(u_0, \nabla\Phi_0)u_0, \quad G = -g(\Gamma u_0^+, \Gamma u_0^-, \partial_y\Phi_0),, \quad H^\pm = -h_*^\pm(w_0^\pm). \tag{10.1.14}$$

Puisque (u_0, Φ_0) est solution exacte du problème non-linéaire sur Ω_{T_2}, c_0 et donc C_0 d'après la proposition 5.3.1, sont nuls pour $t < T_2$. Il en résulte que

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H^\pm = 0 \quad \text{pour } t \leq T_2. \tag{10.1.15}$$

Soit T tel que $T \in [T_2, T_1]$. L'analyse ci dessus montre que équations (3.2.3)... (3.2.10) s'écrivent

$$\mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u - \mathcal{L}(u_0, \nabla\Phi_0)u_0 = F \qquad \text{sur } \Omega_T, \tag{10.1.16}$$

$$g(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y\phi) - g(\Gamma u_0^+, \Gamma u_0^-, \partial_y\Phi_0) = G \qquad \text{sur } \omega_T, \tag{10.1.17}$$

$$\Gamma\Phi^+ = \Gamma\Phi^- = \phi \qquad \text{sur } \omega_T, \tag{10.1.18}$$

et, avec les notations (10.1.13),

$$\begin{cases} h_*^+(w^+) - h_*^+(w_o^+) = H^+ & \text{sur } \Omega_T^+, \\ h_*^-(w^-) - h_*^-(w_o^-) = H^- & \text{sur } \Omega_T^-. \end{cases} \tag{10.1.19}$$

On demande en outre à u et Φ de vérifier les conditions dans le passé ($t < T_2$) :

$$u^\pm = u_0^\pm, \quad \Phi^\pm = \Phi_0^\pm \quad \text{pour } t < T_2. \tag{10.1.20}$$

La suite du chapitre 10 est consacré à la résolution des équations (10.1.16) à (10.1.20), en utilisant un schéma itératif de type Nash-Moser décrit au paragraphe 10.3.

10.2. Opérateurs de régularisation

Nous définissons maintenant les opérateurs de régularisation qui interviennent dans le schéma itératif. Pour $T \in [T_2, T_1]$, $W_0^{2s}(\Omega_T)$ désigne le sous-espace de $W^{2s}(\Omega_T)$ des fonctions nulles pour $t < T_2$. Ce sous-espace sera muni de la norme habituelle de $W^{2s}(\Omega_T)$.

***Proposition 10.2.1* (S. Alinhac [Al]).** — *Il existe des opérateurs S_θ^1 définis pour tout réel $\theta \geq 1$ et vérifiant pour tout a et b entiers pairs dans $[0, 2s_1 + 6]$, pour tout $T \in [T_2, T_1]$ et pour tout $u \in W_0^b(\Omega_T)$ les estimations suivantes*

$$\|S_\theta^1(u)\|_{a,T} \leq C\,\|u\|_{b,T} \qquad \text{pour } a \leq b, \tag{10.2.1}$$

$$\|S_\theta^1(u)\|_{a,T} \leq C\,\theta^{a-b}\|u\|_{b,T} \qquad \text{pour } a \geq b, \tag{10.2.2}$$

$$\|S_\theta^1(u) - u\|_{a,T} \leq C\,\theta^{a-b}\|u\|_{b,T} \qquad \text{pour } a \leq b, \tag{10.2.3}$$

$$\Big\|\frac{d}{d\theta}S_\theta^1(u)\Big\|_{a,T} \leq C\,\theta^{a-b-1}\|u\|_{b,T} \qquad \forall a,\ \forall b \text{ dans } [0, 2s_1 + 6], \tag{10.2.4}$$

$$S_\theta^1(u) = 0 \qquad \text{si} \quad t \leq T_2, \tag{10.2.5}$$

où C désigne une constante indépendante de a, b et T.

Les opérateurs dépendent de T, par l'intermédiaire d'opérateurs de prolongement. On omet de l'indiquer dans la notation. L'important est que les constantes sont indépendantes de T.

L'inconvénient de la régularisation S_θ^1 est qu'elle ne respecte pas les traces, ni la condition de continuité sur $\{x_n = 0\}$. Pour $s > 0$, notons $W_\sharp^{2s}(\Omega_T)$ l'espace des $\Phi \in W_0^{2s}(\Omega_T)$ tel que $[\Phi] = 0$.

***Proposition 10.2.2.*.** — *Il existe des opérateurs $\widetilde{S}_\theta^1$ de $W_\sharp^2(\Omega_T)$ dans $W_\sharp^{2s_1+6}(\Omega_T)$, possédant les propriétés* (10.2.1) *à* (10.2.5) *pour a et b dans $\{2, \ldots, 2s_1 + 6\}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 5.1.1, le corollaire 5.4.2 et la localisation (5.4.3), l'opérateur

$$\mathcal{J} : \Phi \longmapsto (\mathcal{J}\Phi)^\pm = \Phi^\pm \mp \frac{1}{2}\mathcal{R}_T[\Phi] \tag{10.2.6}$$

est uniformément borné de $W_0^{2s}(\Omega_T)$ dans $W_0^{2s}(\Omega_T)$, pour tout $s \geq 1$. L'opérateur $\widetilde{S}_\theta^1 = \mathcal{J}S_\theta^1$ possède donc les propriétés (10.2.1) (10.2.2) et (10.2.4). De plus, $[\mathcal{J}\Phi] = 0$, et l'image de $\mathcal{J}$ est contenue dans $W_\sharp^{2s_1+6}(\Omega_T)$. En outre, si $[\Phi] = 0$, on a $\mathcal{J}\Phi = \Phi$ et donc $\Phi - \widetilde{S}_\theta^1\Phi = \mathcal{J}(\Phi - S_\theta^1\Phi)$ et (10.2.3) en résulte lorsque $\Phi \in W_\sharp^2(\Omega_T)$. □

On utilisera aussi des régularisations tangentielles. En désignant par $H_0^s(\omega_T)$ le sous-espace des fonctions $u \in H^s(\omega_T)$ telles que $u = 0$ pour $t < T_2$, on construit des opérateurs S_θ^2 opérant de $H_0^b(\omega_T)$ dans $H_0^a(\omega_T)$, pour tous a et b entiers dans $[0, 2s_1 + 6]$, et vérifiant les propriétés analogues à (10.2.1)... (10.2.5).

D'autre part, on note $E^s(\Omega_T)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega_T)$ telles que $\partial_y^\alpha u \in L^2(\Omega_T)$ pour $|\alpha| \leq s$, où ∂_y^α désigne une dérivée tangentielle. Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{s,T}^{tg} = \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial_y^\alpha u\|_{L^2(\Omega_T)} \tag{10.2.7}$$

On note $E_0^s(\Omega_T) \subset E^s(\Omega_T)$ le sous-espace des fonctions $u \in E^s(\Omega_T)$ nulles pour $t < T_2$. Alors les opérateurs de régularisation tangentielle $S_\theta^3 = S_\theta^2 \otimes \mathrm{Id}_{x_n}$, opèrent de $E_0^b(\Omega_T)$ dans $E_0^a(\Omega_T)$, pour a, b dans $[0, 2s_1 + 6]$, vérifiant les propriétés analogues à (10.2.1)... (10.2.5) pour les normes $\|\cdot\|^{tg}$. On a de plus

$$\Gamma S_\theta^3(u) = S_\theta^2(\Gamma u), \tag{10.2.8}$$

$$\delta_n S_\theta^3(u) = S_\theta^3(\delta_n u), \tag{10.2.9}$$

$$\partial_n S_\theta^3(u) = S_\theta^3(\partial_n u). \tag{10.2.10}$$

Enfin, on note $W_1^{2s}(\Omega_T)$ le sous-espace des fonctions $u \in W_0^{2s}(\Omega_T)$ telles que $\partial_y u \in W_0^{2s}(\Omega_T)$. On note

$$\|u\|_{2s,T}^1 = \|u\|_{2s,T} + \|\partial_y u\|_{2s,T} \tag{10.2.11}$$

la norme de cet espace.

Lemme 10.2.3. — *i) Il existe une constante C telle que pour tout entier $s \in [0, s_1 + 3]$ et pour tout $T \in [T_2, T_1]$, S_θ^3 opère de $W_0^{2s}(\Omega_T)$ dans $W_1^{2s}(\Omega_T)$ et*

$$\|S_\theta^3(u)\|_{2s,T}^1 \leq C\,\theta \|u\|_{2s,T}. \tag{10.2.12}$$

ii) Il existe une constante C telle que pour tout entier $s \in [0, s_1]$ et pour tout $u \in W^{2s_1}(\Omega_T)$ on a l'estimation

$$\|S_\theta^3(u) - u\|_{2s,T} \leq C\,\theta^{2s-2s_1} \|u\|_{2s_1,T}. \tag{10.2.13}$$

Démonstration. — Si $u \in W^{2s}(\Omega_T)$, $\|\partial_y S_\theta^3(u)\|_{2s,T}$ est majoré par une somme de termes de la forme

$$A = \|\partial_y \partial_y^\alpha \delta_n^p \partial_n^k S_\theta^3(u)\|_{0,T} \qquad \text{avec } |\alpha| + p + 2k \leq 2s.$$

En commutant $\delta_n^p \partial_n^k$ à l'opérateur S_θ^3 et en utilisant (10.2.2) pour S^3 et les normes $\|\cdot\|^{tg}$, on obtient

$$A \leq \|S_\theta^3(\delta_n^p \partial_n^k u)\|_{|\alpha|+1,T}^{tg} \leq C\,\theta \|\delta_n^p \partial_n^k u\|_{|\alpha|,T}^{tg} \leq C\,\theta \|u\|_{2s,T}$$

et (10.2.12) en résulte. De même, pour $p + 2k \leq s \leq s_1$,

$$\begin{aligned}\|\delta_n^p \partial_n^k (S_\theta^3(u) - u)\|_{2s-p-2k}^{tg} &= \|S_\theta^3(\delta_n^p \partial_n^k u) - \delta_n^p \partial_n^k u)\|_{2s-p-2k}^{tg} \\ &\leq C\theta^{2s-2s_1} \|\delta_n^p \partial_n^k u\|_{2s_1-p-2k}^{tg} \leq C\theta^{2s-2s_1} \|u\|_{2s_1-p-2k}.\end{aligned}$$

L'estimation (10.2.13) en découle, en sommant sur p et k. □

10.3. Description du schéma itératif

Nous définissons tout d'abord les linéarisés des expressions introduites au paragraphe 10.1. Le linéarisé en $(u, \nabla\Phi)$ de $\mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u$, agissant sur (v, ψ), est noté

$$\mathcal{L}^2(u, \nabla\Phi)(v, \psi).$$

De même, les linéarisés en $(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)$ de $g(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)$ et $h(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)$ sont notés respectivement

$$g_1(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)(v^+, v^-, \partial_y \psi), \quad h_1(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)(v^+, v^-, \partial_y \psi).$$

Les linéarisés en $w^\pm = (u^\pm, A, C^\pm, \theta)$ de $h_*^+(w^+)$ et de $h_*^-(w^-)$, sont notés respectivement

$$h_2^+(w^+)(v^+, \widetilde{a}, \widetilde{c}, \widetilde{\theta}), \quad h_2^-(w^-)(v^-, \widetilde{a}, \widetilde{c}, \widetilde{\theta}).$$

On rappelle la structure des linéarisés de $\mathcal{L}$ et g

Proposition 10.3.1. — *i) Le linéarisé $\mathcal{L}^2(u, \nabla\Phi)$ est de la forme suivante :*
(10.3.1)

$$\mathcal{L}^2(u, \nabla\Phi)(v, \psi) = \mathcal{L}(u, \nabla\Phi)V + B(u, \nabla u, \nabla\Phi)V + \psi\,(\partial_n\Phi)^{-1}\,\partial_n\Big(\mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u\Big)$$

où $B(u, \nabla u, \nabla\Phi)$ est l'opérateur de multiplication par une matrice B dont les coefficients sont des fonctions de $(u, \nabla u, \nabla\Phi)$ et où V désigne la bonne inconnue définie par

$$V = v - \psi\,\frac{\partial_n u}{\partial_n \phi}. \tag{10.3.2}$$

ii) Le linéarisé en $(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)$ de $g(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)$ est l'opérateur

$$g_1(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi)(v^+, v^-, \partial_y \psi) = X_u(\psi) - [\mathcal{M}(u, \partial_y \phi)v] \tag{10.3.3}$$

où $X_u(\psi)$ est donné par (7.5.2).

Nous désignons par $\mathcal{L}^1(u, \nabla\Phi)V$ l'opérateur

$$\mathcal{L}^1(u, \nabla\Phi)V = \mathcal{L}(u, \nabla\Phi)V + B(u, \nabla u, \nabla\Phi)V. \tag{10.3.4}$$

Nous allons maintenant définir le schéma de résolution. On reprend les notations de [Höl], [Al] [Al-Gé]. On se donne $\theta_0 \geq 1$ et pour $k \geq 1$, on définit $\theta_k = (\theta_0^2 + k)^{1/2}$.

On note $\Delta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$. Alors,

$$\theta_k < \theta_{k+1} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \theta_k = +\infty, \tag{10.3.5}$$

$$\Delta_k > \Delta_{k+1}, \tag{10.3.6}$$

et il existe des constante C_1 et C_2 telles que

$$0 < C_1 \leq \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}} \leq C_2 \qquad \text{pour tout} \quad k \geq 0. \tag{10.3.7}$$

Le schéma itératif est initialisé par (u_0, Φ_0). On suppose que $(u_0, \Phi_0), \dots, (u_\nu, \Phi_\nu)$ sont connus et vérifient

$$[\Phi_k] = 0, \quad 0 \leq k \leq \nu. \tag{10.3.8}$$

On peut alors définir $\phi_k = \Gamma\Phi_k^+ = \Gamma\Phi_k^-$. Pour $0 \leq k \leq \nu - 1$, on note

$$\dot{u}_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta_k}, \qquad \dot{\Phi}_k = \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\Delta_k}, \qquad \dot{\phi}_k = \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta_k} = \Gamma\dot{\Phi}_k^{\pm}. \tag{10.3.9}$$

Notant pour simplifier, S_k^1 au lieu de $S_{\theta_k}^1$, on introduit ensuite les régularisés

$$\overline{u}_k = u_0 + S_k^1(u_k - u_0), \qquad \overline{\Phi}_k = \Phi_0 + \widetilde{S}_k^1(\Phi_k - \Phi_0). \tag{10.3.10}$$

Sur le bord, comme $[\Phi_k - \Phi_0] = 0$, la proposition 10.2.2 implique que $[\widetilde{S}_k^1(\Phi_k - \Phi_0)] = 0$, ce qui permet de définir

$$\overline{\phi}_k = \Gamma\overline{\Phi}_k^+ = \Gamma\overline{\Phi}_k^-. \tag{10.3.11}$$

On construit $(u_{\nu+1}, \Phi_{\nu+1})$ sous la forme

$$u_{\nu+1} = u_\nu + \Delta_\nu \dot{u}_\nu, \quad \Phi_{\nu+1} = \Phi_\nu + \Delta_\nu \dot{\Phi}_\nu. \tag{10.3.12}$$

On procède en deux temps. La linéarisation de (10.1.16) (10.1.17) conduit à un problème aux limites qui permet de déterminer la bonne inconnue $\dot{V}_\nu$ et $\dot{\phi}_\nu$, la trace supposée de $\dot{\Phi}_\nu$. Ensuite, la linéarisation de (10.1.19) conduit à des équations pour $\dot{\Phi}_\nu^{\pm}$, dont on doit vérifier la compatibilité avec les conditions au bord

$$\Gamma\dot{\Phi}_\nu^+ = \Gamma\dot{\Phi}_\nu^- = \dot{\phi}_\nu. \tag{10.3.13}$$

On définit alors

$$\dot{u}_\nu = \dot{V}_\nu + \dot{\Phi}_\nu \frac{\partial_{x_n}\overline{u}_\nu}{\partial_{x_n}\overline{\Phi}_\nu}. \tag{10.3.14}$$

a) Détermination de $\dot{V}_\nu$ et $\dot{\phi}_\nu$. — Suivant [Höl], [Al], [Al-Gé], et compte tenu de la proposition 10.3.1, la linéarisation de l'équation (10.1.16)(10.1.17) conduit à chercher $(\dot{V}_\nu, \dot{\phi}_\nu)$ comme solution du problème mixte hyperbolique linéaire :

$$\mathcal{L}^1(\overline{u}_\nu, \nabla\overline{\Phi}_\nu)(\dot{V}_\nu) = \dot{F}_\nu, \tag{10.3.15}$$

$$X_{\overline{u}_\nu}(\dot{\phi}_\nu) - [\mathcal{M}_\nu \dot{V}_\nu] - \dot{\phi}_\nu \Big[\mathcal{M}_\nu \frac{\partial_n\overline{u}_\nu}{\partial_n\overline{\Phi}_\nu}\Big] = \dot{G}_\nu, \tag{10.3.16}$$

$$\dot{V}_\nu = 0 \qquad \dot{\phi}_\nu = 0 \qquad \text{pour } t < T_2, \tag{10.3.17}$$

où $\mathcal{M}_\nu$ désigne la matrice $\mathcal{M}(\Gamma\overline{u}_\nu, \partial_y\Gamma\overline{\Phi}_\nu)$. Les termes de sources $\dot{F}_\nu$ et $\dot{G}_\nu$ s'obtiennent à partir des termes d'erreur ε_k^1 et ε_k^2 définis pour $0 \leq k \leq \nu - 1$ par

$$\varepsilon_k^1 = \mathcal{L}(u_{k+1}, \nabla\Phi_{k+1})u_{k+1} - \mathcal{L}(u_k, \nabla\Phi_k)u_k - \Delta_k\mathcal{L}^1(\overline{u}_k, \nabla\overline{\Phi}_k)(\dot{V}_k), \tag{10.3.18}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^2 = g(\Gamma u_{k+1}^+, \Gamma u_{k+1}^-, \partial_y\phi_{k+1}) - g(\Gamma u_k^+, \Gamma u_k^-, \partial_y\phi_k)\\ - \Delta_k\, g_1(\Gamma\overline{u}_k^+, \Gamma\overline{u}_k^-, \partial_y\overline{\phi_k})(\Gamma\dot{u}_k^+, \Gamma\dot{u}_k^-, \partial_y\dot{\phi}_k).\end{aligned} \tag{10.3.19}$$

En notant

$$E_k^1 = \sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon_j^1, \quad E_k^2 = \sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon_j^2. \tag{10.3.20}$$

on définit alors par récurrence, les termes F_k et G_k pour $k \leq \nu$,

$$F_0 = S_0^1(F), \quad G_0 = S_0^2(G), \tag{10.3.21}$$

$$F_k = S_k^1(F) - S_k^1(E_k^1) - \sum_{j=0}^{k-1}F_j, \qquad G_k = S_k^2(G) - S_k^2(E_k^2) - \sum_{j=0}^{k-1}G_j. \tag{10.3.22}$$

On pose alors

$$\dot{F}_\nu = F_\nu/\Delta_\nu, \quad \dot{G}_\nu = G_\nu/\Delta_\nu. \tag{10.3.23}$$

Ayant déterminé $\dot{V}_\nu$ et $\dot{\phi}_\nu$, on peut définir sur $\{x_n = 0\}$ les fonctions $\dot{v}_\nu^\pm$, traces supposées de $\dot{u}_\nu^\pm$, par les formules

$$\dot{v}_\nu^\pm = \Gamma\dot{V}_\nu^\pm + \dot{\phi}_\nu\,\Gamma\Big(\frac{\partial_n\overline{u}_\nu^\pm}{\partial_n\overline{\Phi}_\nu}\Big). \tag{10.3.24}$$

Les fonctions $\dot{u}_\nu^\pm$ que nous construirons vérifieront $\Gamma\dot{u}_\nu^\pm = \dot{v}_\nu^\pm$.

b) Détermination de $\dot{\Phi}_\nu$. — Par linéarisation de la fonction $h_*^\pm$, on détermine $\dot{\Phi}_\nu^\pm$ comme la solution d'une équation linéaire du premier ordre de la forme

$$X_2^\pm(\dot{\Phi}_\nu^\pm) = \dot{H}_\nu^\pm \quad \text{sur } \Omega_T^\pm, \quad \dot{\Phi}_\nu^\pm = 0 \quad \text{pour } t \leq T_2, \tag{10.3.25}$$

où $X_2^\pm$ sont des champs de vecteurs tangentiels. En outre, nous voulons que sur $\{x_n = 0\}$, (10.3.13) soit vérifié, qui implique en particulier que l'on a bien $\Gamma\dot{u}_\nu = \dot{v}_\nu$.

Le reste du paragraphe 10.3 est consacré à la définition des champs $X_2^\pm$ et des seconds membres $\dot{H}_\nu^\pm$. Pour rendre compatible les équations (10.3.25) et la condition au bord (10.3.13), il suffit que les champs $X_2^\pm$ aient la même restriction $\Gamma X_2^+ = \Gamma X_2^-$ au bord et que

$$\Gamma X_2^+(\dot{\phi}_\nu) = \Gamma X_2^-(\dot{\phi}_\nu) = \dot{h}_\nu = \Gamma\dot{H}_\nu^+ = \Gamma\dot{H}_\nu^-. \tag{10.3.26}$$

L'idée est que la trace de l'équation (10.1.10) pour Φ^+ est l'équation (10.1.11) pour ϕ, et que l'on doit conserver cette propriété par linéarisation. Il est alors naturel, de définir à partir des fonctions $\dot{v}_\nu$ et $\dot{\phi}_\nu$ déterminées à l'étape a),

$$\dot{h}_\nu = h_1(\Gamma\overline{u}_\nu^+, \Gamma\overline{u}_\nu^-\,\partial_y\overline{\phi}_\nu)(\dot{v}_\nu^+, \dot{v}_\nu^-, \partial_y\dot{\phi}_\nu), \tag{10.3.27}$$

où h_1 est le linéarisé de h.

On poursuit la construction du côté $\{x_n > 0\}$, la construction du côté $\{x_n < 0\}$ étant similaire. La mise en place d'un schéma de Nash-Moser pour les équations (10.1.19) conduit à introduire, avec les notations du paragraphe 10.1, pour $0 \leq k \leq \nu$,

(10.3.28)
$$\begin{cases} a_k = f_a(\Gamma u_k^+, \Gamma u_k^-), \quad A_k = W_a + \mathcal{R}_T(a_k - w_a), \quad p_k^+ = f_p^+(u_k^+, \partial_y' \Phi_k^+, A_k), \\ c_k^+ = f_c^+(\Gamma u_k^+, \Gamma u_k^-, \partial_y' \phi_k), \quad w_k^+ = (u_k^+, A_k, \mathcal{R}_T(c_k^+), \partial_y \Phi_k^+). \end{cases}$$

Avec (10.3.10) (10.3.11), on définit les expressions régularisées

(10.3.29)
$$\begin{cases} \overline{a}_k = f_a(\Gamma \overline{u}_k^+, \Gamma \overline{u}_k^-), \quad \overline{A}_k = W_a + \mathcal{R}_T(\overline{a}_k - w_a), \quad \overline{p}_k^+ = f_p^+(\overline{u}_k^+, \partial_y' \overline{\Phi}_k^+, \overline{A}_k), \\ \overline{c}_k^+ = f_c^+(\Gamma \overline{u}_k^+, \Gamma \overline{u}_k^-, \partial_y' \overline{\phi}_k), \quad \overline{w}_k^+ = (\overline{u}_k^+, \overline{A}_k, \mathcal{R}_T(\overline{c}_k^+), \partial_y \overline{\Phi}_k^+). \end{cases}$$

Pour $0 \leq k \leq \nu - 1$, on introduit ensuite les accroissements

(10.3.30)
$$\begin{cases} \dot{a}_k = f_a^1(\Gamma \overline{u}_k)(\Gamma \dot{u}_k), \qquad \dot{p}_k^+ = f_p^1(\overline{u}_k^+, \partial_y' \overline{\Phi}_k^+, \overline{A}_k)(\dot{u}_k^+, \partial_y' \dot{\Phi}_k^+, \mathcal{R}_T(\dot{a}_k)), \\ \dot{c}_k^+ = f_c^1(\Gamma \overline{u}_k, \partial_y' \overline{\phi}_k)(\Gamma \dot{u}_k, \partial_y' \dot{\phi}_k), \qquad \dot{w}_k^+ = (\dot{u}_k^+, \mathcal{R}_T(\dot{a}_k), \mathcal{R}_T(\dot{c}_k^+), \partial_y \dot{\Phi}_k^+). \end{cases}$$

Suivant [Höl], [Al], [Al-Gé], le schéma itératif fait intervenir le linéarisé de h_*^+ en $\overline{w}_\nu^+$, agissant sur $\dot{w}_\nu^+ = (\dot{u}_\nu^+, \dot{A}_\nu, \dot{C}_\nu^+, \partial_y \dot{\Phi}_\nu^+)$. Compte tenu de (10.3.14), on a $\dot{u}_\nu^+ = l_\nu(\dot{\Phi}_\nu^+)$, où

$$l_\nu(\Psi) := \dot{V}_\nu^+ + \Psi \, \frac{\partial_n \overline{u}_\nu}{\partial_n \overline{\Phi}_\nu}, \tag{10.3.31}$$

D'autre part, la première étape a déterminé $\dot{\phi}_\nu^+$ et $\dot{v}_\nu^+$ candidats pour les traces de $\dot{\Phi}_\nu^+$ et $\dot{u}_\nu^+$. Nous pouvons donc étendre les définitions (10.3.30)

$$\dot{a}_\nu = f_a^1(\Gamma \overline{u}_\nu)(\Gamma \dot{v}_\nu), \qquad \dot{c}_\nu^+ = f_c^1(\Gamma \overline{u}_\nu, \partial_y' \overline{\phi}_\nu)(\dot{v}_\nu, \partial_y' \dot{\phi}_\nu) \tag{10.3.32}$$

et poser

$$\dot{A}_\nu = \mathcal{R}(\dot{a}_\nu), \quad \dot{C}_\nu^+ = \mathcal{R}(\dot{c}_\nu^+) \tag{10.3.33}$$

On voit alors que la seule inconnue dans $\dot{w}_\nu^+$ est $\dot{\Phi}_\nu^+$. Cela conduit à définir sur Ω_T^+ l'opérateur

$$X_2^+(\Psi) = h_2^+(\overline{w}_\nu^+)(l_\nu(\Psi), \dot{A}_\nu, \dot{C}_\nu^+, \partial_y \Psi). \tag{10.3.34}$$

L'opérateur X_2^+ est de la forme :

$$X_2^+(\Psi) = \partial_t \Psi + \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_j(\widetilde{w}_\nu) \partial_j \Psi + \Lambda_n(\widetilde{w}_\nu) \Psi + \Lambda_{n+1}(\widetilde{w}_\nu) \tag{10.3.35}$$

où les Λ_j sont des fonctions C^∞ de leurs arguments et où l'on a posé :

$$\widetilde{w}_\nu = \left(\overline{u}_\nu^+, \partial_y \overline{\Phi}_\nu^+, \overline{A}_\nu, \mathcal{R}_T(\overline{c}_\nu^+), \partial_n \overline{u}_\nu^+, \partial_n \overline{\Phi}_\nu^+, \dot{V}_\nu^+, \dot{A}_\nu, \dot{C}_\nu^+ \right). \tag{10.3.36}$$

Lemme 10.3.2. — *En notant ΓX_2^+ la restriction de X_2^+ à $\{x_n = 0\}$, on a*

$$\Gamma X_2^+(\dot{\phi}_\nu) = \dot{h}_\nu. \tag{10.3.37}$$

Démonstration. — Les définitions (10.1.4) à (10.1.7) montrent que
(10.3.38)
$$h_*^+(u^+, A, C^+, \theta) = h(u^+, u^-, \theta) \quad \text{si } A = f_a(u^+, u^-) \text{ et } C^+ = f_c^+(u^+, u^-, \theta').$$
Il en résulte que les linéarisés h_2^+ de h_*^+ et h_1 de h vérifient la relation

(10.3.39)
$$h_2^+(w^+)(\dot{v}^+, \dot{a}, \dot{c}^+, \dot{\theta}) = h_1(u^+, u^-, \theta)(\dot{v}^+, \dot{v}^-, \dot{\theta})$$

lorsque

(10.3.40)
$$\begin{aligned} &w^+ = \big(u^+, f_a^+(u^+, u^-), f_c^+(u^+, u^-, \theta'), \theta\big), \\ &\dot{a} = f_a^1(u^+, u^-)(\dot{v}^+, \dot{v}^-), \quad \dot{c}^+ = f_c^1(u^+, u^-, \theta'))(\dot{v}^+, \dot{v}^-, \dot{\theta}'). \end{aligned}$$

La définition (10.3.29) implique que $\Gamma\overline{A}_\nu = \overline{a}_\nu$. Avec la condition de trace (10.3.11), on a aussi $\Gamma\overline{w}_\nu^+ = (\Gamma\overline{u}_\nu^+, \overline{a}_\nu, \overline{c}_\nu^+, \partial_y\overline{\phi}_\nu)$. Avec (10.3.29) et (10.3.32), on voit que $\overline{w}_\nu^+$ et $(\dot{a}_\nu, \dot{c}_\nu^+)$ vérifient (10.3.40) avec $\dot{v}^\pm = \dot{v}_\nu^\pm$ et $\dot{\theta} = \partial_y\dot{\phi}_\nu$. Il en résulte que

(10.3.41)
$$h_2^+(\Gamma\overline{w}_\nu^+)(\dot{v}_\nu^+, \dot{a}_\nu, \dot{c}_\nu^+, \partial_y\dot{\phi}_\nu) = h_1(\overline{\Gamma u_\nu}, \partial_y\overline{\phi_\nu})(\dot{v}_\nu, \partial_y\dot{\phi}_\nu).$$

Compte tenu des définitions (10.3.27) de $\dot{h}_\nu$ et (10.3.24) de $\dot{v}_\nu^+$, ceci n'est rien d'autre que (10.3.37). □

Nous allons maintenant définir le second membre $\dot{H}_\nu$ de (10.3.25). Nous adaptons les formules du type (10.3.22) pour les seconds membres, afin de tenir compte de la contrainte $\Gamma\dot{H}_\nu^+ = \dot{h}_\nu$. On cherche $\dot{H}_\nu^+$ sous la forme

(10.3.42)
$$\dot{H}_\nu^+ = \mathcal{R}_T(\dot{h}_\nu) + \dot{\beta}_\nu.$$

avec $\Gamma\dot{\beta}_\nu = 0$. L'idée est encore de comparer les linéarisations de (10.1.10) et (10.1.11). Pour $k \leq \nu - 1$, on définit

(10.3.43)
$$\dot{h}_k = h_1(\overline{\Gamma u_k}, \partial_y\overline{\phi_k})(\Gamma\dot{u}_k, \partial_y\dot{\phi}_k)$$

et on introduit les termes d'erreur ε_k^3 et ε_k^4

(10.3.44)
$$\begin{cases} \varepsilon_k^3 = h(\Gamma u_{k+1}, \partial_y\phi_{k+1}) - h(\Gamma u_k, \partial_y\phi_k) - \Delta_k\, h_1(\overline{\Gamma u_k}, \partial_y\overline{\phi_k})(\Gamma\dot{u}_k, \partial_y\dot{\phi}_k). \\ \varepsilon_k^4 = h_*^+(w_{k+1}^+) - h_*^+(w_k^+) - \Delta_k\, h_2^+(\overline{w}_k^+)(\dot{w}_k^+). \end{cases}$$

Avec les équations (10.3.25) pour $k \leq \nu - 1$, on a donc

(10.3.45)
$$\begin{aligned} &h(\Gamma u_{k+1}, \partial_y\phi_{k+1}) - h(\Gamma u_k, \partial_y\phi_k) = \varepsilon_k^3 + h_k \\ &h_*^+(w_{k+1}^+) - h_*^+(w_k^+) = \varepsilon_k^4 + \beta_k + \mathcal{R}_T(h_k) \end{aligned}$$

où l'on note

(10.3.46)
$$h_k = \Delta_k\dot{h}_k, \quad \beta_k = \Delta_k\dot{\beta}_k.$$

Pour $k \leq \nu$, on introduit les erreurs cumulées

(10.3.47)
$$E_k^3 = \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j^3, \qquad E_k^4 = \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j^4.$$

Par sommation, on déduit de (10.3.45) les égalités :

$$
\begin{aligned}
&h(\Gamma u_\nu, \partial_y \Phi_\nu) - h(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0) = E^3_\nu + \sum_{k=0}^{\nu-1} h_k, \\
&h^+_*(w^+_\nu) - h^+_*(w^+_0) = E^4_\nu + \sum_{k=0}^{\nu-1} \beta_k + \mathcal{R}_T\Big(\sum_{k=0}^{\nu-1} h_k\Big).
\end{aligned}
\tag{10.3.48}
$$

Il en résulte que

$$
\sum_{k=0}^{\nu-1} \beta_k = h^+_*(w^+_\nu) - \mathcal{R}_T(h(\Gamma u_\nu, \partial_y \Phi_\nu)) + (\widetilde{H} - E^4_\nu + \mathcal{R}_T(E^3_\nu))
\tag{10.3.49}
$$

où

$$
\widetilde{H} = -h^+_*(w^+_0) + \mathcal{R}_T(h(\Gamma u^+_0, \Gamma u^-_0, \partial_y \Phi_0)).
\tag{10.3.50}
$$

Afin d'assurer la convergence du schéma itératif vers la solution du problème (3.2.3)... (3.2.10), on doit avoir :

$$
\lim_{\nu\to\infty} h^+_*(w^+_\nu) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\nu\to\infty} h(\Gamma u_\nu, \partial_y \Phi_\nu) = 0.
$$

On retrouve la démarche usuelle pour les schémas de Nash-Moser, en choisissant β_ν de sorte que

$$
\sum_{k=0}^{\nu} \beta_k = S^3_\nu(\widetilde{H} - E^4_\nu + \mathcal{R}_T(E^3_\nu)).
$$

Nous pouvons maintenant procéder à la définition des seconds membres $\dot{H}_\nu$. Avec les notations (10.3.44) (10.3.47) et (10.3.50), on définit la suite β_k par récurrence en posant :

$$
\begin{cases}
\beta_0 = 0, \\
\beta_k = S^3_k(\widetilde{H}) - S^3_k(E^4_k - \mathcal{R}_T(E^3_k)) - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \qquad \text{pour } \ 1 \le k \le \nu.
\end{cases}
\tag{10.3.51}
$$

Enfin, en posant $\dot{\beta}_\nu = \beta_\nu / \Delta_\nu$ on définit $\dot{H}_\nu$ par (10.3.42).

***Lemme 10.3.3.*.** — *i)* $\widetilde{H} = 0$ *pour* $t < T_2$ *et* $\Gamma\widetilde{H} = 0$ *sur* ω_{T_1}.

ii) Pour tout entier k *tel que* $0 \le k \le \nu$ *on a*

$$
\beta_k = 0, \quad \dot{H}_k = 0 \qquad \text{pour } \ t < T_2
\tag{10.3.52}
$$

$$
\Gamma(\beta_k) = 0 \qquad \text{sur } \ \omega_T
\tag{10.3.53}
$$

Démonstration. — Comme (u_0, Φ_0) est solution exacte du problème sur Ω_{T_2} on a $h^+_*(w^+_0) = 0$ sur $\Omega^+_{T_2}$ et $h(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0) = 0$ sur ω_{T_2}. La proposition 5.3.1 implique alors que $\widetilde{H} = 0$ sur $\Omega^+_{T_2}$. D'autre part, (10.3.28) et (10.3.38) impliquent que pour $k \le \nu$,

$$
h^+_*(\Gamma w^+_k) = h(\Gamma u_k, \partial_y \phi_k).
\tag{10.3.54}
$$

Pour $k = 0$, cela implique que $\Gamma\widetilde{H} = 0$.

Comme $(u_\nu, \Phi_u) = (u_0, \Phi_0)$ est solution exacte du problème, on a aussi

$$\varepsilon_k^3 = 0, \quad \varepsilon_k^4 = 0 \qquad \text{pour } 0 \le k \le \nu - 1 \quad \text{et pour } t < T_2, \tag{10.3.55}$$

d'où $E_k^3 = E_k^4 = 0$ pour $t < T_2$ et $k \le \nu$. on a de même, $h_k = 0$ sur ω_{T_2}. Avec les propositions 5.3.1. et 10.2.1, on en déduit (10.3.52).

D'autre part, (10.3.29), (10.3.30) et (10.3.39) impliquent que pour $k \le \nu - 1$,

$$h_2^+(\Gamma\overline{w}_k^+)(\Gamma\dot{w}_k^+) = h_1(\overline{\Gamma u_k}, \partial_y\overline{\phi_k})(\Gamma\dot{u}_k, \partial_y\dot{\phi}_k). \tag{10.3.56}$$

On en déduit que

$$\Gamma\varepsilon_k^4 = \varepsilon_k^3 \quad \text{pour } k \le \nu - 1 \quad \text{et} \quad \Gamma E_k^4 = E_k^3 \quad \text{pour } k \le \nu. \tag{10.3.57}$$

Avec (10.2.8), il en résulte que $\Gamma(E_k^4 - \mathcal{R}_T(E_k^3)) = 0$. Comme $\Gamma\widetilde{H} = 0$, on voit alors que

$$\Gamma\beta_k = -\sum_{j=0}^{k-1} \Gamma\beta_j.$$

Comme $\beta_0 = 0$, il en résulte que $\Gamma\beta_k = 0$ pour tout k. □

Avec $\dot{H}_\nu$ défini par (10.3.42), on détermine $\dot{\Phi}_\nu^+$ en résolvant l'équation

$$X_2^+\dot{\Phi}_\nu^+ = \dot{H}_\nu, \qquad \dot{\Phi}_\nu^+ = 0 \quad \text{pour } t < T_2. \tag{10.3.58}$$

Compte tenu des lemmes 10.3.2 et 10.3.3, la trace $\Gamma\dot{\Phi}_\nu^+$ et $\dot{\phi}_\nu$ vérifient la même équation de transport $(\Gamma X_2^+)\phi = \dot{h}_\nu$ et sont nulles pour $t < T_2$. On en déduit donc que $\Gamma\dot{\Phi}_\nu^+ = \dot{\phi}_\nu$.

On procède de la même façon pour construire $\dot{\Phi}_\nu^-$ sur Ω_T^- et on définit $\dot{u}_\nu$ par (10.3.14) puis $(u_{\nu+1}, \Phi_{\nu+1})$ par les formules (10.3.12).

10.4. Estimations douces

Le but de ce paragraphe est d'obtenir des estimations pour $\dot{u}_\nu$ et $\dot{\Phi}_\nu$. La première étape consiste à obtenir des estimations pour $(\dot{V}_\nu, \dot{\Phi}_\nu)$. Le système linéaire (10.3.15)... (10.3.17) est de la forme

$$\mathcal{L}^1(u, \nabla\Phi)V = F \tag{10.4.1}$$

$$X_u(\psi) - [\mathcal{M}(u, \partial_y\phi)V] - \psi\Big[\mathcal{M}(u, \partial_y\phi)\frac{\partial_n u}{\partial_n\Phi}\Big] = G \tag{10.4.2}$$

$$V = F = 0, \quad \psi = G = 0 \quad \text{pour } t < T_2 \tag{10.4.3}$$

En rappelant que $(u_0, \Phi_0) \in W^{2s_1+6}(\Omega_{T_1})$, on suppose que pour un $s \in [s_0, s_1]$ et pour un $T \in]T_2, T_1]$,

$$\begin{cases} (u - u_0, \Phi - \Phi_0) \in W^{2s+4}(\Omega_T), & \Gamma\Phi^+ = \Gamma\Phi^- = \phi, \\ u = u_0, \ \Phi = \Phi_0 \quad \text{pour } t < T_2. \end{cases} \tag{10.4.4}$$

La seconde étape consiste à obtenir des estimations pour $\dot{\Phi}_\nu$ en résolvant l'équation (10.3.25). En introduisant les notations

$$\begin{aligned} &a = f_a(\Gamma u^+, \Gamma u^-), && A = W_a + \mathcal{R}_T(a - w_a), \\ &c = f_c(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial_y \phi), && w = (u, A, \mathcal{R}_T(c), \partial_y \Phi), \end{aligned} \tag{10.4.5}$$

$$\begin{aligned} &v = \Gamma V + \psi\, \Gamma(\partial_n u / \partial_n \Phi), \qquad \dot{a} = f_a^1(\Gamma u)(v), \\ &\dot{c} = f_c^1(\Gamma u, \partial_y \phi)(\Gamma v, \partial_y \Gamma \Psi), \end{aligned} \tag{10.4.6}$$

on voit que l'équation (10.3.25) est de la forme :

$$\partial_t \Psi + \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_j(w) \partial_j \Psi + \Lambda_n(w) \frac{\partial_n u}{\partial_n \phi} \Psi = H = \mathcal{R}_T(H_1) + H_2 + H_3 \tag{10.4.7}$$

où $H_3 = \dot{\beta}_\nu$, $H_1 = h_1(\Gamma u, \partial_y \phi)(v, \partial_y \psi)$ et où le terme H_2 est de la forme

$$H_2 = \ell_1(w) V + \ell_2(w) \mathcal{R}_T(\dot{a}) + \ell_3(w) \mathcal{R}_T(\dot{c}), \tag{10.4.8}$$

les ℓ_j étant des fonction régulières de leurs arguments. On note que H dépend de la solution (V, ψ) de (10.4.1)... (10.4.3) par l'intermédiaire des fonctions $(v, \dot{a}, \dot{c})$ définies en (10.4.6). On suppose que ψ est solution de l'équation obtenue en prenant la restriction de (10.4.7) à $\{x_n = 0\}$. On a donc

$$\Gamma \Psi^+ = \Gamma \Psi^- = \psi. \tag{10.4.9}$$

Proposition 10.4.1. — *Il existe des constantes positives C_o, γ_o, M_1 et $T_1' \in]T_2, T_1]$ telles que pour tout (u, Φ) vérifiant* (10.4.4) *avec $T \in]T_2, T_1']$ ainsi que la condition*

$$\|u - u_0\|_{4,T}^* + \|\Phi - \Phi_0\|_{4,T}^* \leq M_1, \tag{10.4.10}$$

la solution (V, ψ) de (10.4.1)...(10.4.3) *vérifie pour tout $\gamma \geq \gamma_o$ l'estimation*

$$\begin{aligned} &\gamma \|V\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2} |\Gamma V|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2} |\psi|_{2s+1,\gamma,T} \\ &\qquad \leq C_o \Big\{ \|F\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2} |G|_{2s,\gamma,T} + K_0(T)\, K_1(T) \Big\} \end{aligned} \tag{10.4.11}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} &K_0(T) = \|F\|_{2,T}^* + \|V\|_{3,T}^* + |\psi|_{1,T}^* + |G|_{0,T}^*, \\ &K_1(T) = \|u\|_{2s+4,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s+4,\gamma,T}. \end{aligned} \tag{10.4.12}$$

Démonstration. — En posant $F' = F - BV$ et $G' = G + \psi[\mathcal{M}(u, \partial_y \phi)(\partial_n u / \partial_n \Phi)]$, on voit que (V, ψ, F', G') vérifie le système différentiel (8.4.9) et le théorème 8.4.2 fournit les estimations conormales. Il existe donc des constantes positives C_o, γ_o, M_1 et $T_1' \in]T_2, T_1]$ telles que pour $T \in]T_2, T_1']$ et $\gamma \geq \gamma_o$ on ait :

$$N(V, \psi, \gamma, T) \leq C_o \Big\{ \|F'\|_{2s,\gamma,T}^t + \|V\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2} |G'|_{2s,\gamma,T} + K_0(T)\, K_1'(T) \Big\} \tag{10.4.13}$$

où $N(V, \psi, \gamma, T)$, $K_0(T)$ et $K_1'(T)$ sont donnés respectivement par (8.4.11), (8.4.11) ou (10.4.12) et par (8.4.13). D'après le lemme 7.2.2, et sa définition (7.2.7), le terme

Γb qui entre dans $K_1'(T)$ s'estime par

$$|\Gamma b|_{2s,\gamma,T} \leq C_1\{|\Gamma u|_{2s,\gamma,T} + |\Gamma\Phi|_{2s+1,\gamma,T}\}.$$

et avec le lemme 5.1.1 on voit alors que

$$K_1'(T) \leq C_2 K_1(T). \tag{10.4.14}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&||F'||^t_{2s,\gamma,T} \leq ||F||^t_{2s,\gamma,T} + C\{||V||^t_{2s,\gamma,T} + ||V|^*_{0,T}\, K_1(T)\},\\
&|G'|_{2s,\gamma,T} \leq |G|_{2s,\gamma,T} + C\{|\psi|_{2s,\gamma,T} + |\psi|^*_{0,T}\, K_1(T)\}.
\end{aligned}$$

En reportant ces estimations dans (10.4.13), il vient

$$\begin{aligned}
N(V,\psi,\gamma,T) \leq C\Big\{&||F||^t_{2s,\gamma,T} + ||V||_{2s,\gamma,T}\\
&+ \gamma^{1/2}\,|G|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\psi|_{2s,\gamma,T} + K_0(T)\,K_1(T)\Big\}.
\end{aligned} \tag{10.4.15}$$

On estime ensuite les dérivées normales en revenant à l'équation (10.4.1). On rappelle que dans ce paragraphe, $\varepsilon > 0$ est fixé et que les constantes peuvent dépendre de ε. Le bord étant non caractéristique, on a

$$\gamma||\partial_n V||_{2s-2,\gamma,T} \leq C\Big\{||F'||_{2s,\gamma,T} + ||V||_{2s,\gamma,T} + K_0'(T)\,K_1''(T)\Big\} \tag{10.4.16}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
K_0'(T) &= ||F'||^*_{0,T} + ||V||^*_{1,T},\\
K_1''(T) &= \gamma\Big\{||u||_{2s-2,\gamma,T} + ||\Phi||_{2s,\gamma,T} + ||b||_{2s-2,\gamma,T}\Big\}
\end{aligned} \tag{10.4.17}$$

En utilisant l'expression de b donnée par (7.2.7) on voit que

$$||b||_{2s-2,\gamma,T} \leq C\Big\{|\Gamma u|_{2s-1,\gamma,T} + ||u||_{2s,\gamma,T} + ||\partial_y'\Phi||_{2s,\gamma,T}\Big\}.$$

On en déduit que

$$K_0'(T) \leq K_0(T) \qquad K_1''(T) \leq K_1(T). \tag{10.4.18}$$

D'autre part, on a

$$||F'||_{2s,\gamma,T} \leq ||F||_{2s,\gamma,T} + C\{||V||_{2s,\gamma,T} + ||V||^*_{0,T}\, K_1(T)\} \tag{10.4.19}$$

En reportant ces estimations dans (10.4.16), on obtient :

$$\gamma||\partial_n V||_{2s-2,\gamma,T} \leq C\Big\{||F||_{2s,\gamma,T} + ||V||_{2s,\gamma,T} + K_0(T)\,K_1(T)\Big\} \tag{10.4.20}$$

En sommant les deux estimations (10.4.15) et (10.4.20) et en prenant γ assez grand, les termes $||V||_{2s,\gamma,T}$ et $\gamma^{1/2}|\Gamma\Psi|_{2s,\gamma,T}$ situés à droite, sont absorbés par le membre de gauche, et la proposition 10.4.1 en résulte. □

Les constantes M_1 et T_1' étant fixées comme indiqué dans l'énoncé de la proposition 10.4.1, nous allons maintenant établir une estimation de Ψ dans l'espace $W_1^{2s}(\Omega_T)$ défini au paragraphe 10.2. On utilise le lemme suivant qui est une conséquence immédiate du lemme 9.4.2.

Lemme 10.4.2. — *Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que pour $(\Psi, F) \in W^{1,\infty}(\Omega_T) \cap W^{2s}(\Omega_T)$ et $w \in W^{1,\infty}(\Omega_T) \cap W^{2s}(\Omega_T)$ vérifiant*

$$\partial_t \Psi + \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_j(w) \partial_j \Psi + \Lambda_n(w) \Psi = F, \qquad \Psi = F = 0 \quad pour \quad t < T_2 \tag{10.4.21}$$

on a pour $\gamma \geq 1$ l'estimation :

$$\gamma \|\Psi\|_{2s,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ \|F\|_{2s,\gamma,T} + \|w\|_{2,T}^* \|\Psi\|_{2s,\gamma,T} + \|\Psi\|_{2,T}^* \|w\|_{2s,\gamma,T} \Big\} \tag{10.4.22}$$

où M est tel que $\|w\|_{0,T}^* \leq M$.

Proposition 10.4.3. — *Il existe des constantes positives C_1 et γ_1 telles que pour (u, Φ) vérifiant* (10.4.4) *avec $T \in]T_2, T_1']$ ainsi que la condition* (10.4.10), *alors pour tout $\gamma \geq \gamma_1$ et pour toute solution Ψ solution de* (10.4.7), *on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} \gamma \|\Psi\|_{2s,\gamma,T}^1 \leq C_1 \Big\{ & \|H_3\|_{2s,\gamma,T}^1 + \|V\|_{2s+2,\gamma,T} \\ & + |v|_{2s+1,\gamma,T} + |\psi|_{2s+2,\gamma,T} + K_0'(T)\, K_1(T) \Big\} \end{aligned} \tag{10.4.23}$$

où où $K_1(T)$ est défini en (10.4.12) *et*

$$K_0'(T) = \|\Psi\|_{1,T}^* + \|V\|_{0,T}^* + |\psi|_{1,T}^* + |v|_{0,T}^*. \tag{10.4.24}$$

Démonstration. — Étant donné que $w = (u, A, \mathcal{R}_T(c), \partial_y \Phi)$ et $A = W_a + \mathcal{R}_T(a - w_a)$, l'hypothèse (10.4.10) entraîne que $\|w\|_{0,T}^*$ est majoré par une constante qui ne dépend que de M_1. En appliquant le lemme 10.4.2 à l'équation (10.4.7), on obtient tout d'abord :

$$\begin{aligned} \gamma \|\Psi\|_{2s,\gamma,T} \leq C(M_1) \Big\{ & \|\mathcal{R}_T(H_1)\|_{2s,\gamma,T} + \|H_3\|_{2s,\gamma,T} + \|V\|_{2s,\gamma,T} \\ & + \|\Psi\|_{2s,\gamma,T} + |v|_{2s-1,\gamma,T} + |\psi|_{2s,\gamma,T} + K_0'(T)\, K_1(T) \Big\}. \end{aligned} \tag{10.4.25}$$

En dérivant ensuite l'équation (10.4.7), on voit que $\theta := \partial_y \Psi$ vérifie l'équation

$$\partial_t \theta + \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_j(w) \partial_j \theta + \Lambda_n(w) \frac{\partial_n u}{\partial_n \phi} \theta = F \tag{10.4.26}$$

avec

$$F = \partial_y \mathcal{R}_T(H_1) + \partial_y H_2 + \partial_y H_3 + \partial_y(\ell(w)) \partial_y' \Psi + \partial_y \Big(\Lambda_n(w) \frac{\partial_n u}{\partial_n \phi} \Big) \Psi \tag{10.4.27}$$

où ℓ désigne une fonction régulière de w. Le lemme 10.4.2 implique que

$$\begin{aligned}\gamma\|\partial_y\Psi\|_{2s,\gamma,T} \leq C(M_1)\Big\{&\|\partial_y\mathcal{R}_T(H_1)\|_{2s,\gamma,T} + \|\partial_y H_3\|_{2s,\gamma,T} + \|V\|_{2s+2,\gamma,T}\\ &+ \|\Psi\|^1_{2s,\gamma,T} + |v|_{2s+1,\gamma,T} + |\psi|_{2s+2,\gamma,T} + K_0'(T)\,K_1(T)\Big\}.\end{aligned}\tag{10.4.28}$$

Comme $H_1 = 0$ pour $t < T_2$, le corollaire 5.4.2 implique que

$$\|\partial_y\mathcal{R}_T(H_1)\|_{2s,\gamma,T} \leq C\,|H_1|_{2s,\gamma,T}.$$

On en déduit :

$$\|\mathcal{R}_T(H_1)\|^1_{2s,\gamma,T} \leq C\Big\{|v|_{2s,\gamma,T} + |\psi|_{2s+1,\gamma,T} + K_0'(T)\,K_1(T)\Big\}.\tag{10.4.29}$$

En sommant les inégalités (10.4.25) (10.4.28) et en tenant compte de (10.4.29), on obtient l'estimation (10.4.23). □

On introduit maintenant

$$\widetilde{v} = V + \Psi\,\frac{\partial_n u}{\partial_n \Phi}\tag{10.4.30}$$

de sorte que $\Gamma\widetilde{v} = v$.

Proposition 10.4.4. — *Il existe des constantes positives C_o, γ_o, M_1 et $T_1' \in\,]T_2, T_1]$ telles que pour tout (u,Φ) vérifiant* (10.4.4) *avec $T \in\,]T_2, T_1']$ ainsi que la condition* (10.4.10), *pour tout (V,ψ) solution de* (10.4.1)...(10.4.3), *pour tout Ψ solution de* (10.4.7) *vérifiant* (10.4.9), *on a pour tout $\gamma \geq \gamma_o$*

(10.4.31)

$$\begin{aligned}&\gamma\|\widetilde{v}\|_{2s,\gamma,T} + \gamma\|\Psi\|^1_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\Gamma\widetilde{v}|_{2s+2,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\Gamma\Psi|_{2s+3,\gamma,T}\\ &\qquad\leq C_o\Big\{\|F\|_{2s+2,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|G|_{2s+2,\gamma,T} + \|H_3\|^1_{2s,\gamma,T} + K_0(T)\,K_1(T)\Big\},\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}K_0(T) &= \|F\|^*_{2,T} + |G|^*_{0,T} + \|\widetilde{v}\|^*_{3,T} + \|\Psi\|^*_{3,T} + |\Gamma\Psi|^*_{1,T} + |\Gamma\widetilde{v}|^*_{0,T},\\ K_1(T) &= \|u\|_{2s+6,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s+6,\gamma,T}.\end{aligned}\tag{10.4.32}$$

Démonstration. — On écrit l'inégalité (10.4.11) avec s remplacé par $s+1$, puis on ajoute l'estimation (10.4.23). Pour γ assez grand, on obtient alors :

(10.4.33)

$$\begin{aligned}&\gamma\|V\|_{2s+2,\gamma,T} + \gamma\|\Psi\|^1_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\Gamma V|_{2s+2,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\Gamma\Psi|_{2s+3,\gamma,T} \leq\\ &\quad C\Big\{\|F\|_{2s+2,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|G|_{2s+2,\gamma,T} + \|H_3\|^1_{2s,\gamma,T} + |\Gamma\widetilde{v}|_{2s+1,\gamma,T} + K_0'(T)\,K_1(T)\Big\}\end{aligned}$$

où $K_1(T)$ est donné par (10.4.32) et

$$K_0'(T) = \|F\|^*_{2,T} + |G|^*_{0,T} + \|V\|^*_{3,T} + \|\Psi\|^*_{1,T} + |\Gamma\Psi|^*_{1,T} + |\Gamma\widetilde{v}|^*_{0,T}.\tag{10.4.34}$$

Par ailleurs, on a

(10.4.35)
$$\|\widetilde{v}\|_{2s,\gamma,T} \leq \|V\|_{2s,\gamma,T} + C\Big\{\|\Psi\|_{2s,\gamma,T} + K_0'(T)\{\|u\|_{2s+2,\gamma,T} + \|\Phi\|_{2s+2,\gamma,T}\}\Big\},$$

(10.4.36)
$$\begin{aligned}|\Gamma\widetilde{v}|_{2s+2,\gamma,T} \leq |\Gamma V|_{2s+2,\gamma,T} + C\Big\{&|\Gamma\Psi|_{2s+2,\gamma,T}\\ &+ K_0'(T)\{|\Gamma(\partial_n u)|_{2s+2,\gamma,T} + |\Gamma(\partial_n\Phi)|_{2s+2,\gamma,T}\}\Big\}.\end{aligned}$$

On voit alors que le membre de gauche de (10.4.31) est majoré par
$$C\Big\{\|F\|_{2s+2,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|G|_{2s+2,\gamma,T} + \|H_3\|^1_{2s,\gamma,T} + |\Gamma v|_{2s+1,\gamma,T} + K_0'(T)\,K_1(T)\Big\}.$$
Dans $K_0'(T)$ on majore le terme $\|V\|^*_{3,T}$ par :
$$\|V\|^*_{3,T} \leq \|\widetilde{v}\|^*_{3,T} + C\,\|\Psi\|^*_{3,T}.$$
Alors, en prenant γ assez grand, le terme $|\Gamma\widetilde{v}|_{2s+1,\gamma,T}$ situé à droite est absorbé par le membre de gauche et la proposition 10.4.4 en résulte. □

Nous appliquons les estimations ci-dessus aux fonctions données par le schéma itératif décrit au paragraphe 10.3. On note $\dot{U}_\nu = (\dot{u}_\nu, \dot{\Phi}_\nu, \Gamma\dot{u}_\nu, \dot{\phi}_\nu)$ et

(10.4.37)
$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T} = \|\dot{u}_\nu\|_{2s,T} + \|\dot{\Phi}_\nu\|^1_{2s,T} + |\Gamma\dot{u}_\nu|_{2s+2,T} + |\dot{\phi}_\nu|_{2s+3,T}$$

Proposition 10.4.5. — *Il existe des constantes positives C_o, M_1 et $T_1'' \in\,]T_2, T_1']$ telles que si, pour un $T \in\,]T_2, T_1'']$, $(\bar{u}_\nu, \bar{\Phi}_\nu)$ vérifie la condition :*

(10.4.38)
$$\|\bar{u}_\nu - u_0\|^*_{4,T} + \|\bar{\Phi}_\nu - \Phi_0\|^*_{4,T} \leq M_1$$

on a alors l'estimation :

(10.4.39)
$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T} \leq C_o\Big\{\|\dot{F}_\nu\|_{2s+2,T} + |\dot{G}_\nu|_{2s+2,T} + \|\dot{\beta}_\nu\|^1_{2s,T} + K_0(T)\,K_1(T)\Big\},$$

avec

(10.4.40)
$$\begin{cases} K_0(T) = \|\dot{F}_\nu\|^*_{2,T} + |\dot{G}_\nu|^*_{0,T} + \|\dot{u}_\nu\|^*_{3,T} + \|\dot{\Phi}_\nu\|^*_{3,T} + |\Gamma\dot{u}_\nu|^*_{0,T} + |\dot{\phi}_\nu|^*_{1,T},\\ K_1(T) = \|\bar{u}_\nu\|_{2s+6,\gamma,T} + \|\bar{\Phi}_\nu\|_{2s+6,\gamma,T}.\end{cases}$$

Démonstration. — La proposition 10.4.4 implique que pour $\gamma \geq \gamma_o$, on a

(10.4.41)
$$\begin{aligned}N(\dot{u}_\nu, \dot{\Phi}_\nu, \Gamma\dot{u}_\nu, \dot{\Phi}_\nu, \gamma, T) \leq C_o\Big\{&\|\dot{F}_\nu\|_{2s+2,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,|\dot{G}_\nu|_{2s+2,\gamma,T}\\ &+ \|\dot{\beta}_\nu\|^1_{2s,\gamma,T} + K_0(T)\,K_1(T)\Big\},\end{aligned}$$

où $K_0(T)$ et $K_1(T)$ sont donnés par (10.4.40). On fixe maintenant $\gamma = \gamma_o$ et $T_1'' = \inf(T_1', 1/\gamma_o)$. La proposition résulte alors de (10.4.41) et des estimations suivantes : il existe des constantes positives C_1 et C_2, indépendantes de γ et T telles que si $\gamma T \leq 1$, on a pour tout $u \in W_0^{2s}(\Omega_T)$ et tout $v \in H_0^s(\omega_T)$,
$$C_1\|u\|_{2s,T} \leq \|u\|_{2s,\gamma,T} \leq C_2\|u\|_{2s,T},$$
$$C_1|v|_{s,T} \leq |v|_{s,\gamma,T} \leq C_2|u|_{s,T}.$$
□

10.5. Hypothèse de récurrence

On se donne maintenant un entier pair, noté α, tel que $2s_0 < \alpha < 2s_1$ et un paramètre $\delta > 0$. Pour un entier $\nu \geq 1$ nous noterons (H_ν, T) l'hypothèse de récurrence suivante

$$\forall k \in \{0, \dots, \nu-1\},\ \forall s \in \{s_0, \dots, s_1\},\quad \|\dot{U}_k\|_{2s,T} \leq \delta\, \theta_k^{2s-\alpha-1}, \tag{10.5.1}$$

$$\forall k \in \{0, \dots, \nu-1\},\ \forall s \in \{s_0, \dots, s_1 - 1\},\quad \|\mathcal{L}(u_k, \nabla\Phi_k)u_k - f\|_{2s,T} \leq \theta_k^{2s-\alpha+1}. \tag{10.5.2}$$

Rappelons que $\theta_k = (\theta_0^2 + k)^{1/2}$. L'hypothèse de récurrence fait intervenir quatre paramètres : δ, θ_0, α et T. Le paramètre δ sera fixé en premier et les trois autres seront fixés au paragraphe 10.7.

Dans ce paragraphe, on compare les suites u_k, Φ_k, à leurs régularisées $\bar{u}_k$, $\bar{\Phi}_k$.

Lemme 10.5.1. — *Pour α entier pair tel que $2s_0 < \alpha < 2s_1$ et sous l'hypothèse de récurrence (H_ν, T), on a pour $0 \leq k \leq \nu$ les estimations suivantes :*

$$\|U_k - u_0\|_{2s,T} \leq \delta \qquad \textit{pour} \quad s_0 \leq s \leq (\alpha-2)/2, \tag{10.5.3}$$

$$\|U_k - u_0\|_{\alpha+2,T} \leq \delta\, \theta_k^2, \tag{10.5.4}$$

$$\|U_k - u_0\|_{2s,T} \leq \delta\, \theta_k^{(2s-\alpha)_+ + 1} \qquad \textit{pour} \quad s_0 \leq s \leq s_1, \tag{10.5.5}$$

$$\|U_k - u_0\|_{2s,T} \leq \delta\ \theta_k^{2s-\alpha} \qquad \textit{pour} \quad (\alpha+2)/2 \leq s \leq s_1. \tag{10.5.6}$$

Démonstration. — (*cf.* [Al]). On décompose $U_k - u_0$ sous la forme :

$$U_k - u_0 = \sum_{p=0}^{k-1} U_{p+1} - U_p = \sum_{p=0}^{k-1} \Delta_p \dot{U}_p. \tag{10.5.7}$$

Avec (10.5.1), on obtient :

$$\|U_k - u_0\|_{2s,T} \leq \delta \sum_{p=0}^{k-1} (\theta_{p+1} - \theta_p)\, \theta_p^{2s-\alpha-1} \tag{10.5.8}$$

et le lemme en résulte. □

Corollaire 10.5.2. — *Pour α entier pair tel que $2s_0 < \alpha < 2s_1$ et sous l'hypothèse de récurrence (H_ν, T), on a pour $0 \leq k \leq \nu$ les estimations suivantes :*

$$\|u_k - \bar{u}_k\|_{2s,T} \leq C\,\delta\, \theta_k^{2s-\alpha} \qquad \forall s \in \{s_0, \dots, s_1\}, \tag{10.5.9}$$

$$\|\Phi_k - \bar{\Phi}_k\|_{2s,T} \leq C\,\delta\, \theta_k^{2s-\alpha} \qquad \forall s \in \{s_0, \dots, s_1\}, \tag{10.5.10}$$

$$\|\Phi_k - \bar{\Phi}_k\|^1_{2s,T} \leq C\,\delta\, \theta_k^{2s+2-\alpha} \qquad \forall s \in \{s_0, \dots, s_1\}, \tag{10.5.11}$$

$$|\Gamma u_k - \overline{\Gamma u_k}|_{2s,T} \leq C\,\delta\, \theta_k^{2s+2-\alpha} \qquad \forall s \in \{s_0, \dots, s_1 + 1\}, \tag{10.5.12}$$

$$|\phi_k - \bar{\phi}_k|_{2s,T} \leq C\,\delta\, \theta_k^{2s+2-\alpha} \qquad \forall s \in \{s_0, \dots, s_1 + 1\}, \tag{10.5.13}$$

$$|\partial_y \phi_k - \partial_y \bar{\phi}_k|_{2s,T} \leq C\,\delta\, \theta_k^{2s+2-\alpha} \qquad \forall s \in \{s_0, \dots, s_1 + 1\}. \tag{10.5.14}$$

Démonstration. — On écrit $u_k - \bar{u}_k$ sous la forme : $u_k - \bar{u}_k = u_k - u_0 - S_k^1(u_k - u_0)$. La proposition 10.2.1 et (10.5.6), donnent alors l'estimation

$$\|u_k - \bar{u}_k\|_{2s,T} \leq C\,\theta_k^{2s-2s_1}\|u_k - u_0\|_{2s_1,T} \leq C\,\theta_k^{2s_1-\alpha},$$

ce qui prouve (10.5.9). Les autres estimations se démontrent de façon analogue. □

Le paramètre δ est maintenant fixé par le résultat suivant, où les constantes M_1 et T_1'' sont données par la proposition 10.4.5.

Lemme 10.5.3. — *Il existe $\delta > 0$ tel que si $2s_0 + 10 \leq \alpha \leq 2s_1 - 2$ et si (H_ν, T) est vérifiée pour un $T \in\,]T_2, T_1'']$, alors $(\bar{u}_\nu, \bar{\Phi}_\nu)$ vérifie la condition* (10.4.38), *c'est-à-dire :*

$$\|\bar{u}_\nu - u_0\|_{4,T}^* + \|\bar{\Phi}_\nu - \Phi_0\|_{4,T}^* \leq M_1.$$

Démonstration. — En remarquant que $2s_0 + 8 > n/2 + 10$, on déduit du lemme 4.2.2 appliqué avec $\gamma = 1$ et $k = 4$ que

(10.5.15) $$\|\bar{u}_\nu - u_0\|_{4,T}^* + \|\bar{\Phi}_\nu - \Phi_0\|_{4,T}^* \leq C_1\,T\,\{\|\bar{u}_\nu - u_0\|_{2s_0+8,T} + \|\bar{\Phi}_\nu - \Phi_0\|_{2s_0+8,T}\}$$

Ensuite, d'après (10.2.3) et (10.3.10), on a

(10.5.16) $$\|\bar{u}_\nu - u_0\|_{2s_0+8,T} \leq C\,\|u_\nu - u_0\|_{2s_0+8,T}$$

Par hypothèse, on a $2s_0 + 8 \leq \alpha - 2$ et il résulte de (10.5.3) que

(10.5.17) $$\|u_\nu - u_0\|_{2s_0+8,T} \leq \delta.$$

On procède de même pour Φ_ν et on voit qu'il existe une constante C_2 telle que :

(10.5.18) $$\|\bar{u}_\nu - u_0\|_{4,T}^* + \|\bar{\Phi}_\nu - \Phi_0\|_{4,T}^* \leq C_2 T\,\delta.$$

On choisit alors δ tel que :

(10.5.19) $$C_2 T_1''\,\delta = M_1$$

et le lemme suit. □

Dans toute la suite, le paramètre δ est fixé par (10.5.19). Au paragraphe suivant nous donnons des estimations pour les termes d'erreur et pour les termes $\dot{F}_\nu$, $\dot{G}_\nu$ et $\dot{\beta}_\nu$. On déduit alors de la proposition 10.4.5 une nouvelle estimation de $\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T}$. Enfin, au paragraphe 10.7 nous fixerons les autres paramètres θ_0, α et T de sorte que (H_ν, T) implique $(H_{\nu+1}, T)$ et que (H_1, T) soit vraie.

Remarque 10.5.4. — Pour démontrer $(H_{\nu+1}, T)$ on utilise l'estimation (10.4.39) pour tout les entiers $s \in \{s_0, \ldots, s_1\}$. Cette estimation fait intervenir l'expression $K_1(T) = \|\bar{u}_\nu\|_{2s+6,T} + \|\bar{\Phi}_\nu\|_{2s+6,T}$ située dans le membre de droite. Il est donc nécessaire que les termes régularisés $\bar{u}_\nu$, $\bar{\Phi}_\nu$ définis par (10.3.10) soient de régularité $2s_1 + 6$. C'est pourquoi nous avons supposé au paragraphe 10.1 que u_0' et Φ_0' sont dans $W^{2s_1+6}(\Omega_{T_1})$.

10.6. Estimations de $\dot{F}_\nu$, $\dot{G}_\nu$ et $\dot{\beta}_\nu$

Dans ce paragraphe, nous supposerons que $T \in]T_2, T_1'']$ et que (H_ν, T) est vraie.

a) Estimation de $\|\dot{F}_\nu\|_{2s+2,T}$. — On déduit de (10.3.21) et (10.3.22) les formules suivantes

$$F_0 = S_0^1(F), \qquad F_1 = S_1^1(F) - S_1^1(\varepsilon_o^1) - S_0^1(F) \tag{10.6.1}$$

et pour $k \geq 2$

$$\dot{F}_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\Big[\frac{1}{\Delta_{k-1}}(S_k^1 - S_{k-1}^1)(F) - \frac{1}{\Delta_{k-1}}(S_k^1 - S_{k-1}^1)(E_{k-1}^1) - S_k^1(\dot{\varepsilon}_{k-1}^1)\Big]. \tag{10.6.2}$$

Le terme ε_k^1 est défini par (10.3.18).

En faisant intervenir le linéarisé complet $\mathcal{L}^2(u, \nabla\Phi)(v, \psi)$, nous écrivons, comme dans [Al], $\varepsilon_k^1 = (\varepsilon_k^1)' + (\varepsilon_k^1)''$, avec

$$\begin{cases} (\varepsilon_k^1)' = \mathcal{L}(u_{k+1}, \nabla\Phi_{k+1})u_{k+1} - \mathcal{L}(u_k, \nabla\Phi_k)u_k - \mathcal{L}^2(\bar{u}_k, \nabla\bar{\Phi}_k)(\Delta_k\dot{u}_k, \Delta_k\dot{\Phi}_k), \\ (\varepsilon_k^1)'' = (\Delta_k\dot{\Phi}_k)\,(\partial_n\bar{\Phi}_k)^{-1}\,\partial_n(\mathcal{L}(\bar{u}_k, \nabla\bar{\Phi}_k)\bar{u}_k). \end{cases}$$

En outre, $(\varepsilon_k^1)' = \varepsilon_{k,1}^1 + \varepsilon_{k,2}^1$ où $\varepsilon_{k,1}^1$ est l'erreur de substitution et $\varepsilon_{k,2}^1$ l'erreur quadratique habituelle du schéma de Newton :

$$\begin{cases} \varepsilon_{k,1}^1 = \Big[\mathcal{L}^2(u_k, \nabla\Phi_k) - \mathcal{L}^2(\bar{u}_k, \nabla\bar{\Phi}_k)\Big](\Delta_k\dot{u}_k, \Delta_k\dot{\Phi}_k), \\ \varepsilon_{k,1}^1 = \mathcal{L}(u_{k+1}, \nabla\Phi_{k+1})u_{k+1} - \mathcal{L}(u_k, \nabla\Phi_k)u_k - \mathcal{L}^2(u_k, \nabla\Phi_k)(\Delta_k\dot{u}_k, \Delta_k\dot{\Phi}_k). \end{cases}$$

En procédant exactement comme dans [Al], c'est à dire en estimant successivement $\varepsilon_{k,1}^1$, $\varepsilon_{k,2}^1$, $(\varepsilon_k^1)''$ à l'aide de la proposition 10.2.1, du lemme 10.5.1 et du corollaire 10.5.2, on obtient l'estimation suivante.

Proposition 10.6.1. — *Pour α entier pair tel que $2s_0 + 10 \leq \alpha \leq 2s_1 - 2$, on a, pour tout $k \in \{0, \dots, \nu - 1\}$ et pour tout $s \in \{s_0, \dots, s_1 - 1\}$,*

$$\|\varepsilon_k^1\|_{2s,T} \leq C\,\delta\,\Delta_k\,\theta_k^{2s_0+2s+5-2\alpha}. \tag{10.6.3}$$

Nous allons maintenant démontrer :

Proposition 10.6.2. — *Pour α entier pair tel que*

$$2s_0 + 10 \leq \alpha \leq \min\{2s_1 - 2, s_0 + s_1 + 1\},$$

on a pour tout $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$,

$$\|\dot{F}_\nu\|_{2s+2,T} \leq C\Big\{\theta_\nu^{2s+1-2s_1}\|F\|_{2s_1,T} + \delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s+7-2\alpha}\Big\}. \tag{10.6.4}$$

Démonstration. — Pour $s \in \{s_0, \dots, s_1 - 1\}$, (10.6.3) et la proposition 10.2.1 impliquent que

$$\|S_\nu^1(\varepsilon_\nu^1)\|_{2s+2,T} \leq C\,\delta\,\Delta_\nu\;\theta_\nu^{2s_0+2s+7-2\alpha}. \tag{10.6.5}$$

En prenant α tel que $\alpha \leq s_0 + s_1 + 1$, on obtient ensuite

$$\|E^1_{\nu-1}\|_{2s_1-2,T} \leq C\,\delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s_1+4-2\alpha}. \tag{10.6.7}$$

En utilisant la proposition 10.2.1, on en déduit que pour tout $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$

$$\Big\|\frac{1}{\Delta_{\nu-1}}(S^1_\nu - S^1_{\nu-1})(E^1_{\nu-1})\Big\|_{2s+2,T} \leq C\,\delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s+7-2\alpha}. \tag{10.6.8}$$

Pour $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$, on obtient de même :

$$\Big\|\frac{1}{\Delta_{\nu-1}}(S^1_\nu - S^1_{\nu-1})(F)\Big\|_{2s+2,T} \leq C\,\|F\|_{2s_1,T}\,\theta_\nu^{2s+1-2s_1}. \tag{10.6.9}$$

L'estimation (10.6.4) résulte alors de (10.6.2) et des estimations ci-dessus. □

b) Estimation de $|\dot G_\nu|_{2s+2,T}$. — On procède exactement comme ci dessus et on aboutit aux estimations suivantes.

Proposition 10.6.3. — *i) Pour α entier pair tel que $2s_0 + 10 \leq \alpha \leq 2s_1 - 2$, on a pour $k \in \{0, \dots, \nu - 1\}$ et $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$,*

$$|\varepsilon^2_k|_{2s,T} \leq C\,\delta\,\Delta_k\;\theta_k^{2s_0+2s+2-2\alpha} \tag{10.6.10}$$

ii) Pour α entier pair tel que $2s_0 + 10 \leq \alpha \leq \min\{2s_1 - 2, s_0 + s_1 + 1\}$, on a pour $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$,

$$|\dot G_\nu|_{2s+2,T} \leq C\Big\{\theta_\nu^{2s+1-2s_1}|G|_{2s_1,T} + \delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s+4-2\alpha}\Big\}. \tag{10.6.11}$$

c) Estimation de $\|\dot\beta_\nu\|^1_{2s,T}$. — On estime d'abord les erreurs ε^3_k et ε^4_k.

Lemme 10.6.4. — *Pour α entier pair tel que $2s_0+10 \leq \alpha \leq 2s_1-2$, $k \in \{0, \dots, \nu-1\}$ et $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$, on a les estimations*

$$\|\varepsilon^4_k\|_{2s,T} \leq C\,\delta\,\Delta_k\;\theta_k^{2s_0+2s+4-2\alpha}, \tag{10.6.12}$$

$$|\varepsilon^3_k|_{2s,T} \leq C\,\delta\,\Delta_k\;\theta_k^{2s_0+2s+2-2\alpha}. \tag{10.6.13}$$

Démonstration. — Le terme ε^4_k est défini par (10.3.44) et s'écrit sous la forme $\varepsilon^4_k = \varepsilon^4_{k,1} + \varepsilon^4_{k,2}$ avec

$$\begin{cases} \varepsilon^4_{k,1} = (h_2(w_k) - h_2(\bar w_k))(\Delta_k \dot w_k), \\ \varepsilon^4_{k,2} = h_*(w_{k+1}) - h_*(w_k) - h_2(w_k)(\Delta_k \dot w_k). \end{cases}$$

Nous remarquons ensuite que $\varepsilon^4_{k,1}$ est une somme de termes de la forme :

$$A = \Delta_k\,\ell(w_k, w_k - \bar w_k)\cdot(w_k - \bar w_k).\dot w_k \tag{10.6.14}$$

où

$$\begin{aligned} w_k &= (u_k, A_k, \mathcal R_T(c_k), \partial_y\Phi_k) &&\text{avec}\quad A_k = W_a + \mathcal R_T(a_k - w_a)\\ \bar w_k &= (\bar u_k, \bar A_k, \mathcal R_T(\bar c_k), \partial_y\bar\Phi_k) &&\text{avec}\quad \bar A_k = W_a + \mathcal R_T(\bar a_k - w_a)\\ \dot w_k &= (\dot u_k, \mathcal R_T(\dot a_k), \mathcal R_T(\dot c_k), \partial_y\dot\Phi_k) \end{aligned}$$

Le terme $\varepsilon^4_{k,2}$ est une somme de termes de la forme :

$$B = \Delta_k\, \ell(w_k, w_k - \bar{w}_k) \cdot (\Delta_k \dot{w}_k).\dot{w}_k \tag{10.6.15}$$

On obtient (10.6.12) en majorant les termes A et B ci-dessus en utilisant pour $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$, les majorations suivantes qui résultent de la proposition 10.2.1, du lemme 10.5.1 et du corollaire 10.5.2 :

$$\begin{aligned}
&\|w_k - \bar{w}_k\|_{2s,T} \le C\,\delta\,\theta_k^{2s+3-\alpha},\\
&\|\dot{w}_k\|_{2s,T} \le C\,\delta\,\theta_k^{2s-\alpha},\\
&\|w_k\|_{2s,T} \le C_1 + C_2\,\delta\,\theta_k^{(2s-\alpha)_+ +1}.
\end{aligned}$$

Le terme ε^3_k défini par :

$$\varepsilon^3_k = h(\Gamma u_{k+1}, \partial_y \phi_{k+1}) - h(\Gamma u_k, \partial_y \phi_k) - h_1(\Gamma \overline{u}_k, \partial_y \overline{\phi_k})(\Delta_k \Gamma \dot{u}_k, \Delta_k \partial_y \dot{\phi}_k)$$

est de la même forme que ε^2_k et (10.6.13) s'obtient de façon similaire. □

Nous estimons maintenant les $\dot{\beta}_\nu = \beta_\nu / \Delta_\nu$ donnés par (10.3.51).

Proposition 10.6.5. — *Pour α entier pair tel que*

$$2s_0 + 10 \le \alpha \le \min\{2s_1 - 2, s_0 + s_1 + 1\},$$

pour tout $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$ et pour tout ν, on a l'estimation

$$\|\dot{\beta}_\nu\|^1_{2s,T} \le C\Big\{\theta_\nu^{2s-2s_1} \|\widetilde{H}\|_{2s_1,T} + \delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s+5-2\alpha}\Big\}. \tag{10.6.16}$$

Démonstration. — On déduit de (10.3.51), les formules suivantes

$$\beta_0 = 0, \qquad \beta_1 = S^3_1(\widetilde{H}) - S^3_1(E^4_1 - \mathcal{R}_T(E^3_1)), \tag{10.6.17}$$

et pour $k \ge 2$

(10.6.18)

$$\beta_k = (S^3_k - S^3_{k-1})(\widetilde{H}) - (S^3_k - S^3_{k-1})(E^4_{k-1} - \mathcal{R}_T(E^3_{k-1})) - S^3_k(\varepsilon^4_{k-1} - \mathcal{R}_T(\varepsilon^3_{k-1})).$$

On déduit des inégalités (10.6.12) (10.6.13) et du lemme 10.2.3 que

$$\begin{cases}
\|S^3_k(\varepsilon^4_{k-1})\|^1_{2s,T} \le C\,\delta\,\Delta_k\ \theta_k^{2s_0+2s+5-2\alpha},\\
\|S^3_k(\mathcal{R}_T(\varepsilon^3_{k-1}))\|^1_{2s,T} \le C\,\delta\,\Delta_k\ \theta_k^{2s_0+2s+3-2\alpha},
\end{cases} \tag{10.6.19}$$

ce qui permet d'estimer le dernier terme de (10.6.18). On a de même

$$\begin{aligned}
&\|E^4_{k-1}\|_{2s_1,T} \le C\,\delta\,\theta_{k-1}^{2s_0+2s_1+5-2\alpha},\\
&|E^3_{k-1}|_{2s_1-1,T} \le C\,\delta\,\theta_{k-1}^{2s_0+2s_1+3-2\alpha},\\
&\|\mathcal{R}_T(E^3_{k-1})\|_{2s_1,T} \le C\,\delta\,\theta_{k-1}^{2s_0+2s_1+3-2\alpha}.
\end{aligned} \tag{10.6.20}$$

Pour estimer $(S^3_k - S^3_{k-1})(E^4_{k-1} - \mathcal{R}_T(E^3_{k-1}))$ nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 10.6.6. — *Pour tout $u \in W_0^{2s_1}(\Omega_T)$ et pour tout $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$, on a l'estimation*

(10.6.21) $$\|(S_k^3 - S_{k-1}^3)u\|_{2s,T}^1 \leq C\,\Delta_{k-1}\,\theta_k^{2s-2s_1}\,\|u\|_{2s_1,T}$$

Avec (10.6.20), ce lemme implique que

$$\Big\|\frac{1}{\Delta_{k-1}}(S_k^3 - S_{k-1}^3)(E_{k-1}^4 - \mathcal{R}_T(E_{k-1}^3))\Big\|_{2s,T}^1 \leq C\,\delta\,\theta_k^{2s_0+2s+5-2\alpha}.$$

Le lemme 10.6.6 implique aussi que

$$\Big\|\frac{1}{\Delta_{k-1}}(S_k^3 - S_{k-1}^3)(\widetilde{H})\Big\|_{2s,T}^1 \leq C\,\theta_k^{2s-2s_1}\,\|\widetilde{H}\|_{2s_1,T}$$

En reportant ces estimations dans la formule (10.6.18) on obtient l'estimation (10.6.16). □

Démonstration du lemme 10.6.2. — On estime d'abord le terme

$$I = \|\partial_y(S_k^3 - S_{k-1}^3)u\|_{2s,T}$$

qui est la somme des termes

$$J = \|\partial_y\partial_y^\alpha\delta_n^p\partial_n^q(S_k^3 - S_{k-1}^3)u\|_{0,T} \qquad \text{avec } \alpha + p + 2q \leq 2s.$$

On a alors

$$J \leq \|(S_k^3 - S_{k-1}^3)\delta_n^p\partial_n^q u\|_{|\alpha|+1,T}^{tg}.$$

D'après la proposition 10.2.1, on a

$$\Big\|\frac{d}{d\theta}S_\theta^3(\delta_n^p\partial_n^q u)\Big\|_{|\alpha|+1,T}^{tg} \leq C\,\theta^{2s-2s_1}\,\|u\|_{2s_1,T}.$$

En intégrant sur l'intervalle $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ on obtient :

$$J \leq C\,\Delta_{k-1}\,\theta_k^{2s-2s_1}\,\|u\|_{2s_1,T}.$$

En procédant de même on voit que le terme $\|(S_k^3 - S_{k-1}^3)u\|_{2s,T}$ vérifie la même estimation, et le lemme suit. □

10.7. Preuve du théorème 10.1.1

Nous combinons d'abord les estimations des paragraphes 10.5 et 10.6. On note

(10.7.1) $$A(T) = \|F\|_{2s_1,T} + |G|_{2s_1,T} + \|\widetilde{H}\|_{2s_1,T}.$$

On rappelle le choix $s_1 = s_0 + 16$ fait en (10.1.2) et on choisit maintenant

(10.7.2) $$\alpha = 2s_0 + 16 = s_0 + s_1.$$

Proposition 10.7.1. — *Il existe des constantes positives C_o et $T_3 \in]T_2, T_1'']$ telles que, sous l'hypothèse de récurrence (H_ν, T) avec $T \in]T_2, T_3]$, on a les estimations :*

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T} \le C_o\,\theta_0^{-1}\,\{A(T_3)+1\}\,\theta_\nu^{2s-\alpha-1}, \quad s \in \{s_0,\dots,s_1\}, \tag{10.7.3}$$

$$\|\mathcal{L}(u_\nu, \nabla\Phi_\nu)u_\nu - f\|_{2s,T} \le C_o\,\theta_0^{-1}\,\{2+\|F\|_{2s_1,T_3}\}\,\theta_\nu^{2s-\alpha+1}, \quad s \in \{s_0,\dots,s_1+1\}. \tag{10.7.4}$$

Démonstration. — **a)** On note

$$\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s,T} = \|\dot{F}_\nu\|_{2s+2,T} + |\dot{G}_\nu|_{2s+2,T} + \|\dot{\beta}_\nu\|^1_{2s,T}, \tag{10.7.5}$$

quantité qui, d'après les estimations précédentes, est bien définie pour tout $s \in \{s_0,\dots,s_1\}$. D'après le lemme 10.5.3, la condition (10.4.38) est réalisée et il est donc possible d'appliquer la proposition 10.4.5. Pour tout $s \in \{s_0,\dots,s_1\}$, on a donc

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T} \le C_1\Big\{\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s,T} + K_0(T)\,K_1(T)\Big\}, \tag{10.7.6}$$

où $K_0(T)$ est donné par (10.4.40) et

$$K_1(T) = \|\bar{u}_\nu\|_{2s+6,T} + \|\bar{\Phi}_\nu\|_{2s+6,T}. \tag{10.7.7}$$

Le lemme 4.2.2 donne ensuite

$$K_0(T) \le C_2\,T\,\Big\{\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+2,T} + \|\dot{U}_\nu\|_{2s_0+6,T}\Big\}. \tag{10.7.8}$$

On évalue le terme $\|\dot{U}_\nu\|_{2s_0+6,T}$ en utilisant à nouveau (10.7.6) :

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s_0+6,T} \le C_1\Big\{\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+6,T} + K_0(T)\,K_1'(T)\Big\}, \tag{10.7.9}$$

où l'on a posé : $K_1'(T) = \|\bar{u}_\nu\|_{2s_0+12,T} + \|\bar{\Phi}_\nu\|_{2s_0+12,T}$. Comme $2s_0+14 \le \alpha \le 2s_1-2$, le lemme 10.5.1 implique que $K_1'(T) \le C_3 + C_4\,\delta \le C_3 + C_4$. On en déduit que

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s_0+6,T} \le C_1'\Big\{\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+6,T} + K_0(T)\Big\}. \tag{10.7.10}$$

En reportant ensuite l'estimation (10.7.8) dans (10.7.10), on obtient

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s_0+6,T} \le C_1'\Big\{\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+6,T} + C_2T\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+6,T} + C_2T\|\dot{U}_\nu\|_{2s_0+6,T}.\Big\}$$

On choisit maintenant $T_3 \in]T_2, T_1'']$ tel que :

$$C_1'C_2T_3 \le 1/2. \tag{10.7.11}$$

On voit qu'il existe une constante C_5 telle que si $T \in]T_2, T_3]$, on a

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s_0+6,T} \le C_5\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+6,T}.$$

En revenant à (10.7.8), on obtient :

$$K_0(T) \le C_6\,T\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+6,T},$$

et en reportant cette estimation dans (10.7.10), on obtient

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T} \le C_o\Big\{\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s,T} + T\,K_1(T)\,\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s_0+6,T}\Big\}, \tag{10.7.12}$$

b) Les propositions 10.6.2, 10.6.3 et 10.6.5 donnent l'estimation :

$$\|\dot{\mathcal{F}}_\nu\|_{2s,T} \leq C\Big\{A(T)\,\theta_\nu^{2s+1-2s_1} + \delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s+7-2\alpha}\Big\}. \tag{10.7.13}$$

On majore ensuite $K_1(T)$ donné par (10.7.7) en utilisant la proposition 10.2.1 et le lemme 10.5.1. Il vient

$$K_1(T) \leq C\,\{1 + \delta\,\theta_\nu^{(2s+6-\alpha)_+ +1}\} \qquad \text{pour } \; s_0 \leq s \leq s_1. \tag{10.7.14}$$

En reportant les estimations (10.7.13) (10.7.14) dans (10.7.12) on obtient

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T} \leq C\Big\{A(T)\,\theta_\nu^{2s+8-2s_1} + \delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s+14-2\alpha}\Big\}. \tag{10.7.15}$$

Puis en remarquant que $\theta_0 \leq \theta_\nu$, on a :

$$\|\dot{U}_\nu\|_{2s,T} \leq C\,\theta_0^{-1}\Big\{A(T)\,\theta_\nu^{2s+9-2s_1} + \delta\,\theta_\nu^{2s_0+2s+15-2\alpha}\Big\}. \tag{10.7.16}$$

Le choix de α fait en (10.7.2), implique que

$$2s + 9 - 2s_1 \leq 2s - \alpha - 1 \quad \text{et} \quad 2s_0 + 2s + 15 - 2\alpha \leq 2s - \alpha - 1, \tag{10.7.17}$$

et (10.7.3) en résulte.

c) En sommant les égalités (10.3.18) pour $0 \leq k \leq \nu - 1$ et en tenant compte des équations (10.3.15), on obtient :

$$\mathcal{L}(u_\nu, \nabla\Phi_\nu)u_\nu = \mathcal{L}(u_0, \nabla\Phi_0)u_0 + \sum_{k=0}^{\nu-1} F_k + E_\nu^1.$$

Avec (10.3.22), on en déduit que

$$\mathcal{L}(u_1, \nabla\Phi_1)u_1 - f = S_0^1(F) - F + \varepsilon_0^1, \tag{10.7.18}$$

et pour $\nu \geq 2$,

$$\mathcal{L}(u_\nu, \nabla\Phi_\nu)u_\nu - f = (S_{\nu-1}^1(F) - F) + (E_{\nu-1}^1 - S_{\nu-1}^1(E_{\nu-1}^1)) + \varepsilon_{\nu-1}^1. \tag{10.7.19}$$

On majore chaque terme du second membre de (10.7.19). Pour $s \in \{s_0, \dots, s_1\}$, on a

$$\|S_{\nu-1}^1(F) - F\|_{2s,T} \leq C\,\theta_{\nu-1}^{2s-2s_1}\,\|F\|_{2s,T}.$$

D'après la proposition 10.6.1 et l'estimation (10.6.7), on a pour $s \in \{s_0, \dots, s_1 - 1\}$,

$$\|\varepsilon_{\nu-1}^1\|_{2s,T} \leq C\,\delta\,\Delta_{\nu-1}\,\theta_{\nu-1}^{2s_0+2s+5-2\alpha},$$
$$\|E_{\nu-1}^1 - S_{\nu-1}^1(E_{\nu-1}^1)\|_{2s,T} \leq C\delta\,\theta_{\nu-1}^{2s_0+2s+6-2\alpha}.$$

On en déduit que pour $s \in \{s_0, \dots, s_1 - 1\}$,

$$\|\mathcal{L}(u_\nu, \nabla\Phi_\nu)u_\nu - f\|_{2s,T} \leq C_o\,\theta_0^{-1}\,\{\theta_{\nu-1}^{2s+1-2s_1}\|F\|_{2s_1,T} + \theta_{\nu-1}^{2s_0+2s+6-2\alpha} + \theta_{\nu-1}^{2s_0+2s+7-2\alpha}\}.$$

La condition (10.7.2) sur α implique que les trois exposants $2s+1-2s_1$, $2s_0+2s+6-2\alpha$ et $2s_0 + 2s + 7 - 2\alpha$ sont tous majorés par $2s - \alpha + 1$ et l'estimation (10.7.4) en résulte. □

Le paramètre δ ayant été choisi au paragraphe 10.5, α étant donné par (10.7.2), C_o et T_3 étant donnés par la proposition 10.7.1, on choisit θ_0 tel que

$$\theta_0 \geq \max\Big\{1,\, \delta^{-1}C_o(A(T_3)+1),\, C_o(2+\|F\|_{2s_1,T_3})\Big\}. \tag{10.7.20}$$

Pour ces choix, la proposition 10.7.1 dit que pour $T \in [T_2, T_3]$, l'hypothèse de récurrence (H_ν, T) implique $(H_{\nu+1}, T)$. Il reste à initialiser la récurrence. Étant donné que $\dot{U}_0$ et $F = \mathcal{L}(u_0, \nabla\Phi_0)u_0 - f$ sont nuls pour $t \leq T_2$, on a :

$$\lim_{T\to T_2^+} \{\|\dot{U}_0\|_{2s_1,T} + \|F\|_{2s_1-2,T}\} = 0.$$

On choisit alors $T \in]T_2, T_3]$ tel que :

$$\|\dot{U}_0\|_{2s_1,T} \leq \delta\,\theta_0^{2s_0-\alpha-1} \qquad \text{et} \qquad \|F\|_{2s_1-2,T_3'} \leq \theta_0^{2s_0-\alpha+1}. \tag{10.7.21}$$

On voit alors que (H_1, T) est réalisée et donc (H_ν, T) est vraie pour tout $\nu \geq 1$. Dans la suite de ce paragraphe, les paramètres sont fixés comme indiqué ci-dessus.

Remarque 10.7.2. — Ce sont les conditions (10.7.17) qui conduisent à la condition (10.1.2) et au choix (10.7.2) de α. On doit en effet d'abord fixer s_1 suffisamment grand pour avoir :

$$2s_0 + 16 \leq 2s_1 - 10 \quad \text{et} \quad 2s_0 + 16 \leq s_0 + s_1 + 1.$$

Cela revient à supposer $s_1 \geq s_0 + 15$ et alors on a

$$2s_0 + 16 \leq s_0 + s_1 + 1 \leq 2s_1 - 10.$$

On peut donc choisir $\alpha = s_0 + s_1 + 1$ si $s_0 + s_1 + 1$ est pair et $\alpha = s_0 + s_1$ si $s_0 + s_1$ est pair. La condition $\alpha \geq 2s_0 + 16$ est réalisée si $s_1 \geq s_0 + 16$. Ceci explique le choix $s_1 = s_0 + 16$ fait initialement, ainsi que le choix de α.

Fin de la démonstration du théorème 10.1.1. — Avec $s_2 = (\alpha - 2)/2$, la condition (H_ν, T) implique que

$$\|U_{\nu+1} - U_\nu\|_{2s_2,T} \leq \delta\,\Delta_\nu\,\theta_\nu^{-2}$$

et la série de terme général $U_{\nu+1} - U_\nu$ est normalement convergente au sens de la norme :

$$\|U\|_{2s_2,T} = \|u\|_{2s_2,T} + \|\Phi\|^1_{2s_2,T} + |\Gamma u|_{2s_2+2,T} + |\phi|_{2s_2+3,T}.$$

On en déduit que les suites u_ν, Φ_ν, Γu_ν, ϕ_ν convergent respectivement vers u, Φ, Γu, ϕ dans les espaces $W^{2s_2}(\Omega_T)$, $W_1^{2s_2}(\Omega_T)$, $H^{2s_2+2}(\omega_T)$ et $H^{2s_2+3}(\omega_T)$. Il reste à démontrer que (u, Φ) est bien solution du problème (10.1.16)… (10.1.20).

Tout d'abord, il est clair que (u, Φ) prolonge (u_1, Φ_1). D'autre part, pour tout $\nu \geq 1$ et $s \leq (\alpha - 2)/2$, on a

$$\|\mathcal{L}(u_\nu, \nabla\Phi_\nu)u_\nu - f\|_{2s-2,T} \leq \theta_\nu^{2s-\alpha+1}.$$

Il en résulte immédiatement :

$$\mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u = f \qquad \text{sur } \Omega_T. \tag{10.7.22}$$

On a ensuite sur $\{x_n = 0\}$:

$$g(\Gamma u_{\nu+1}, \partial_y \phi_{\nu+1}) = g(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0) + S^2_\nu(G) + (E^2_\nu - S^2_\nu(E^2_\nu)) + \varepsilon^2_\nu.$$

Comme $g(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0) + G = 0$, on obtient en passant à la limite

$$g(\Gamma u, \partial_y \phi) = 0 \qquad \text{sur } \omega_T. \tag{10.7.23}$$

Le point délicat consiste à prouver que (u, Φ) vérifie les équations (3.2.6) (3.2.7). Nous remarquons d'abord que d'après le lemme 10.5.3, on a pour tout ν

$$\|\bar{u}_\nu - u_0\|^*_{4,T} + \|\bar{\Phi}_\nu - \Phi_0\|^*_{4,T} \leq M_1,$$

d'où

$$\|u - u_0\|^*_{4,T} + \|\Phi - \Phi_0\|^*_{4,T} \leq M_1. \tag{10.7.24}$$

Par hypothèse, on a $M^\infty(u, \Phi, T_2) = M^\infty(u_0, \Phi_0, T_2) \leq M_o + H/2$. Il résulte alors de la proposition 8.4.1 que

$$M^\infty(u, \Phi, T_3) \leq M_o + H. \tag{10.7.25}$$

D'après le choix de M_o et H fait au paragraphe 3.4, la condition de Rankine-Hugoniot (10.7.23) implique que

$$h(\Gamma u, \partial_y \phi) = \partial_t \phi - \lambda(\Gamma u^+, \Gamma u^-, \partial'_y \phi) = 0 \qquad \text{sur } \omega_T. \tag{10.7.26}$$

Les équations (10.3.25) pour Φ_ν et (10.3.42) impliquent que

$$h_2(\overline{w}_\nu)(\Delta_\nu \dot{w}_\nu) = H_\nu = \mathcal{R}_T(h_\nu) + \beta_\nu. \tag{10.7.27}$$

où $h_\nu = \Delta_\nu \dot{h}_\nu$ est donné par (10.3.27). D'après (10.3.44) on a d'autre part :

$$h_*(w_{k+1}) - h_*(w_k) = \varepsilon^4_k + H_k.$$

En sommant ces égalités, on obtient, comme en (10.3.40),

$$h_*(w_{\nu+1}) = h_*(w_0) + \sum_{k=0}^{\nu} \mathcal{R}_T(h_k) + E^4_{\nu+1} + \sum_{k=0}^{\nu} \beta_k. \tag{10.7.28}$$

Le choix (10.3.51) des β_ν implique que :

$$\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k = S^3_\nu(\widetilde{H}) - S^3_\nu(E^4_\nu) + S^3_\nu(\mathcal{R}_T(E^3_\nu)).$$

En tenant compte de (10.3.43) et (10.3.44), on a d'autre part

$$\sum_{k=0}^{\nu} h_k = h(\Gamma u_{\nu+1}, \partial_y \phi_{\nu+1}) - h(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0) - E^3_{\nu+1}.$$

En reportant dans (10.7.28), on obtient que

$$h_*(w_{\nu+1}) = h_*(w_0) + S^3_\nu(\widetilde{H}) + A_\nu + B_\nu + C_\nu \tag{10.7.29}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_\nu &= \mathcal{R}_T(h(\Gamma u_{\nu+1}, \partial_y \phi_{\nu+1}) - h(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0)),\\
B_\nu &= E^4_{\nu+1} - S^3_\nu(E^4_\nu),\\
C_\nu &= S^3_\nu(\mathcal{R}_T(E^3_\nu)) - \mathcal{R}_T(E^3_\nu) - \mathcal{R}_T(\varepsilon^3_\nu).
\end{aligned} \tag{10.7.30}$$

En utilisant le lemme 10.2.3, on obtient pour $s \leq (\alpha - 2)/2$,

$$\|E^4_\nu - S^3_\nu(E^4_\nu)\|_{2s,T} \leq C\, \theta_\nu^{2s-2s_1}\, \|E^4_\nu\|_{2s_1,T}.$$

Avec (10.6.26), on en déduit l'estimation

$$\|E^4_\nu - S^3_\nu(E^4_\nu)\|_{2s,T} \leq C\, \theta_\nu^{2s_0+2s+5-2\alpha}. \tag{10.7.31}$$

L'exposant $2s_0 + 2s + 5 - 2\alpha$ étant négatif, ceci prouve que B_ν converge vers 0 dans $W^{2s}(\Omega_T)$. On montre de même que ε^4_ν et C_ν convergent vers 0 dans $W^{2s}(\Omega_T)$. D'autre part, avec (10.7.26), on voit que A_ν converge vers $-\mathcal{R}_T(h(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0))$ dans $W^{2s}(\Omega_T)$. En passant à la limite dans (10.7.29), on obtient donc

$$h_*(w) = h_*(w_0) + \widetilde{H} - \mathcal{R}_T(h(\Gamma u_0, \partial_y \phi_0)).$$

Compte tenu de la définition de (10.3.50) de $\widetilde{H}$, on a donc $h_*(w) = 0$. Ainsi (u, Φ) est bien solution des équations (10.1.16)... (10.1.19) sur Ω_T.

Avec les notations (10.1.2), la régularité de (u_1, Φ_1) est $s_1 + 3$ alors que la solution (u, Φ) est de régularité $s_2 = (\alpha - 2)/2 = s_1 - 9$. La perte de régularité est donc égale à $s_1 + 3 - s_2 = 12$. Le théorème 10.1.1 est maintenant complètement démontré. □

CHAPITRE 11

PROLONGEMENT DE LA RÉGULARITÉ

Dans ce chapitre, nous démontrons que la solution (u, Φ) donnée par le théorème 10.1.1 est en fait aussi régulière que (u_1, Φ_1), ce qui termine la démonstration du théorème 3.4.1. Il s'agit donc de propager du passé vers l'avenir, la régularité d'une solution donnée du problème non linéaire. La méthode est classique (voir par exemple [Ch-Pi], [Ta], [Sa] dans le cas linéaire). On régularise (u, Φ), tangentiellement ici puisqu'il s'agit d'un problème aux limites, et on montre des estimations uniformes pour des régularisées. Pour éviter les pertes de régularité intempestives, on utilise à nouveau une technique de paralinéarisation, qui permet d'estimer assez facilement les termes de commutation entre l'équation et les opérateurs de régularisation. Cette approche n'est rien d'autre qu'une variante du « lemme de Friedrichs ».

11.1. Énoncé du résultat

Comme au chapitre 10, $\varepsilon > 0$ est fixé, s_0 est un entier fixé strictement plus grand que $2 + n/2$. On se donne $s = s_0 + 19$ et une solution $(u_1, \Phi_1) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T_2)$. On note ici $k = 12$ la perte de régularité dans le théorème 10.1.1.

Théorème 11.1.1. — *S'il existe une solution exacte $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s-k, T)$ qui prolonge (u_1, Φ_1), alors $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon(s, T)$.*

Pour des raisons techniques, il sera commode de prolonger (u_1, Φ_1) pour $t \leq T_o$. On note Ω_T^{1+} et Ω_T^{1-} les demi-espaces

(11.1.1) $$\Omega_T^{1\pm} =]-\infty, T] \times \mathbb{R}_\pm^n.$$

On note $\Omega_T^1 = \Omega_T^{1+} \cup \Omega_T^{1-}$ et $\omega_T^1 =]-\infty, T] \times \mathbb{R}^{n-1}$. On rappelle que (u_1, Φ_1) coïncide dans la bande $[T_o, 0]$ avec une solution approchée (u_a, Φ_a). On prolonge les fonctions u_a, Φ_a, W_a et w_a (*cf.* définition 3.1.1) pour $t < T_o$. On note $\widetilde{u}_a$, $\widetilde{\Phi}_a$, $\widetilde{W}_a$, $\widetilde{w}_a$ les prolongements ainsi obtenus. Avec (3.1.2), on voit que l'on peut construire les fonctions prolongées de sorte que

(11.1.2) $$\widetilde{u}_a = \underline{u}_\varepsilon, \quad \widetilde{\Phi}_a = \underline{\Phi}_\varepsilon \quad \text{pour } t < 2T_o.$$

On définit un prolongement de (u_1, Φ_1), noté $(\widetilde{u}_1, \widetilde{\Phi}_1)$ par

$$\begin{cases} (\widetilde{u}_1, \widetilde{\Phi}_1) = (u_1, \Phi_1) & \text{pour } 0 \leq t \leq T_2 \\ (\widetilde{u}_1, \widetilde{\Phi}_1) = (\widetilde{u}_a, \widetilde{\Phi}_a) & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

Nous sommes ainsi ramenés à la situation suivante : en omettant les $\sim$, on dispose d'une fonction (u, Φ) qui prolonge (u_1, Φ_1) sur Ω_T^1 et qui vérifie

$$\mathcal{L}(u, \nabla\Phi)u = \widetilde{f} = \begin{cases} f & \text{pour } T_o \leq t \leq T, \\ \mathcal{L}(u_1, \nabla\Phi_1)u_1 & \text{pour } t < T_o, \end{cases} \tag{11.1.3}$$

(11.1.4)

$$\sum_{j=0}^{n-1}[f_j(u)]\partial_j\phi - [f_n(u)] = g = \begin{cases} 0 & \text{pour } T_o \leq t \leq T, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}[f_j(u_1)]\partial_j\phi_1 - [f_n(u_1)] & \text{pour } t < T_o, \end{cases}$$

$$[\Phi] = 0 \qquad \text{sur } \omega_T^1. \tag{11.1.5}$$

On a de même

$$\partial_t\Phi^+ - \lambda(u^+, u^+ - p^+, \partial_y'\Phi^+) = H^+ \tag{11.1.6}$$

où

$$\begin{cases} H^+ = 0 & \text{pour } T_o \leq t \leq T, \\ H^+ = \partial_t\Phi_1^+ - \lambda(u_1^+, u_1^+ - p_1^+, \partial_y'\Phi_1^+) & \text{pour } t < T_o, \end{cases}$$

où p et p_1 sont associés à (u, Φ) et à (u_1, Φ_1) par les formules (2.3.13) jointes à (3.2.8) (3.2.9). En outre, Φ^- vérifie une équation analogue.

Par hypothèse, (*cf.* (3.3.6) et définition 3.1.1), le couple $(u_a - \underline{u}_\varepsilon, \Phi_a - \underline{\Phi}_\varepsilon)$ est dans l'espace p–$H^{2s+1}(\Omega_0)$. En outre, (11.1.2) implique que les seconds membres des équations ci-dessus sont nuls pour $t < 2T_o$. On en déduit que pour tout $\gamma \geq 1$

$$\widetilde{f} \in W_\gamma^{2s}(\Omega_T^1), \quad g \in H_\gamma^{2s}(\omega_T^1), \quad H^+ \in W_\gamma^{2s}(\Omega_T^{1+}), \quad H^- \in W_\gamma^{2s}(\Omega_T^{1-}). \tag{11.1.7}$$

où les espaces W_γ^{2s} et H_γ^{2s} sont les espaces de Sobolev à poids, correspondant aux normes (3.3.2) (3.3.3).

Nous dirons que le couple $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon^1(\sigma, T)$ pour $\sigma \in \{s_o, \ldots, s\}$ et $T > 0$ si (u, Φ) est solution des équations (11.1.3)... (11.1.6),

$$u = u_1 = u_a \qquad \text{et} \qquad \Phi = \Phi_1 = \Phi_a \qquad \text{pour } t < 0 \tag{11.1.8}$$

et si pour tout $\gamma \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} &(u', \Phi') \in W_\gamma^{2\sigma}(\Omega_T^1), && \Gamma u' \in H_\gamma^{2\sigma}(\omega_T^1), && \Gamma\Phi' \in H_\gamma^{2\sigma+1}(\omega_T^1), \\ &\partial_n u' \in H_\gamma^{0,2\sigma-1}(\Omega_T^1), && \partial_n\Phi' \in H_\gamma^{0,2\sigma-1}(\Omega_T^1). \end{aligned} \tag{11.1.9}$$

Comme au chapitre 3, on a noté $u' = u - \underline{u}_\varepsilon$ et $\Phi' = \Phi - \underline{\Phi}_\varepsilon$.

Le théorème 11.1.1 est une conséquence immédiate du résultat suivant.

Théorème 11.1.2. — *Soit s un entier tel que $s \geq s_o + 19$. Si $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon^1(s-k, T)$ alors $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon^1(s, T)$.*

11.2. Opérateurs de régularisation

Pour s entier, on note $E^{0,s}_\gamma(\Omega^1_T)$ l'espace des fonctions u telles que $e^{-\gamma t}\partial^\alpha_y u \in L^2(\Omega^1_T)$ pour $|\alpha| \leq s$. Cet espace est muni de la norme à poids notée

$$\|u\|^{tg}_{s,\gamma,T} = \sum_{\mu+|\alpha|=s} (1+\gamma)^\mu \|e^{-\gamma t}\partial^\alpha_y u\|_{L^2(\Omega^1_T)}. \tag{11.2.1}$$

On définit de même l'espace $H^s_\gamma(\omega^1_T)$ que l'on munit de la norme :

$$|u|_{s,\gamma,T} = \sum_{\mu+|\alpha|=s} (1+\gamma)^\mu \, |e^{-\gamma t}\partial^\alpha_y u|_{L^2(\omega^1_T)}. \tag{11.2.2}$$

Les espaces $E^{0,s}_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+)$, $E^{0,s}_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_-)$, $H^s_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})$ sont définis de façon analogue.

Dans ce paragraphe, nous définissons des opérateurs de régularisation, notés $R_{\delta,\gamma,T}$ [resp. $R_{\delta,\gamma}$], et qui agissent dans les espaces $E^{0,s}_\gamma(\Omega^1_T)$ [resp. $E^{0,s}_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_\pm)$] et $H^s_\gamma(\omega^1_T)$ [resp. $H^s_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})$].

On utilise les opérateurs paradifférentiels tangentiels à paramètre $P^{I,\gamma}_a$ dont la définition a été rappelée en (7.1.20). Comme en (7.1.22), on les localise dans les demi-espaces Ω^1_T en posant :

$$P^{I,\gamma,T}_a(u) = P^{I,\gamma}_a(\pi_T(a), \pi_{\gamma,T}(u)) \tag{11.2.3}$$

où π_T et $\pi_{\gamma,T}$ sont des opérateurs de prolongement. Dans la suite de ce paragraphe, nous n'utilisons pas les autres opérateurs paradifférentiels introduits au chapitre 7, et sans craindre de confusion, nous notons maintenant $P^{\gamma,T}_a$ au lieu de $P^{I,\gamma,T}_a$. Nous rappelons brièvement les propriétés de ces opérateurs, dont la démonstration se trouve dans [Mél]. Les propriétés (7.1.8) à (7.1.16), ainsi que (7.1.26), restent vraies à condition de remplacer partout $H^{0,s}(\Omega_T)$ par $E^{0,s}_\gamma(\Omega^1_T)$. En outre, $P^{\gamma,T}_a$ commute aux dérivations normales : si $a \in W^{2,\infty}(\Omega^1_T)$ et si $(u, \partial_n u) \in E^{0,s}_\gamma(\Omega^1_T)$, alors

$$\partial_n P^{\gamma,T}(a,u) = P^{\gamma,T}(\partial_n a, u) + P^{\gamma,T}(a, \partial_n u). \tag{11.2.4}$$

Nous notons aussi $P^{\gamma,T}$ le paraproduit sur ω_T. Alors, pour $a \in W^{2,\infty}(\Omega^1_T)$ et $u \in W^2_\gamma(\Omega^1_T)$, on a

$$\Gamma P^{\gamma,T}(a,u) = P^{\gamma,T}(\Gamma a, \Gamma u). \tag{11.2.5}$$

A) Construction de $R_{\delta,\gamma}$. — On note $\mathcal{H}^s_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})$ l'espace des fonctions u telles que $e^{\gamma t}u \in H^s_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})$. Une norme équivalente à la norme $|e^{\gamma t}u|_{2s,\gamma}$ est

$$|u|^1_{2s,\gamma} = \Big(\int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})} (\gamma^2+\tau^2+|\xi'|^2)^s \, |\widehat{u}(\tau,\xi')|^2 \, d\tau \, d\xi'\Big)^{1/2} \tag{11.2.6}$$

ou $\widehat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u. On introduit aussi l'espace $\mathcal{E}^{0,s}_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+)$ des fonctions u telles que $e^{\gamma t}u \in E^{0,s}_\gamma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+)$. Une norme équivalente à la norme $\|e^{\gamma t}u\|^{tg}_{2s,\gamma}$ est

$$\|u\|^{tg1}_{2s,\gamma} = \Big(\int_o^\infty \big(|u(.,x_n)|^1_{2s,\gamma}\big)^2 \, dx_n\Big)^{1/2}. \tag{11.2.7}$$

On définit les opérateurs R_δ^γ sur $\mathcal{E}_\gamma^{0,s}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$ par

$$R_\delta^\gamma(u)(t,x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n} e^{i(t.\tau+x'.\xi')}\, r_{\delta,\gamma}(\tau,\xi')\,\widehat{u}(\tau,\xi',x_n)\,d\tau\,d\xi'\,dx_n \tag{11.2.8}$$

où

$$r_{\delta,\gamma}(\tau,\xi') = \left[1+\delta(\gamma+b(\xi')+i\,\tau)\right]^{-1}, \tag{11.2.9}$$

avec $b(\xi')=\sqrt{1+|\xi'|^2}$.

On définit de manière analogue R_δ^γ sur $\mathcal{H}_\gamma^s(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})$ en posant

$$R_\delta^\gamma(u)(t,x') = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n} e^{i(t.\tau+x'.\xi')}\, r_{\delta,\gamma}(\tau,\xi')\,\widehat{u}(\tau,\xi')\,d\tau\,d\xi'. \tag{11.2.10}$$

On notera que $b(\xi')$ n'est pas un symbole pseudo-différentiel classique en (τ,ξ'). Notre choix est fait pour qu'on ait la propriété suivante, qui résulte immédiatement du fait que le noyau de convolution associé à R_δ^γ est supporté dans $\{t>0\}$.

Lemme 11.2.1. — *Si $u=0$ sur Ω_T^{1+} alors $R_{\delta,\gamma}(u)=0$ sur Ω_T^{1+}.*

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Lemme 11.2.2. — *Il existe une constante C telle que pour tout $\gamma\geq 1$, tout $u\in\mathcal{E}_\gamma^{0,s}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$ et tout $\delta\in\,]0,1]$ on a*

i) $\|R_\delta^\gamma(u)\|_{s,\gamma}^{tg1}\leq C\|u\|_{s,\gamma}^{tg1}$,

ii) $\|R_\delta^\gamma(u)\|_{s+1,\gamma}^{tg1}\leq \dfrac{C}{\delta}\|u\|_{s,\gamma}^{tg1}$,

iii) $\lim_{\delta\to o^+}\|R_\delta^\gamma(u)-u\|_{s,\gamma}^{tg1}=0$.

On a des estimations similaires sur le bord $\{x_n=0\}$. On définit ensuite les opérateurs $R_{\delta,\gamma}$ par conjugaison

$$R_{\delta,\gamma}(u) = e^{\gamma t}R_\delta^\gamma(e^{-\gamma t}u). \tag{11.2.11}$$

On déduit immédiatement des lemmes 11.2.1 et 11.2.2, le corollaire suivant

Corollaire 11.2.3. — *Il existe une constante C telle que pour tout $\gamma\geq 1$, tout $u\in E_\gamma^{0,s}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$ et tout et tout $\delta\in\,]0,1]$ on a les estimations suivantes :*

i) $\|R_{\delta,\gamma}(u)\|_{s,\gamma}^{tg}\leq C\,\|u\|_{s,\gamma}^{tg}$,

ii) $\|R_{\delta,\gamma}(u)\|_{s+1,\gamma}^{tg}\leq \dfrac{C}{\delta}\|u\|_{s,\gamma}^{tg}$,

iii) $\lim_{\delta\to o^+}\|R_{\delta,\gamma}(u)-u\|_{s,\gamma}^{tg}=0$.

De plus, si $u=0$ sur Ω_T^{1+} alors $R_{\delta,\gamma}(u)=0$ sur Ω_T^{1+}

On a des estimations similaire pour $u\in H_\gamma^s(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})$.

B) Opérateurs $A_{\delta,\gamma}$ et commutation. — Nous désignons par A_δ^γ l'opérateur de symbole

$$a_{\delta,\gamma}(\tau,\xi') = 1 + \delta(\gamma + b(\xi') + i\,\tau). \tag{11.2.12}$$

Cet opérateur est défini par une formule analogue à (11.2.8) et il opère de $\mathcal{E}_\gamma^{0,s}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$ dans $\mathcal{E}_\gamma^{0,s-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$. De plus $R_\delta^\gamma = (A_\delta^\gamma)^{-1}$. On définit les opérateurs $A_{\delta,\gamma}$ par conjugaison :

$$A_{\delta,\gamma}(u) = e^{\gamma t} A_\delta^\gamma(e^{-\gamma t}u). \tag{11.2.13}$$

Proposition 11.2.4. — *Il existe une constante C telle que pour tout $\gamma \geq 1$, tout $u \in E_\gamma^{0,s}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$, tout $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$ et tout $\delta \in]0,1]$, on a l'estimation suivante*

$$\|\,[A_{\delta,\gamma}, P_a^\gamma]u\,\|_{s,\gamma}^{tg} \leq C\,\delta\,\|a\|_1^*\|u\|_{s,\gamma}^{tg}. \tag{11.2.14}$$

Démonstration. — Selon (7.1.20), P_a^γ est défini par conjugaison à partir du paraproduit T_a^γ. Il suffit donc de démontrer une estimation de la forme

$$\|\,[A_\delta^\gamma, T_a^\gamma]v\,\|_{s,\gamma}^{tg1} \leq C\,\delta\,\|a\|_1^*\|v\|_{s,\gamma}^{tg1}.$$

De plus, en désignant par B^γ l'opérateur de symbole $b(\xi')$, on a

$$A_\delta^\gamma = (1+\delta\gamma)\,\mathrm{Id} + \delta B^\gamma + \delta\partial_t$$

et il suffit de montrer que

$$\|\,[B^\gamma, T_a^\gamma]v\,\|_{s,\gamma}^{tg1} \leq C\,\|a\|_1^*\|v\|_{s,\gamma}^{tg1}. \tag{11.2.15}$$

Comme b n'est pas un symbole en (τ,ξ'), cette estimation demande une vérification. D'après la définition (7.1.19), on a

$$T_a^\gamma v = \sum_{i=3}^{\infty} \zeta(2^{-i+3})T_a^i v \qquad \text{avec} \qquad T_a^i v = S_{i-3}a.S_i v + \sum_{k>i} S_{k-3}a.\Delta_k v.$$

Il suffit donc de démontrer (11.2.15) avec T_a^γ remplacé par T_a^i et pour $\gamma \approx 2^i$. On note $w_i = [B^\gamma, S_{i-3}a.S_i]v$ et, pour $k > i$, $w_k = [B^\gamma, S_{k-3}a]\Delta_k v$. Alors,

$$[H^\gamma, T_a^i]v = \sum_{k\geq i} w_k$$

Comme B^γ est un multiplicateur de Fourier, on voit que spectre de w_i est contenu dans une boule $|\eta| \leq R.2^i$ et celui de w_k dans une couronne $R^{-1}.2^k|\eta| \leq R.2^k$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} &\|w_i\|_{L^2} \leq C\,\|S_{i-3}a\|_1^*\|S_i v\|_{L^2},\\ &\|w_k\|_{L^2} \leq C\,\|S_{k-3}a\|_1^*\|\Delta_k v\|_{L^2} \qquad \text{pour } k \geq i+1. \end{aligned}$$

On voit alors que

$$\sum_{k=i}^{\infty} 2^{-2ks}\|w_k\|_{L^2}^2 \leq C\big(\|a\|_1^*\big)^2\big(\|v\|_{s,\gamma}^{tg1}\big)^2$$

et donc que $[B^\gamma, T_a^i]v$ est dans $\mathcal{E}_\gamma^{0,s}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n)$ et vérifie (11.2.15) (*cf.* lemme 6.1.2 de [Mé1]). □

C) Opérateurs localisés $R_{\delta,\gamma,T}$. — Pour $u \in E^{0,s}_\gamma(\Omega^1_T)$, on définit $R_{\delta,\gamma,T}(u)$ comme étant la restriction à Ω^1_T de $R_{\delta,\gamma}(\pi_{\gamma,T}(u))$.

Proposition 11.2.5. — *Il existe une constante C telle que pour tout $\gamma \geq 1$, tout $u \in E^{0,s}_\gamma(\Omega^1_T)$, tout $a \in W^{2,\infty}(\Omega^1_T)$ et tout $\delta \in]0,1]$, on a*

$$\| [R_{\delta,\gamma,T}, P^{\gamma,T}_a]u \|^{tg}_{s,\gamma,T} \leq C \, \|a\|^*_{2,T} \{ \|R_{\delta,\gamma,T}(u)\|^{tg}_{s,\gamma,T} + \|u\|^{tg}_{s-1,\gamma,T} \}. \tag{11.2.16}$$

Nous utiliserons l'estimation suivante démontrée dans [Mél].

Lemme 11.2.6. — *Il existe une constante C telle que pour $T \geq 0$, $a \in W^{\mu,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_+)$, $\gamma \geq 1$ et $u \in E^{0,s}_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_+)$ vérifiant $u = 0$ sur Ω^{1+}_T, on a*

$$\|P^{\gamma,T}_a u\|^{tg}_{s+\mu,\gamma,T} \leq C \, \|a\|^*_\mu \|u\|^{tg}_{s,\gamma}. \tag{11.2.17}$$

Démonstration de la proposition 11.2.5. — On note

$$A_1 = R_{\delta,\gamma,T} \circ P^{\gamma,T}_a u \qquad A_2 = P^{\gamma,T}_a \circ R_{\delta,\gamma,T} u \qquad v = \pi_{\gamma,T} \circ R_{\delta,\gamma,T}(u).$$

En posant $a_1 = \pi_T(a)$ on définit ensuite :

$$r_1 = P^\gamma_{a_1} \circ \pi_{\gamma,T}(u) - P^\gamma_{a_1} \circ A_{\delta,\gamma}(v).$$

Comme $A_{\delta,\gamma}$ est différentiel en t, il respecte le support en t. Avec le lemme 11.2.6, on en déduit que

$$\|r_1\|^{tg}_{s+1,\gamma,T} \leq C \, \|a\|^*_{2,T} \left\{ \|R_{\delta,\gamma,T}(u)\|^{tg}_{s,\gamma,T} + \|u\|^{tg}_{s-1,\gamma,T} \right\}. \tag{11.2.18}$$

D'après le corollaire 11.2.3, on a $R_{\delta,\gamma}(r_1) = R_{\delta,\gamma}(\pi_{\gamma,T} r'_1)$ sur Ω^1_T, où r'_1 désigne la restriction de de r_1 à Ω^1_T. On déduit alors de (11.2.18) et de ce corollaire les estimations

$$\|R_{\delta,\gamma}(r_1)\|^{tg}_{s+1,\gamma,T} \leq C \, \|a\|^*_{2,T} \left\{ \|R_{\delta,\gamma,T}(u)\|^{tg}_{s,\gamma,T} + \|u\|^{tg}_{s-1,\gamma,T} \right\}. \tag{11.2.19}$$

En outre,

$$A_1 = R_{\delta,\gamma} \circ P^\gamma_{a_1}(\pi_{\gamma,T}(u)) = R_{\delta,\gamma} \circ P^\gamma_{a_1}(A_{\delta,\gamma}(v)) + R_{\delta,\gamma}(r_1) \qquad \text{sur } \Omega^1_T.$$

En remarquant que $A_2 = P^\gamma_{a_1}(v)$ sur Ω^1_T, on en déduit que

$$(11.2.20). \qquad A_1 - A_2 = R_{\delta,\gamma} \circ [P^\gamma_{a_1}, A_{\delta,\gamma}]v + R_{\delta,\gamma}(r_1) \qquad \text{sur } \Omega^1_T$$

Le corollaire 11.2.3 et la proposition 11.2.4 impliquent que

$$\|R_{\delta,\gamma} \circ [P^\gamma_{a_1}, A_{\delta,\gamma}]v\|^{tg}_{s+1,\gamma} \leq C \, \|a_1\|^*_1 \|v\|^{tg}_{s,\gamma}. \tag{11.2.21}$$

En remarquant enfin que

$$\|v\|^{tg}_{s,\gamma} \leq C \, \|R_{\delta,\gamma,T}(u)\|^{tg}_{s,\gamma,T},$$

l'estimation (11.2.16) découle de (11.2.20) (11.2.21) et (11.2.19). □

Avec (7.1.26), on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 11.2.7. — *Soit ρ une fonction C^∞ et bornée ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_+$. Il existe une constante C, telle que pour tout $\gamma \geq 1$, $\delta \in]0,1]$, et $u \in E^{0,s}_\gamma(\Omega^1_T)$, la différence $r = \rho R_{\delta,\gamma,T}(u) - R_{\delta,\gamma,T}(\rho u)$ est dans $E^{0,s+1}_\gamma(\Omega^1_T)$ et*

$$\|r\|^{tg}_{s+1,\gamma,T} \leq C\big\{\|R_{\delta,\gamma,T}(u)\|^{tg}_{s,\gamma,T} + \|u\|^{tg}_{s-1,\gamma,T}\big\}. \tag{11.2.22}$$

De plus, pour tout $a \in W^{2,\infty}(\Omega^1_T)$, la différence $r = P^{\gamma,T}_a(\rho R_{\delta,\gamma,T}(u)) - R_{\delta,\gamma,T} \circ P^{\gamma,T}_a(\rho u)$ est dans $E^{0,s+1}_\gamma(\Omega^1_T)$ et

$$\|r\|^{tg}_{s+1,\gamma,T} \leq C\,\|a\|^*_{2,T}\big\{\|R_{\delta,\gamma,T}(u)\|^{tg}_{s,\gamma,T} + \|u\|^{tg}_{s-1,\gamma,T}\big\}. \tag{11.2.23}$$

Remarque 11.2.8. — Les opérateurs $R_{\delta,\gamma,T}$ commutent à toutes les dérivations ∂_0, $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

Remarque 11.2.9. — On définit de manière analogue les opérateurs de régularisation sur ω^1_T en partant de la définition (11.2.10). Ces opérateurs sont encore notés $R_{\delta,\gamma,T}$. Ils bénéficient des propriétés énoncées dans la proposition 11.2.5 et le lemme 11.2.1. Ils commutent aux dérivations tangentielles $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$. Enfin, pour tout $u \in W^2_\gamma(\Omega^1_T)$, on a

$$\Gamma R_{\delta,\gamma,T}(u) = R_{\delta,\gamma,T}(\Gamma u). \tag{11.2.24}$$

11.3. Régularité tangentielle

Dans la preuve du théorème 11.1.2, on établit d'abord la régularité tangentielle de la solution.

Théorème 11.3.1. — *Soit s un entier tel que $s \geq s_o + 19$. Si $(u, \Phi) \in \mathcal{F}^1_\varepsilon(s-k, T)$, alors :*

$$\begin{array}{lll} (u', \Phi') \in E^{0,2s}_\gamma(\Omega^1_T), & \Gamma u' \in H^{2s}_\gamma(\omega^1_T), & \Gamma\Phi' \in H^{2s+1}_\gamma(\omega^1_T), \\ \partial_n u' \in E^{0,2s-1}_\gamma(\Omega^1_T), & \partial_n \Phi' \in E^{0,2s-1}_\gamma(\Omega^1_T). & \end{array} \tag{11.3.1}$$

Nous procédons par récurrence. Pour σ entier tel que $2s - 2k \leq \sigma \leq 2s - 1$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(\sigma)$ est que

$$\begin{array}{lll} (u', \Phi') \in E^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T), & \Gamma u' \in H^{\sigma}_\gamma(\omega^1_T), & \Gamma\Phi' \in H^{\sigma+1}_\gamma(\omega^1_T), \\ \partial_n u' \in E^{0,\sigma-1}_\gamma(\Omega^1_T), & \partial_n \Phi' \in E^{0,\sigma-1}_\gamma(\Omega^1_T). & \end{array} \tag{11.3.2}$$

Par hypothèse, elle est satisfaite pour $\sigma = 2(s-k)$. Nous montrons que $\mathcal{H}(\sigma)$ entraîne $\mathcal{H}(\sigma+1)$. Pour cela, on montre que les régularisées $R_{\delta,\gamma,T}(u, \Phi)$ sont uniformément bornées dans l'espace de régularité $\sigma + 1$. On note

$$u'_\delta = R_{\delta,\gamma,T}(u'), \qquad \Phi'_\delta = R_{\delta,\gamma,T}(\Phi').$$

A) Estimation de u'_δ et $\Gamma\Phi'_\delta$

Proposition 11.3.2. — *Il existe C_o et γ_o telle que pour tout $\delta \in]0,1]$ et tout $\gamma \geq \gamma_o$, on a*

$$\text{(11.3.3)}\quad \begin{aligned}&\gamma\|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma u'_\delta|_{\sigma+1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma\Phi'_\delta|_{\sigma+2,\gamma,T}\\ &\qquad \leq C_o\Big\{M(u_1,\Phi_1,\widetilde{f},g,\gamma) + K_1(\delta) + K_2\Big\},\end{aligned}$$

avec

(11.3.4)

$$\begin{aligned}M(u_1,\Phi_1,\widetilde{f},g,\gamma) &= \|\widetilde{f}\|^{tg}_{2s,\gamma,0} + \gamma^{1/2}|g|_{2s,\gamma,0} + \gamma\|u'_1\|_{2s,\gamma,0}\\ &+ \gamma\|\Phi'_1\|_{2s,\gamma,0} + \gamma\|\partial_n\Phi'_1\|^{tg}_{2s-1,\gamma,0} + \gamma^{1/2}|\Gamma u'_1|_{2s,\gamma,0} + \gamma^{1/2}|\Gamma\Phi'_1|_{2s+1,\gamma,0},\end{aligned}$$

$$\text{(11.3.5)}\quad K_1(\delta) = \gamma\|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma}(\partial_n u')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma}(\partial_n\Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}$$

$$\text{(11.3.6)}\quad \begin{aligned}K_2 &= \|u'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|\partial_n u'\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T}\\ &+ \|\partial_n\Phi'\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\left\{|\Gamma u'|_{\sigma,\gamma,T} + |\Gamma\Phi'|_{\sigma+1,\gamma,T}\right\}\end{aligned}$$

On suit une démarche identique à celle employée pour démontrer le théorème 3.3.2. On introduit la « bonne inconnue »

$$v = P^{\gamma,T}(V^{-1},\chi u') - P^{\gamma,T}(\zeta,\chi\Phi')$$

où χ et ζ sont définis au paragraphe 7.2, et ses régularisées

$$\text{(11.3.7)}\quad v_\delta = P^{\gamma,T}(V^{-1},\chi u'_\delta) - P^{\gamma,T}(\zeta,\chi\Phi'_\delta).$$

Comme au paragraphe 7.2, on introduit l'opérateur paradifférentiel

$$\text{(11.3.8)}\quad L^{\gamma,T}(v) = \sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(B_j,\partial_j v) + J\partial_n v.$$

Lemme 11.3.3. — *Pour tout $\delta \in]0,1]$ et tout $\gamma \geq 1$ on a l'estimation :*

(11.3.9)

$$\begin{aligned}\|L^{\gamma,T}(v_\delta)\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \leq C\Big\{&\|\widetilde{f}\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T}\\ &+ \|R_{\delta,\gamma}(\partial_n u')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma}(\partial_n\Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|u'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}\\ &+ \|\partial_n u'\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} + \|\partial_n\Phi'\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} + \|\partial_n u'\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} + \|\partial_n\Phi'\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}$$

Démonstration. — On note $R_{\delta,\gamma}$ au lieu de $R_{\delta,\gamma,T}$ et on dit que r est un reste si $r \in E^{0,\sigma+1}_\gamma(\Omega^1_T)$ et si $\|r\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T}$ est majoré par le second membre de (11.3.9).

On suit la démonstration et les notations du théorème 7.3.1. En utilisant les règles (7.1.8) à (7.1.16), (11.2.4) et les propriétés des opérateurs $R_{\delta,\gamma}$, on obtient que

$$L^{\gamma,T}(v_\delta) = P^{\gamma,T}(W_1,\mathcal{A}) + r_1$$

où r_1 est un reste et où :

$$\mathcal{A} = \sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(\partial_n\Phi.A_j, \partial_j(\chi\, R_{\delta,\gamma}(u'))) + P^{\gamma,T}(\mathcal{M}, \partial_n(\chi\, R_{\delta,\gamma}(u')))$$
$$- \Big\{\sum_{j=0}^{n-1} P^{\gamma,T}(A_j\partial_n(\chi\, u'), \partial_j R_{\delta,\gamma}(\Phi')) + P^{\gamma,T}(w, \partial_n R_{\delta,\gamma}(\Phi'))\Big\}.$$

En suivant exactement les étapes de la preuve du théorème 7.3.1, on montre que $\mathcal{A}$ est un reste. Pour cela, en reprend chaque terme et on commute $R_{\delta,\gamma}$ avec les dérivées et les opérateurs $P_a^{\gamma,T}$, grâce à la proposition 11.2.5 et au corollaire 11.2.7. □

Avec les notations du paragraphe 7.5, on note

$$G_\delta = [J\Gamma v_\delta] + P_E^{\gamma,T}(\Gamma v_\delta^-) - X_1^{\gamma,T}(\chi\,\Gamma\Phi'_\delta). \tag{11.3.10}$$

Lemme 11.3.4. — *Il existe C tel que pour tout $\delta \in]0,1]$ et tout $\gamma \geq 1$ on*

$$|G_\delta|_{\sigma+1,\gamma,T} \leq C\Big\{|\Gamma u'|_{\sigma,\gamma,T} + |\Gamma\Phi'|_{\sigma+1,\gamma,T} + |g|_{\sigma+1,\gamma,T}\Big\}. \tag{11.3.11}$$

Démonstration. — Nous dirons ici que r est un reste quand $r \in H_\gamma^{\sigma+1}(\omega_T^1)$ et $|r|_{\sigma+1,\gamma,T}$ est majoré par le second membre de (11.3.11). En commutant $R_{\delta,\gamma}$ dans l'expression (11.3.10), on obtient :

$$G_\delta = R_{\delta,\gamma}(G) + r_1 \quad \text{avec} \quad G = [J\Gamma v] + P_E^{\gamma,T}(\Gamma v^-) - X_1^{\gamma,T}(\chi\,\Gamma\Phi'),$$

et r_1 est un reste. En reprenant la démonstration de la proposition 7.6.1, on montre G est aussi un reste, ce qui prouve le lemme 11.3.4. □

Démonstration de la proposition 11.3.2. — En procédant comme au théorème 8.2.1, on obtient l'estimation

(11.3.12)
$$N_1(v_\delta, \Gamma\Phi'_\delta, \gamma, T) \leq C\Big\{N_1(v_\delta, \Gamma\Phi'_\delta, \gamma, 0) + \|L^{\gamma,T}(v_\delta)\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|G_\delta|_{\sigma+1,\gamma,T}\Big\}$$

où

$$N_1(v_\delta, \Gamma\Phi'_\delta, \gamma, T) = \gamma\|v_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma v_\delta|_{\sigma+1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma\Phi'_\delta|_{\sigma+2,\gamma,T} \tag{11.3.13}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs $R_{\delta,\gamma,T}$ et le calcul paratangentiel, on vérifie que $N_1(v_\delta, \Gamma\Phi'_\delta, \gamma, 0)$ est majoré par le second membre de (11.3.3). Avec les lemmes 11.3.3 et 11.3.4, on voit que les autres termes de (11.3.12) sont aussi majorés par le second membre de (11.3.3) et on a donc

$$N_1(v_\delta, \Gamma\Phi'_\delta, \gamma, T) \leq C\Big\{M(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, \gamma) + K_1(\delta) + K_2\Big\}. \tag{11.3.14}$$

On décompose u'_δ et $\Gamma u'_\delta$ sous la forme :

$$u'_\delta = \chi(t)\, u'_\delta + (1 - \chi(t))u'_\delta,$$

avec $1 - \chi$ supporté dans $t \leq 0$. En commutant $1 - \chi$ et $R_{\delta,\gamma,T}$, on voit que les normes de $(1 - \chi)u'$ sont alors contrôlées par les données dans le passé et des termes de commutation. Elles sont donc majorées par le membre de droite de (11.3.3). D'autre part, en notant $\widetilde{v} = P^{\gamma,T}(V^{-1}, \chi, u'_\delta)$, on a

$$\chi\, u'_\delta = \chi\, u'_\delta - P^{\gamma,T}(V, \widetilde{v}) + P^{\gamma,T}(V, v_\delta) + P_V \circ P_\zeta(\chi\, \Phi'_\delta)$$

et on obtient les deux estimations :

$$\gamma \|\chi\, u'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \leq \gamma\, C\Big\{ \|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|v_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \Big\},$$

$$\gamma^{1/2} |\chi\, \Gamma u'_\delta|_{\sigma+1,\gamma,T} \leq \gamma^{1/2}\, C\Big\{ |\Gamma u'_\delta|_{\sigma,\gamma,T} + |\Gamma v_\delta|_{\sigma+1,\gamma,T} + |\Gamma \Phi'_\delta|_{\sigma+1,\gamma,T} \Big\}.$$

Avec (11.3.14), on aboutit à l'estimation :

$$N_1(u'_\delta, \Gamma\Phi'_\delta, \gamma, T) \leq C\Big\{ M(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, \gamma) + K_1(\delta) + K_2 + \gamma \|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \Big\}.$$

En prenant γ assez grand, le terme $\gamma\|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}$ situé à droite est absorbé par le membre de gauche, et la proposition 11.3.2 est démontrée □

B) Estimation de $\|R_{\delta,\gamma,T}(\partial_n u')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}$

Lemme 11.3.5. — *Il existe C tel que pour tout $\delta \in\,]0,1]$ et tout $\gamma \geq 1$, on a*

$$\text{(11.3.15)}\qquad \begin{aligned} \|R_{\delta,\gamma,T}(\partial_n u')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \leq C\Big\{ & M(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, \gamma) + \|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \\ & + \|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma,T}(\partial_n \Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + K_2 \Big\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Ici, on dit que r est contrôlé, si $r \in E^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T)$ et si $\|r\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}$ est majoré par le second membre de (11.3.15). Dans les calculs qui suivent $r_1, r_2, \ldots$ désignent différents termes contrôlés. On note $w = (u', \partial_y \Phi', \partial_n \Phi')$. Avec l'équation (11.1.3), on écrit

$$\text{(11.3.16)}\qquad \partial_n u' = \mathcal{A}(w)\widetilde{f} + \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{A}_j(w)\partial_j u'.$$

D'après le lemme 7.3.5, et en posant $\widetilde{\mathcal{A}}(w) = \mathcal{A}(w) - \mathcal{A}(0)$, on a

$$\mathcal{A}(w)\widetilde{f} = P^{\gamma,T}(\mathcal{A}(w), \widetilde{f}) + {}^tP^{\gamma,T}({}^t\widetilde{f}, {}^t\widetilde{\mathcal{A}}(w)) + r_1.$$

On écrit ensuite $\mathcal{A}(w) = \chi\, \mathcal{A}(w) + (1-\chi)\mathcal{A}(w)$. On remarque que $P^{\gamma,T}(\mathcal{A}(w), \widetilde{f})$ et ${}^tP^{\gamma,T}({}^t\widetilde{f}, (1-\chi){}^t\widetilde{\mathcal{A}}(w)$ sont contrôlés, au sens indiqué plus haut. On a donc

$$R_{\delta,\gamma,T}(\mathcal{A}(w)\widetilde{f}) = R_{\delta,\gamma,T}({}^tP^{\gamma,T}({}^t\widetilde{f}, \chi\, {}^t\widetilde{\mathcal{A}}(w))) + r_2$$

En utilisant la règle (7.1.15) et en commutant $R_{\delta,\gamma,T}$ on montre que $R_{\delta,\gamma,T}(\mathcal{A}(w)\widetilde{f})$ est contrôlé.

Il reste à montrer que $R_{\delta,\gamma,T}(\mathcal{A}_j(w)\partial_j u')$ est contrôlé. Pour cela, on écrit

$$\mathcal{A}_j(w)\partial_j u' = P^{\gamma,T}(\mathcal{A}_j(w), \partial_j u') + {}^tP^{\gamma,T}({}^t\partial_j u', {}^t\widetilde{\mathcal{A}_j}(w)) + r_3.$$

On montre comme précédemment que $R_{\delta,\gamma,T}({}^tP^{\gamma,T}({}^t\partial_j u', {}^t\widetilde{\mathcal{A}_j}(w)))$ est contrôlé. On a ensuite

$$R_{\delta,\gamma,T} \circ P^{\gamma,T}(\mathcal{A}_j(w), \partial_j u') = P^{\gamma,T}(\mathcal{A}_j(w), R_{\delta,\gamma,T}(\partial_j u')) + r_4.$$

Le terme $P^{\gamma,T}(\mathcal{A}_j(w), R_{\delta,\gamma,T}(\partial_j u'))$ étant contrôlé, il en est de même du terme $R_{\delta,\gamma,T}(\mathcal{A}_j(w)\partial_j u')$ et le lemme suit. □

C) Estimations de $R_{\delta,\gamma,T}(\Phi')$ et $R_{\delta,\gamma,T}(\partial_n\Phi')$. — Pour simplifier l'énoncé de ces estimations, nous introduisons l'expression

(11.3.17) $K_3 = \|H\|^{tg}_{2s,\gamma,0} + \|\partial_n H\|^{tg}_{2s-1,\gamma,0} + \|W_a\|_{2s,\gamma,T} + \|\partial_n W_a\|^{tg}_{2s-1,\gamma,T} + |w_a|_{2s,\gamma,T}.$

Proposition 11.3.6. — *Il existe une constante C_o telle que pour tout $\delta \in]0,1]$ et tout $\gamma \geq 1$ on a*

(11.3.18)
$$\begin{aligned}\gamma\|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \leq C_o\Big\{&\gamma\|\Phi'_1\|^{tg}_{2s,\gamma,o} + K_2 + K_3 \\ &+\|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}\Big\},\end{aligned}$$

(11.3.19)
$$\begin{aligned}\gamma\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n\Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \leq C_o\Big\{&\gamma\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n\Phi'_1)\|^{tg}_{2s-1,\gamma,0} + K_2 + K_3 + \|R_{\delta,\gamma}(\partial_n\Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \\ &+\|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma}(\partial_n u')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + |R_{\delta,\gamma}(\Gamma u')|_{\sigma+1,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}$$

où les expressions K_2 et K_3 sont définies respectivement par (11.3.6) *et* (11.3.17).

Démonstration. — **a)** Les équations (11.1.6) peuvent s'écrire sous la forme :

(11.3.20) $$\partial_t\Phi' - \mu(v, \partial'_y\Phi') = H,$$

où l'on a posé $v = (u', W_a + \mathcal{R}_T(a - w_a))$ et $a = \ln(-[u_1]/\varepsilon)$ et où μ est une fonction C^∞ de ses arguments telle que $\mu(0,0) = 0$. En multipliant (11.3.20) par $\chi(t)$ on obtient :

(11.3.21) $$\partial_t(\chi\,\Phi') - \chi\,\mu(v, \partial'_y\Phi') = \chi\,H + (\partial_t\chi)\Phi'.$$

En utilisant (7.1.15), on écrit ensuite

(11.3.22) $$\chi\,\mu(v, \partial'_y\Phi') = P^{\gamma,T}(\mu_1(v, \partial'_y\Phi'), \chi\,\partial'_y\Phi') + P^{\gamma,T}(\mu_2(v, \partial'_y\Phi'), \chi\,v) + r_1,$$

où r_1 vérifie l'estimation

(11.3.23) $$\|r_1\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \leq C\{\|v\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} + \|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}\}.$$

Nous pouvons alors réécrire (11.3.21) sous la forme d'une équation paradifférentielle :

(11.3.24) $$\partial_t(\chi\,\Phi') - P^{\gamma,T}(\mu_1(v, \partial'_y\Phi'), \chi\,\partial'_y\Phi') = H_1,$$

avec

(11.3.25) $$H_1 = \chi\,H + (\partial_t\chi)\Phi' + r_1 + P^{\gamma,T}(\mu_2(v, \partial'_y\Phi'), \chi\,v).$$

En appliquant ensuite à (11.3.24) l'opérateur $R_{\delta,\gamma,T}$ et en utilisant le corollaire 11.2.7, on obtient

$$\partial_t(\chi\,\Phi'_\delta) - P^{\gamma,T}(\mu_1(v,\partial'_y\Phi'),\chi\,\partial'_y\Phi'_\delta) = R_{\delta,\gamma}(H_1) + r_2, \tag{11.3.26}$$

où r_2 vérifie l'estimation :

$$\|r_2\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \le C\{\|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}\}. \tag{11.3.27}$$

Pour obtenir une estimation de $\chi\,\Phi'_\delta$, on utilise le lemme suivant qui estime la solution d'une équation de transport paradifférentielle. La preuve est laissée au lecteur.

Lemme 11.3.7. — *Il existe C tel que pour tout $\gamma \ge 1$ et tout $\Psi \in E^{0,\sigma+1}_\gamma(\Omega^1_T)$ vérifiant*

$$\partial_t(\chi\,\Psi) - P^{\gamma,T}(\mu_1(v,\partial'_y\Phi'),\chi\,\partial'_y\Psi) = \widetilde{H} \in E^{0,\sigma+1}_\gamma(\Omega^1_T), \tag{11.3.28}$$

on a l'estimation :

$$\gamma\|\chi\,\Psi\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \le C\{\|\widetilde{H}\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\chi\,\Psi\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T}\}. \tag{11.3.29}$$

En appliquant ce lemme à l'équation (11.3.26) et en tenant compte de (11.3.27) et des propriétés de $R_{\delta,\gamma,T}$, on obtient que

$$\begin{aligned}\gamma\|\chi\,\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \le C\Big\{&\|H\|^{tg}_{2s,\gamma,o} + \|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T}\\ &+\|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma}(v)\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|v\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{11.3.30}$$

La proposition 5.4.1 implique que

$$\|R_{\delta,\gamma}(v)\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|v\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} \le C\{K_2 + K_3 + \|u'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T}\}. \tag{11.3.31}$$

En écrivant $\Phi'_\delta = \chi\,\Phi'_\delta + (1-\chi)\,\Phi'_\delta$, l'estimation (11.3.18) résulte alors de (11.3.30) (11.3.31) et du corollaire 11.2.7.

b) Pour prouver (11.3.19), on dérive l'équation (11.3.21) par rapport à x_n. Alors, $\theta_n = \partial_n\Phi'$ vérifie

$$\partial_t(\chi\,\theta_n) - \sum_{k=1}^{n-1}\mu_k(v,\partial'_y\Phi')\partial_k(\chi\,\theta_n) = H_2 \tag{11.3.32}$$

où H_2 est de la forme :

$$H_2 = (\partial_t\chi)\theta_n + \chi\,F(v,\partial'_y\Phi')\partial_n v + \chi\,\partial_n H. \tag{11.3.33}$$

On écrit ensuite chaque terme $\mu_k(v,\partial'_y\Phi')\partial_k(\chi\,\theta_n)$ sous la forme

$$P^{\gamma,T}(\mu_k(v,\partial'_y\Phi'),\partial_k(\chi\,\theta_n) + P^{\gamma,T}(\partial_k(\chi\,\theta_n),\mu'_k(v,\partial'_y\Phi')) + r_3 \tag{11.3.34}$$

où μ'_k est une fonction telle que $\mu'_k(0,0) = 0$ et où r_3 vérifie l'estimation :

$$\|r_3\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \le C\Big\{\|\theta_n\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} + \|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T}\Big\}. \tag{11.3.35}$$

En utilisant (7.1.15), on voit que

$$P^{\gamma,T}(\partial_k(\chi\,\theta_n),\mu'_k(v,\partial'_y\Phi')) = P^{\gamma,T}(\partial_k\theta_n\,\mu^1_k,\chi\,v) + P^{\gamma,T}(\partial_k\theta_n\,\mu^2_k,\chi\,\partial'_y\Phi') + r_4 \tag{11.3.36}$$

où r_4 vérifie l'estimation :

$$\|r_4\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \le C\{\|\Phi'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T}\}. \tag{11.3.37}$$

En reportant ensuite (11.3.34) dans (11.3.32), on voit que $\chi\,\theta_n$ vérifie

$$\partial_t(\chi\,\theta_n) - \sum_{k=1}^{n-1} P^{\gamma,T}(\mu_k(v,\partial'_y\Phi'),\partial_k(\chi\,\theta_n)) = H_2 + H_3 + H_4 + r_5, \tag{11.3.38}$$

avec

$$H_3 = \sum_{k=1}^{n-1} P^{\gamma,T}(\partial_k\theta_n\,\mu_k^2(v,\partial'_y\Phi'),\chi\,\partial'_y\Phi'), \qquad H_4 = \sum_{k=1}^{n-1} P^{\gamma,T}(\partial_k\theta_n\mu_k^1,\chi\,v) \tag{11.3.39}$$

et où r_5 vérifie une estimation identique à (11.3.35). En appliquant, puis en commutant $R_{\delta,\gamma,T}$ à l'équation (11.3.38), on voit que $\tilde\theta_n = \chi\,R_{\delta,\gamma,T}(\theta_n)$ vérifie l'équation :

$$\partial_t\tilde\theta_n - \sum_{k=1}^{n-1} P^{\gamma,T}(\mu_k(v,\partial'_y\Phi'),\partial_k\tilde\theta_n) = R_{\delta,\gamma}(H_2 + H_3 + H_4 + r_5) + r_6, \tag{11.3.40}$$

où r_6 vérifie

$$\|r_6\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \le C\{\|R_{\delta,\gamma}(\theta_n)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|\theta_n\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T}\}. \tag{11.3.14}$$

Avec le lemme 11.3.7, on en déduit que

$$\begin{aligned}\gamma\|\chi\,R_{\delta,\gamma}(\theta_n)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \le C\Big\{&\|R_{\delta,\gamma}(\theta_n)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|\Phi'_\delta\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma}(v)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}\\ &+\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n v)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T} + \|\partial_n v\|^{tg}_{\sigma-1,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{11.3.42}$$

En utilisant la proposition 5.4.1 pour estimer les relèvements de traces, on voit que

$$\|R_{\delta,\gamma}(v)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^{tg}_{\sigma_1,\gamma,T} + \|\partial_n v\|^{tg}_{\sigma_1,\gamma,T} \le C\{K_2 + K_3\}. \tag{11.3.43}$$

Comme les opérateurs $R_{\delta,\gamma,T}$ et les opérateurs de relèvement $\mathcal{R}_T$ commutent, on a aussi

$$\begin{aligned}\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n v)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \le C\{&\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n u')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}\\ &+ |R_{\delta,\gamma}(a - w_a)|_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\partial_n W_a\|^{tg}_{2s-1,\gamma,T_1}\}.\end{aligned} \tag{11.3.44}$$

En remarquant ensuite que $a - w_a = \chi\,(a - w_a)$ et en appliquant (7.1.15), on obtient :

$$|R_{\delta,\gamma}(a - w_a)|_{\sigma+1,\gamma,T} \le C\Big\{|R_{\delta,\gamma}(\Gamma u')|_{\sigma+1,\gamma,T} + |\Gamma u'|_{\sigma,\gamma,T} + |w_a|_{2s,\gamma,T_1}\Big\}.$$

Avec (11.3.44), on en déduit que

$$\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n v)\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} \le C\Big\{\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n u')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + |R_{\delta,\gamma}(\Gamma u')|_{\sigma+1,\gamma,T} + K_2 + K_3\Big\}. \tag{11.3.45}$$

Enfin, en écrivant $R_{\delta,\gamma}(\theta_n) = \chi\,R_{\delta,\gamma}(\theta_n) + (1-\chi)R_{\delta,\gamma}(\theta_n)$, l'estimation (11.3.19) résulte alors de (11.3.42) (11.3.43) (11.3.45) et du corollaire 11.2.7. □

D) Démonstration du théorème 11.3.1. — En rappelant que $M(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, \gamma)$ est défini par (11.3.5), on introduit les expressions :

$$M_1(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, H, \gamma) = M(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, \gamma) + \gamma\|\Phi_1'\|^{tg}_{2s,\gamma,0} + \gamma\|\partial_n \Phi_1'\|^{tg}_{2s-1,\gamma,0}, \tag{11.3.46}$$

$$\begin{aligned} N(u_\delta', \Phi_\delta', R_{\delta,\gamma}(\partial_n \Phi'), \gamma, T) &= \gamma\|u_\delta'\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \gamma\|\Phi_\delta'\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \\ &+ \gamma\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n \Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma u_\delta'|_{\sigma+1,\gamma,T} + \gamma^{1/2}|\Gamma \Phi_\delta'|_{\sigma+2,\gamma,T}. \end{aligned} \tag{11.3.47}$$

On déduit alors des propositions 11.3.2, 11.3.6 et du lemme 11.3.5, l'inégalité

$$\begin{aligned} N(u_\delta', \Phi_\delta', R_{\delta,\gamma}(\partial_n \Phi'), \gamma, T) \leq C\Big\{ & M_1(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, H, \gamma) + K_2 + K_3 + \|u_\delta'\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} \\ & + \|\Phi_\delta'\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|R_{\delta,\gamma}(\partial_n \Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T} + |\Gamma u_\delta'|_{\sigma+1,\gamma,T}\Big\}. \end{aligned}$$

Pour γ assez grand, les termes $\|u_\delta'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}$, $\|\Phi_\delta'\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}$, $\|R_{\delta,\gamma}(\partial_n \Phi')\|^{tg}_{\sigma,\gamma,T}$ et $|\Gamma u_\delta'|_{\sigma+1,\gamma,T}$ situés à droite sont absorbés par le membre de gauche et on a l'estimation :

$$N(u_\delta', \Phi_\delta', R_{\delta,\gamma}(\partial_n \Phi'), \gamma, T) \leq C\Big\{ M_1(u_1, \Phi_1, \widetilde{f}, g, H, \gamma) + K_2 + K_3 \Big\}. \tag{11.3.48}$$

Le membre de gauche est donc borné indépendamment de $\delta \in]0,1]$ et le théorème 11.3.1 en résulte. □

11.4. Régularité conormale

Rappelons que $H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T)$ désigne l'espace des fonctions u telles que : $e^{-\gamma t}\delta^\alpha u \in L^2(\Omega^1_T)$ pour $|\alpha| \leq \sigma$. Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|^t_{\sigma,\gamma,T} = \sum_{\mu+|\alpha|=k} (1+\gamma)^\mu \|e^{-\gamma t}\delta^\alpha u\|_{L^2(\Omega^1_T)} \tag{11.4.1}$$

Proposition 11.4.1. — *Soit s un entier tel que $s \geq s_o + 19$. Si $(u', \Phi) \in \mathcal{F}^1_\varepsilon(s-k, T)$, alors u' et Φ' sont dans $H^{0,2s}_\gamma(\Omega^1_T)$.*

On procède par récurrence. Pour σ entier tel que $0 \leq \sigma \leq 2s$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(\sigma)$ est que

$$(\partial^\alpha_y u', \partial^\alpha_y \Phi') \in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T), \qquad \text{pour } |\alpha| \leq 2s - \sigma. \tag{11.4.2}$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est satisfaite d'après le théorème 11.3.1. D'autre part, on sait par hypothèse que $(u', \Phi') \in W^{2(s-k)}$. On suppose maintenant que $\mathcal{H}(\sigma)$ est satisfaite pour un $\sigma \leq 2s-1$ et on montre que $\mathcal{H}(\sigma+1)$ est vérifiée. Pour cela on utilise la remarque suivante : $v \in H^{0,\sigma+1}_\gamma$ si et seulement si $v \in E^{0,\sigma+1}_\gamma$ et $\delta_n v \in H^{0,\sigma}_\gamma$. En outre

$$\|v\|^t_{\sigma+1,\gamma,T} = \|v\|^{tg}_{\sigma+1,\gamma,T} + \|\delta_n v\|^t_{\sigma,\gamma,T}. \tag{11.4.3)}$$

Compte tenu du théorème 11.3.1, il nous suffit donc de montrer que

$$\partial^\alpha_y \delta_n(u', \Phi') \in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T), \qquad \text{pour } |\alpha| \leq 2s - \sigma - 1. \tag{11.4.4}$$

On montre d'abord la régularité de Φ, puis celle de u.

A) Régularité de $\delta_n\Phi'$

Lemme 11.4.2. — $\delta_n\Phi' \in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T)$.

Démonstration. — Dans l'équation (11.1.3), le bord est non caractéristique, et on peut écrire

$$\delta_n u = \delta_n\Phi\Big\{g_n(u,\partial_y\Phi)\widetilde{f} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j(u,\partial_y\Phi)\partial_j u\Big\}, \tag{11.4.5}$$

avec des fonctions g_j régulières. En appliquant δ_n à l'équation (11.3.20) vérifiée par Φ' et en tenant compte de (11.4.5), on obtient que $\theta_n = \delta_n\Phi'$ vérifie

$$\partial_t\theta_n - \sum_{k=1}^{n-1}\mu_k(v,\partial'_y\Phi)\partial_k\theta_n - E\,\theta_n = H_1, \tag{11.4.6}$$

où $v = (u', W_a, \mathcal{R}_T(a-w_a))$, $a = \ln(-[u_1]/\varepsilon)$, E et H_1 sont des fonctions de la forme :

$$E = E(v,\partial_y u,\partial_y\Phi,\widetilde{f}).$$

$$H_1 = \rho(x_n)F_1(v,\partial_y u,\partial_y\Phi,\widetilde{f}) + F(v,\partial'_y\Phi)\{\delta_n W_a + \delta_n\mathcal{R}_T(a-w_a)\} + \delta_n H.$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on voit que H_1 ainsi que les arguments des fonctions μ_k et E sont dans $H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T)\cap W^{1,\infty}(\Omega^1_T)$. On conclut en utilisant le résultat suivant (*cf.* proposition 3.2.1 de [Mé1]). □

Lemme 11.4.3. — *Si v est solution d'une équation scalaire de la forme :*

$$\partial_t v + \sum_{k=1}^{n-1}\Phi_k(a)\partial_k v + \Phi_n(a)v = g \tag{11.4.7}$$

où les Φ_k sont des fonctions C^∞ de leur argument, $(a,g)\in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T)\cap W^{1,\infty}(\Omega^1_T)$ et $v_{|\{t<0\}}\in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_0)\cap W^{1,\infty}(\Omega^1_0)$, alors $v\in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T)\cap W^{1,\infty}(\Omega^1_T)$. De plus, il existe une fonction $C(\cdot)$, telle que, si $\|a\|^*_{0,T}\le M$, on a pour tout $\gamma\ge 1$

$$\gamma\|v\|^t_{\sigma,\gamma,T}\le C(M)\Big\{\gamma\|v\|^t_{\sigma,\gamma,0} + \|g\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|a\|^*_{1,T}\|v\|^t_{\sigma,\gamma,T} + \|v\|^*_{1,T}\|a\|^t_{\sigma,\gamma,T}\Big\}.$$

B) Régularité de $\partial^\alpha_y\delta_n\Phi'$

Lemme 11.4.4. — *Pour tout α tel que $|\alpha|\le 2s-\sigma-1$, $\partial^\alpha_y\delta_n\Phi'\in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T)$.*

Démonstration. — Par récurrence sur $|\alpha| = p$. La propriété est vraie pour $p=0$ d'après le lemme 11.4.2. On suppose que pour un entier $p\in\{0,\dots,2s-\sigma-2\}$ on a

$$\partial^\alpha_y\delta_n\Phi'\in H^{0,\sigma}_\gamma(\Omega^1_T),\qquad \text{pour } |\alpha|\le p. \tag{11.4.10}$$

Pour α de longueur $|\alpha| = p+1$, on applique ∂^α_y à l'équation (11.4.6). On obtient alors que $\Theta = \big\{\partial^\beta_y\theta_n\big\}_{|\beta|=p+1}$ est solution d'un système de la forme :

$$\partial_t\Theta - \sum_{k=1}^{n-1}\mu_k(v,\partial'_y\Phi)\partial_k\Theta - E\,\Theta - B\,\Theta = H_2. \tag{11.4.11}$$

Les coefficients μ_k et E sont ceux de l'équation (11.4.6), B est une matrice dont les coefficients sont de la forme

$$B_{\alpha,\beta} = b_{\alpha,\beta}(v, \partial_y \Phi, \partial_y v, \partial_y^2 \Phi),$$

et H_2 est un vecteur dont les composantes sont des fonctions de la forme

$$H_{2,\alpha} = \partial_y^\alpha H_1 + [\partial_y^\alpha, E]\theta_n + H_{3,\alpha}$$

où $H_{3,\alpha}$ désigne une somme de termes de la forme :

$$h_3 = \partial_y^\gamma(h(v, \partial_y' \Phi))\, \partial_y^\beta \theta_n \qquad \text{avec } |\beta| \leq p \text{ et } |\gamma| + |\beta| = p + 2.$$

En tenant compte des hypothèses de récurrence (11.4.2) et (11.4.10), on montre que H_2 ainsi que les arguments des fonctions μ_k, E et B sont dans $H_\gamma^{0,\sigma}(\Omega_T^1) \cap W^{1,\infty}(\Omega_T^1)$. Le lemme 11.4.3, ou plutôt son extension aux systèmes de la forme (11.4.11), implique alors que $\Theta \in H_\gamma^{0,\sigma}(\Omega_T^1)$ ce qui prouve (11.4.10) pour $|\alpha| = p + 1$. □

C) Régularité de $\partial_y^\alpha \delta_n u'$

Lemme 11.4.5. — *Pour tout α tel que $|\alpha| \leq 2s - \sigma - 1$, $\partial_y^\alpha \delta_n u \in H_\gamma^{0,\sigma}(\Omega_T^1)$.*

Démonstration. — Compte tenu de (11.4.5), on voit que $\partial_y^\alpha \delta_n u$ est une somme de termes de la forme :

$$\begin{aligned} A &= \partial_y^{\alpha_1}(g_1(u, \partial_y \Phi', \delta_n \Phi')) \cdot \partial_y^{\alpha_2} \widetilde{f} \qquad && \text{avec } |\alpha_1| + |\alpha_2| = |\alpha|, \\ B &= \partial_y^{\alpha_1}(g_2(u, \partial_y \Phi', \delta_n \Phi')) \cdot \partial_y^{\alpha_2} \delta_j u \qquad && \text{avec } |\alpha_1| + |\alpha_2| = |\alpha|. \end{aligned}$$

D'après le lemme 11.4.4, $\partial_y^\alpha \delta_n \Phi' \in H_\gamma^{0,\sigma}(\Omega_T^1)$ car $|\alpha_1| \leq 2s - \sigma - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence (11.4.2), les termes $\partial_y^{\alpha_1} u$, $\partial_y^{\alpha_2} \partial_j u$, $\partial_y^{\alpha_1} \partial_y \Phi'$ sont dans $H_\gamma^{0,\sigma}(\Omega_T^1)$ car $|\alpha_1| + 1 \leq 2s - \sigma$ et $|\alpha_2| + 1 \leq 2s - \sigma$. Il en résulte que A et B sont dans $H_\gamma^{0,\sigma}(\Omega_T^1)$, ce qui prouve le lemme et achève la preuve de la proposition 11.4.1. □

11.5. Preuve du théorème 11.1.2

Compte tenu du théorème 11.3.1 le théorème 11.1.2 résulte de la proposition suivante.

Proposition 11.5.1. — *Soit s un entier tel que $s \geq s_o + 19$. Si $(u, \Phi) \in \mathcal{F}_\varepsilon^1(s - k, T)$, alors u' et Φ' sont dans $W_\gamma^{2s}(\Omega_T^1)$.*

Démonstration. — Comme précédemment, nous procéderons par récurrence. Pour $\sigma \in \{0, \dots, s\}$, l'hypothèse de récurrence est que

$$\delta^\alpha(u', \Phi') \in W_\gamma^{2\sigma}(\Omega_T^1) \qquad \text{pour } |\alpha| \leq 2(s - \sigma). \tag{11.5.1}$$

Cette propriété est vérifiée pour $\sigma = 0$ d'après la proposition 11.4.1. De plus, on sait que $(u', \Phi') \in W^{2(s-k)}$. On note que $v \in W^{2\sigma+2}$ si et seulement si $v \in H_\gamma^{0,2\sigma+2}$ et $\partial_n v \in W^{2\sigma}$ et que

(11.5.2)) $$||v||_{2\sigma+2,\gamma,T} = ||v||_{2\sigma+2,\gamma,T}^t + ||\partial_n v||_{2\sigma,\gamma,T}^t.$$

Il nous suffit donc de montrer que, sous l'hypothèse (11.5.1) avec $\sigma < s$, on a

$$\partial_y^\alpha \partial_n (u', \Phi') \in W^{2\sigma}(\Omega_T^1), \qquad \text{pour } |\alpha| \leq 2s - 2\sigma - 2. \tag{11.5.3}$$

On procède comme au paragraphe 11.4.

a) On a

$$\partial_n u = \partial_n \Phi \Big\{ g_n(u, \partial_y \Phi) \widetilde{f} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j(u, \partial_y \Phi) \partial_j u \Big\}, \tag{11.5.4}$$

et $\theta_n = \partial_n \Phi'$ vérifie

$$\partial_t \theta_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k(v, \partial_y' \Phi) \partial_k \theta_n - E\, \theta_n = H_1', \tag{11.5.5}$$

où v et E sont comme en (11.4.6) et H_1' est de la forme

$$H_1' = F_1(v, \partial_y u, \partial_y \Phi, \widetilde{f}) + F(v, \partial_y' \Phi)\{\partial_n W_a + \partial_n \mathcal{R}_T(a - w_a)\} + \partial_n H.$$

L'hypothèse de récurrence implique que H_1' et les argument des fonctions μ_k et E sont dans $W^{2\sigma}(\Omega_T^1) \cap W^{1,\infty}(\Omega_T^1)$. On utilise alors le résultat suivant, dont la preuve est similaire à celle de la proposition 3.2.1 de [Mé1], pour conclure que

$$\partial_n \Phi \in W_\gamma^{2\sigma}(\Omega_T^1). \tag{11.5.6}$$

Lemme 11.5.2. — *Si v est solution d'une équation scalaire de la forme* (11.4.7) *avec $(a, g) \in W_\gamma^{2\sigma}(\Omega_T^1) \cap W^{1,\infty}(\Omega_T^1)$ et si $v_{|\{t<0\}} \in W_\gamma^{2\sigma}(\Omega_0^1) \cap W^{1,\infty}(\Omega_0^1)$, alors $v \in W_\gamma^{2\sigma}(\Omega_T^1) \cap W^{1,\infty}(\Omega_T^1)$ et on a les estimations*

$$\gamma ||v||_{2\sigma,\gamma,T} \leq C(M) \Big\{ \gamma ||v_o||_{2\sigma,\gamma,0} + ||g||_{2\sigma,\gamma,T} + ||a||_{1,T}^* ||v||_{2\sigma,\gamma,T} + ||v||_{1,T}^* ||a||_{2\sigma,\gamma,T} \Big\}$$

où M est tel que $||a||_{0,T}^* \leq M$.

b) On montre par récurrence sur $p \in \{0, \ldots, 2s - 2\sigma - 2\}$ que

$$\partial_y^\alpha \partial_n \Phi' \in W^{2\sigma}(\Omega_T^1), \qquad \text{pour } |\alpha| \leq p. \tag{11.5.7}$$

D'après (11.5.6), cette propriété est vraie pour $p = 0$. Supposons la vérifiée pour un $p < 2s - 2\sigma - 2$. Alors, $\Theta = \big\{\partial_y^\beta \partial_n \Phi'\big\}_{|\beta|=p+1}$ est solution d'un système de la forme :

$$\partial_t \Theta - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k(v, \partial_y' \Phi) \partial_k \Theta - E\,\Theta - B\,\Theta = H_2'. \tag{11.5.8}$$

Les coefficients μ_k, E et B sont ceux de l'équation (11.4.11) et les composantes de H_2' sont de la forme

$$H_{2,\alpha}' = \partial_y^\alpha H_1' + [\partial_y^\alpha, E]\theta_n + H_{3,\alpha}$$

où $H_{3,\alpha}'$ désigne une somme de termes de la forme :

$$\partial_y^\gamma (h(v, \partial_y' \Phi))\, \partial_y^\beta \theta_n \qquad \text{avec } |\beta| \leq p \text{ et } |\gamma| + |\beta| = p + 2.$$

En tenant compte des hypothèses de récurrence (11.5.3) et (11.5.7), on montre que H_2' ainsi que les arguments des fonctions μ_k, E et B sont dans $W^{2\sigma}(\Omega_T^1) \cap W^{1,\infty}(\Omega_T^1)$. Le lemme 11.5.2, montre que (11.5.7) est vérifiée à l'ordre $p+1$.

c) On utilise (11.5.4) et (11.5.7) pour montrer que $\partial_y^\alpha \delta_n u \in W_\gamma^{2\sigma}(\Omega_T^1)$ quand $|\alpha| \leq 2s - 2\sigma - 2$.

Cela termine la démonstration de la proposition 11.5.1. Le théorème 11.1.1 est maintenant entièrement démontré. □

CHAPITRE 12

APPLICATION AU SYSTÈME D'EULER. COMPARAISON DES SOLUTIONS

12.1. Le système d'Euler de la dynamique des gaz

En dimension trois d'espace, le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ll}\partial_t \rho + \mathrm{div}_x(\rho v) = 0, & \\ \partial_t(\rho v_i) + \mathrm{div}_x(\rho v_i v) + \partial_i P = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq 3, \\ \partial_t(\rho E) + \mathrm{div}_x(\rho E v + P v) = 0. & \end{array}\right. \tag{12.1.1}$$

Dans (12.1.1), $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ρ désigne la densité, P la pression, $v = (v_1, v_2, v_3)$ la vitesse et $E = e + |v|^2/2$ est l'énergie totale par unité de volume et par unité de masse.

En désignant par S l'entropie, on peut choisir comme fonction inconnue $u = (\rho, v, S) \in \mathbb{R}^5$. La pression P, l'énergie interne spécifique e ainsi que la température T sont des fonctions $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ du couple (ρ, S), reliées par la deuxième loi de la thermodynamique

$$d\mathcal{E} = \mathcal{T} dS + \frac{\mathcal{P}}{\rho^2} d\rho. \tag{12.1.2}$$

En posant $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-\theta_1, -\theta_2, 1)$, la matrice $G(u, \theta)$ introduite en (2.1.2) est

$$G_1(u,\theta) = \begin{bmatrix} v\cdot\xi & \rho\xi_1 & \rho\xi_2 & \rho\xi_3 & 0 \\ (c^2/\rho)\xi_1 & v\cdot\xi & 0 & 0 & (1/\rho)\partial_S P\,\xi_1 \\ (c^2/\rho)\xi_2 & 0 & v\cdot\xi & 0 & (1/\rho)\partial_S P\,\xi_2 \\ (c^2/\rho)\xi_3 & 0 & 0 & v\cdot\xi & (1/\rho)\partial_S P\,\xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v\cdot\xi \end{bmatrix} \tag{12.1.3}$$

où c désigne la vitesse locale du son définie par

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \tag{12.1.4}$$

L'hypothèse 1 d'hyperbolicité (*cf.* § 2.1), est satisfaite dès que $\partial P/\partial\rho > 0$. Les valeurs propres de $G_1(u,\theta)$ sont

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1(u,\theta) = v\cdot\xi - c|\xi|\\ \lambda_2(u,\theta) = v\cdot\xi\\ \lambda_3(u,\theta) = v\cdot\xi + c|\xi|\end{array}\right. \tag{12.1.5}$$

Les hypothèses 2 et 3 sont satisfaites pour les valeurs propres extrêmes λ_1 et λ_3, qui sont simples et vraiment non linéaires. Les vecteurs propres associés sont

$$r_1(u,\theta) = \begin{pmatrix}-\rho|\xi|\\ c\xi_1\\ c\xi_2\\ c\xi_3\\ 0\end{pmatrix}, \qquad r_3(u,\theta) = \begin{pmatrix}\rho|\xi|\\ c\xi_1\\ c\xi_2\\ c\xi_3\\ 0\end{pmatrix}. \tag{12.1.6}$$

La valeur propre λ_2 est de multiplicité 3 et le sous-espace propre associé est de dimension 3. Dans toute la suite, nous étudions les 1-chocs faibles, associés à la valeur propre λ_1, qu'on notera simplement λ. L'étude des chocs faibles associés à λ_3 se ramène à celle des 1-chocs, en changeant x_3 en $-x_3$ et u_3 en $-u_3$, ce qui laisse l'équation invariante.

Après le changement de variables du § 2.3, on considère comme en (2.4.1) la famille de chocs plan $(\underline{u}_1(\varepsilon), \underline{\Phi}_1(\varepsilon))$

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{u}_1^-(\varepsilon) = u_o = (\rho_o, v_o, S_o),\\ \underline{u}_1^+(\varepsilon) = (\rho_o - \varepsilon, v_{o,1}^+(\varepsilon), S_o^+(\varepsilon)) = u_o - \varepsilon\,\mathcal{U}_1^-(u_o, 0, -\varepsilon),\\ \underline{\Phi}_1(\varepsilon) = x_n + \sigma_1(\varepsilon)t \qquad \text{avec } \sigma_1(\varepsilon) = \lambda(\underline{u}_1^+(\varepsilon), u_o, 0).\end{array}\right. \tag{12.1.7}$$

où l'état de gauche $u_o = (\rho_o, v_o, S_o)$ est fixé. On paramètre ici le saut de u par le saut de ρ et $\mathcal{U}_1^-$ reprend la notation (2.4.6).

On sait que $\lambda(u,\theta)$ se prolonge en la valeur propre $\lambda(u^+,u^-,\theta)$ de $G_1(u^+,u^-,\theta)$ et on note $R_1(u^+,u^-,\theta)$ le vecteur propre associé dont la première composante est égale à 1. Nous désignons par $\mathcal{L}(u,\nabla\Phi)v$ l'opérateur défini par (10.1.7) et par $g(\Gamma u^+,\Gamma u^-,\partial_y\phi)$ la fonction

$$g(\Gamma u^+,\Gamma u^-,\partial_y\phi) = \sum_{j=0}^{2}[f_j(u)]\partial_j\phi - [f_3(u)]. \tag{12.1.8}$$

Comme au chapitre 3, on considère une famille de données de Cauchy compatibles $\mathcal{F}^o(2s+3)$. On note $\mathcal{F}_\varepsilon^{1a}(2s+1)$ une famille de solutions approchées construites par le théorème 3.1.2. Pour un couple $(u_{1a},\Phi_{1a}) \in \mathcal{F}_\varepsilon^{1a}(2s+1)$, le problème (3.2.3)...

(3.2.10) s'écrit

$$
\text{(S.I)} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(u_1, \nabla\Phi_1)u_1 = F_1 \qquad \text{dans } \Omega_T, \\ g(\Gamma u_1^+, \Gamma u_1^-, \partial_y \phi_1) = 0 \qquad \text{sur } \omega_T, \\ [\Phi_1] = 0 \qquad \text{sur } \omega_T, \\ \partial_t \Phi_1^+ = \lambda_1(u_1^+, u_1^+ - p_1^+, \partial_y' \Phi_1^+) \qquad \text{dans } \Omega_T^+, \\ \partial_t \Phi_1^- = \lambda_1(u_1^- + p_1^-, u_1^-, \partial_y' \Phi_1^-) \qquad \text{dans } \Omega_T^-, \\ u_1 = u_{1a} \qquad \Phi_1 = \Phi_{1a} \qquad \text{pour } t < 0 \end{cases}
$$

où

$$
(12.1.9) \qquad \begin{cases} p_1^+ = -\varepsilon\, e^{A_1}\, \mathcal{U}_1^+(u_1^+, \partial_y' \Phi_1, -\varepsilon\, e^{A_1}), \\ p_1^- = -\varepsilon\, e^{A_1}\, \mathcal{U}_2^-(u_1^-, \partial_y' \Phi_1, -\varepsilon\, e^{A_1}), \end{cases}
$$

et $A_1 = W_{1,a} + \mathcal{R}_T(a_1 - w_{1,a})$, $a_1 = \ln(-[\rho_1]/\varepsilon)$.

D'après le théorème 3.5.3, il existe $T > 0$ indépendant de ε et une unique solution $(u_1, \Phi_1) \in \mathcal{F}_\varepsilon^1(s, T)$ du problème (S.I).

12.2. Le système d'Euler isentropique

Le système (12.1.1) admet des solutions *régulières* à entropie constante S_o. On vérifie classiquement, que $u = (\rho, v, S_o)$ est solution de classe C^1 de (12.1.1) si et seulement si $\widetilde{u} = (\rho, v) \in \mathbb{R}^4$ vérifie

$$
(12.2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v_i) + \operatorname{div}_x(\rho v_i v) + \partial_i P = 0 \qquad \text{pour } 1 \le i \le 3. \end{cases}
$$

Ce système est complété de la loi d'état $P = \mathcal{P}(\rho, S_o)$. La matrice (2.1.2) qui correspond à ce système vaut

$$
(12.2.2) \qquad G_2(\widetilde{u}, \theta) = \begin{bmatrix} v \cdot \xi & \rho\xi_1 & \rho\xi_2 & \rho\xi_3 \\ (c^2/\rho)\xi_1 & v \cdot \xi & 0 & 0 \\ (c^2/\rho)\xi_2 & 0 & v \cdot \xi & 0 \\ (c^2/\rho)\xi_3 & 0 & 0 & v \cdot \xi \end{bmatrix}
$$

Les valeurs propres de $G_2((\rho, v), \theta)$ sont celles de $G_1((\rho, v, S_o), \theta)$. La plus petite, notée $\widetilde{\lambda}$, vérifie donc

$$
(12.2.3) \qquad \widetilde{\lambda}(\widetilde{u}, \theta) = \lambda(u, \theta) \qquad \text{lorsque } u = (\widetilde{u}, S_o).
$$

On sait que $\widetilde{\lambda}$ se prolonge en valeur propre $\widetilde{\lambda}_2(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \theta)$ de $G_2(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \theta)$ et on note $R_2(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \theta)$ le vecteur propre associé de première composante égale à 1. On a

$$
(12.2.4) \qquad R_1(u, \theta) = \begin{pmatrix} R_2(\widetilde{u}, \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{lorsque } u = (\rho, v, S_o).
$$

On note

$$
(12.2.5) \qquad g_2(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \theta) = \sum_{j=0}^{2} [\widetilde{f}_j(\widetilde{u})]\theta_j - [\widetilde{f}_3(\widetilde{u})].
$$

Les fonctions $\widetilde{f}_j(\widetilde{u})$ à valeur dans $\mathbb{R}^4$ sont obtenues en supprimant la dernière composante de $f_j((\widetilde{u}, S_o)) \in \mathbb{R}^5$. On rappelle (§ 2.2) que si $g_2(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \theta) = 0$, on a des relations de la forme

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^+ &= \widetilde{u}^- + [\rho]\,\widetilde{\mathcal{U}}_2^+(\widetilde{u}^-, \theta, [\rho]), \\ \widetilde{u}^- &= \widetilde{u}^+ - [\rho]\,\widetilde{\mathcal{U}}_2^-(\widetilde{u}^+, \theta, [\rho]). \end{aligned} \tag{12.2.6}$$

Pour comparer ces formules à (12.1.7), on introduit les notations
(12.2.7)

$$\mathcal{U}_2^-((\rho, v, S), \theta, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}}_2^-((\rho, v), \theta, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_2^+((\rho, v, S), \theta, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}}_2^+((\rho, v), \theta, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment, nous définissons une famille de chocs plans du système (12.2.1). Ils sont associés au même état gauche constant, mais l'état de droite est différent de (12.2.7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_2^-(\varepsilon) = u_o = (\rho_o, v_o, S_o), \\ \underline{u}_2^+(\varepsilon) = (\rho_o - \varepsilon, v_2(\varepsilon), S_o) = u_o - \varepsilon\, U_2^-(u_o, 0, -\varepsilon), \\ \underline{\Phi}_2(\varepsilon) = x_n + \sigma_2(\varepsilon)t \qquad \text{avec } \sigma_2(\varepsilon) = \widetilde{\lambda}(\widetilde{\underline{u}_2^+}(\varepsilon), \widetilde{u}_o, 0). \end{array} \right. \tag{12.2.8}$$

On désigne par $\mathcal{L}_2(\widetilde{u}, \nabla\Phi)\widetilde{u}$ l'opérateur qui se déduit de (12.2.1) par le changement de variable (2.3.1). On considère une famille $\mathcal{F}_\varepsilon^{2a}$ de solutions approchées construites à partir d'une famille de données de Cauchy compatibles $\mathcal{F}_\varepsilon^{2o}$ pour le système (12.2.1). Pour $(u_{2a}, \Phi_{2a}) \in \mathcal{F}_\varepsilon^{2a}$ avec $u_{2a} = (\widetilde{u}_{2a}, S_o)$ on considère le problème (3.2.3)... (3.2.10), où les inconnues sont $\widetilde{u} \in \mathbb{R}^4$ et ϕ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_2(\widetilde{u}_2, \nabla\Phi_2)\widetilde{u}_2 = \widetilde{F}_2 & \text{dans } \Omega_T, \\ g_2(\Gamma\widetilde{u}_2^+, \Gamma\widetilde{u}_2^-, \partial_y\phi_2) = 0 & \text{sur } \omega_T, \\ [\Phi_2] = 0 \quad \text{sur } \omega_T, & \\ \partial_t\Phi_2^+ = \widetilde{\lambda}(\widetilde{u}_2^+, \widetilde{u}_2^+ - \widetilde{p}_2^+, \partial_y'\Phi^+) & \text{dans } \Omega_T^+ \\ \partial_t\Phi_2^- = \widetilde{\lambda}(\widetilde{u}_2^- + \widetilde{p}_2^-, u_2^-, \partial_y'\Phi_2^-) & \text{dans } \Omega_T^-, \\ \widetilde{u}_2 = \widetilde{u}_{2,a} \qquad \Phi_2 = \Phi_{2,a} & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \tag{S'.II}$$

Dans $(S'.II)$, $\widetilde{p}_2^+$ et $\widetilde{p}_2^-$ désignent les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{p}_2^+ = -\varepsilon\, e^{A_2}\,\widetilde{\mathcal{U}}_2^+(\widetilde{u}_2^+, \partial_y'\Phi_2, -\varepsilon\, e^{A_2}), \\ \widetilde{p}_2^- = -\varepsilon\, e^{A_2}\,\widetilde{\mathcal{U}}_2^-(\widetilde{u}_2^-, \partial_y'\Phi_2, -\varepsilon\, e^{A_2}), \end{array} \right. \tag{12.2.9}$$

où $A_2 = W_{2a} + \mathcal{R}_T(a_2 - w_{2a})$ et $a_2 = \ln(-[\rho_2]/\varepsilon)$.

D'après le théorème 3.5.3, il existe $T > 0$ indépendant de ε et une solution $(u_2, \Phi_2) \in \mathcal{F}_\varepsilon^2(s, T)$. On définit $u_2 = (\widetilde{u}_2, S_o)$ qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(u_2, \nabla\Phi_2)u_2 = F_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{F}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \\ g(\Gamma u_2^+, \Gamma u_2^-, \partial_y\phi_2) = G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ h_5 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \tag{S.II}$$

Que F_2 soit de la forme indiquée, traduit le fait que les solutions régulières du système isentropique sont solutions à entropie constante du système complet. Par contre, la cinquième composante h_5 n'est pas nulle, traduisant le fait que le résultat ci-dessus n'est pas vrai pour les solutions faibles. De manière équivalente, si $(\widetilde{u}, \partial_y \phi)$ vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot $\widetilde{g}_2 = 0$, cela n'implique pas que $((\widetilde{u}, S_o), \partial_y \phi)$ vérifie la condition de Rankine-Hugoniot $g = 0$. De façon précise, on a le résultat suivant.

Proposition 12.2.1. — *Si $(\widetilde{u}_2, \partial_y \Phi_2)$ vérifient $\widetilde{g}_2(\Gamma\widetilde{u}_2^+, \Gamma\widetilde{u}_2^-, \partial_y \Phi_2) = 0$, la fonction h_5 est de la forme*

$$h_5 = [\rho_2]^3 g_3(\Gamma\widetilde{u}_2^+, \Gamma\widetilde{u}_2^-, \partial_y \phi_2), \tag{12.2.10}$$

où g_3 est une fonction C^∞ de ses arguments.

Démonstration. — Ce résultat est classique. On en rappelle brièvement la preuve. Par rotation, on peut supposer que la normale au choc est $(-\sigma, 0, 0, 1)$. Oubliant les indices 2, on écrit $u_2 = (\rho, v, S_o) \in \mathbb{R}^5$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Les conditions de Rankine-Hugoniot s'écrivent

$$\begin{cases} [v_1] = [v_2] = 0, \\ [\rho(v_3 - \sigma)] = 0, \\ \rho(v_3 - \sigma)[v_3] = -[P]. \end{cases} \tag{12.2.11}$$

On pose alors $m = \rho^+(v_3^+ - \sigma) = \rho^-(v_3^- - \sigma)$. On a

$$h_5 = \sigma[\rho E] - [\rho E v_3 + P v_3] \tag{12.2.12}$$

et tous calculs faits, en utilisant (12.2.11), on obtient

$$h_5 = -m\Big([e] + [\tau]\frac{P^+ + P^-}{2}\Big) \tag{12.2.13}$$

avec $\tau = 1/\rho$ et $e = \mathcal{E}(\rho, S_o)$, $P = \mathcal{P}(\rho, S_o)$. D'après (12.1.2), on a $\partial_\rho \mathcal{E} = \mathcal{P}/\rho^2$ et $\partial \mathcal{E}/\partial \tau = -\mathcal{P}$. La formule de Taylor implique alors que

$$[e] + [\tau]\frac{P^+ + P^-}{2} = [\tau]^3 g_3(\rho^+, \rho^-, S_o) \tag{12.2.14}$$

et la proposition suit. On notera que $g_3(\rho, \rho, S_o) \neq 0$ quand $\partial^2\mathcal{P}/\partial^2\tau \neq 0$. □

Corollaire 12.2.2. — *Si $(\widetilde{u}_2, \partial_y \Phi_2) \in \mathcal{F}^2(s, T)$, la fonction*

$$G_2' = g(\Gamma u_2^+, \Gamma u_2^-, \partial_y \phi_2) - g(\underline{u}_2^+(\varepsilon), \underline{u}_2^-(\varepsilon), \sigma_2(\varepsilon)) \tag{12.2.15}$$

s'écrit

$$G_2' = \varepsilon^3 g(\varepsilon, \Gamma(u_2^+)', \Gamma(u_2^-)', \partial_y \phi_2') \tag{12.2.16}$$

où $u_2' = u_2 - \underline{u}_2(\varepsilon)$, $\Phi_2' = \Phi' - \underline{\Phi}_2(\varepsilon)$ et g est une fonction C^∞ de ses arguments telle que $g(\varepsilon, 0, 0, 0) = 0$.

12.3. Le théorème de comparaison

Dans ce paragraphe, nous comparons les solutions de (S.I) et de (S.II). La première étape est de comparer les chocs plans (12.1.7) et (12.2.8).

Lemme 12.3.1. — *Le vecteur $u_o = (\rho_o, v_o, S_o)$ étant fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ on a :*

$$\begin{cases} |\underline{u}_1^+(\varepsilon) - \underline{u}_2^+(\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^3, \\ |\sigma_1(\varepsilon) - \sigma_2(\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^2. \end{cases} \tag{12.3.1}$$

Démonstration. — On a $\underline{u}_1^+(\varepsilon) = u_o - \varepsilon\, R_1(\underline{u}_1^+(\varepsilon), u_o, 0)$ et

$$\underline{u}_1^+(\varepsilon) = u_o - \varepsilon\, R_1(u_o, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\, d_u R_1(u_o, 0) \cdot R_1(u_o, 0) + \varepsilon^3\, g_1(u_o, \varepsilon). \tag{12.3.2}$$

On a de même :

$$\underline{\widetilde{u}}_2^+(\varepsilon) = \widetilde{u}_o - \varepsilon\, R_2(\widetilde{u}_o, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\, d_u R_2(\widetilde{u}_o, 0) \cdot R_2(\widetilde{u}_o, 0) + \varepsilon^3\, g_2(\widetilde{u}_o, \varepsilon). \tag{12.3.3}$$

Comme $R_1(u, \theta) = (R_2(\widetilde{u}, \theta), 0)$, on en déduit que $\underline{u}_1(\varepsilon) - \underline{u}_2(\varepsilon) = O(\varepsilon^3)$.

On a de même,

$$\sigma_1(\varepsilon) = \lambda_1(u_o, 0) - \frac{\varepsilon}{2}\, d_u\lambda_1(u_o, 0).R_1(u_o, 0) + \varepsilon^2\, g_1(u_o, \varepsilon), \tag{12.3.4}$$

$$\sigma_2(\varepsilon) = \lambda_2(\widetilde{u}_o, 0) - \frac{\varepsilon}{2}\, d_u\lambda_2(\widetilde{u}_o, 0).R_2(\widetilde{u}_o, 0) + \varepsilon^2\, g_2(\widetilde{u}_o, \varepsilon). \tag{12.3.5}$$

Il en résulte que $|\sigma_1(\varepsilon) - \sigma_2(\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^2$ □

Remarque 12.3.2. — Pour S_o fixé, les fonctions

$$(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-) \longmapsto \lambda(u^+, u^-, \theta) \quad \text{et} \quad (\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-) \longmapsto \widetilde{\lambda}(\widetilde{u}^+, \widetilde{u}^-, \theta)$$

sont différentes et ne coïncident que si $\widetilde{u}^+ = \widetilde{u}^-$. Il en résulte que $\sigma_1 - \sigma_2$ est seulement en ε^2.

Comme au paragraphe 2.6, on se donne un entier $2s > 3/2 + 40$. On se donne deux familles de valeurs initiales compatibles globales au sens de la définition 6.2.1, respectivement pour les systèmes (S.I) et (S.II). On les note $\mathcal{F}^{1,o}(2s+3)$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^{2,o}(2s+3)$. On note alors $\mathcal{F}^{2,o}(2s+3)$ l'ensemble des $((\widetilde{u}_o, S_o), \Phi_o)$ avec $(\widetilde{u}_o, , \Phi_o) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{2,o}(2s+3)$. Pour $i = 1, 2$ et $(u_{i,o}, \Phi_{i,o}) \in \mathcal{F}^{i,o}(2s+3)$, on note A_i^ε la fonction associée comme indiqué en (6.2.1). On suppose que les données initiales des deux systèmes sont proches au sens suivant.

Hypothèse 12.3.3. — *Il existe $T_1 > 0$, ε_o et une constante $K > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et tout $(u_{2,o}, \Phi_{2,o}) \in \mathcal{F}_\varepsilon^{2,o}(2s+3)$, il existe $(u_{1,o}, \Phi_{1,o}) \in \mathcal{F}_\varepsilon^{1,o}(2s+3)$ tel que*

$$\|u'_{1,o} - u'_{2,o}\|_{(p,2s+3)} + \|\Phi^\varepsilon_{1,o} - \Phi^\varepsilon_{2,o}\|_{(p,2s+4)} + \varepsilon\,\|A_1^\varepsilon - A_2^\varepsilon\|_{(2s+3,T_1')} \leq K\,\varepsilon^2. \tag{12.3.6}$$

Dans (12.3.6), on a noté $\|\cdot\|_{(p,s)}$ la norme de l'espace p-$H^s(\mathbb{R}^3)$ et $\|\cdot\|_{(s,T)}$ la norme de $H^s(]-T,T[\times\mathbb{R}^3)$. En outre, $u'_{i,o} = u_{i,o} - \underline{u}_i(\varepsilon)$.

Nous donnerons ci-dessous un exemple de données compatibles vérifiant (12.3.6). Le théorème 3.1.2 fournit alors deux familles de solutions approchées globales, que nous notons $\mathcal{F}^{1,a}(2s+1)$ et $\mathcal{F}^{2,a}(2s+1)$. Le théorème 2.6.1 fournit un temps $T>0$ et $\varepsilon_1>0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_1]$, tout $(u_{1,o},\Phi_{1,o}) \in \mathcal{F}^{1,o}_\varepsilon$ [resp. $(u_{1,o},\Phi_{1,o}) \in \mathcal{F}^{1,o}_\varepsilon$], le problème (S.I) [resp. (S.II)] admet une unique solution (u_1,Φ_1) [resp. (u_2,Φ_2)]. En outre, ces solutions sont uniformément bornées dans $W^{2s}(\Omega_T)$, donc dans $W^{5,\infty}(\Omega_T)$. Il existe donc une constante M telle que

$$\sum_{i=1}^{2} \|u_i - \underline{u}_i(\varepsilon)\|^*_{5,T} + \|\Phi_i - \underline{\Phi}_i(\varepsilon)\|^*_{5,T} + \|[a_i]\|^*_{5,T} \le M \tag{12.3.7}$$

Comme auparavant, a_i est lié au saut de la première composante de u. Ici, on peut prendre $a_i = \ln(-[\rho_i]/\varepsilon)$.

Pour comparer les solutions, on introduit les notations

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i - \underline{u}_i(\varepsilon), \qquad & \Phi'_i &= \Phi_i - \underline{\Phi}_i,\\ v &= u'_2 - u'_1, & \Psi &= \Phi'_2 - \Phi'_1, \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

$$\begin{aligned} N(v,\Psi,T) = \|v\|_{4,T} + \|\Psi\|_{4,T} + \varepsilon^{1/2}|\Gamma v|_{4,T} + \varepsilon^{1/2}|\Gamma\Psi|_{4,T}\\ +\varepsilon\,|\Gamma\Psi|_{5,T} + \varepsilon^{1/2}|[v]/\varepsilon\,|_{o,T} \end{aligned} \tag{12.3.9}$$

Théorème 12.3.4. — *Il existe une constante C telle que pour $\varepsilon \in]0,\varepsilon_1]$ et $(u_{i,o},\Phi_{i,o}) \in \mathcal{F}^{i,o}_\varepsilon(2s+3)$ vérifiant* (12.3.6), *on a l'estimation :*

$$N(v,\Psi,T) \le C(M,K)\,\varepsilon^{3/2}. \tag{12.3.10}$$

La première étape de la preuve consiste à montrer que les solutions approchées vérifient une estimation analogue à (12.3.6). On montre ensuite que la bonne inconnue $V = v - \Psi(\partial_n u_1/\partial_n\phi_1)$ est solution d'un problème mixte linéaire. On en déduit une estimation d'énergie pour $(V,\Gamma\Psi)$ et ensuite pour $(v,\Gamma\Psi)$. Cette estimation (théorème 12.6.1) fait apparaître au second membre les termes $\gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,T}$ et $\gamma^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}\,|[v]/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T}$ qu'on majore aux paragraphes 12.7 et 12.8. La preuve du théorème 12.3.4 est faite au paragraphe 12.9.

Exemple 12.3.5.. — Nous terminons ce paragraphe en donnant un exemple de deux familles de données initiales compatibles vérifiant l'hypothèse 12.3.3. On se donne un vecteur fixe $u_o = (\rho_o, v_o, S_o)$ et on considère les deux chocs plans $(\underline{u}_1(\varepsilon),\underline{\Phi}_1(\varepsilon))$, $(\underline{u}_2(\varepsilon),\underline{\Phi}_2(\varepsilon))$ définis par (12.1.7) et (12.2.8). D'autre part, on considère des fonctions $\widetilde{u}_o$ et h_o définies sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^5$, C^∞ et à support compact dans $\{x_n \ge 0\}$. On pose

$$u_{2,o}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{u}_o(x)\\ S_o \end{pmatrix}, \qquad u_{1,o}(x) = u_{2,o}(x) + \varepsilon^2 h_o(x).$$

Comme au paragraphe 2.5, on définit les deux familles de données initiales

$$(12.3.11)\qquad \begin{cases} u^{\varepsilon-}_{1,o}(x) = u_o, \\ u^{\varepsilon+}_{1,o}(x) = \underline{u}_1^+(\varepsilon) + u_{1,o}(x), \\ \Phi^{\varepsilon}_{1,o}(x) = x_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} u^{\varepsilon-}_{2,o}(x) = u_o, \\ u^{\varepsilon+}_{2,o}(x) = \underline{u}_2^+(\varepsilon) + u_{2,o}(x), \\ \Phi^{\varepsilon}_{2,o}(x) = x_n. \end{cases}$$

Comme au paragraphe 2.5, la platitude de v_1 et v_2 sur $\{x_n = 0\}$ implique que ces familles sont compatibles pour le système d'Euler (S.I) et (S.II) respectivement. De plus ces deux familles vérifient bien la condition (12.3.6).

12.4. Comparaison des solutions approchées

Nous considérons les deux familles $\mathcal{F}^{1,a}$ et $\mathcal{F}^{2,a}$ de solutions approchées données par le théorème 3.1.2 (voir § 6.4). On peut supposer qu'elles sont définies sur le même ensemble $\Omega_{T_1} =]T_o, T_1[\times \mathbb{R}^n$ avec $T_o < 0 < T_1$.

Proposition 12.4.1. — *Il existe ε_o et $C > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$ et tout $(u_{2,a}, \Phi_{2,a}) \in \mathcal{F}^{2,a}_\varepsilon(2s+3)$, il existe $(u_{1,a}, \Phi_{1,a}) \in \mathcal{F}^{1,a}_\varepsilon(2s+3)$ tel que*

$$(12.4.1)\qquad \|u'_{1,a} - u'_{2a}\|_{(p,2s+1,T_1)} + \|\Phi'_{1a} - \Phi'_{2a}\|_{(p,2s+1,T_1)} \leq C\,\varepsilon^2.$$

Pour $i = 1, 2$, on a noté

$$u'_{i,a} = u_{i,a} - \underline{u}_i(\varepsilon), \qquad \Phi'_{i,a} = \Phi_{i,a} - \underline{\Phi}_i(\varepsilon).$$

En outre, $\|u\|_{(p,s,T)}$ désigne la norme de p-$H^s(\Omega_T)$.

Démonstration. — On suit les étapes du paragraphe 6.4. On construit par récurrence sur $j \in \{1, \dots, 2s-1\}$ des fonctions $u^\pm_{1,j}, \Phi^\pm_{1,j}, z^\pm_{1,j-1}$ et $u^\pm_{2,j}, \Phi^\pm_{2,j}, z^\pm_{2,j-1}$ à l'aide des fonctions $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{Z}_j, \mathcal{F}_j, \mathcal{U}_j$ (voir les formules (6.1.6) à (6.1.10)). Les fonctions $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{Z}_j$ sont identiques pour les deux systèmes, mais les fonctions $\mathcal{F}_j, \mathcal{U}_j$ sont différentes. En effet, les fonctions $\mathcal{F}_{1,j}$ et $\mathcal{F}_{2,j}$ sont obtenues en dérivant par rapport à t et à l'ordre j les équations :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi^+ = \lambda(u^+, u^+ - p^+, \partial'_y \Phi^+) = \mathcal{F}_1^+(u^+, \partial'_y \Phi^+, \rho), \\ \partial_t \Phi^+ = \widetilde{\lambda}(u^+, u^+ - p^+, \partial'_y \Phi^+) = \mathcal{F}_2^+(u^+, \partial'_y \Phi^+, \rho), \end{cases}$$

avec p^+ donné par (12.3.13) et $\rho = -\varepsilon e^A$. Cependant, en comparant les développements de Taylor de λ et $\widetilde{\lambda}$ et en utilisant les relations (12.2.3) (12.2.4), on voit qu'il existe une fonction g, C^∞ de ses arguments telle que

$$(12.4.2)\qquad \mathcal{F}_1^+(u^+, \partial'_y \Phi^+, \rho) = \mathcal{F}_2^+(u^+, \partial'_y \Phi^+, \rho) + \varepsilon^2 g(\varepsilon, u^+, \partial'_y \Phi^+, A).$$

On a un résultat analogue pour les fonctions $\mathcal{F}_1^-$ et $\mathcal{F}_2^-$. De même, les fonctions $\mathcal{U}_{i,j}$ sont construites en dérivant les relations de saut

$$[u_i] = \mathcal{U}_i(u^-, \partial'_y \phi, \rho) = \rho U^-(u^-, \partial'_y \phi, \rho)$$

et on a

$$\mathcal{U}_1(u^-, \partial'_y\phi, \rho) = \mathcal{U}_2(u^-, \partial'_y\phi, \rho) + \varepsilon^2 g_1(\varepsilon, u^+, \partial'_y\phi^+, A). \tag{12.4.3}$$

Les formules (6.1.6) à (6.1.9) et la propriété (6.2.1) montrent alors que

$$\begin{aligned} \|u_{1,j} - u_{2,j}\|_{(p,2s+3-j)} + \|\Phi_{1j} - \Phi_{2j}\|_{(p,2s+3-j)} \\ + \|z_{1,j-1} - z_{2,j-1}\|_{(p,2s+3-j)} \le C\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{12.4.4}$$

On construit $u^-_{1,a}$ et $u^-_{2,a}$ sur $\Omega^-_{T_1}$ par relèvement des fonctions $u^-_{1,j}$, $u^-_{2,j}$. Il en résulte que

$$\|u^-_{1a} - u^-_{2a}\|_{H^{2s+3}(\Omega^-_{T_1})} \le C\varepsilon^2 \tag{12.4.5}$$

En reprenant ensuite toute les étapes du paragraphe 6.4, on construit successivement les fonctions Φ^-_1, Φ^-_2, z^-_1, z^-_2, $u^+_1(t,x',0)$, $u^+_2(t,x',0)$, etc. À chaque étape, on obtient alors pour les différences $\Phi^-_1 - \Phi^-_2$, $z^-_1 - z^-_2$, $u^+_1 - u^+_2$,... des estimations de la forme (12.4.4) et la proposition 12.4.1 en résulte. □

12.5. Le problème linéaire pour $(V, \Gamma\Psi)$

Comme dans les paragraphes précédent, on introduit, avec les notations (12.3.8),

$$V = v - \Psi\frac{\partial_n u_1}{\partial_n \phi_1} \tag{12.5.1}$$

On désigne par $\mathcal{L}$ l'opérateur (10.1.7) et par B la matrice qui apparaît dans (10.3.1).

Proposition 12.5.1. — *V et $\Gamma\Psi = \psi$ vérifient*

$$\mathcal{L}(u_1, \nabla\Phi_1)V + B(u_1, \nabla u_1, \nabla\Phi_1)V = F = (F_2 - F_1) + r_1 + r_2 + r_3, \tag{12.5.2}$$

$$X_{u_1}(\psi) - [\mathcal{M}\,V] - \psi\frac{\partial_n u_1}{\partial_n \phi_1} = G = G = G'_2 + r_4 + r_5, \tag{12.5.3}$$

où G'_2 est défini par (12.2.15), *et*

a) r_1 est une somme de termes de la forme

$$g(u_1, u_2, \nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)\, v^{\alpha_1}\, (\nabla v)^{\alpha_2}\, (\nabla\Psi)^{\alpha_3} \qquad \text{avec } |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = 2,$$

b) $r_2 = -\Psi\partial_n F_1/\partial_n\phi_1$,

c) $r_3 = \varepsilon^2 g_1(\varepsilon, w_1)$ où $w_1 = \{(\partial^\alpha u'_i, \partial^\beta\Phi'_i, \partial_n F_1)\}_{\{i\in\{1,2\}, |\alpha|\le 2, |\beta|\le 2\}}$,

d) r_4 est une fonction de la forme

$$\begin{aligned} r_4 = [u_1]\, h_1(u_1, u_2)\Gamma v \times \partial_y\psi + [u_1]\, h_2(u_1, u_2, \partial_y\phi_1)\Gamma v \times \Gamma v \\ + [v]\, h_3(u_1, u_2)\, \partial_y\psi + [v]\, h_4(u_1, u_2, \partial_y\phi_1)\, \Gamma v, \end{aligned}$$

e) $r_5 = \varepsilon^3 g_2(\varepsilon, w_2)$ où $w_2 = (\Gamma u'_1, \Gamma u'_2, \partial_y\phi'_1, \partial_y\phi'_2)$.

Les fonctions g_1 et g_2 sont des fonctions régulières de leurs arguments telles que $g_1(\varepsilon, 0) = g_2(\varepsilon, 0) = 0$.

Démonstration. — En notant $v_1 = u_2 - u_1$, $\Psi_1 = \Phi_2 - \Phi_1$ et $\mathcal{L}^2$ le linéarisé de $\mathcal{L}$, on a

$$\mathcal{L}(u_2, \nabla\Phi_2)u_2 = \mathcal{L}(u_1, \nabla\Phi_1)u_1 + \mathcal{L}^2(u_1, \nabla\Phi_1)(v_1, \Psi_1) + r_1' \tag{12.5.4}$$

où r_1' est un reste quadratique s'exprimant comme une somme de termes de la forme :

$$r_1' = g(u_1, u_2, \nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)\, v_1^{\alpha_1}\, (\nabla v_1)^{\alpha_2}\, (\nabla\Psi_1)^{\alpha_3} \quad \text{avec } |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = 2. \tag{12.5.5}$$

Ensuite, d'après le lemme 10.3.1,

$$V_1 = v_1 - \Psi_1 \frac{\partial_n u_1}{\partial_n \phi_1}$$

et $\psi_1 = \Gamma\Psi_1$ vérifient

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u_1, \nabla\Phi_1)V_1 + B(u_1, \nabla u_1, \nabla\Phi_1)V_1 = F', \\ X_{u_1}(\psi_1) - [\mathcal{M}\, V_1] - \psi_1\, (\partial_n u_1 / \partial_n \Phi_1) = G', \end{cases} \tag{12.5.5}$$

où $F' = (F_2 - F_1) + r_1' - \Psi_1\,(\partial_n F_1/\partial_n\Phi_1)$, $G' = G_2 + r_4'$ où r_4' est un reste de la forme :

$$\begin{aligned} r_4' = [u_1]\, h_1(u_1, u_2)\Gamma v_1 \times \partial_y\psi_1 + [u_1]\, h_2(u_1, u_2, \partial_y\phi_1)\Gamma v_1 \times \Gamma v_1 \\ + [v_1]\, h_3(u_1, u_2)\, \partial_y\psi_1 + [v_1]\, h_4(u_1, u_2, \partial_y\phi_1)\, \Gamma v_1. \end{aligned}$$

En substituant $v_1 = v + \underline{u}_2(\varepsilon) - \underline{u}_1(\varepsilon)$ et $\Psi_1 = \Psi + \underline{\Phi}_2(\varepsilon) - \underline{\Phi}_1(\varepsilon)$ et en tenant compte du lemme 12.3.1, on voit que (V, ψ) vérifie le système (12.5.2) (12.5.3) avec, aux membres de droite, les fonctions F et G de la forme indiquée. □

12.6. Inégalités d'énergie pour $(v, \Gamma\Psi)$

Avec les notations précédentes, on note

$$\begin{aligned} N(v, \psi, s, \gamma, T) = \gamma\|v\|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\, |\Gamma v|_{2s,\gamma,T} \\ + \gamma^{3/2}\varepsilon^{1/2}\, |\psi|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon\, |\psi|_{2s+1,\gamma,T} \end{aligned} \tag{12.6.1}$$

Proposition 12.6.1. — *Sous les hypothèses* (12.3.6) (12.3.7), *il existe des constantes C et et γ_o telles que pour tout $\gamma \geq \gamma_o$ on a*

$$\begin{aligned} N(v, \psi, 2, \gamma, T) \leq C\Big\{N(v, \psi, 2, \gamma, 0) + \gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,T} \\ + \|F\|_{4,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\, |G/\varepsilon\,|_{4,\gamma,T}\Big\}. \end{aligned} \tag{12.6.2}$$

Démonstration. — On montre d'abord l'estimation (12.6.2) pour $N(V, \psi, 2, \gamma, T)$ à partir de l'estimation L^2 du paragraphe 8.1.

a) Comme au chapitre 8, il est commode de changer de variable et de rendre constant le coefficient de ∂_n dans les équations. On rappelle (voir (7.2.5)) qu'il existe des matrices $W_1(u_1, b_1, \partial_y'\Phi_1)$ et $V_1(u_1, \partial_y'\Phi_1)$ telles que $W_1\mathcal{M}V_1 = J$ et on définit $\widetilde{V}$ par :

$$V = V_1(u_1, \partial_y'\Phi_1)\widetilde{V}. \tag{12.6.3}$$

Alors $(\widetilde{V}, \psi)$ vérifie

$$(12.6.4) \qquad \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} B_j\, \partial_j \widetilde{V} + J\, \partial_n \widetilde{V} = F_1 \\ X_{u_1}(\psi) - \Big[\mathcal{M} V_1\, \widetilde{V}\Big] = G' \end{cases}$$

où $B_j = (\partial_n \Phi_1) W_1 A_j V_1$ et $F_1 = \partial_n \Phi_1\, W_1\, F + B\, V$.

L'estimation L^2 du théorème 8.1.1 implique que qu'il existe C et $\gamma_o(\cdot)$ tels que pour tout $\gamma \geq \gamma_o$ on a

$$(12.6.5) \qquad N(v, \psi, 0, \gamma, T) \leq \Big\{ N(v, \psi, 0, \gamma, 0) + \|F'\|_{o,\gamma,T} + \gamma^{1/2} \varepsilon^{1/2}\, |G'/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T} \Big\}.$$

En commutant (12.6.4) aux dérivations conormales δ^α de longueur $|\alpha| \leq 4$, on voit que $(\delta^\alpha \widetilde{V}, \delta^\alpha \Psi)$ est solution d'un problème (12.6.4) avec des second membres F_α, G_α. L'estimation (12.6.5) appliquée aux dérivées conormales implique alors que pour $\gamma \geq \gamma_1(M)$ assez grand, on a une estimation

$$(12.6.6) \qquad N_1(\widetilde{V}, \psi, 2, \gamma, T) \leq \Big\{ N_1(\widetilde{V}, \psi, 2, \gamma, 0) + \|F'\|^t_{o,\gamma,T} + \gamma^{1/2} \varepsilon^{1/2}\, |G'/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T} \Big\}$$

où

$$(12.6.7) \qquad \begin{aligned} N_1(v, \psi, s, \gamma, T) = \gamma \|v\|^t_{2s,\gamma,T} &+ \gamma^{1/2} \varepsilon^{1/2}\, |\Gamma v|_{2s,\gamma,T} \\ &+ \gamma^{3/2} \varepsilon^{1/2}\, |\psi|_{2s,\gamma,T} + \gamma^{1/2} \varepsilon\, |\psi|_{2s+1,\gamma,T}. \end{aligned}$$

b) La seconde étape consiste à estimer $\partial_n \widetilde{V}$ dans $W^2(\Omega_T)$ en procédant comme au paragraphe 9.1. On pose $\partial_n \widetilde{V} = (\zeta_1, \zeta')$. D'après (12.6.4), on a

$$(12.6.8) \qquad J \partial_n \widetilde{V} = F' - \sum_{j=0}^{n-1} B_j \partial_j \widetilde{V}.$$

On note $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$ et on tire de (12.6.8) que

$$(12.6.9) \qquad \|\partial_y \zeta'\|_{2,\gamma,T} + \gamma \|\zeta'\|_{2,\gamma,T} \leq \|F'\|_{4,\gamma,T} + C\, \|\widetilde{V}\|_{4,\gamma,T}.$$

D'autre part, on tire de la première équation de (12.6.8) que ζ_1 est solution d'une équation de transport de la forme

$$(12.6.10) \qquad h\, \partial_n \zeta_1 + \sum_{j=0}^{n-1} X_j\, \partial_j \zeta_1 = H,$$

où

$$(12.6.11) \qquad H = W(W_1)^{-1} \Big\{ \partial_n F' - \sum_{j=0}^{n-1} \partial_n B_j \partial_j \widetilde{V} \Big\} + g(u_1, \partial_y \Phi_1, \partial_n \Phi_1) \partial_y \cdot \zeta'$$

On utilise l'estimation d'énergie (9.1.23) pour l'équation (12.6.10) et à ses dérivées $\delta^\alpha \partial_n^k$ avec $|\alpha| + 2k \leq 2$. On obtient

$$(12.6.12) \qquad \gamma \|\zeta_1\|_{2,\gamma,T} \leq C \Big\{ \gamma \|\zeta_1\|_{2,\gamma,0} + \|\zeta_1\|_{2,\gamma,T} + \|H\|_{2,\gamma,T} \Big\}.$$

D'autre part, on a

$$\|H\|_{2,\gamma,T} \leq C\Big\{\|F'\|_{4,\gamma,T} + \|\partial_y \widetilde{V}\|_{2,\gamma,T} + \|\partial_y \zeta'\|_{2,\gamma,T}\Big\}. \tag{12.6.13}$$

En regroupant ces estimations, on obtient finalement

$$\gamma\|\partial_n \widetilde{V}\|_{2,\gamma,T} \leq C\Big\{\gamma\|\partial_n \widetilde{V}\|_{2,\gamma,0} + \|F'\|_{4,\gamma,T} + \|\widetilde{V}\|_{4,\gamma,T}\Big\}. \tag{12.6.14}$$

Par suite, pour γ assez grand, on a

$$N(\widetilde{V}, \psi, , 2, \gamma, T) \leq C\Big\{N(\widetilde{V}, \psi, 2, \gamma, 0) + \|F'\|_{4,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|G'/\varepsilon\,|_{4,\gamma,T}\Big\}. \tag{12.6.15}$$

Par ailleurs,

$$\|V\|_{4,\gamma,T} \leq C_1\|\widetilde{V}\|_{4,\gamma,T} \leq C_2\|V\|_{4,\gamma,T}.$$

En tenant compte des expressions de F' et de G', on obtient, à partir de (12.6.15) et pour γ assez grand, l'estimation

$$N(V, \psi, , 2, \gamma, T) \leq C(M)\Big\{N(V, \psi, 2, \gamma, 0) + \|F\|_{4,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|G/\varepsilon\,|_{4,\gamma,T}\Big\}. \tag{12.6.16}$$

L'estimation (12.6.2) résulte de (12.6.16) et de l'égalité $v = V + \Psi(\partial_n u_1/\partial_n \phi_1)$. □

Remarque 12.6.3. — G contient le terme $r'_4 = [v]\, h_3(u_1, u_2)\, \partial_y \psi$ de r_4 (*cf.* (12.5.3) et la proposition 12.5.1). La présence de ce terme rend nécessaire l'estimation de $|[v]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T}$. Pour $s \leq 2$, on dispose des deux estimations pour

$$\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|r'_4/\varepsilon\,|_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|\psi|_{2s+1,\gamma,T}, \tag{12.6.17}$$

$$\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|r'_4/\varepsilon\,|_{2s,\gamma,T} \leq C(M)\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\Big\{|[v]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T} + |\psi|_{2s,\gamma,T}\Big\}. \tag{12.6.18}$$

La première estimation, qui a l'avantage de ne pas faire apparaître le saut de v, est inutilisable car le terme $\gamma^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|\psi|_{2s+1,\gamma,T}$ n'est pas absorbable par $N(v, \psi, 2s, \gamma, T)$ au premier membre. Pour cette raison nous devons utiliser (12.6.18) dans laquelle figure le terme $|[v]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T}$.

Au paragraphe (12.8) nous donnerons une estimation de ce terme et nous verrons apparaître au second membre les termes $\|v\|_{4,\gamma,T}$ et $\|\Psi\|_{4,\gamma,T}$. C'est pourquoi l'estimation du théorème 12.3.3 contrôle les normes $\|v\|_{4,\gamma,T}$ et $|\Psi|_{4,\gamma,T}$.

12.7. Estimation de Ψ

Le but de ce paragraphe est d'obtenir une estimation pour le terme $\gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,T}$ qui figure au second membre de (12.6.2). Pour $i = 1, 2$, nous notons dans ce paragraphe $\rho_{i,a} = -\varepsilon\, e^{W_i}$ les fonctions associées aux deux solutions approchées $(u_{i,a}, \Phi_{i,a})$. On rappelle que les fonctions Φ_i sont solutions des équations (3.2.6) (3.2.7) et on note A_i les fonctions définies par (3.2.8)

$$A_i = W_i + \mathcal{R}_T(a_i - w_i).$$

Proposition 12.7.1. — *Sous les hypothèses* (12.3.6) (12.3.7), *il existe des constantes* C *et* γ_o *telles que pour tout* $\gamma \geq \gamma_o$, *on a*

$$\begin{aligned}\gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{\gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,o} + \varepsilon\,\|W_1 - W_2\|_{4,\gamma,T_1} + \|v\|_{4,\gamma,T} \\ +\varepsilon^2\|g_3(\varepsilon,w_3)\|_{4,\gamma,T}\Big\},\end{aligned} \tag{12.7.1}$$

où $w_3 = (u'_1, u'_2, \partial'_y\Phi'_1, \partial'_y\Phi'_2, \varepsilon\,(e^{A_1}-1), \varepsilon\,(e^{A_2}-1))$ *et où* $g_3(\varepsilon, w_3)$ *est une fonction telle que* $g_3(\varepsilon, 0) = 0$.

Démonstration. — Nous écrivons la démonstration pour Ψ^+ en omettant le signe $+$.

a) Φ_1 vérifie

$$\partial_t\Phi_1 = \lambda(u_1, u_1 - p_1, \partial'_y\Phi_1).$$

Par développement de Taylor, en posant $w = (u_1, u_2, \partial'_y\Phi_1, \partial'_y\Phi_2, \varepsilon\,e^{A_1}, \varepsilon\,e^{A_2})$, on obtient,

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi_1 = (u_1 - u_2)g_1(w) + (\partial'_y\Phi_1 - \partial'_y\Phi_2)g_2(w) + \varepsilon(e^{A_1} - e^{A_2})g_3(w) \\ +\lambda_1(u_2, u_2 - p_2, \partial'_y\Phi_2).\end{aligned} \tag{12.7.2}$$

On évalue ensuite le terme $A = \lambda_1(u_2, u_2 - p_2, \partial'_y\Phi_2)$. On a

$$A = \lambda_1(u_2, \partial'_y\Phi_2) + \frac{\varepsilon}{2}\,e^{A_2}R_1(u_2, \partial'_y\Phi_2)\cdot d_u\lambda_1(u_2, \partial'_y\Phi_2) + \varepsilon^2\,g_4(\varepsilon, u_2, \partial'_y\Phi_2, \varepsilon\,e^{A_2}). \tag{12.7.3}$$

En partant de l'équation pour Φ_2, on obtient de même

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi_2 = \lambda_2(\widetilde{u}_2, \partial'_y\Phi_2) + \frac{\varepsilon}{2}\,e^{A_2}R_2(\widetilde{u}_2, \partial'_y\Phi_2)\cdot d_u\lambda_2(\widetilde{u}_2, \partial'_y\Phi_2) \\ +\,\varepsilon^2\,g_5(\varepsilon, u_2, \partial'_y\Phi_2, \varepsilon\,e^{A_2}).\end{aligned} \tag{12.7.4}$$

Comme $u_2 = (\widetilde{u}_2, S_o)$, avec (12.2.3) (12.2.4), on obtient par soustraction des égalités (12.7.4) et (12.7.2) que $\Psi_1 = \Phi_1 - \Phi_2$ vérifie

$$\partial_t\Psi_1 + \sum_{j=1}^{n-1}\mu_j(w)\partial_j\Psi_1 = H_1, \tag{12.7.5}$$

où

$$H_1 = (u_2 - u_1)h_1(w) + \varepsilon(e^{A_1} - e^{A_2})h_2(w) + \varepsilon^2\,h_3(\varepsilon, u_2, \partial'_y\Phi_2, \varepsilon\,e^{A_2}). \tag{12.7.6}$$

On en déduit immédiatement que $\Psi = \Phi'_2 - \Phi'_1$ vérifie

$$\partial_t\Psi + \sum_{j=1}^{n-1}\mu_j(w)\partial_j\Psi = H \tag{12.7.7}$$

où

$$H = (u'_2 - u'_1)h_1(w) + \varepsilon(e^{A_1} - e^{A_2})h_2(w) + \varepsilon^2\,h_4(\varepsilon, \widetilde{w}). \tag{12.7.8}$$

Dans (12.7.8) on a posé $\widetilde{w} = (u'_1, u'_2, \partial'_y\Phi'_1, \partial'_y\Phi'_2, \varepsilon\,(e^{A_1}-1), \varepsilon\,(e^{A_2}-1))$ et h_4 désigne une fonction telle que $h_4(\varepsilon, 0) = 0$.

b) Le lemme 9.4.2 appliqué à l'équation (12.7.7) implique que

$$\gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,T} \leq C\Big\{\gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,o} + \|\Psi\|_{4,\gamma,T} + \|H\|_{4,\gamma,T}\Big\}. \tag{12.7.9}$$

Par ailleurs, le corollaire 5.4.2 et le lemme 5.1.1 impliquent que

(12.7.10)

$$\varepsilon\,\|A_1 - A_2\|_{4,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\,\Big\{\|W_1 - W_2\|_{4,\gamma,T_1} + |w_1 - w_2|_{3,\gamma,T_1} + |a_1 - a_2|_{3,\gamma,T}\Big\},$$

$$\varepsilon\,|a_1 - a_2|_{3,\gamma,T} \leq C(M)\,|\Gamma v|_{3,\gamma,T} \leq C(M)\,\|v\|_{4,\gamma,T}, \tag{12.7.11}$$

$$|w_1 - w_2|_{3,\gamma,T_1} \leq C\,\|W_1 - W_2\|_{4,\gamma,T_1}. \tag{12.7.12}$$

On en déduit que

$$\|v\,h_1(w)\|_{4,\gamma,T} \leq C(M)\,\|v\|_{4,\gamma,T}, \tag{12.7.13}$$

$$\|\varepsilon(e^{A_1} - e^{A_2})h_2(w)\|_{4,\gamma,T} \leq C(M)\,\Big\{\varepsilon\,\|W_1 - W_2\|_{4,\gamma,T_1} + \|v\|_{4,\gamma,T}\Big\}, \tag{12.7.14}$$

et donc

$$\|H\|_{4,\gamma,T} \leq C(M)\,\Big\{\varepsilon\,\|W_1 - W_2\|_{4,\gamma,T_1} + \|v\|_{4,\gamma,T} + \varepsilon^2\|h_4(\varepsilon,\widetilde{w})\|_{4,\gamma,T}\Big\} \tag{12.7.15}$$

En reportant dans (12.7.9) et en prenant γ assez grand, on obtient l'estimation (12.7.1). □

12.8. Estimation du saut de v

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 12.6 nous devons majorer $\gamma\,|[v]/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T}$.

Proposition 12.8.1. — *Sous les hypothèses* (12.3.6) (12.3.7), *il existe des constantes C et γ_o telles que pour tout $\gamma \geq \gamma_o$, on a*

(12.8.1)

$$\gamma|[v]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T} \leq C\Big\{\gamma|[v]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,0} + \|v\|_{4,\gamma,T} + \|\Psi\|_{4,\gamma,T} + \|(F_2 - F_1)/\varepsilon\,\|_{2,\gamma,T} + \gamma\,\varepsilon\,|g_4(\varepsilon, w_4)|_{0,\gamma,T}\Big\}.$$

où $w_4 = (\Gamma u_1', \Gamma u_2', [u_1']/\varepsilon, [u_2']/\varepsilon, \partial_y'\phi_1', \partial_y'\phi_2')$ *et où* g_4 *est une fonction telle que* $g_4(\varepsilon, 0) = 0$.

Démonstration. — **a)** On rappelle (voir (9.3.10) (9.3.11) et (9.3.12)) que les premières composantes de $[u_1']$ et $[u_2']$, notées $[u_{11}']$ et $[u_{21}']$, vérifient

$$\partial_t[u_{i1}'] + \sum_{j=1}^{n-1} X_j(w_i)\partial_j[u_{i1}'] = H(w_i)[F_i] + G(\widetilde{w}_i)[u_{i1}], \tag{12.8.2}$$

où $G(\widetilde{w})$ désigne une fonction telle que $G(0) = 0$ et où l'on a posé :

$$\begin{aligned} w_i &= (\Gamma(u_i')^+, \Gamma(u_i')^-, \partial_y'\phi_i'), \\ \widetilde{w}_i &= (w_i, \partial_y w_i, \Gamma z_i^+, \Gamma z_i^-, \Gamma F_i^+, \Gamma F_i^+). \end{aligned} \tag{12.8.3}$$

En écrivant $[u'_{21}] = [u'_{11} + v_1]$ on obtient que la première composante de $[v]$ vérifie une équation de transport de la forme :

$$\partial_t[v_1] + \sum_{j=1}^{n-1} X_j(w_1)\partial_j[v_1] = H = H_1 + H_2 + H_3 \tag{12.8.4}$$

avec :

$$H_1 = H(w_2)[F_2] - H(w_1)[F_1], \quad H_2 = G(\widetilde{w}_2)[u_{21}] - G(\widetilde{w}_1)[u_{11}] \tag{12.8.5}$$

et H_3 désigne une somme de termes de la forme

$$g_1(w_1, w_2)(w_2 - w_1)\partial'_y[u'_{11}] + g_2(w_1, w_2)(w_2 - w_1)\partial'_y[v_1]. \tag{12.8.6}$$

On déduit alors du lemme 9.3.3 l'estimation

$$\gamma|[v_1]|_{0,\gamma,T} \leq C(M)\left\{\gamma|[v_1]|_{0,\gamma,0} + |H|_{0,\gamma,T} + |w_1|^*_{1,T}|[v_1]|_{0,\gamma,T}\right\} \tag{12.8.7}$$

On a

$$|w_1|^*_{1,T} \leq |\Gamma u'_1|^*_{1,T} + |\phi'_1|^*_{2,T} \leq C. \tag{12.8.8}$$

En écrivant H_1 et H_2 sous la forme

$$H_1 = (H(w_2) - H(w_1))[F_2] + H(w_1)([F_2] - [F_1]),$$

$$H_2 = (G(\widetilde{w}_2) - G(\widetilde{w}_1))[u_{21}] + G(\widetilde{w}_1)([u_{21}] - [u_{11}]),$$

et en remarquant que $u_{21} - u_{11} = u'_{21} - u'_{11}$, on obtient

$$|H_1|_{o,\gamma,T} \leq \varepsilon\, C(M)\left\{|\Gamma v_1|_{o,\gamma,T} + |\psi|_{1,\gamma,T} + \|(F_2 - F_1)/\varepsilon\,\|_{2,\gamma,T}\right\}, \tag{12.8.9}$$

$$|H_2|_{o,\gamma,T} \leq C(M)\varepsilon\left\{|\Gamma v|_{1,\gamma,T} + |\psi|_{2,\gamma,T} + \|v\|_{4,\gamma,T} + \|\Psi\|_{4,\gamma,T} + |[v_1]/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T}\right\}, \tag{12.8.10}$$

$$|H_3|_{o,\gamma,T} \leq C(M)\varepsilon\left\{|\Gamma v|_{o,\gamma,T} + |\psi|_{1,\gamma,T}\right\}. \tag{12.8.11}$$

En reportant ces estimations dans (12.8.7), on obtient pour γ assez grand, l'estimation

$$\begin{aligned}\gamma|[v_1]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T} \leq C\Big\{&\gamma|[v_1]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,0} + \|v\|_{4,\gamma,T} + \|\Psi\|_{4,\gamma,T} \\ &+ \|(F_2 - F_1)/\varepsilon\,\|_{2,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned} \tag{12.8.12}$$

b) On rappelle maintenant les égalités

$$\begin{aligned}[u_1] &= [u_{11}]\,\mathcal{U}_1^-(u_1^-, \partial'_y\phi_1, [u_{11}]), \\ [u_2] &= [u_{21}]\,\mathcal{U}_2^-(u_2^-, \partial'_y\phi_2, [u_{21}]).\end{aligned} \tag{12.8.13}$$

En outre, d'après (12.2.7), on a $\mathcal{U}_2^-(u_2^-, \partial'_y\phi_2, [u_{21}]) = (\widetilde{\mathcal{U}_2^-}(\widetilde{u_2^-}, \partial'_y\phi_2, [u_{21}]), 0)$. On en déduit que

$$[u_2 - u_1] = [u_{21} - u_{11}]\,\mathcal{U}_1^- + [u_{21}](\mathcal{U}_2^- - \mathcal{U}_1^-). \tag{12.8.14}$$

En effectuant un développement de Taylor et en utilisant (12.2.4), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1^-(u_1^-,\partial_y'\phi_1,[u_{11}]) &= R_1(u_1^-,\partial_y'\phi_1)+[u_{11}]\,g_1(u_1^-,\partial_y'\phi_1,[u_{11}]),\\ \mathcal{U}_2^-(u_2^-,\partial_y'\phi_2,[u_{21}]) &= R_1(u_2^-,\partial_y'\phi_2)+[u_{21}]\,g_2(u_2^-,\partial_y'\phi_2,[u_{21}]).\end{aligned}\tag{12.8.15}$$

En posant $w = (\Gamma u_1', \Gamma u_2', [u_1']/\varepsilon, [u_2']/\varepsilon, \partial_y'\phi_1', \partial_y'\phi_2')$ et en reportant dans (12.8.14), on en déduit qu'il existe une fonction $g_3(\varepsilon, w)$ vérifiant $g_3(\varepsilon, 0) = 0$, telle que l'on ait

$$\begin{aligned}[v] = [u_2' - u_1'] =& [v_1]\,\mathcal{U}_1^-(u_1^-,\partial_y'\phi_1,[u_{11}])\\ &+ [u_{21}](R_1(u_2^-,\partial_y'\phi_2) - R_1(u_1^-,\partial_y'\phi_1)) + \varepsilon^2\, g_3(\varepsilon, w)\end{aligned}\tag{12.8.16}$$

En remarquant que $u_2^- - u_1^- = (u_2^-)' - (u_1^-)'$, on obtient alors l'estimation

$$\|[v]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T} \leq C(M)\Big\{|[v_1]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T} + |\Gamma v|_{o,\gamma,T} + |\psi|_{1,\gamma,T} + \varepsilon^2\,|g_3(\varepsilon,w)|_{0,\gamma,T}\Big\}.\tag{12.8.17}$$

En multipliant (12.8.17) par γ et en majorant $\gamma\,|[v_1]/\varepsilon\,|_{0,\gamma,T}$ grâce à (12.8.12), on obtient (12.8.1) et la proposition est démontrée. □

12.9. Preuve du théorème 12.3.4

On désigne par $N_1(v, \Psi, \gamma, T)$ l'expression :

$$N_1(v,\Psi,\gamma,T) = N(v,\psi,2,\gamma,T) + \gamma\|\Psi\|_{4,\gamma,T} + \gamma\,\varepsilon^{1/2}\,|[v]/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T}.\tag{12.9.1}$$

En sommant les estimations (12.6.2) (12.7.1) et (12.8.1), on obtient :

$$\begin{aligned}N_1(v,\Psi,\gamma,T) \leq C\Big\{& N_1(v,\Psi,\gamma,0) + \varepsilon\,\|W_1 - W_2\|_{4,\gamma,T_1} + \|v\|_{4,\gamma,T}\\ &+\|\Psi\|_{4,\gamma,T} + \|F\|_{4,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}|G/\varepsilon\,|_{4,\gamma,T} + \varepsilon^{-1/2}\|F_2 - F_1\|_{2,\gamma,T}\\ &+\varepsilon^2\|g_3(\varepsilon,w_3)\|_{4,\gamma,T} + \gamma\,\varepsilon^{3/2}|g_4(\varepsilon,w_4)|_{0,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}\tag{12.9.2}$$

La forme de F et G donnée à la proposition 12.5.1, conduit aux majorations

$$\begin{aligned}\|F\|_{4,\gamma,T} \leq& \|F_2 - F_1\|_{4,\gamma,T} + \varepsilon^2\|g_1(\varepsilon,w_1)\|_{4,\gamma,T}\\ &+ C\Big\{\|\Psi\|_{4,\gamma,T} + \|v\|_{4,\gamma,T}\Big\},\end{aligned}\tag{12.9.3}$$

$$\begin{aligned}|G/\varepsilon\,|_{4,\gamma,T} \leq& |G_2'/\varepsilon\,|_{4,\gamma,T} + \varepsilon^2|g_2(\varepsilon,w_2)|_{4,\gamma,T}\\ &+ C(M)\Big\{|\psi|_{4,\gamma,T} + |\Gamma v|_{3,\gamma,T} + |[v]/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}\tag{12.9.4}$$

En reportant ces estimations dans (12.9.2) et en prenant γ assez grand, les termes

$$\|v\|_{4,\gamma,T},\quad \|\Psi\|_{4,\gamma,T},\quad \gamma^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}\,|\psi|_{4,\gamma,T},\quad \gamma^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}\,|\Gamma v|_{3,\gamma,T},\quad \gamma^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}|[v]/\varepsilon\,|_{o,\gamma,T}$$

sont absorbés par le membre de gauche. On déduit alors de (12.9.2) l'estimation :

$$\begin{aligned}N_1(v,\Psi,\gamma,T) \leq C\Big\{& N_1(v,\Psi,\gamma,0) + \varepsilon\,\|W_1 - W_2\|_{4,\gamma,T_1} + \|F_2 - F_1\|_{4,\gamma,T}\\ &+\varepsilon^{-1/2}\|F_2 - F_1\|_{2,\gamma,T} + \varepsilon^2\|g_1(\varepsilon,w_1)\|_{4,\gamma,T} + \gamma^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}|G_2'/\varepsilon\,|_{4,\gamma,T}\\ &+\gamma^{1/2}\,\varepsilon^{5/2}|g_2(\varepsilon,w_2)|_{4,\gamma,T} + \varepsilon^2\|g_3(\varepsilon,w_3)\|_{4,\gamma,T} + \gamma\,\varepsilon^{3/2}|g_4(\varepsilon,w_4)|_{0,\gamma,T}\Big\}.\end{aligned}\tag{12.9.5}$$

En tenant compte des inégalités :

$$||u||_{2s,T} \leq e^{\gamma T} ||u||_{2s,\gamma,T} \leq (1+\gamma)^{2s}\, e^{\gamma(T-T_o)} ||u||_{2s,T}$$
$$|u|_{s,\gamma,T} \leq e^{\gamma T}\, |u|_{s,\gamma,T} \leq (1+\gamma)^{s}\, e^{\gamma(T-T_o)} |u|_{s,\gamma,T}$$

et en fixant γ dans (12.9.5), on en déduit qu'il existe une constante C telle que :

$$\begin{aligned} N(v,\Psi,T) \leq C\Big\{ & N(v,\Psi,0) + \varepsilon\, ||W_1 - W_2||_{4,\gamma,T_1} + ||F_2 - F_1||_{4,T} \\ & + \varepsilon^{-1/2} ||F_2 - F_1||_{2,T} + \varepsilon^2 ||g_1(\varepsilon, w_1)||_{4,T} + \varepsilon^{1/2} |G_2'/\varepsilon\,|_{4,T} \\ & + \varepsilon^{5/2} |g_2(\varepsilon, w_2)|_{4,T} + \varepsilon^2 ||g_3(\varepsilon, w_3)||_{4,T} + \varepsilon^{3/2} |g_4(\varepsilon, w_4)|_{0,T} \Big\}. \end{aligned} \tag{12.9.6}$$

D'après l'hypothèse (12.3.6) on a

$$\varepsilon\, ||W_1 - W_2||_{4,T_1} \leq K\, \varepsilon^2. \tag{12.9.7}$$

Avec la proposition 12.4.1, on obtient

$$\varepsilon^{1/2}\, |[v]/\varepsilon\,|_{o,o} \leq C\varepsilon^{-1/2} ||v||_{2,o} \leq C\varepsilon^{3/2}, \tag{12.9.8}$$

$$N(v,\Psi,0) \leq C\varepsilon^{3/2}, \tag{12.9.9}$$

$$||F_2 - F_1||_{4,T} \leq C\varepsilon^2. \tag{12.9.10}$$

Enfin, d'après le corollaire 12.2.2 on a :

$$|G_2'/\varepsilon\,|_{4,T} \leq C_3(M)\varepsilon^2. \tag{12.9.11}$$

L'estimation (12.3.10) découle alors des inégalités (12.9.6) à (12.9.11) et le théorème 12.3.4 est démontré. □

BIBLIOGRAPHIE

[Al] S. ALINHAC, *Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels*, Comm. Partial Differential Equations, 14 (1989), pp 173–230.

[Al-Gé] S. ALINHAC, P. GÉRARD, *Opérateurs pseudodifférentiels et théorème de Nash-Moser*, InterEditions Editions du CNRS., Paris, 1991.

[Ar-Ma] M. ARTOLA, A. MAJDA, *Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets I. The basic kink mode,* Physica D, 28 (1987), pp 253–281.

[Bo] J.-M. BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires,* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4e série, 14 (1981) pp 209–246.

[BCP] A. BRESSAN, G. CRASTA, B. PICCOLI, *Well-posedness of the Cauchy problem for $n \times n$ systems of conservation laws,* Mem. Amer. Math. Soc, à paraître.

[Ch-Pi] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Bordas, Paris, 1981.

[Co-Fr] R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves,* Wiley-Interscience, New York, 1948.

[Co-Hi] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics,* John Wiley & Sons, New York, 1962.

[Fr1] K. O. FRIEDRICHS, *Symmetric hyperbolic linear differential equations,* Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954), pp 345–392.

[Fr2] K. O. FRIEDRICHS, *Symmetric positive linear differential equations,* Comm. Pure Appl. Math., 11 (1958), pp 333–418.

[Fr-La1] K. O. FRIEDRICHS, P. LAX *Systems of conservation laws with a convex extension,* Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 68 (1971), pp 1686–1688.

[Fr-La2] K. O. FRIEDRICHS, P. LAX *Boundary value problems for first order operators,* Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), pp 355–388.

[Gå] L. GÅRDING, *Problèmes de Cauchy pour des systèmes quasi-linéaires d'ordre un, strictement hyperboliques,* dans *Les EDP,* Colloques Internationaux du CNRS, vol 117, (1963), pp 33–40.

[Gl] J. GLIMM, *Solutions in the large, for nonlinear systems of conservation laws,* Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), pp 685–715.

[Go-Ra] E. GODLEWSKI, P. A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws* vol 3-4, Mathématiques & Applications, Ellipses, Paris, 1991.

[Gu] O. GUÈS, *Problèmes mixtes hyperboliques quasilinéaires,* Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990) pp 595–645.

[Ha] E. HARABETIAN, *A convergent séries expansion for hyperbolic systems of conservation laws,* Trans. Amer. Math. Soc, 294 (1986), pp 383–424.

[He] A. HEIBIG, *Régularité des solutions du problème de Riemann,* Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990), pp 693–709.

[Hö1] L. HÖRMANDER, *The boundary problem of physical geodesy,* Arch. Rational Mech. Anal., 62 (1976), pp 1–52.

[Hö2] L. HÖRMANDER, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations,* Springer Verlag, 1996.

[Kr] H. O. KREISS, *Initial boundary value Problem for hyperbolic systems,* Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), pp 277–298.

[La] P. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws,* Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), pp 537–566.

[La-Ph] P. LAX, R. S. PHILLIPS, *Local Boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators,* Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), pp 427–455.

[Li] LI TA TSIEN, *Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems,* Math. Series V., Duke Univ., Durham,1985.

[Li-Ma] J.-L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes,* Dunod, Paris, 1968.

[Ma1] A. MAJDA, *The stability of multidimensional shock fronts,* Mem. Amer. Math. Soc., n^o 275, 1983.

[Ma2] A. MAJDA, *The existence of multidimensional shock fronts,* Mem. Amer. Math. Soc., n^o 281, 1983.

[Ma3] A. MAJDA, *Compressible fluid flows and systems of conservation laws,* Applied Math. Sc., 53, Springer Verlag, 1984.

[Ma-Os] A. MAJDA, S. OSHER, *Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary,* Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), pp 607–676.

[Ma-Ra] F. MASSEY, J. RAUCH , *Differentiability of solutions to hyperbolic initial boundary value problems,* Trans. Amer. Math. Soc., 189 (1974), pp 303–318.

[Mey] Y. MEYER, *Remarques sur un théorème de J.-M. Bony,* Suppl. ai Rend. del Circolo Mat. di Palermo, II, 1 (1981) pp 1.20.

[Mé1] G. MÉTIVIER, *Ondes soniques,* J. Math. pures et appl., 70 (1991), pp 197–268.

[Mé2] G. MÉTIVIER, *Stability of multidimensional weak shocks,* Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990), pp 983–1028.

[Mé3] G. MÉTIVIER, *Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation en dimension deux d'espace,* Trans. Amer. Math. Soc., 296 (1986), pp 431–479.

[Mé4] G. MÉTIVIER, *Stability of multidimensional shocks,* Lecture notes, Kochel summer school, 1999, à paraître dans *Recent Advances in the Theory of Shock Waves,* PNLDE, Birkauser.

[Mé5] G. MÉTIVIER, *The Cauchy problem for semi-linear hyperbolic systems with discontinuous data,* Duke Math. J., 53 (1986), pp 983–1011.

[Mé-Ra] G. MÉTIVIER, J. RAUCH, *Interaction of piecewise smooth progressing waves for semilinear hyperbolic equations,* Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990), pp 1079–1140.

[Mok] A. MOKRANE, *Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires,* Thèse Université de Rennes, 1987.

[Mos] J. MOSER, *A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966), pp 499–535.

[Na] J. NASH, *The embedding problem for Riemannian manifolds,* Ann. of Math., 63 (1956), pp 20–63.

[Pe] G. PEYSER, *On the differentiablity of solutions of symmetric hyperbolic systems,* Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), pp 963–969.

[Ra] J. RAUCH, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity,* Trans. Amer. Math. Soc., 291 (1985), pp 167–187.

[Ral] J. RALSTON, *Note on a paper of Kreiss,* Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), pp 759–762.

[Ra-Re] J. RAUCH, M. REED, *Discontinuous progressing waves for semi-linear systems*, Comm. Partial Differential Equations, 10, (1985), pp 1033–1075.

[Sab] M. SABLÉ-TOUGERON, *Ondes de gradients multidimensionnelles*, Mem. Amer. Math. Soc., n^o 511, 1993.

[Sar] L. SARASON, *Differentiable solutions of symmetrizable and singular symmetric first order systems,* Arch. Rational Mech. Anal., 26 (1967), pp 357–384.

[Se] D. SERRE, *Systèmes de lois de conservation* I et II, Diderot Editeur, Paris, New York, Amsterdam, 1996.

[Ta] D. TARTAKOFF, *Regularity of solutions to boundary value problems for first order systems,* Indiana Univ. Math. J., 21 (1972), pp 1113–1129.

[Ts] M. TSUJI, *Analyticity of solutions of hyperbolic mixed problems,* J. Math. Kyoto Univ, 13 (1973), pp 323–371.