

die gleiche Geschwindigkeit wie die Kammer hatten. Man sieht deutlich von links her zwei große Wirbel vorrücken. Rechts von ihnen sieht man einen schwächer ausgebildeten. Die Gruppengeschwindigkeit der hier in Betracht kommenden Wellenbewegung ist nach der Rechnung größer als die Phasengeschwindigkeit, es bauen sich also — ebenso wie bei den Kapillarwellen — an eine Wellengruppe immer neue Wellen vorne an. Der erwähnte flache Wirbel ist als ein neuer im Entstehen begriffener Wellenberg der Störung anzusehen, der sich vor den bereits vorhandenen aufbaut. Da sich die Wellenberge hier in Wirbel verwandeln, kommt ein Erlöschen entsprechend den Wellen auf der Rückseite der Gruppe, wie es bei reinen Wellenbewegungen beobachtet wird, hier nicht in Frage.

Die im ersten Teil des Vortrages besprochene Erscheinung, daß durch vorhandene Störungen labile Zustände geschaffen werden, die zur Bildung neuer kleinerer Wirbel Anlaß geben, kann auf der linken Seite der Figur beobachtet werden, wo unter den großen Wirbeln bereits kleinere entstanden sind, die sich durch einen welligen Verlauf der Stromlinien kenntlich machen.

116

Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem.¹⁾

Von L. SCHILLER in Leipzig.

Die zahlreichen theoretischen Untersuchungen über das »Turbulenzproblem« haben bis heute noch nicht zu einem befriedigenden Ergebnis geführt. Dies prägt sich deutlich darin aus, daß die in den verschiedenen theoretischen Arbeiten erhaltenen Grenzen für die »kritische Reynoldssche Zahl«²⁾ einen sehr weiten Bereich einschließen. Als untere Grenze wurde von Hopf³⁾ die Zahl 11 gefunden, während die Theorie der kleinen Schwingungen überhaupt keinen endlichen Wert ergibt (v. Mises⁴⁾, Hopf⁵⁾). Wesentlich geringer ist der Bereich, innerhalb dessen die in experimentellen Untersuchungen angegebenen Werte von R_k liegen⁶⁾. Er erstreckt sich für Glasrohre und gezogene Metallrohre von $R_k = 200 - 25\,500$ ⁷⁾. Die niedrigsten Werte ($R_k = 200$) gibt Ruckes⁸⁾ für Metallkapillaren mit nicht sehr glatter Wandung an, und Sorkau⁹⁾ für Glaskapillaren ($R_k = 224$). Der höchste Wert 25 500 entspricht Ergebnissen von Ekman¹⁰⁾, dem es gelungen ist, die laminare Bewegung bis etwa $R = 25\,500$ aufrecht zu erhalten.

Die einzelnen Werte wurden jeweils unter recht verschiedenen Versuchsbedingungen erhalten. Als solche kommen hauptsächlich in Betracht: Zustand (Beruhigungsgrad) der Flüssigkeit beim Eintritt in das Rohr, Form der Eintrittsöffnung, Anlauflänge (Abstand der Meßstrecke vom Einlauf), Glätte des Rohres. Ein Vergleich unter so ver-

¹⁾ Aus der Leipziger Habilitationsschrift des Verfassers. Vorgetragen in Jena am 20. und 24. September 1921.

²⁾ »Reynoldssche Zahl« oder »reduzierte Geschwindigkeit« heißt die Größe $R = \frac{u a}{\nu} = \frac{u a \rho}{\mu}$, wo u = mittlere Geschwindigkeit, a = charakteristische Länge (in dieser Arbeit stets = Rohrbalbmesser), ρ = Dichte, μ = Koeffizient der inneren Reibung, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = Zähigkeitsszahl der Flüssigkeit.

³⁾ L. Hopf, Ann. d. Phys. [4] 59, 1919, S. 588.

⁴⁾ E. v. Mises, Jahrb. deutsch. Math. Ver. 21, 1912, S. 241 bis 248.

⁵⁾ L. Hopf, Ann. d. Phys. [4] 43, 1914, S. 1 bis 60.

⁶⁾ Anmerkung des Herausgebers: Der Verfasser bezeichnet hier und im folgenden als »kritische Zahl« jeden möglichen Uebergangswert zwischen laminarer und turbulenter Strömung. Für die eigentliche »kritische Zahl«, nämlich die untere Grenze des Bestehens turbulenter Strömung, geben die bisherigen Versuche — in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Verfassers — ein R_k etwa zwischen 900 und 1200.

⁷⁾ Vergl. hierüber die Zusammenstellungen bei L. V. King, Philosoph. Mag. (6) 31, 1916, S. 322, besonders die tabellarische Uebersicht auf S. 338, und F. Noether, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 125 und 218.

⁸⁾ W. Ruckes, Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei auftretenden Turbulenzerscheinungen. Würzburger Dissertation (Leipzig 1908), Ann. d. Phys. [4] 25, 1908, S. 988 und Mittell. üb. Forschungsarb. herausgegeben vom Ver. deutsch. Ing. H. 75 1909.

⁹⁾ W. Sorkau, Phys. Zeitschr. 14, 1913, S. 760. Vergl. hierzu jedoch L. Schiller und W. Kirsten, Phys. Zeitschr. 23, 1921, S. 527.

¹⁰⁾ V. W. Ekman. Ark. f. Mat., Astr. och Fysik. 6, 1911, Nr. 12, S. 5.

schiedenen Bedingungen erhaltener Ergebnisse erheischt eine entsprechende Erörterung. So unterscheidet Reynolds¹⁾ eine »untere« und eine »obere« kritische Zahl je nach dem Zustand der Flüssigkeit beim Eintritt in das Meßrohr. Die untere kritische Zahl von Reynolds ist die Grenze, oberhalb deren wirbelnd ankommende Flüssigkeit auch bei noch so langer Beruhigungsstrecke nicht mehr in Laminarströmung übergeht (nach Reynolds' Messungen $R = 1200$, nach unseren $= 1160$). Die obere soll die Grenze angeben, oberhalb deren laminare Strömung in Turbulenz übergeht. Sie hängt wesentlich vom Beruhigungszustand der Flüssigkeit im Vorratsrog ab (Reynolds bis 6400, Ekman bis 25500) und von der Form des Einlaufstücks (geeignete Abrundung erhöht die Grenze des laminaren Zustandes; vergl. Ruckes l. c.).

Was den Einfluß der Anlaufänge betrifft, so ist eine Beobachtung von Reynolds zu erwähnen, wonach laminar eintretende Flüssigkeit stets erst eine gewisse Strecke (ca. 30 Durchmesser) zurücklegt, ehe Turbulenz einsetzt. Diese Strecke nimmt nach Reynolds mit zunehmender Geschwindigkeit ab, was sich bei genügend kurzer Meßstrecke und Anlaufänge (bis zur Meßstrecke) in einer entsprechenden Abhängigkeit der kritischen Zahl von der Anlaufänge zeigen muß. Dieser Einfluß ist in Ergebnissen von Blasius²⁾ zu erkennen.

Daß die Glätte bzw. mikroskopische Rauigkeit des technisch glatten Rohres von Einfluß auf die kritische Zahl sei, wurde mehrfach angenommen, insbesondere mit Rücksicht auf die oben angeführten niedrigen kritischen Zahlen, die Ruckes (l. c.) für Metallkapillaren angibt. Diesen Ergebnissen von Ruckes stehen jedoch vom Standpunkt des Ähnlichkeitsgesetzes Bedenken gegenüber. Zudem konnte Verfasser³⁾ in einem Rohr mit eingeschnittenem Gewinde die Laminarbewegung bis 9600 steigern, sofern nur für störungsfreien Einlauf gesorgt wurde. Die mikroskopische Rauigkeit des technisch glatten Rohres wird vermutlich so lange keinen entscheidenden Einfluß auf den Uebergang zur Turbulenz haben können, als irgendwo eine Quelle größerer Störung vorliegt. Und dies wird im allgemeinen, auch bei sorgfältiger Abrundung des Einlaufstückes, am Einlauf der Fall sein.

1. Problemstellung. Bei dem beträchtlichen Auseinandergehen der vorliegenden experimentellen Ergebnisse und der Bedeutung, die gesicherten und einwandfreien Versuchen für die Bewertung der theoretischen Ergebnisse zukommt, erschien es wünschenswert, den Einfluß der wesentlich bestimmenden Faktoren auf die Entstehung der Turbulenz durch den Versuch zu prüfen. Verfasser unternahm es daher auf Anregung von Hrn. Prof. Prandtl in Göttingen, dem auch an dieser Stelle hierfür der beste Dank ausgesprochen sei, hierüber neue Versuche anzustellen.

Die bisherigen Versuche lassen sich im wesentlichen in zwei Gruppen teilen, entsprechend den schon von Reynolds eingehaltenen Bedingungen bei Bestimmung der »unteren« und der »oberen« kritischen Zahl, d. h. entweder wirbelnd ankommende Flüssigkeit und Feststellung der höchsten Reynoldsschen Zahl, die bei genügend langer Beruhigungsstrecke noch Uebergang in laminare Strömung liefert, oder ruhiges Vorratswasser, abgerundetes Einlaufstück und Feststellung der Reynoldsschen Zahl, bei der der Umschlag in Turbulenz einsetzt. Je nachdem gruppieren sich die Resultate um den Reynoldsschen Wert 1200 oder liegen wesentlich höher.

Stellt man sich auf den zuerst von Lord Kelvin⁴⁾, heute wohl allgemein angenommenen Standpunkt, daß die Uebergangsstelle zwischen laminarer und turbulenter Bewegung eine Funktion der — mitgebrachten oder am Einlauf entstehenden — Störung sei, so mußte es möglich sein, durch systematisches Aendern der »Einlaufstörung« die Lücke zwischen der Reynoldsschen »unteren« und »oberen« kritischen Zahl zu schließen. Dies gelang in befriedigender Weise. Dabei ergab sich als untere Grenze, die auch bei zunehmender Störung nicht mehr unterschritten wurde, $R_k = 1160$.

Außerdem wurde noch der Einfluß der Anlaufänge geprüft. Dieser ist für die Feststellung der kritischen Zahl insofern besonders von Bedeutung, als bei graphischer Darstellung die Art des Uebergangs vom laminaren zum turbulenten Ast wesentlich von der Anlaufänge abhängt. Einmal muß man annehmen (siehe die obige Reynoldssche

¹⁾ O. Reynolds, Scientific papers Bd. 2, S. 51.

²⁾ H. Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mittell. Uh. Forschungsarb. herausg. v. Ver. deutsch. Ing. H. 131, 1913.

³⁾ L. Schiller, Rauigkeit und kritische Zahl. Zeitschr. f. Phys. 3, 1920, 412.

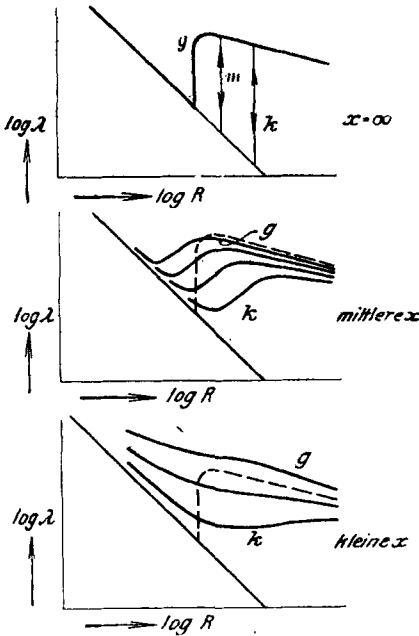
⁴⁾ Vergl. F. Noether, a. a. O. S. 133.

Beobachtung), daß die Turbulenz eine gewisse Strecke braucht, um sich voll zu entwickeln, zum andern muß ein Störungswirbel vom Einlauf her auch eine bestimmte Strecke zurücklegen, bis er durch Reibung verschwunden ist. Liegt die Meßstrecke genügend weit vom Einlauf entfernt, so wird bei der kritischen Zahl (und darüber) die Turbulenz bereits voll entwickelt sein, unterhalb der kritischen Zahl werden die Einlaufstörungen völlig verschwunden sein. Wir müssen also in diesem Fall in einem Widerstand-Geschwindigkeit- bzw. Widerstandskoeffizient-Reynoldssche Zahl-Diagramm völlig scharfen Uebergang von Laminar zu turbulenter Strömung ausgeprägt finden (vergl. Abb. 1a). Die Auftragung erfolgt hier, wie auch stets im folgenden, aus bekannten Zweckmäßigkeitsgründen¹⁾ auf Logarithmenpapier nach den dimensionslosen Größen Widerstandskoeffizient

$$\lambda = - \frac{dp}{dz} \frac{a}{q}$$

(q = Staudruck, a = Halbmesser) und Reynoldsche Zahl R .

Rücken wir die Meßstelle mehr und mehr gegen den Einlauf zu, so werden sich die beiden erwähnten Einflüsse, wie eine einfache Ueberlegung ergibt, in der in Abb. 1b und 1c gezeichneten Weise durch Verwischen des Ueberganges vom laminaren zum turbulenten Widerstandsgesetz geltend machen müssen. Das Aehnlichkeitsgesetz gestattet, zur Variation der dimensionslosen Anlaufänge verschieden weite Röhre mit gleichem Abstand der Meßstrecke vom Einlauf zu verwenden.



k = kleine Störung, m = mittlere Störung, g = große Störung.

Abb. 1 a - c

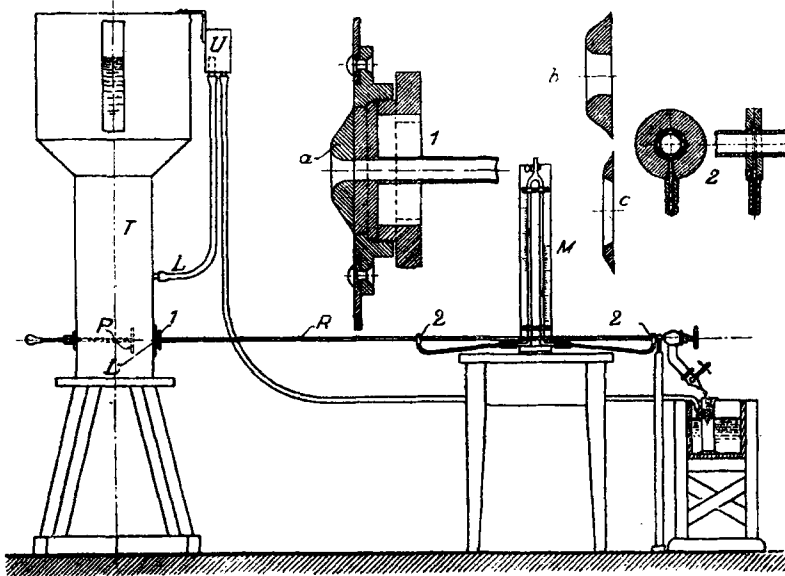


Abb. 2

¹⁾ Vergl. hierzu etwa: H. Blasius, a. a. O. S. 9 ff.

2. Versuchseinrichtung und Meßmethode. Die — außerordentlich einfache — Versuchseinrichtung, Abb. 2, bestand aus dem Trog *T* mit den Löchern *L*, dem Rohr *R* und dem Wassermanometer *M*. Am Ende des Rohres konnte der Strom mit Hilfe eines groben und eines in diesen einzusetzenden feinen Hahnes nach Wunsch geregelt werden. Der Einlauf in das Rohr konnte durch eine von außen zu verstellende Platte *P* verschlossen werden. Ein Ueberlauf *U* gestattete mit konstantem Niveau zu arbeiten.

Die Mengenmessung erfolgte mit kalibrierten Gefäßen, die Zeitmessung mit Stoppuhr. Die Dauer eines Versuches lag im allgemeinen zwischen 10 und 40 sec. Auf das Arbeiten mit konstantem Niveau mußte im Bereich der Laminarströmung verzichtet werden, da trotz Beruhigungssieben, die in dem Trog angebracht waren, durch den Wasserzufluß aus der Leitung unregelmäßige Wirbelung in die Meßstrecke getragen wurde. Auch traten hierbei stärkere Temperaturschwankungen auf, die, wenn auch stets sofortige Temperaturmessung des durchgeflossenen Wassers geschah, wegen des hohen Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung auch bei Versuchen im turbulenten Gebiet besser vermieden wurden.

An den Meßstellen erhielten die Rohre vier Löcher von 1 mm Dmr., deren innerer Grat sorgfältig entfernt wurde, um eine einwandfreie Druckmessung zu erzielen. Die vier Löcher standen durch eine Nut in einem übergeschobenen Messingring in Verbindung (vergl. Abb. 2, Sonderzeichnung 2).

Möglichst genau mußte die Kalibrierung der Rohre vorgenommen werden, da der Durchmesser in den zu bestimmenden Widerstandskoeffizienten in der fünften Potenz eingeht. Die unten mit festgeschraubter Gummiplatte verschlossenen 2 m langen Rohre wurden dazu mit Wasser gefüllt; dann wurde dieser Wasserinhalt in einem Becherglas aufgefangen und gewogen. Die Rückstände im Rohr wurden durch mehrfaches Nachwischen mit tariertem Filtrierpapier auch noch aufgesaugt und mitgewogen. Die Güte der so erzielten Bestimmungen mögen folgende Zahlen erweisen: Für das engere Rohr I: 100,65 g, 100,70 g, ein halbes Jahr später: 100,68 und 100,66 g, für das weitere Rohr II: 399,95, 399,55 und 399,4 g. Die Versuchrohre waren gezogene Messingrohre, die zwar eine nicht mehr ganz hochglänzende Oberfläche zeigten, sich jedoch, wie die Versuche ergaben, hydromechanisch noch vollkommen »glatt« verhielten.

3. Bezeichnungen, Definitionen und graphische Darstellung. An Längenbezeichnungen verwenden wir für Rohrhalmmesser *a*, Entfernung vom Eintritt in das Rohr bis zur Meßstrecke, die sogenannte »Anlauflänge« *x*, Länge der Meßstrecke *l*; die mittlere Geschwindigkeit, d. h. $\frac{\text{Menge pro Sekunde}}{\text{Querschnitt}}$, heiße \bar{u} , die Dichte der Flüssigkeit ρ ,

ihr spezifisches Gewicht γ , ihre innere Reibung μ , die Zähigkeitszahl $\frac{\mu}{\rho} = \nu$. Als (dimensionslose) »Reynoldssche Zahl« *R* gelte $\frac{\bar{u}a}{\nu}$. Der Druck sei *p*, die »Druckhöhe« $\frac{p}{\gamma} = h$, der Staudruck $\frac{\rho \bar{u}^2}{2}$ werde gelegentlich mit *q* bezeichnet. Für den Druckverlust benutzen wir den in der Hydraulik üblichen Ansatz

$$\Delta p = \lambda \gamma \frac{l}{a} \frac{\bar{u}^2}{2g} \dots \dots \dots (1)$$

oder

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{a} \frac{\bar{u}^2}{2g} \dots \dots \dots (2),$$

worin λ , der »Widerstandskoeffizient«, eine dimensionslose Zahl, nach dem Aehnlichkeitsgesetz (für glatte Rohre und lange Anlaufstrecke) lediglich eine Funktion der Reynoldsschen Zahl *R* ist.

Aus (1) erhält man mit Benutzung des Poiseuilleschen Gesetzes der Laminarströmung

$$\lambda_{\text{lam.}} = \frac{16}{R} \dots \dots \dots (3),$$

in unserer logarithmischen Darstellung also eine unter 45° fallende Gerade.

¹⁾ Häufig wird statt des Halbmessers der Durchmesser genommen. Dies ist bei Vergleich mit den Resultaten anderer Arbeiten zu beachten.

Für die turbulente Strömung hat Blasius¹⁾ aus umfangreichen Versuchen von Saph und Schoder die Gleichung abgeleitet:

$$\lambda_{\text{turb.}} = \frac{0,1582}{\sqrt[4]{2R}} \quad (4).$$

Dies liefert in unserer Darstellung für den turbulenten Ast der Kurve eine mit Neigung 1:4 fallende Gerade. Um stets sofort einen Anhalt über die Uebereinstimmung unserer Versuche mit diesen beiden Gesetzen zu gewinnen, finden sich diese beiden Geraden in den entsprechenden Abbildungen eingezeichnet.

4. Versuche über den Einfluß der Anlauflänge. Die Versuche wurden ausgeführt an einem engeren Rohr I von 0,3998 cm Halbmesser und einem weiteren II von 0,7962 cm Halbmesser. Bei dem weiteren Rohr wurde nur eine Meßstrecke (Abb. 3, M.-Str. 3) von 92,62 cm Länge und 104,15 cm Abstand vom Einlauf verwendet, bei dem

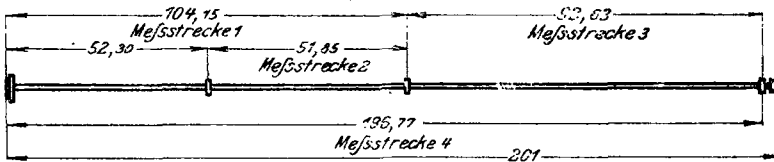


Abb. 8

engeren die gleiche und noch eine früher liegende von 51,85 cm Länge (M.-Str. 2). Die zugehörigen Anlaufängen sind aus der Figur ersichtlich. Da die Rohrdurchmesser sich wie 1:2 verhalten, so hat die M.-Str. 3 vom Standpunkt des Aehnlichkeitsgesetzes aus beim engen Rohr die doppelte Anlaufänge wie beim weiteren Rohr, M.-Str. 2 des engen Rohres etwa die gleiche Anlaufänge wie M.-Str. 3 des weiteren. Bei völliger Erfüllung der Aehnlichkeit wäre also zu erwarten, daß die λ -Kurven für M.-Str. 2 des engen und M.-Str. 3 des mittleren Rohres zusammenfielen.

Um möglichste Erfüllung der Aehnlichkeit am Einlauf zu erreichen, war die Befestigung der Rohre im Trog so getroffen, daß der völlig scharfe Rand des Rohres gerade mit der Trogwandung abschneitt. Es wurde erwartet, daß hierdurch beim Eintritt des Wassers aus dem »großen« Trog in die Rohre ähnliche Strömung erzielt würde.

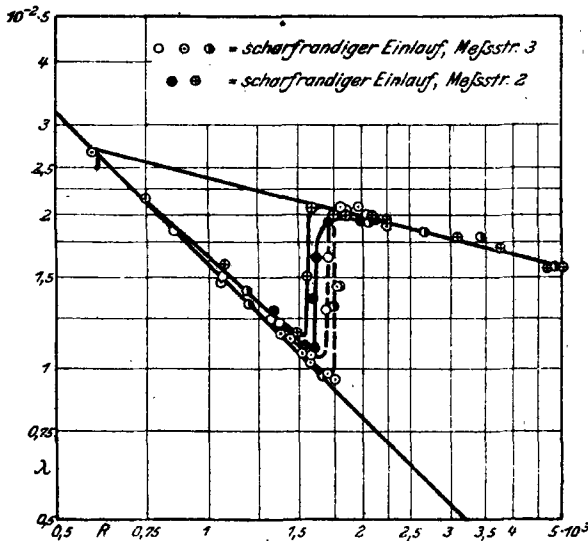


Abb. 4

Um mit konstantem Niveau, also auch mit konstanter Einstellung im Manometer arbeiten zu können, wurden zunächst Versuche mit dauernder Zuströmung aus der Wasserleitung in den Trog unter Benutzung des Ueberlaufs gemacht, in der Annahme, daß einerseits die Anlaufstrecke zur Beseitigung der durch den Zufluß gegebenen Störungen ausreichen würde, andererseits die an der scharfrandigen Einlauföffnung auftretenden Wirbel eine wesentlich größere, gut definierte Störung darstellen würden, der gegenüber die anderen Störungen nicht mehr in Betracht kämen. Während sich diese Erwartung bei dem engen Rohr einigermaßen erfüllte, war das Bild, das die Messungen am weiteren Rohr boten, außerordentlich schwankend. Hieraus war deutlich zu sehen, daß unregol-

¹⁾ H. Blasius, a. a. O. S. 12. Die Verschiedenheit der Koeffizienten erklärt sich durch unsere etwas abweichenden Definitionen.

mäßige aus dem Zufluß stammende Störungen sich geltend machten. In der Folge wurde daher nur mehr mit stundenlang ruhig stehen gelassenem Wasser gearbeitet.

Die Ergebnisse der Messung zeigt Abb. 4 für das enge und Abb. 5 für das weitere Rohr. Die einzelnen an verschiedenen Tagen ausgeführten Versuchsreihen sind durch verschiedene Bezeichnungen kenntlich gemacht.

Bei dem engen Rohr sieht man zunächst den nach den Ueberlegungen von Abschnitt 2 zu erwartenden außerordentlich scharfen Uebergang vom laminaren zum turbulenten Zustand. Um ihn so scharf zu erhalten, muß man bei Annäherung an den kritischen Punkt sehr kleine Stufen der Geschwindigkeitsänderung benutzen. Die Annäherung an den turbulenten Zustand macht sich durch zunächst ganz geringe, dann immer stärkere Unruhe des Spiegels im Manometer geltend. Kommt man dann ganz vorsichtig bis an den kritischen Punkt selbst, so erfolgt noch nicht gleich der Uebergang zur völligen Turbulenz, sondern es tritt ein (beim engen Rohr oft nach Zentimetern zählendes) ziemlich regelmäßiges Pendeln um Gleichgewichtslagen ein, welche die Punkte zwischen dem laminaren und dem turbulenten Ast liefern. Die Erklärung für diese Pendelung dürfte so lauten: Durch den vorsichtig hervorgerufenen Anstieg der Geschwindigkeit tritt Turbulenz, also höherer Widerstand ein. Dadurch wird aber die Geschwindigkeit wieder herabgesetzt. Infolgedessen setzt jetzt wieder laminare Strömung ein, also geringerer Widerstand, infolgedessen Wiederansteigen der Geschwindigkeit usw. Geht man weniger vorsichtig zu Werk, so erhält man sofort den ganzen Uebergang von laminar zu turbulent, sich darstellend durch einen sehr plötzlichen nach mehreren Zentimetern zählenden Ausschlag.

Was den Einfluß der Anlaufänge betrifft, so zeigt sich in der Abb. 4 zunächst ein scheinbarer, indem der kritische Punkt bei den Messungen mit der näher am Einlauf liegenden Meßstrecke tiefere Werte zeigt. Dies ist jedoch Zufall und sicher nur die Folge von nicht zu kontrollierenden Schwankungen der Einlaufstörungen, wie durch gelegentliche Stichproben festgestellt wurde, die auch für M.-Str. 2 höher liegende kritische Zahlen (etwa wie die für M.-Str. 3) gaben. Andererseits erkennt man deutlich, daß bei den Versuchen mit der näher am Einlauf liegenden M. Str. 2 schon wesentlich früher eine, wenn auch nicht erhebliche, so doch immerhin deutliche Abweichung von der laminaren Geraden eintritt, eine Folge der noch vom Einlauf herstammenden, noch nicht völlig abgedämpften Störung.

Noch deutlicher kommt dies zur Geltung beim weiteren Rohr (Abb. 5), das wesentlich stärker den Einfluß der kürzeren Anlaufänge in der Abweichung von der Poiseilleschen Geraden und der Verflachung des Uebergangs erkennen läßt. Nicht recht zu unserer Auffassung paßt die Tatsache, daß die kritische Zahl hier nicht unbedeutend tiefer liegt. Der Grund hierfür dürfte in Nichterfüllung der Ähnlichkeit bei der Zuströmung zum Rohr im Trog zu suchen sein. Für eine bestimmte Reynoldssche Zahl ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten im Rohr für enges Rohr gegen mittleres 2:1, für die Geschwindigkeiten im Trog aber 1:2. Befindet sich also in der Gegend des Einlaufs irgend eine Störungsstelle, so wird diese bei dem weiteren Rohr infolge der größeren Geschwindigkeit viel stärker wirksam.

Schließlich wurde noch bei dem engen Rohr durch Abdecken eines Segments der Einlauföffnung von etwa 3 mm Höhe, also etwas weniger als der Halbmesser, eine sehr starke Störung hervorgerufen. Die Resultate zeigt Abb. 6. Die Uebergangskurve von laminar zu turbulent liegt schräg, die Kurve für die näher am Einlauf befindliche Meß-

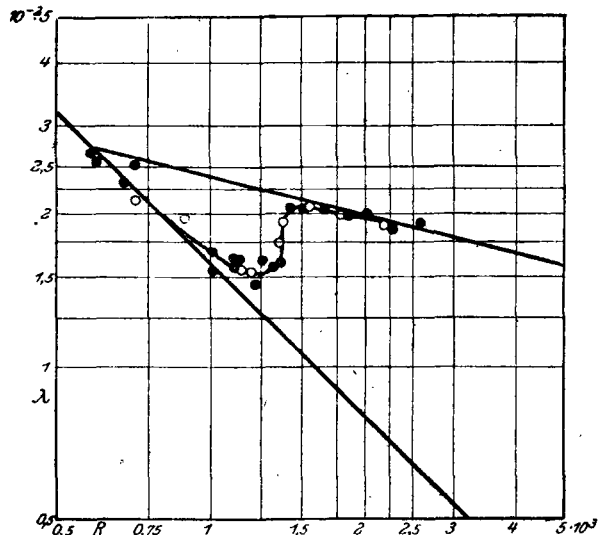


Abb. 5

strecke schon von kleinen Reynoldsschen Zahlen ab wesentlich über der für die M.-Str. 3.

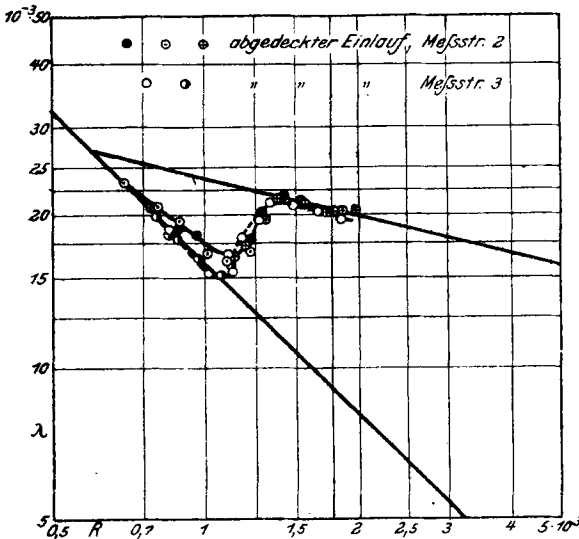


Abb. 6

λ - R -Werten für die scharfe Bestimmung des kritischen Punktes folgenden großen Vorzug hat. Hat man ein p - u Diagramm, so ist der laminare Bereich gegeben durch eine ansteigende Gerade, der turbulente ebenfalls durch eine ansteigende Kurve. Der Uebergang zwischen beiden ist ebenfalls ein Anstieg, also schwer zu erkennen, hier dagegen sind beide Kurven fallend und dazwischen ein Anstieg, der sich natürlich viel schärfer geltend macht.

5. Versuche über den Einfluß der Einlaufstörung. Diese Versuche wurden mit dem engen Rohr durchgeführt, die Resultate sind in Abb. 7 wiedergegeben. Nachdem für die durch den scharfrandigen Einlauf gegebene Störung der Betrag der kritischen Zahl zu etwa 1700 ermittelt war, wurden zunächst Versuche in der Richtung unternommen, hohe kritische Zahlen zu erreichen. Dazu mußte möglichst störungsfreier Einlauf angestrebt, dem Einlaufstück also eine Form erteilt werden, die eine Ablösung der Strömung erschwerte. Als das Beste erscheint hier wohl eine allmähliche Erweiterung des Rohres, die ohne Wendepunkt in die Ebene der Trogwandung hinüberführt. Aus technischen Einfachheitsgründen wurde jedoch ein nach Gutdünken gezeichnetes Einlaufstück aus massivem Messing gedreht und auf den Rohranfang aufgesetzt, ragte also mit seiner höchsten Stelle in das Innere des Troges hinein und verlief dann stetig gegen die Trogwand.

Das Profil zeigt Abb. 2a. Es erwies sich auch als für den beabsichtigten Zweck hinreichend gut geformt. Denn bei genügend langer Beruhigung des Wassers im Trog und vorsichtigem Arbeiten wurde sofort als kritische Zahl etwa 6100 erreicht²⁾. Da es nicht darauf ankam, einen Rekord aufzustellen, konnte man sich hiermit begnügen. Es handelte sich nun vielmehr darum, langsam fortschreitend stetig größer werdende Störungen am Einlauf hervorzubringen. Dies wurde in einfachster Weise erreicht, indem die ursprünglich nur zum Abschließen bestimmte Platte P (vergl. Abb. 2) immer näher an den Einlauf herangeschoben wurde. Die resp. Einstellungen und die ihnen zugehörigen kritischen Zahlen sind aus der Abb. 7 ersichtlich. Man sieht, wie mit wachsender Störung am Einlauf ein stetiges Fallen der kritischen Zahl verbunden ist, das jedoch bei $R = 1160$ seine Grenze findet. Die beiden letzten Stufen, entsprechend Plattenabständen von 1,2 und 0,6 mm zeigen praktisch keinen Unterschied mehr in der kritischen Zahl. Zum min-

¹⁾ H. Blasius, u. a. O. S. 36 u. 37, Abb. 4, 9-13.

²⁾ Später wurde bei sorgsamem Experimentieren mit demselben Rohr laminare Strömung bis $R = 8200$ erhalten, mit dem weiteren Rohr bis $R = 11000$.

Ein außerordentlich großer Teil der in der Literatur wiedergegebenen Experimente zeigt diesen Einfluß der Verflachung des Uebergangs durch überlagerte Einlaufstörungen, hervorgerufen durch nicht genügende Ruhe im Trog bzw. zu geringe Anlaufänge. Da die Kurve hierdurch einen verwaschenen Charakter annimmt, ist natürlich die Bestimmung des genauen Wertes der kritischen Zahl sehr erschwert, und hierin ist wohl der Hauptgrund für die außerordentlich verschiedenen Resultate zu suchen. Sehr gut läßt sich dieser Einfluß der Anlaufänge in den Versuchen von Blasius¹⁾ gradweise erkennen, der sie jedoch nicht in dieser Weise diskutiert hat. Bei dieser Gelegenheit sei auch noch darauf hingewiesen, daß die (für Röhren wohl zuerst von Blasius benutzte) Auftragung nach

desten muß man annehmen, daß auch bei noch stärkerer Einlaufstörung sich die kritische Zahl nur unwesentlich noch ändern würde. Denn die hier vorhandene Störungsform, sehr schneller Uebergang aus dem engeren Spalt auf den größeren Querschnitt ist für Wirbelbildung außerordentlich geeignet.

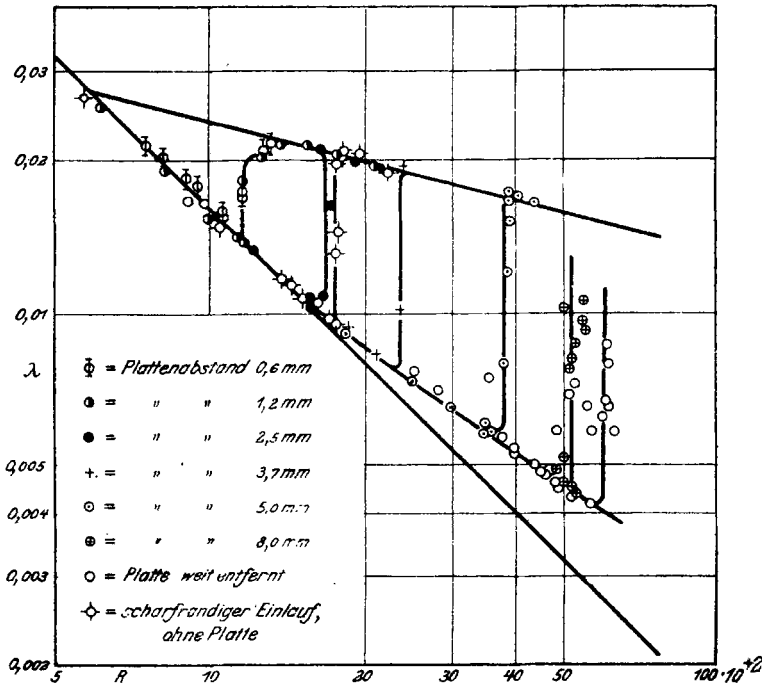


Abb. 7

Hiermit ist es gelungen, die Lücke zwischen der unteren und oberen kritischen Zahl restlos zu schließen und deren untere Grenze auf etwa $R = 1160$ festzulegen. Da dies eine wirklich festliegende, stets reproduzierbare Zahl ist, so hat es weiterhin keinen Zweck mehr, die nur verwirrenden Begriffe der unteren und der nicht festliegenden oberen kritischen Zahl beizubehalten, vielmehr ist es zweckmäßig zu sagen: Die kritische Reynoldssche Zahl ist 1160. Zur scharfen Festlegung, d. h. für scharfen Uebergang von laminar zu turbulent, ist genügende Anlaufänge erforderlich, wozu jedenfalls, wie hier gezeigt, ~ 130 Durchmesser ausreichen. Die so definierte kritische Zahl zu erklären, muß das erste Ziel der theoretischen Forschung sein. Auf die aus Abb. 7 ersichtliche Abweichung der laminaren Widerstandskurve von der Poiseuilleschen Geraden wird in einer folgenden Arbeit näher einzugehen sein.

6. Schluß. Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit, wonach die kritische Zahl eine Funktion der (größten) vorhandenen Störung ist, gibt folgendes Bild über die Stabilitätsverhältnisse der laminaren und der turbulenten Strömung in technisch glatten Röhren. Zu jeder Reynoldsschen Zahl oberhalb 1160 gehört ein ganz bestimmter Störungsbetrag, der erforderlich ist, um die Turbulenz hervorzurufen. Je höher die Reynoldssche Zahl ist, eine um so geringere Störung reicht hierzu aus. Gegen kleinere Störungen ist jeweils Stabilität der Laminarströmung vorhanden¹⁾. Unterhalb der kritischen Zahl $R = 1160$ ist die Laminarströmung gegen noch so große Störungen stabil. Dort ist keine »turbulente« Strömung möglich; etwa vorhandene Wirbel werden bei genügender Beruhigungsstrecke stets verschwinden.

¹⁾ Vergl. hierzu F. Noether, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1913, S. 309, der zum Vergleich die »praktische« Stabilität einer Kugel heranzieht, die auf der Spitze eines Berges in einer kleinen Versenkung liegt. — R. v. Mises, Elemente der techn. Hydromechanik, S. 32, Leipzig 1914, der auf die Analogie mit der »Eulerschen Knieklast« hinweist.

Bekanntlich hat Lord Rayleigh gezeigt, daß die Stabilität reibungsloser Flüssigkeiten daran geknüpft ist, daß kein Vorzeichenwechsel von $\frac{d^2 u}{dy^2}$ (y senkrecht zur Strömung u) auftritt. Ein solcher Vorzeichenwechsel ist aber z. B. durch Stromumkehr an der Wand sofort gegeben. Ich verweise hier auf die bekannten Prandtl'schen Untersuchungen über die Ablösung der Grenzschicht an umströmten Körpern. Dort wird die Umkehr bewirkt durch den der Bernoullischen Gleichung entsprechenden Druckanstieg an der Rückseite des umströmten Körpers in Verbindung mit der durch die Reibung bewirkten geringen Geschwindigkeit in der Grenzschicht. Ein solcher Druckanstieg liegt hier natürlich nicht vor, wohl aber können wir uns die Umkehr hervorgebracht denken durch das Feld eines Wirbels mit entsprechendem Rotationssinn, der dann die notwendige »Anfangsstörung« darstellt. Da sonach das physikalische Verhalten gegebenenfalls eine Verletzung der Rayleigh'schen Stabilitätsbedingung darbietet, wird man vielleicht die Lösung des »Turbulenzproblems« in dieser Richtung suchen dürfen.

82

Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt.¹⁾

Von N. MONONOBE in Tokio.

Bei Erdbeben werden hohe schlanke Bauwerke der verschiedensten Art, wie etwa Schornsteine, Leuchttürme, Brückenpfeiler und Brückentürme in Schwingung versetzt. Infolge dieser erzwungenen Schwingungen treten an allen Stellen des Bauwerkes Biegemomente auf und das Bauwerk wird Gefahr laufen, an der Stelle, wo die durch die Biegung hervorgerufene Spannung der äußersten Faser am größten ist, zu brechen. Um die Standfestigkeit gegenüber einer Beanspruchung durch Erdbeben zu bestimmen, muß man auf theoretischem Wege das von einer erzwungenen Schwingung herrührende Biegemoment untersuchen. Nun hängt die erzwungene Schwingung eines Bauwerkes wesentlich von dem Verhältnis ab, in dem die Eigenfrequenz seiner Schwingung zu der Schwingungsfrequenz des Erdbebens steht und die Schwingungsamplitude

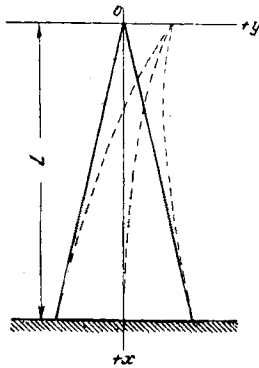


Abb. 1

wächst stark, wenn diese beiden Schwingungsfrequenzen sich nähern. Ein Bauwerk hat aber meist veränderlichen Querschnitt, ja es läuft oft gegen oben spitz zu, und, soweit der Verfasser unterrichtet ist, ist bis jetzt kein Verfahren zur Berechnung der Schwingungsfrequenz für derartig gestaltete Körper mitgeteilt worden. Die Formel für den Zylinder ist zu ungenau und man kommt sogar in der Praxis mit ihr nicht aus. Es soll nun hier eine Methode zur Berechnung der Querschwingungen elastischer Stäbe von veränderlichem Querschnitt gegeben werden, wobei der den Rechnungen zugrunde gelegte Querschnittsverlauf eine Annäherung an den Querschnittsverlauf wirklicher Gebäude bilden soll.

1. Die Frequenz der Querschwingungen eines Kegels. Das Problem der Querschwingung eines Kegels ist von Kirchhoff²⁾ untersucht worden. — Es befinde sich (Abb. 1) der Koordinatenanfangspunkt für die Ruhelage am freien Stabende, die x -Achse gehe vertikal nach abwärts, L bezeichne die Länge des Kegels, R , A und J den Radius, die Querschnittsfläche und das Trägheitsmoment für den jeweiligen Schnitt x und R_0 , A_0 und J_0 seien dieselben Größen an dem festgehaltenen Ende, d. h. an der Basis. Dann ist

$$R = \frac{x}{L} R_0, \quad A = \frac{x^2}{L^2} A_0, \quad J = \frac{x^4}{L^4} J_0.$$

¹⁾ Diese Untersuchung ist ein Auszug aus meiner Doktorarbeit, genehmigt von der Kaiserlichen Universität zu Tokio.

²⁾ Vergl. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, S. 339.