



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 12 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.,
Дубень А.П., Новикова Н.Д.

Явное интегрирование по
времени уравнений Навье-
Стокса с помощью метода
локальных итераций

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Явное интегрирование по времени уравнений Навье-Стокса с помощью метода локальных итераций / В.Т.Жуков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 12. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2019-12](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-12)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-12>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**В.Т. Жуков, О.Б. Феодоритова,
А.П. Дубень, Н.Д. Новикова**

**Явное интегрирование по времени
уравнений Навье-Стокса с помощью
метода локальных итераций**

Москва — 2019

Жуков В.Т., Феодоритова О.Б., Дубень А.П., Новикова Н.Д.

Явное интегрирование по времени уравнений Навье-Стокса с помощью метода локальных итераций

Предложен алгоритм интегрирования по времени уравнений Навье-Стокса сжимаемой теплопроводной среды на основе процедуры расщепления по физическим процессам и явно-итерационной чебышевской схемы ЛИ-М интегрирования по времени. Построенная схема счета позволяет избежать диффузионного ограничения шага по времени. Схема имеет структуру предиктор-корректор и обеспечивает выполнение законов сохранения. Явный характер вычислений гарантирует эффективность использования схемы в различных параллельных технологиях.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, расщепление по физическим процессам, чебышевская явно-итерационная схема.

Victor Timofeevich Zhukov, Olga Borisovna Feodoritova, Alexey Petrovich Duben, Natalia Dmitrievna Novikova

Explicit time integration of the Navier-Stokes equations using the local iteration method

New time integration algorithm LI-M is proposed for the Navier-Stokes equations of compressible heat-conducting flows. This algorithm is based on the splitting procedure by convection and diffusion processes over a time step. The explicit scheme computes solution of convection part and the explicit-iteration Chebyshev scheme computes the diffusion part. The resulting scheme makes it possible to avoid diffusion restriction on time step. The scheme has a predictor-corrector structure and ensures the fulfillment of conservation laws. The explicit nature of the calculations ensures the efficiency of the use of the scheme in various parallel technologies.

Key words: Navier-Stokes equations, splitting by physical processes, Chebyshev explicit-iteration scheme.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Схема локальных итераций ЛИ-М.....	4
3. Схема ЛИ-М для решения одномерных уравнений Навье-Стокса.....	10
4. Схема ЛИ-М для решения 3D уравнений Навье-Стокса.....	15
4.1 Математическая модель	15
4.2 Вычислительная модель программного комплекса NOISEtte.....	16
4.3 Интегрирование по времени с помощью схемы ЛИ-М.....	17
5. Результаты численного моделирования.....	20
6. Заключение	30
Библиографический список	31

1. Введение

Параллельные вычислительные системы стали привычным и обыденным инструментом численного моделирования сложных физических процессов, поэтому создание эффективных схем интегрирования по времени системы нестационарных уравнений Навье-Стокса представляется перспективным направлением развития, особенно при моделировании многокомпонентных химически реагирующих течений, математическая модель которых приведена в [1, 2]. Именно для таких течений нами предлагается подход, основанный на расщеплении алгоритма расчета одного временного шага всей системы уравнений на конвективный и диффузионный этапы. При этом предполагается, что для гиперболической подсистемы, получающейся из исходной системы уравнений без учета вязкости, теплопроводности и диффузии, расчет одного шага по времени может быть выполнен по явной схеме.

Ясно, что для устойчивости величина временного шага τ_{conv} должна удовлетворять критерию Куранта–Фридрихса–Леви (CFL–условию), и такое ограничение при расчете нестационарных процессов носит физически

естественный характер. Если есть зоны, где существенны диффузионные (вязкие, теплопроводные) процессы, то расчет диффузионного этапа с шагом τ_{conv} уже невозможно проводить по явной схеме. В этом случае при рассмотрении диффузионного этапа можно для решения системы параболических уравнений записать неявную схему и решать полученную систему линейных алгебраических уравнений одним из итерационных алгоритмов. При таком подходе возникает необходимость подбора эмпирических элементов (предобусловливателей, критериев окончания итераций и др.). Заметим, что применение неявной схемы само по себе не гарантирует высокой точности описания эволюции решения во времени. Кроме того, число итераций должно быть подчинено требованию устойчивости. Для ряда итерационных схем необходимое ограничение на число итераций дает теорема Гельфанда - Локуциевского [3, с. 275–282]. Класс схем, подпадающих под это ограничение, включает итерационные схемы, эквивалентные некоторой двухслойной явной схеме с расширенным шаблоном влияния. Для схемы ЛИ-М [4], используемой в данной работе на диффузионном этапе, теорема Гельфанда -Локуциевского выполняется. Расчет по схеме ЛИ-М решения на верхнем слое по времени состоит в выполнении определенного числа явных итераций с параметрами, являющимися корнями многочленов Чебышева. Дополнительным преимуществом схемы ЛИ-М является отсутствие настроечных эмпирических параметров. Отметим, что схема ЛИ-М [4] построена на основе схемы [5].

Результирующая схема для всей системы уравнений имеет структуру предиктор-корректор и обеспечивает выполнение законов сохранения. Явный характер вычислений гарантирует эффективность использования схемы в различных параллельных технологиях.

2. Схема локальных итераций ЛИ-М

Схема локальных итераций ЛИ-М предназначена для решения параболических уравнений и возникла как развитие схемы с чебышевскими параметрами, предложенной в [5] и опробованной в [4, 6]. Конструкция схемы

ЛИ-М основана на использовании многочлена Чебышева I рода степени p , определяемой шагом по времени и верхней границей разностного эллиптического оператора. Каждый шаг схемы ЛИ-М состоит из $q = 2p - 1 \geq 1$ внутренних итераций, алгоритмически эквивалентных явной схеме счета и поэтому идеально распараллеливаемых. Если формально исключить внутренние итерации, то схему локальных итераций можно представить как явную разностную схему с увеличенным в q раз шаблоном узлов пространственной дискретизации. Привлекательность состоит в том, что q – кратное увеличение шаблона дает возможность увеличить шаг счета по времени в q^2 раз. Например, если для перехода на следующий момент по времени потребуется $\approx 10^6$ шагов по явной схеме, то схема ЛИ-М потребует $\approx 10^3$ шагов. Заметим, что наличие этого факта не влияет на точность расчета.

Схема ЛИ-М предназначена для решения эволюционных уравнений, т.е. для расчета нестационарных процессов, поэтому одной из ее отличительных особенностей является правильный расчет эволюции во времени первых, низкочастотных компонентов разностного решения, а для высокочастотных компонентов обеспечивается их ограниченность для выполнения устойчивости. Существуют различные модификации схем локальных итераций, и их основу составляют явные итерации с параметрами, являющимися корнями многочленов Чебышева I рода. Главная идея этих схем принципиально отличается от обычного чебышевского ускорения итераций: выбор числа итераций и итерационных параметров диктуется условиями аппроксимации и устойчивости, а не оптимизацией сходимости итераций к решению неявной схемы.

Теоретическое обоснование схем локальных итераций проведено для многомерных линейных параболических уравнений при краевых условиях первого, второго и третьего рода, но, как показывает вычислительный опыт, схема может быть использована и для более общих эволюционных уравнений и систем. В частности, в работе [6] схема ЛИ-М успешно использована для

интегрирования нелинейной системы уравнений теплопроводности в рамках газодинамической модели Эйлера и показала высокую надежность и эффективность в расчетах высокотемпературных процессов в термоядерных мишенях. В указанной работе использован принцип расщепления алгоритма расчета одного временного шага на газодинамический и теплопроводный этапы. Газодинамический этап реализуется с помощью классической схемы С.К. Годунова, а пространственно-временная дискретизация уравнений теплопереноса согласована с газодинамической схемой с сохранением свойств консервативности и групповой инвариантности. На каждом шаге по времени система трех дискретных уравнений теплопроводности (или одного уравнения в случае однотемпературной модели) решается явно-итерационной схемой ЛИ-М, обеспечивающей сохранение баланса тепла для каждой ячейки сетки, что принципиально при расчетах высокотемпературных процессов.

Детальный алгоритм схемы ЛИ-М запишем на примере начально-краевой задачи для линейного дифференциального параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + f(x,t), \quad x \in G \subset R^d, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

На границе ∂G области G задано краевое условие $u(x,t) = \varphi(x,t)$, $x \in \partial G$, $t \in [0, T]$, а при $t = 0$ – начальное условие $u(x,0) = u^0(x)$, $x \in G$. L – линейный эллиптический самосопряженный положительно - определенный оператор с коэффициентами, которые могут зависеть от x и t . Функция u является искомой, функции f , φ , u^0 - заданы. Типичным и важным примером служит оператор $Lu = -\text{div}(k(x,t) \text{grad } u)$.

Вопросы создания пространственной сетки и аппроксимации по пространству в данной работе не обсуждаются. Будем считать, что в области $G \times [0, T]$ построена неструктурированная пространственно-временная сетка $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$, где $\Omega_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N_\tau\}$ – сетка по времени с шагом $\tau = T / N_\tau$, $\Omega_h = \{x_i \in G, 0 \leq i \leq N_h\}$ – сетка в G , зависящая от параметра

$h = (1/N_h)^{1/d}$ – шага сетки, характеризующего средний диаметр ячеек сетки, x_i – точка пространства R^d . Шаг τ по времени считаем для простоты постоянным. Узлы сетки Ω_h будем записывать также в виде x_h , опуская в записи узла его номер. Обозначим через $\partial\Omega_h$ теоретико-множественную границу Ω_h . Введем сеточные функции обычным образом: значения сеточной функции u на n -ом временном слое t_n обозначим как u^n или $u^n(x) = u(x, t_n)$, $x \in \Omega_h$, а значения сеточной функции на сетке $\Omega_{h,\tau}$ – как $u_i^n(x) = u(x_i, t_n)$ или в безиндексном виде как $u(x, t)$, $x, t \in \Omega_{h,\tau}$. В подпространстве U_h сеточных функций, заданных на Ω_h и обращающихся в нуль на $\partial\Omega_h$, определим разностный оператор L_h , аппроксимирующий исходный дифференциальный оператор L на классе гладких функций, определенных на G и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Другие типы краевых условий допустимы, условия Дирихле взяты для упрощения изложения. Конкретный вид оператора L_h и его порядок аппроксимации также не являются принципиальными. Предполагаем, что оператор L_h – самосопряженный, его собственные значения λ неотрицательны и лежат на отрезке $[0; \lambda_{\max}]$ вещественной оси.

Схема ЛИ–М является двухслойной по времени, и алгоритм перехода от слоя t_n к новому слою t_{n+1} явно-итерационный. Число итераций q определяется только из условия устойчивости и является своим для каждого слоя n . Никакого контроля сходимости итераций нет, точность по времени обеспечивается конструкцией схемы. Существуют модификации, позволяющие считать как с точностью $O(\tau)$, так и с точностью $O(\tau^2)$. В данной работе мы рассматриваем схему ЛИ–М точности $O(\tau)$.

1. Вычисляем верхнюю границу λ_{\max} спектра оператора L_h по теореме Гершгорина и задаем степень чебышевского многочлена p формулой:

$$p = \left\lceil 0.25 \pi \sqrt{\tau \lambda_{\max} + 1} \right\rceil, \quad (2)$$

где функция $\lceil s \rceil$ – это наименьшее целое, большее или равное s .

2. Берем нули многочлена Чебышева, упорядочивая их для устойчивости [7]:

$$K_p = \left\{ \cos \frac{2i-1}{2p} \pi, \quad i=1, 2, \dots, p \right\}.$$

По упорядоченному множеству $\beta_m \in K_p, m=1, 2, \dots, p$ рассчитываем параметры

$$a_m = \frac{\lambda_{\max}}{1 + z_1} (z_1 - \beta_m), \quad m=1, \dots, p, \quad (3)$$

где корню $\beta_1 = z_1 = \cos(0.5\pi/p)$ соответствует параметр $a_1 = 0$.

Окончательно набор итерационных параметров состоит из $q = 2p - 1$ чисел $\{b_1, \dots, b_q\} \equiv \{a_p, \dots, a_2, a_p, \dots, a_2, a_1\}$. В этом наборе каждый параметр a_m повторяется дважды, за исключением параметра $a_1 = 0$, стоящего на последнем месте. Вместо обратного можно взять прямой порядок, это не имеет значения.

3. Задаем в качестве начального приближения сеточную функцию на слое n :

$y = u^{(0)}$ и в цикле по $l=1, 2, \dots, q$ вычисляем

$$y = \frac{1}{1 + \tau b_l} \begin{pmatrix} (0) & (l-1) & (l-1) \\ y + \tau b_l & y - \tau L_n & y + \tau f \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $f = f^{n+0.5} = f(x, t_n + 0.5\tau)$.

4. Результат q -й итерации примем в качестве функции на верхнем слое

$$u^{n+1} = y^{(q)}.$$

5. Если расчет не закончен ($n+1 < N_\tau$), то переходим к шагу с новыми данными ($n \rightarrow n+1$).

Корень чебышевского многочлена $\beta_1 = z_1 = \cos(0.5\pi/p)$ играет особую роль. При таком выборе $a_1 = 0$, поэтому последняя итерация на каждом шаге по времени эквивалентна счету по явной схеме, что очень хорошо вписывается в структуру "предиктор-корректор" разностных схем, основанных на законах

сохранения. Отметим также как положительный факт, что нижняя граница спектра оператора L_h не участвует в определении алгоритма.

Введем оператор:

$$F_p(L_h) = H_p(L_h) / H_p(-1/\tau), \quad (5)$$

где

$$H_p(\lambda) = \prod_{m=p}^{m=1} (a_m - \lambda) \equiv T_p(z_1 - (z_1 + 1)\lambda/\lambda_{\max}),$$

а $T_p(x)$ - многочлен Чебышева I рода, наименее уклоняющийся от 0 на отрезке $[-1; 1]$:

$$T_p(x) = \begin{cases} \cos(p \arccos x), & |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(p \operatorname{arch} x), & |x| > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим

$$B = I + \tau L_h, \quad F_p = \prod_{m=p}^{m=1} \left(I - \frac{1}{1 + \tau a_m} B \right), \quad Z_{p-1} = \prod_{m=p}^{m=2} \left(I - \frac{1}{1 + \tau a_m} B \right). \quad (7)$$

Здесь I – тождественный оператор, а $F_p = -\tau L_h Z_{p-1}$, поскольку $a_1 = 0$.

После исключения промежуточных итераций схему ЛИ-М можно записать с помощью введенных обозначений в операторной форме:

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= S^+ y^n + \tau Q^n, & 0 \leq n < N_\tau, & & y^0 &= u^0, \\ S^+ &= (I - F_p^2) B^{-1}, \\ Q^n &= (I - F_p Z_{p-1}) B^{-1} f^{n+0.5}. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) запись B^{-1} носит формальный характер, в явном виде обращение оператора не выполняется.

В данной работе мы представляем реализацию схемы ЛИ-М применительно к нестационарным трехмерным уравнениям Навье-Стокса описания течений сжимаемой теплопроводной среды. В будущем предполагается реализация схемы ЛИ-М для моделирования вязких, теплопроводных и диффузионных процессов в многокомпонентных химически реагирующих газовых средах.

3. Схема ЛИ-М для решения одномерных уравнений Навье-Стокса

Предварительно опишем схему ЛИ-М применительно к системе одномерных уравнений динамики вязкого теплопроводного газа. Система одномерных уравнений Навье-Стокса в декартовых координатах может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u(E + p))}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $E = \rho(e + u^2/2)$ - полная энергия, e - внутренняя энергия, μ , κ - коэффициенты вязкости и теплопроводности соответственно. Система дополняется уравнениями состояния, вид которых для изложения алгоритма схемы не имеет существенного значения. Для конкретики будем рассматривать идеальный газ $p = (\gamma - 1)\rho e$, $e = e(T) = C_p T$, где C_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении. В общем случае предполагаем, что из уравнения состояния $e = e(T)$ можно найти $T = T(e)$ и это единственное ограничение на вид используемого уравнения состояния.

Пусть для системы уравнений (9) в области $0 < x < 1$, $0 < t \leq T$ разумным образом поставлена начально-краевая задача. Введем на отрезке $0 < x < 1$ равномерную сетку G_h с шагом h и запишем в каждом ее узле x_i ($i = 1, \dots, N_h$) разностную схему методом конечного объема, т.е. проинтегрируем по «дуальной» ячейке и перейдем к потоковой записи схемы. На границах ячеек заменяем диффузионные потоки разностными соотношениями, а конвективные потоки определяем, например, с помощью решения элементарных задач Римана. В записи схем для удобства будем использовать дифференциальные выражения, подразумевая упомянутые выше аппроксимации. По времени

введем сетку $0 = t_0, t_1, \dots, t_{N_\tau} = T$ с шагом интегрирования $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, который в рамках модельной задачи можно считать постоянным $\tau_n = \tau$.

В основе предлагаемой схемы лежит процедура расщепления на конвективный и диффузионный этапы. При этом предполагается, что шаг по времени τ ограничен условием устойчивости явной схемы для гиперболической системы $\tau = \tau_{conv}$, получающейся из исходной системы (9) без учета вязкости и теплопроводности, $\mu = \kappa = 0$.

Для описания схемы интегрирования по времени введем следующие обозначения. Переменные, принадлежащие нижнему временному слою t_n , имеют имена ρ, u, E, e . Величины, полученные после выполнения гиперболического (конвективного) этапа, обозначим $\rho_{conv}, u_{conv}, E_{conv}, e_{conv}$. Результирующие величины на верхнем слое $t_{n+1} = t_n + \tau_{conv}$ обозначим верхней чертой $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{E}, \bar{e}$.

Не будем останавливаться детально на вопросах аппроксимации, отметим только, что построенная схема принадлежит к схемам типа предиктор-корректор, для которых выполняются законы сохранения.

Алгоритм одного временного шага состоит из трех этапов: конвективного, вязкого и теплопроводного. Приведем описание этапов в формализованном упрощенном виде. Реальный компьютерный алгоритм выглядит по-другому, он учитывает наличие источников членов любого происхождения, в частности возникающих при постановке на границах расчетной области динамических условий Дирихле для параболической подсистемы (т.е. для функций u, T).

Этап I, конвективный. Известные переменные – начальные данные ρ, u, E, e на нижнем слое. Проводим расчет гиперболического этапа по явной схеме:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{conv} - \rho}{\tau_{conv}} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\rho_{conv} u_{conv} - \rho u}{\tau_{conv}} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0, \\
\frac{E_{conv} - E}{\tau_{conv}} + \frac{\partial(u(E + p))}{\partial x} &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Результат: ρ_{conv} , u_{conv} , E_{conv} . Величину ρ_{conv} принимаем за основную переменную на верхнем слое: $\bar{\rho} = \rho_{conv}$.

Введем сеточные операторы

$$L_h^u u \approx -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad L_h^T T \approx -\frac{1}{\bar{\rho} C_p} \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

аппроксимирующие с точностью $O(h^2)$ соответствующие дифференциальные операторы (многомерные аналоги вводятся аналогично).

По μ , κ , ρ (или $\bar{\rho}$) и сетке вычисляются параметры схемы ЛИ-М: оценка максимального собственного значения $\lambda_{\max} = \max(\lambda_{\max}^u, \lambda_{\max}^T)$, где $\lambda_{\max}^u, \lambda_{\max}^T$ – оценки спектров операторов L_h^u, L_h^T соответственно; степень чебышевского многочлена $p = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{\tau_{conv} \lambda_{\max} + 1} \right\rceil$ и итерационные параметры $\{b_1, \dots, b_q\} \equiv \{a_p, \dots, a_2, a_p, \dots, a_2, a_1\}$.

Этап II, вязкий. Проводим расчет «вязкого» этапа по схеме ЛИ-М для параболического уравнения (для системы трех уравнений в трехмерном случае).

Решаем с начальными данными ρ , $\bar{\rho}$, u_{conv} уравнение:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right). \tag{11}$$

Находим промежуточную величину (предиктор) \tilde{u} с помощью «редуцированной» схемы ЛИ-М

$$\tilde{u} = S_u u_{conv}, \quad S_u = \left(I + \tau L_h^u Z_{p-1}^2 \right) B^{-1}, \quad B = I + \tau L_h^u. \tag{12}$$

Под «редуцированной» мы понимаем схему ЛИ-М, в которой делается $2p - 2$ итераций и исключена последняя итерация, представляющая собой явный шаг. Применение оператора S_u к разности точного и приближенного решений задачи (11) делает величину этой разности гладкой, что, в свою очередь, позволяет сделать явный заключительный шаг в силу закона сохранения (корректор):

$$\frac{\bar{\rho}\bar{u} - \bar{\rho} u_{conv}}{\tau_{conv}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right). \quad (13)$$

В (11) и (13) для удобства чтения в правых частях стоят дифференциальные операторы, но подразумеваются их сеточные аппроксимации.

Оператор S_u в совокупности с явным шагом (13) дает схему ЛИ-М (8) в силу цепочки равенств:

$$I - \tau L_h^u \left(I + \tau L_h^u Z_{p-1}^2 \right) B^{-1} = \left(B - \tau L_h^u - \tau L_h^u \tau L_h^u Z_{p-1}^2 \right) B^{-1} = \left(I - F_p^2 \right) B^{-1}.$$

Результат: основная переменная на верхнем слое \bar{u} .

Как уже отмечалось, алгоритмически предлагаемая схема является явно-итерационной, см. (16), операторная запись приведена для объяснения алгоритма.

Этап III, теплопроводный. Исходные переменные: $\bar{\rho}$, \bar{u} , u_{conv} , E_{conv} , e_{conv} .

Решаем с начальными данными E_{conv} и $T = T(e)$ уравнение (с известным источником f в правой части)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f, \quad f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right).$$

Аналогично процедуре, описанной выше, вычисляем промежуточную температуру \tilde{T} (предиктор) с помощью «редуцированной» схемы ЛИ-М

$$\tilde{T} = S_T T + \tau_{conv} G(f), \quad S_T = \left(I + \tau L_h^T Z_{p-1}^2 \right) B^{-1}, \quad B = I + \tau L_h^T. \quad (14)$$

Функция $G(f)$ в (14) формируется в ходе итераций, ее также можно записать в операторной форме.

Заключительный шаг этого этапа в силу закона сохранения (корректор) имеет вид:

$$\frac{\bar{E} - E_{conv}}{\tau_{conv}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) + f. \quad (15)$$

Оператор S_T в совокупности с явным шагом (15) дает схему ЛИ-М для уравнения теплопроводности, полученного линеаризацией из уравнения энергии, что проверяется точно так же, как и в случае схемы предиктор-корректор (12), (13), описанной выше.

$$\text{Результат: } \bar{\rho}, \bar{u}, \bar{E} = \bar{\rho}(\bar{e} + 0.5\bar{u}^2).$$

Еще раз скажем, что дифференциальные выражения в уравнениях (10) – (15) заменяются сеточными аппроксимациями. Например, можно считать, что (10) – это условная запись схемы Годунова. Результатом первого этапа являются сеточные функции $\bar{\rho}$, u_{conv} , E_{conv} , но последние две функции u_{conv} , E_{conv} являются предварительными и подлежат уточнению на следующих двух этапах. На втором этапе решается уравнение, которое получено из уравнения импульса после исключения конвективных потоков и «замораживания» плотности на временном интервале $[t_n, t_n + \tau_{conv}]$ ее значением на верхнем слое $\bar{\rho}$. Сеточная функция \bar{u} определяется по функции u_{conv} , полученной на промежуточном слое с помощью схемы ЛИ-М, которая подавляет высокочастотные нефизичные моды решения. Рост амплитуд этих мод ведет к неустойчивости явной схемы при нарушении диффузионного ограничения на шаг по времени.

Алгоритм этапа II. Инициализация: $u^0 = u$.

Итерационный процесс:

$$u^m = \frac{1}{1 + \tau_{conv} b_m} \left\{ u^0 + \tau_{conv} b_m u^{m-1} + \tau_{conv} L_h^u u^{m-1} \right\}, \quad m = 1, \dots, q. \quad (16)$$

Результат: $\bar{u} = u^q$.

По сумме конвективного и параболического этапов выполнено консервативное замыкание

$$\frac{\bar{\rho}\bar{u} - \rho u}{\tau_{conv}} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = L_h^u \tilde{u}.$$

Алгоритм этапа III реализует решение уравнения, которое получено из третьего уравнения исходной системы (9) после «замораживания» плотности. Алгоритм решения полученного уравнения может быть записан как для внутренней энергии e , так и для температуры T поскольку известны зависимости $e = e(T) = C_p T$. Мы приведем алгоритм для температуры T .

Инициализация: $T_0 = e / C_p$.

Итерационный процесс:

$$T^m = \frac{1}{1 + \tau_{conv} b_m} \left\{ T_0 + \tau_{conv} b_m T^{m-1} + \tau_{conv} \frac{1}{\bar{\rho} C_p} \left(L_h^T T^{m-1} + g \right) \right\}, \quad m = 1, \dots, q, \quad (17)$$

$$g = g(\bar{\rho}, u, \bar{\rho}) = f - \bar{\rho} \frac{\bar{u}^2 - u_{conv}^2}{\tau_{conv}}, \quad f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right).$$

Результат: $\bar{T} = T^q$, $\bar{e} = C_p \bar{T}$.

4. Схема ЛИ-М для решения 3D уравнений Навье-Стокса

4.1 Математическая модель

Перейдем к рассмотрению трехмерных уравнений Навье-Стокса. Запишем систему уравнений в виде законов сохранения относительно вектора искомого консервативных переменных $U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E)^T$ – плотности, трех компонент импульса и полной энергии

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0,$$

где $F_k = F_k^i + F_k^d$, $k = 1, 2, 3$. Верхним индексом i отмечены конвективные потоки $F_k^i = u_k U + (0, p\delta_{k1}, p\delta_{k2}, p\delta_{k3}, \rho u_k)^T$. Диффузионные (вязкие, теплопроводные и диссипативные) потоки отмечены верхним индексом d

$$F_k^d = -(0, \tau_{k1}, \tau_{k2}, \tau_{k3}, u_1\tau_{k1} + u_2\tau_{k2} + u_3\tau_{k3} + q_k)^T.$$

Здесь

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} u \delta_{ij}$$

– компоненты тензора вязких напряжений τ , \vec{q} – вектор теплового потока:

$$\vec{q} = \kappa \nabla T = \left[\kappa_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}, \kappa_2 \frac{\partial T}{\partial x_2}, \kappa_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right],$$

(u_1, u_2, u_3) – декартовы компоненты скорости, ρ – плотность, p – давление, определяемое по уравнению состояния совершенного газа $p = \rho e(\gamma - 1)$, $e = C_p T$ – внутренняя энергия, $\gamma = C_p / C_v$ – показатель адиабаты, полная энергия $E = \rho(e + 0.5(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2))$. Предполагаем, что коэффициент молекулярной теплопроводности имеет вид $\kappa = \mu C_p / \operatorname{Pr}$.

Для представления схемы локальных итераций введение модели турбулентности не является ограничивающим фактом, поэтому в данной работе рассматриваются только ламинарные течения.

4.2 Вычислительная модель программного комплекса NOISEtte

Реализуем схему локальных итераций на базе программного комплекса NOISEtte [8], разработанного в секторе вычислительной аэроакустики Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Программный комплекс включает в себя численные методики решения систем уравнений Эйлера и Навье–Стокса для сжимаемого газа. В качестве подходов к моделированию турбулентности используются методы RANS, LES, DNS, а также гибридные RANS/LES методы семейства DES.

Предполагается, что все сеточные функции заданы в узлах неструктурированной сетки, которая может включать тетраэдры, пирамиды, призмы и гексаэдры, что позволяет работать с трехмерными областями сложной геометрической формы. При этом используется смешанный метод аппроксимации, а именно, члены конвективного переноса аппроксимируются с использованием метода конечных объемов, а диффузионная часть уравнений

Навье-Стокса – методом конечных элементов с использованием линейных финитных базисных функций (P1-метод Галеркина).

Основу вычислительного алгоритма составляет набор конечно-объемных схем с различными алгоритмами решения элементарных задач Римана на интерфейсах дуальных объемов и методов реконструкции решения.

Для интегрирования по времени используются различные явные и неявные схемы, в том числе явная классическая схема Рунге–Кутты четвертого порядка и неявная схема второго порядка с поточечной линеаризацией по Ньютону пространственной разностной системы уравнений. Получающаяся в результате линейная система уравнений решается стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiCGstab) с различными предобусловливателями.

Исходный код NOISEtte написан на языке C++, использует двухуровневое распараллеливание MPI+OpenMP и дает возможность проводить численное моделирование на сетках с числом элементов более миллиарда с использованием нескольких десятков тысяч процессорных ядер.

4.3 Интегрирование по времени с помощью схемы ЛИ-М

Как уже сказано выше в разделе 3, для реализации алгоритма схемы ЛИ-М необходимо знать оценку максимального собственного значения λ_{\max} диффузионного оператора. Обозначим через D_{coeff}^k величину, равную максимальному из коэффициентов вязкости и теплопроводности

$D_{coeff}^k = \frac{1}{\rho} \max \left\{ \frac{4}{3} \mu, \frac{\mu}{Pr} \right\}$ в расчетной ячейке k диаметром h_k . Тогда в качестве

локальной диффузионной границы шага по времени можно взять $\tau_{diff}^k = \frac{h_k^2}{12D_{coeff}^k}$.

В качестве оценки λ_{\max} диффузионного оператора берем максимум обратных величин по всем ячейкам сетки:

$$\lambda_{\max} = \max_k \left(1/\tau_{diff}^k \right). \quad (18)$$

Итак, при дискретизации по времени применяем схему расщепления, и на первом конвективном этапе используем явный метод Эйлера, считая вязкие потоки нулевыми

$$\Omega_k \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\tau_{conv}} + \sum_{j=1}^{I(k)} (F_{h,1}^i + F_{h,2}^i + F_{h,3}^i)_j = 0.$$

Здесь $F_{h,1}^i$, $F_{h,2}^i$, $F_{h,3}^i$ - дискретные аналоги конвективных потоков, $I(k)$ - число узлов сетки в шаблоне узла с номером k , Ω_k - объем дуальной ячейки. Шаг τ_{conv} по времени определяется гиперболической частью задачи, $\tau_{conv} = \min_k \tau_{conv}^k$.

Результат расчета конвективного шага обозначим как $U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E)_{conv}^T$. Всюду ниже, оставаясь в рамках уже введенных в разделе 3 обозначений, результат расчета временного шага $t_{n+1} = t_n + \tau_{conv}$ отмечен верхней чертой $\bar{U} = U_{t_n + \tau_{conv}} = (\bar{\rho}, \bar{\rho} u_1, \bar{\rho} u_2, \bar{\rho} u_3, \bar{E})^T$.

После гиперболического этапа переходим к параболическому этапу, который состоит из двух явно-итерационных процедур, примененных последовательно сначала к уравнениям сохранения импульса, а затем к уравнению энергии.

Формально используемая процедура одинакова на каждом этапе. Пусть интересующая нас система уравнений имеет вид

$$\frac{dH}{dt} + D_h V = f_h,$$

где D_h - сеточный положительно-определенный самосопряженный оператор.

Итерационный цикл проводится в соответствии с формулой

$$H^m = \frac{1}{1 + \tau_{conv} b_m} \left\{ H^0 + \tau_{conv} b_m H^{m-1} - \tau_{conv} (D_h V^{m-1} - f_h) \right\}, \quad m = 1, \dots, 2p - 1. \quad (19)$$

В качестве начального приближения H^0 , V^0 [$H = H(V)$] выбираются результаты работы гиперболического этапа. Не будем останавливаться здесь на процедурах выбора числа итераций $q = 2p - 1$ и итерационных параметров b_m . Они определяются оценкой (18) и подробно обсуждены выше в разделе 3.

Параболический этап решения начинается с явно-итерационного пересчета трех уравнений сохранения импульса для функций $H = (\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3)^T$ и $V = (u_1, u_2, u_3)^T$, $V = H/\rho$ с учетом только вязких членов:

$$\Omega_k \frac{H_k^{n+1} - H_k^{conv}}{\tau_{conv}} + \sum_{j=1}^{I(k)} (FU_{h,1}^d + FU_{h,2}^d + FU_{h,3}^d)_j = 0.$$

Здесь $FU_{h,k}^d = FU_{h,k}^d(u_{1,conv}, u_{2,conv}, u_{3,conv}) = -(\tau_{k1}, \tau_{k2}, \tau_{k3})_h^T$ – дискретные аналоги потоков вязкого трения.

Участвующие в итерационном процессе (19) операторы имеют вид,

$$D_h = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{j=1}^{I(k)} (FU_{h,1}^d + FU_{h,2}^d + FU_{h,3}^d)_j, \text{ функция } f_h = 0. \text{ В результате на новом}$$

временном слое $t_n + \tau_{conv}$ полагаем $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)^T = V^{2p-1}$. Обновляем вектор состояния U , заменяя в нем старые компоненты скорости на новые: $V = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)^T$, $U = (\bar{\rho}, \bar{\rho}u_1, \bar{\rho}u_2, \bar{\rho}u_3, E_{conv})^T$.

На последнем этапе рассматриваем уравнение энергии с учетом теплопроводности и диссипации за счет трения

$$\Omega_k \frac{E_k^{n+1} - E_k^{conv}}{\tau_{conv}} + \sum_{j=1}^{I(k)} [(F_E)_{h,1}^d + (F_E)_{h,2}^d + (F_E)_{h,3}^d]_j = 0,$$

где

$$(F_E)_{h,k}^d = -(u_1 \tau_{k1} + u_2 \tau_{k2} + u_3 \tau_{k3} + q_k)_h, \quad (F_E)_{h,k}^d = (F_e^1)_{h,k}^d + (F_e^2)_{h,k}^d,$$

а $(F_e^1)_{h,k}^d$ и $(F_e^2)_{h,k}^d$ – дискретные аналоги потоков вязкого трения и тепла.

Перепишем это уравнение в терминах внутренней энергии, для которой запишем «явную» схему, «заморозив» плотность на временном интервале от $[t_n; t_n + \tau_{conv}]$ и взяв ее значение с верхнего слоя $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} \frac{\bar{e} - e_{conv}}{\tau_{conv}} = D_h(e) + f_h.$$

Оператор D_h и правая часть f_h определяются по формулам

$$D_h = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{j=1}^{I(k)} \left[(F_e^1)_{h,1}^d + (F_e^1)_{h,2}^d + (F_e^1)_{h,3}^d \right]_j, \quad (F_e^1)_{h,k}^d = -(u_1 \tau_{k1} + u_2 \tau_{k2} + u_3 \tau_{k3})_h,$$

$$f_h = -\frac{1}{\Omega_k} \sum_{j=1}^{I(k)} \left[(F_e^2)_{h,1}^d + (F_e^2)_{h,2}^d + (F_e^2)_{h,3}^d \right]_j - \bar{\rho} \frac{\bar{v} - v_{conv}}{\tau_{conv}},$$

$$(F_e^2)_{h,k}^d = -(q_k)_h, \quad v = 0.5 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

Итерационный цикл проводится в соответствии с формулой (19), но итерируемыми функциями являются $H = V = \rho e$.

5. Результаты численного моделирования

При проведении численных экспериментов нас будут интересовать вопросы надежности и эффективности схемы локальных итераций, ее возможные преимущества по сравнению с другими схемами. Напомним, что шаг по времени τ для явной схемы Эйлера выбирается из условия устойчивости $\tau = \varphi(\tau_{conv}, \tau_{diff})$, где τ_{conv}, τ_{diff} – шаги по времени, диктуемые соответственно гиперболическим (невязким, конвективным) и параболическим (вязким, диффузионным) ограничениями, φ – известная функция. Схема ЛИ-М опирается на временной шаг $\tau = \tau_{conv}$.

Из рассмотренных в [9] задач, выберем задачу сверхзвукового течения в плоском канале переменного сечения. Его геометрия показана на рис. 1.

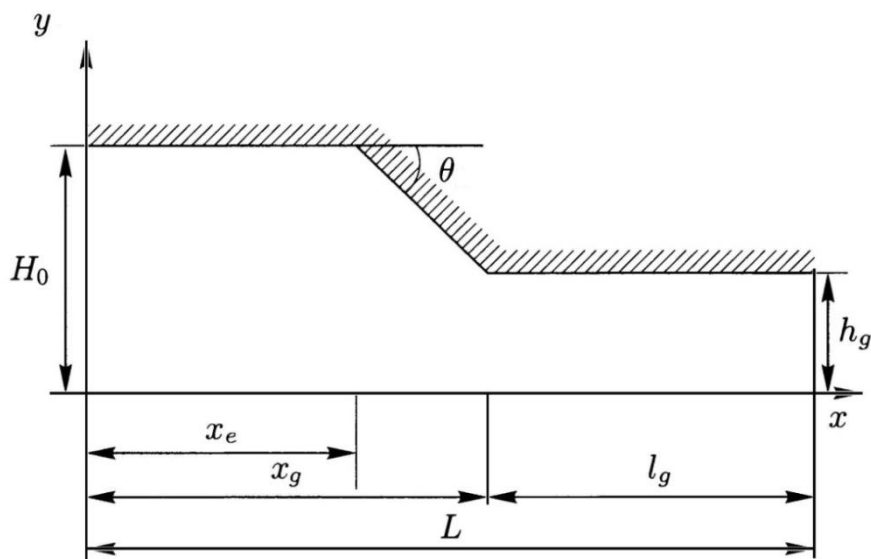


Рис. 1. 2D геометрия модельной задачи

Для численного анализа система уравнений динамики вязкого теплопроводного газа приводится к безразмерному виду путем деления декартовых координат на характерный линейный размер D , компонентов вектора скорости – на скорость V_∞ , давления – на удвоенный скоростной напор $2q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2$, времени – на характерное время пребывания частицы около тела $t_* = D / V_\infty$.

Ниже звездочкой обозначены размерные величины. В качестве характерного линейного размера в задаче принято расстояние $D = H_0$ от оси симметрии до передней кромки входа в канал. В выходном сечении канала расстояние от оси симметрии до задней кромки равно $h_g H_0 = 0.75 H_0$. Входной участок с постоянной площадью поперечного сечения имеет относительную длину x_e . Длина канала подбирается из условия, чтобы в выходном сечении при заданном числе Re не наблюдалось возвратное течение. Переходной участок канала имеет форму клина с углом полураствора θ и длину

$$x_g^* - x_e^* = (x_g - x_e) H_0 = 0.25 H_0 \operatorname{ctg} \theta .$$

Общая длина канала $L^* = L H_0$. Геометрические характеристики рассмотренного канала взяты из [9]:

$$\theta = 10^\circ, \quad x_e = 1, \quad L = 6.5, \quad l_g = 4.0823, \quad l_g / h_g = 5.443.$$

Систематические расчеты на разных сетках выполнены для канала с адиабатическими (теплоизолированными) стенками с числом Маха на входе $M_\infty = 4$ и с числом Рейнольдса $Re = 10^4$ (вычисляется по параметрам невозмущенного потока и характерному линейному размеру).

Для построения сеток область расчета разбивается на три подобласти (слева направо – прямоугольник, трапеция и прямоугольник). В каждой подобласти число шагов N_y по вертикальной оси Oy взято одинаковым. По оси Ox в первой и второй подобластях сетки равномерные с числом шагов N_x^1, N_x^2 соответственно. В третьей подобласти сетка по оси Ox с числом узлов N_x^3

укрупняется в направлении выхода по геометрической прогрессии. При измельчении сетки отношение $g_x = h_x^{\max} / h_x^{\min}$ остается неизменным. Здесь h_y^{\max} и h_y^{\min} – максимальная и минимальная толщины ячеек соответственно (см. рис. 2).

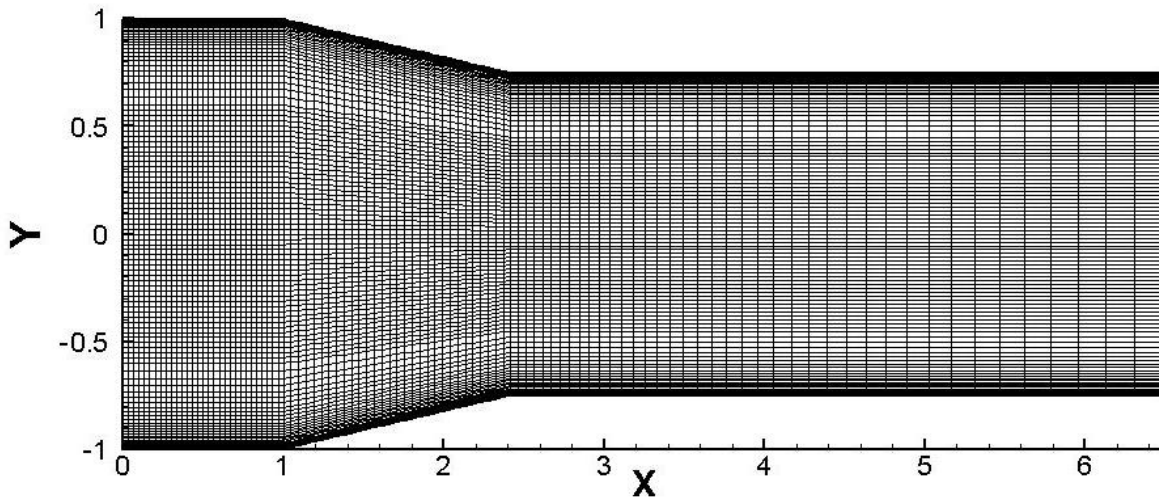


Рис. 2. Расчетная сетка

Для построения сетки в погранслоях используется аналогичный подход. Выделяются зоны толщиной 20% от высоты области по оси Oy и строится сетка, сгущающаяся к соответствующей твердой стенке по геометрической прогрессии. При этом отношение максимальной и минимальной толщин ячеек в зоне каждого погранслоя $g_y = h_y^{\max} / h_y^{\min}$ остается постоянным при измельчении сетки. В центральной части области сетка взята равномерной с числом узлов $N_y / 2$.

Численные эксперименты проведены на трех сетках: $g_x = 4$, $g_y = 8$:

Сетка 1: Размер сетки 1000 узлов ($N_x^1 = 30$, $N_x^2 = 30$, $N_x^3 = 40$, $N_y = 100$).

Сетка 2: Размер сетки 4000 узлов ($N_x^1 = 60$, $N_x^2 = 60$, $N_x^3 = 80$, $N_y = 200$).

Сетка 3: Размер сетки 16000 узлов ($N_x^1 = 120$, $N_x^2 = 120$, $N_x^3 = 160$, $N_y = 400$).

Представленные на рис. 3–8 результаты демонстрируют характерные особенности установившегося течения в канале. На рис. 3–5 показана структура ламинарного установившегося течения в расчетной области – приведены распределения числа Маха, температуры и плотности. Время расчета $T = 150$ достаточно для установления. Видно наличие замкнутых областей отрывного течения, взаимодействующих ударных волн и веера волн разрежения. При заданном числе Рейнольдса Re на стенке канала формируется толстый пограничный слой с замкнутой зоной отрывного течения. Появление такой зоны обусловлено ударной волной, отраженной от оси (плоскости) симметрии.

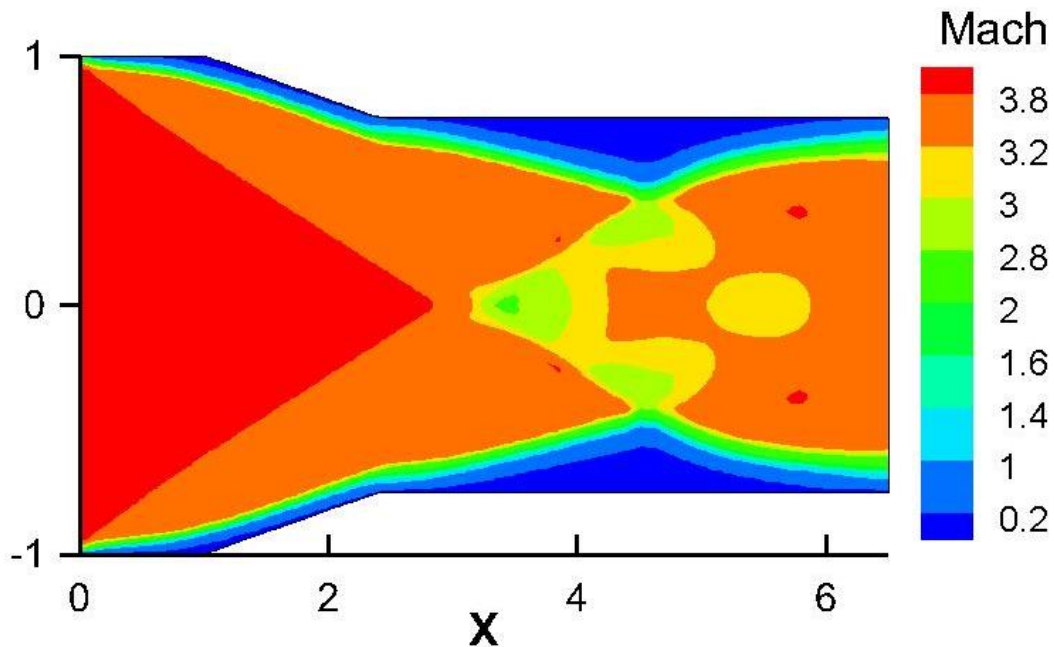


Рис. 3. Распределение чисел Маха в канале. Сетка 1

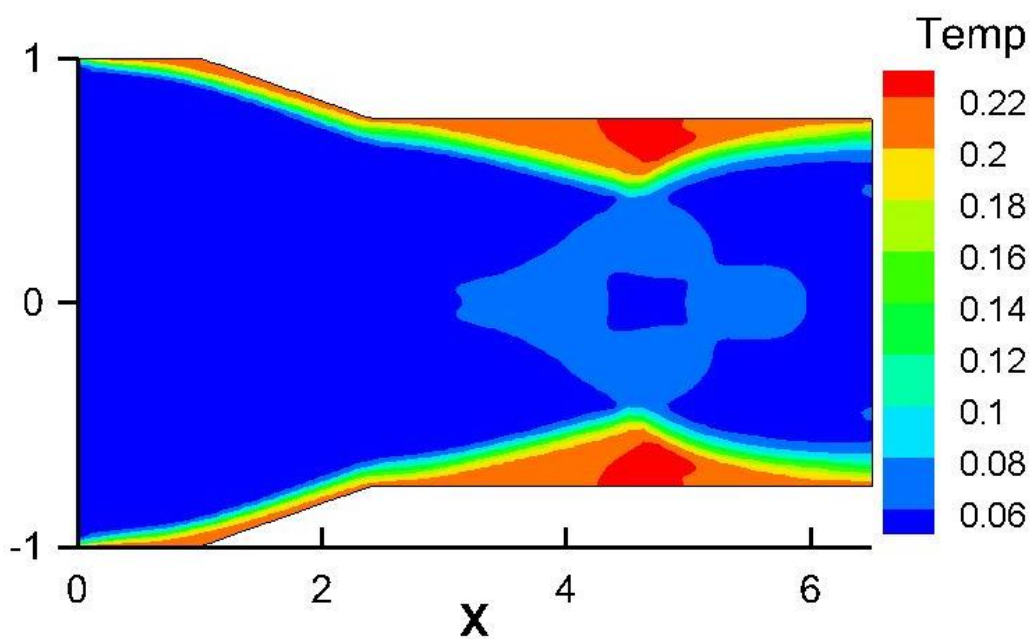


Рис. 4. Распределение температуры в канале. Сетка 1

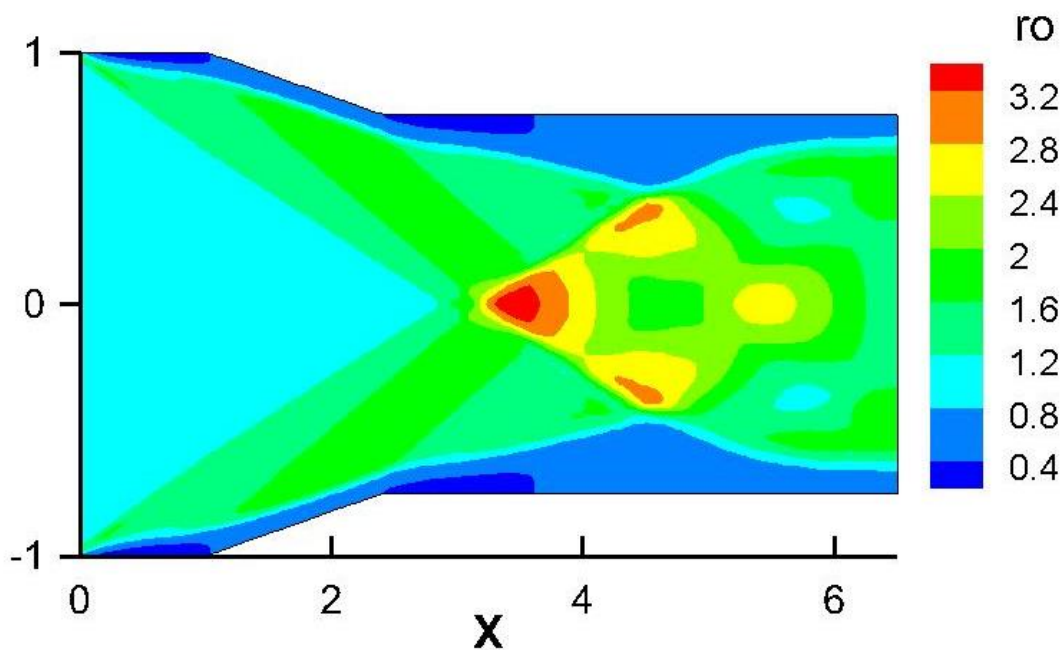


Рис. 5. Распределение плотности в канале. Сетка 1

На рис. 6 и 7 приведены профили температуры и числа Маха вдоль оси симметрии $y = 0$ на сетке 1.

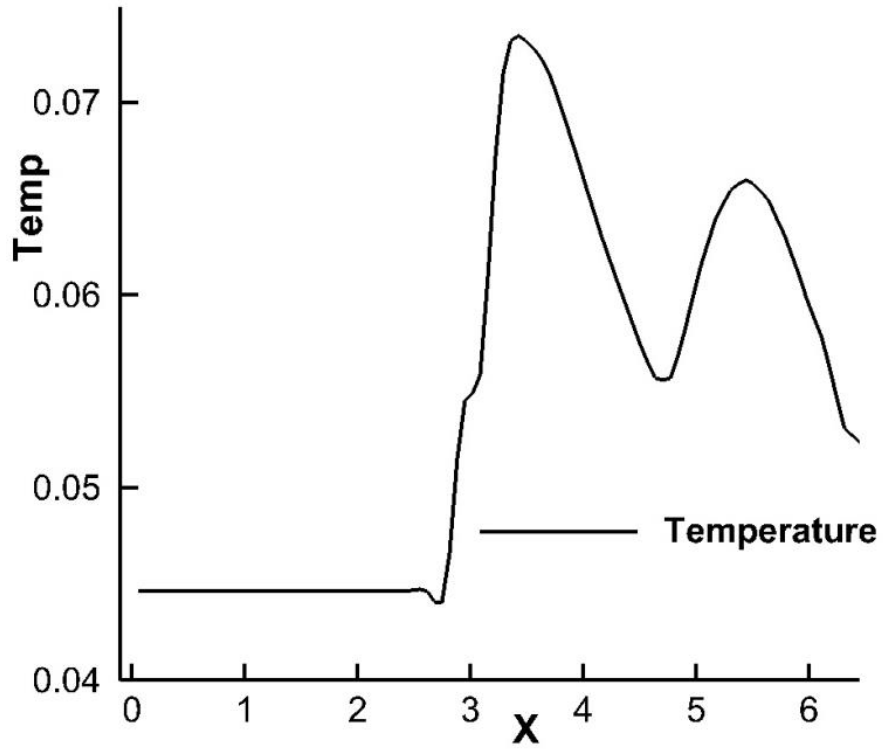


Рис. 6. Профиль температуры в сечении $y = 0$. Сетка 1.

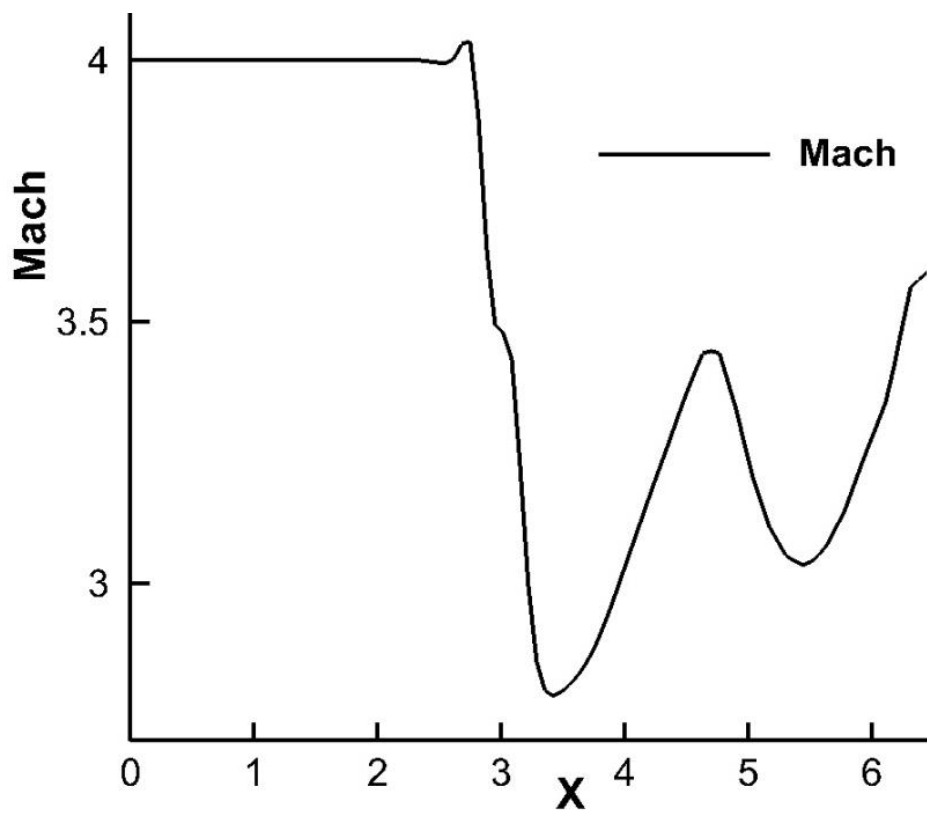


Рис. 7. Профиль числа Маха в сечении $y = 0$. Сетка 1.

На рис.8 показаны профили числа Маха и температуры в сечении $x = 4.6$ (в зоне отрыва) на трех сетках для половины канала $0 \leq y \leq 0.75$.

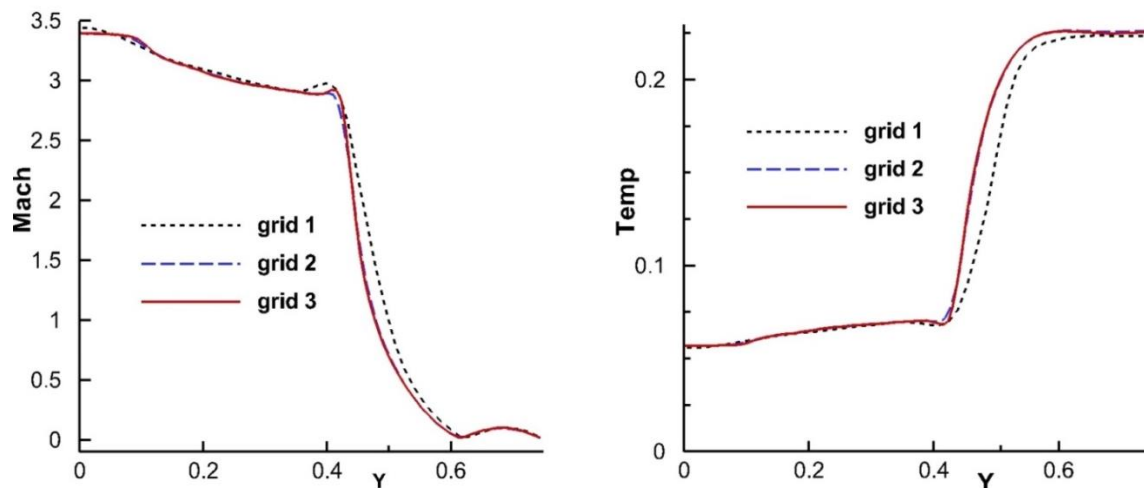


Рис. 8. Профили числа Маха и температуры в сечении $x = 4.6$

Заметим, что мы разрабатываем схему ЛИ-М для расчетов в основном нестационарных процессов. Рассмотрим свойства схемы ЛИ-М в сравнении с явной и неявной схемами, считая задачу о течении в канале нестационарной, а интегрирование на большом отрезке времени проводим с целью избежать влияния краевого условия в выходном сечении на точность решения.

Аппроксимация по пространству взята одинаковой для всех рассмотренных вариантов интегрирования по времени (явная, неявная и ЛИ-М схемы), а именно, использовалась EBR3 схема [8]. При расчете конвективных потоков задача Римана решалась по схеме Рое.

При использовании неявной схемы шаг по времени можно регулировать автоматически, увеличивая или уменьшая его в зависимости от некоторых индикаторов. Большие шаги по времени обычно используют, когда нестационарная постановка служит для определения стационарного решения и не требуется сохранять физическую адекватность промежуточных решений в процессе установления.

Напомним, что данная задача рассматривается в методических целях, поэтому мы сознательно используем неявную схему в неоптимальной манере – шаг по времени τ^* берем фиксированным и близким к максимальному шагу, допускаемому гиперболическим ограничением устойчивости явной схемы с коэффициентом запаса $k_{CFL} = 1$. На сетке 3 это значение примерно в 4 раза больше границы устойчивости явной схемы для полной системы уравнений. Кроме того, для неявной схемы фиксируются основные вычислительные процедуры: делается одна ньютоновская итерация, линейный решатель BiCGstab использует предобуславливатель ILU(0) и итерации прекращаются при достижении относительной точности $\varepsilon = 0.01$ в L_2 – норме.

Для явной схемы шаг по времени вычисляется на каждом временном шаге с учетом совместного гиперболического и диффузионного ограничений с коэффициентом запаса $k_{CFL} = 0.5$ (счет по явной схеме с $k_{CFL} = 1$ на сетках 2 и 3 приводит к авосту). Для схемы ЛИ-М шаг по времени берем фиксированным и равным шагу τ^* неявной схемы. Поэтому для обеспечения устойчивости полной схемы внутри собственно процедуры ЛИ-М выполняется дополнительное число итераций для решения диффузионной подсистемы. Это число итераций определяется в соответствии с формулами (2) – (3) и на сетке 3 в зависимости от шага τ^* и текущих значений коэффициентов молекулярной вязкости и теплопроводности составляет 7–9 итераций, причем для расчета числа итераций (2) на каждом шаге по времени выполняется операция расчета λ_{\max} , требующая в параллельной MPI-реализации межпроцессорных обменов.

В табл. 1–3 приведены характеристики схемы ЛИ-М, неявной и явной схем: число шагов по времени *Steps* до достижения времени $T = 150$, шаг по времени τ_{aver} , время счета в секундах t_{total} и характеристика невязки стационарной системы нелинейных уравнений *residual*. Шаг по времени τ_{aver} – это средний шаг для явной схемы и фиксированный шаг $\tau_{aver} = \tau^*$ для ЛИ-М и неявной схем. В качестве характеристики *residual* взята сеточная L_2 – норма

производной $\partial\rho/\partial t$. Именно невязка уравнения неразрывности является наибольшей среди невязок остальных уравнений Навье-Стокса. Для схемы ЛИ-М в таблицах дополнительно приведена степень p многочлена Чебышева.

Все расчеты проведены на вычислительном комплексе К-10 [10].

Таблица 1.

Сетка 1. Одноуровневый параллелизм (MPI), 32 процессора

	Неявная схема	Явная схема $k_{CFL} = 0.5$	Схема ЛИ-М $p = 2 \div 3$
<i>Steps</i>	34091	71527	34091
τ_{aver}	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$
t_{total} , сек	88	68	45
<i>residual</i>	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$

Таблица 2.

Сетка 2. Одноуровневый параллелизм (MPI), 32 процессора

	Неявная схема,	Явная схема, $k_{CFL} = 0.5$	Схема ЛИ-М, $p = 3 \div 4$
<i>Steps</i>	68182	191056	68182
τ_{aver}	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
t_{total} , сек	848	660	360
<i>residual</i>	$7.4 \cdot 10^{-6}$	$7.3 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$

Сетка 3. Одноуровневый параллелизм (MPI), 32 процессора

	Неявная схема,	Явная схема, $k_{CFL} = 0.5$	Схема ЛИ-М, $p = 4 \div 5$
<i>Steps</i>	136 364	587356	136 364
τ_{aver}	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
t_{total} , сек	6300	6695	3000
<i>residual</i>	$8.5 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$

В данных расчетах в процессе установления число p возрастает незначительно и на самой подробной сетке достигает значения $p=5$, т.е. на шаге по времени диффузионный этап требует 9 явных итераций, каждая из которых состоит в вычислении невязки диффузионных уравнений.

Сравнивая таблицы 1–3, видим, что при измельчении сетки в 16 раз (т.е. в 4 раза по каждому направлению) шаг τ^* , близкий гиперболическому ограничению (но не превосходящий его) уменьшается в 4 раза, шаг явной схемы в силу совместного гиперболического и диффузионного ограничения уменьшается в 8 раз. В итоге время счета на 32 процессорах при измельчении сетки возрастает для неявной и ЛИ-М схем в 72 и 67 раз соответственно (прогноз роста вычислений – 64 раза). Для явной схемы рост составляет 100 раз, на сетке 3 делается в 8 раз больше шагов, чем на сетке 1, т.е. прогнозируемый рост – 128 раз.

В представленной работе мы не рассматриваем аспекты параллельной эффективности предлагаемой схемы счета. Очевидно, что явный характер предлагаемых в алгоритме вычислений априори обеспечивает высокие характеристики параллельного счета, что проверено в расчетах в диапазоне числа процессоров от 1 до 240. С деталями организации высокопроизводительных вычислений в программном комплексе NOISEtte

можно ознакомиться в работе [11], где, в частности, приведено сравнение эффективности реализации явной и неявных схем.

6. Заключение

В данной работе приведен новый алгоритм численного интегрирования по времени системы уравнений Навье-Стокса, описывающей течения сжимаемой теплопроводной среды. Подход основан на расщеплении расчета одного временного шага системы уравнений на гиперболический и параболический этапы. Для гиперболической подсистемы, получающейся из исходной системы уравнений без учета вязкости и теплопроводности, расчет одного шага по времени выполняется по явной схеме. На диффузионном этапе мы используем явно-итерационную чебышевскую схему ЛИ-М, обладающую алгоритмической простотой и отсутствием настроечных параметров. Результирующая схема обеспечивает выполнение законов сохранения, и, как показывают результаты расчетов сверхзвукового течения в плоском канале переменного сечения, демонстрирует хорошую эффективность. В ближайшей перспективе наша цель - распространить алгоритм на основе схемы ЛИ-М на расчеты нестационарных многокомпонентных течений с учетом диффузии компонентов.

Авторы выражают благодарность П.В. Бахвалову и А.В. Горобцу за помощь в работе и ценные замечания.

Библиографический список

1. Poinso T., Veynante D. Theoretical and Numerical Combustion 2nd edition, Edwards, 2005
2. Жуков В.Т., Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б. Математическая модель течения многокомпонентной смеси газов с учетом возможности возникновения жидкой фазы //Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. №183. 36с. doi:10.20948/prepr-2018-183.URL:
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-183>
3. Гельфанд И.М., Локуциевский О.В. О разностных схемах для решения уравнения теплопроводности. – В кн.: Годунов С.К., Рябенкий В.С. Введение в теорию разностных схем. –М.: Физматгиз, 1962, 340 с.
4. Жуков В. Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т. 22, № 10 . С. 127–158; Math. Models Comput. Simul., 3:3 (2011), 311–332.
5. Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1986. Т.291, № 3. С. 540 – 544.
6. Жуков В.Т., Забродин А. В., Феодоритова О.Б. Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993.Т.33, № 8. С. 1240–1250; Comput. Math. Math. Phys., 33:8 (1993), С.109–110.
7. Лебедев В.И., Финогенов С.А. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом методе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971. Т. 11, № 2. С. 425 – 438.
8. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычисл. методы и программирование, 2012, Т.13, вып.3, С. 110–125.

9. Башкин В.А., Егоров И.В. Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 332 с. ISBN 978-5-922 1-1524-7
10. Вычислительный кластер К-10. URL: <http://kiam.ru/MVS/resources/k10.html>.
11. Gorobets A.V. Parallel Algorithm of the NOISEtte Code for CFD and CAA Simulations, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2018, Vol. 39, No. 4, pp. 524–532.