

Vladimir G. Maz'ya; S. V. Poborchij

Продолжение функций из классов С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе, I.

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 36 (1986), No. 4, 634–661

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102122>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1986

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ С. Л. СОБОЛЕВА
 ВО ВНЕШНОСТЬ ОБЛАСТИ С ВЕРШИНОЙ ПИКА
 НА ГРАНИЦЕ, I.

В. Г. МАЗЬЯ, С. В. ПОБОРЧИЙ, Ленинград

(Поступило в редакцию 23/VIII 1985 г.)

Пусть $W_p^l(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева функций в области $\Omega \subset R^n$, снабженное нормой $\|u\|_{p,l,\Omega} = \sum_{s=0}^l \|\nabla_s u\|_{p,\Omega}$, где $l = 1, 2, \dots, 1 \leq p \leq \infty$, ∇_s — градиент порядка s , $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ — норма в $L_p(\Omega)$.

Будем говорить, что область $\Omega \subset R^n$ с компактной границей $\partial\Omega$ принадлежит классу EW_p^l , если существует линейный непрерывный оператор $\mathcal{E}: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(R^n)$, который является оператором продолжения, т.е. $\mathcal{E}u|_{\Omega} = u$ для всех $u \in W_p^l(\Omega)$.

Хорошо известно, что этому классу принадлежит область с достаточно гладкой границей [1, 2], а также область с границей класса $C^{0,1}$, которая локально может быть определена в некоторой декартовой системе координат с помощью липшицевой функции [3, 4]. В последнее время много внимания было уделено исследованию минимальных требований к границе области Ω , при которых $\Omega \in EW_p^l$ (см. [5–9] и др.). В частности, согласно [6, 7], классу EW_p^l , $p \in [1, \infty]$, $l \geq 1$, принадлежит плоская область, граница которой является квазикоэрциальностью (т.е. представляет собой образ окружности при квазиконформном отображении плоскости на себя). По теореме Альфорса [10] последнее условие равносильно следующему: справедливо неравенство $|x - z| \leq c|x - y|$, $c = \text{const}$, где x, y — любые точки на границе области Ω , а z — произвольная точка на той из двух дуг кривой $\partial\Omega$, соединяющих x и y , которая имеет меньший диаметр.

В работе [5] установлено, что класс плоских односвязных областей из EW_2^1 исчерпывается квазикругами. В. М. Гольдштейн [8] показал, что из одновременного включения плоской односвязной области Ω и области $R^2 \setminus \bar{\Omega}$ в класс EW_p^1 следует, что $\partial\Omega$ — квазикоэрциальность. В упомянутой работе Джонса описан некоторый класс n -мерных областей из EW_p^1 , более широкий, чем класс липшицевых областей, и при $n = 2$ совпадающий с классом квазикругов. Этому классу принадлежат, в частности, области с внутренними пиками при $n \geq 3$.

В. И. Буренков [11] построил линейный ограниченный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^{l,\lambda}(R^n)$ для областей Ω с границами класса $C^{0,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

Известно, что при $p \in [1, \infty)$, $n \geq 2$ области с внешними пиками и при $p \in (1, \infty)$, $n = 2$ области с внутренними пиками не входят в класс EW_p^1 (см. [9], § 1.5). В настоящей работе выясняется, что в каждом из этих случаев существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^1(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^1(R^n)$, действующий в весовое пространство $W_{p,\sigma}^1(R^n)$ с неотрицательным весом σ , стремящимся к нулю при приближении к вершине пика. В доказанных в работе теоремах даны точные условия на вес σ , при которых существует указанный оператор продолжения. Следствием упомянутых теорем является, в частности, включение плоской области с внутренним пиком в класс EW_1^1 и включение области с внешним пиком в класс EW_∞^1 , $l = 1, 2, \dots, n \geq 2$.

В работе рассматривается также вопрос о существовании оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_q^l(R^n)$, где $q < p$, а Ω — ограниченная плоская область с внутренним пиком или ограниченная область с внешним пиком при $n \geq 2$. Получены точные условия, связывающие параметры p, q, l, n с параметрами, описывающими заострение пика, при которых существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_q^l(R^n)$.

Отметим в этой связи работу [12], где построен линейный ограниченный оператор продолжения: $W_p^1(\Omega) \rightarrow W_q^1(R^2)$ для плоской области Ω с внешним или внутренним пиком, в окрестности вершины которого граница принадлежит классу $C^{0,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

Некоторые из доказанных в настоящей статье теорем были анонсированы в заметке [13].

Опишем более подробно полученные в работе результаты на примере n -мерного пика $\Omega = \{x \in R^n: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 < \varphi(x_n)^2, x_n \in (0, 1)\}$. Не стремясь к общности, предположим, что φ — возрастающая выпуклая функция класса $C^{0,1}([0, 1])$, удовлетворяющая условиям $\varphi(t) = o(t)$ при $t \rightarrow +0$, $\varphi(2t) \leq c \varphi(t)$, $t \in (0, 1/2)$, $c = \text{const}$. Тогда для того, чтобы существовал линейный непрерывный оператор продолжения из $W_p^l(\Omega)$ в весовое пространство $W_{p,\sigma}^l(R^n)$ с нормой $\|u\|_{W_{p,\sigma}^l(R^n)} = \sum_{|x| \leq l} \|\sigma D^x u\|_{p,R^n}$, достаточно, а если $\sigma(x)$ в окрестности точки 0 зависит лишь от $|x|$ и возрастает, то и необходимо, чтобы в окрестности точки 0 было справедливо неравенство*)

$$\sigma(r) \leq \begin{cases} c(\varphi(r)/r)^l, & \text{если } lp < n - 1, \\ c(\varphi(r)/r)^l |\log(\varphi(r)/r)|^{1-1/p}, & \text{если } lp = n - 1, \\ c(\varphi(r)/r)^{(n-1)/p}, & \text{если } lp > n - 1 \end{cases}$$

при $r = |x|$. Существование линейного непрерывного оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_q^l(R^n)$, где $1 \leq q < p \leq \infty$, $lp \neq n - 1$, равносильно сходимости интеграла

$$I_n(\beta) = \int_0^1 (t^\beta / \varphi(t))^{n(\beta-1)} t^{-1} dt.$$

*) Мы позволяем себе иногда писать $\sigma(r)$, $\sigma(z)$ и т.п. вместо $\sigma(x)$ для того, чтобы подчеркнуть зависимость σ только от одной переменной r, z и т. п.

Здесь число β определяется из уравнения $1/q - 1/p = l(\beta - 1)/((n - 1)\beta + 1)$ при $lq < n - 1$ и из уравнения $1/q - 1/p = (n - 1)(\beta - 1)/np$ при $lq > n - 1$. Если $lq = n - 1$, то в подинтегральную функцию интеграла $I_n(\beta)$ добавляется множитель $|\log(\varphi(t)/t)|^{-\alpha}$, где $\alpha = (1 - 1/q)/(1/q - 1/p)$, $\beta = (np - q)/(q(n - 1))$.

Пусть $n = 2$. Для того, чтобы существовал линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(R^2 \setminus \bar{\Omega}) \rightarrow W_{p,\sigma}^l(R^2)$ достаточно, а если $\sigma(x)$ зависит на Ω лишь от x_2 и возрастает, то и необходимо, чтобы при $x \in \Omega$ и малых x_2 была верна оценка $\sigma(x) \leq c(\varphi(x_2)/x_2)^{l-1/p}$, $c = \text{const}$.

При $n = 2$ положим $G = (R^2 \setminus \bar{\Omega}) \cap B$, где B — единичный круг с центром $x = 0$. Тогда необходимым и достаточным условием существования линейного оператора продолжения: $W_p^l(G) \rightarrow W_q^l(R^2)$, $1 \leq q < p \leq \infty$, является сходимость интеграла $I_n(\beta)$, где $n = 2$, $1/q - 1/p = (l - 1/p)(\beta - 1)/(\beta + 1)$.

Работа состоит из девяти параграфов. Настоящая первая часть работы содержит параграфы 1–5. В § 1 приводятся некоторые вспомогательные результаты, используемые в дальнейшем. В частности здесь доказываются весовые неравенства Харди для внешних пиков. В § 2 строится оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^l(R^n)$, где Ω — область в R^n с вершиной внешнего пика на границе, $lp < n - 1$ и σ — весовая функция. Аналогичный оператор продолжения в случае $lp = n - 1$ рассмотрен в § 3. Для построения указанных операторов область Ω в окрестности вершины пика разбивается на такие ячейки, что диаметры вписанного и описанного около каждой ячейки шара имеют один и тот же порядок малости. Затем общий оператор продолжения выписывается с помощью подходящего развизия единицы и локальных операторов продолжения с каждой ячейки. Параграфы 4–5 носят вспомогательный характер. В § 4 изучаются свойства одного оператора типа усреднения, а в § 5 получена оценка нормы оператора продолжения из тонкого цилиндра в более широкий. Результаты последних двух параграфов будут использованы во второй части работы при построении оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^l(R^n)$ для области Ω с внешним пиком в случае $lp > n - 1$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть Ω — область в R^n ; $n \geq 2$, с компактной границей $\partial\Omega$. Предположим, что $0 \in \partial\Omega$ и что $\partial\Omega \setminus 0$ — поверхность класса $C^{0,1}$. Поместим в точку 0 начало декартовых координат $x = (y, z)$, $y \in R^{n-1}$, $z \in R^1$. Пусть φ — функция из $C^{0,1}([0, 1])$, которая удовлетворяет условиям: $\varphi(t) = o(t)$ при $t \rightarrow +0$, $\varphi(t)/t$ возрастает. Пусть еще ω — $(n - 1)$ -мерная область с компактным замыканием и границей класса $C^{0,1}$.

Определение 1.1. Точка 0 называется *вершиной пика, направленного во внешность области Ω* , если существует такая окрестность U этой точки, что $U \cap \Omega = \{x: z \in (0, 1), y/\varphi(z) \in \omega\}$.

В дальнейшем будем для определенности считать, что множество $\bar{\omega}$ расположено в открытом единичном шаре с центром в точке $y = 0$ и что ω содержит точку $y = 0$. Кроме того, относительно функции φ будем дополнительно предполагать, что $\varphi(t) < t$ при $t \in (0, 1]$.

Пусть измеримая неотрицательная функция σ определена в области $G \subset R^n$ и во внешней любой окрестности точки $0 \in \bar{G}$ ограничена и отделена от нуля.

Определение 1.2. Будем говорить, что функция u принадлежит пространству $W_{p,\sigma}^l(G)$, если для любой окрестности V точки 0 справедливо включение $u \in W_p^l(G \setminus \bar{V})$ и конечна величина

$$\|u\|_{W_{p,\sigma}^l(G)} = \sum_{|z| \leq l} \|\sigma D^z u\|_{p,G}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Условимся через c, c_1, c_2, \dots обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от p, q, l, n и области Ω . Положительные величины a, b будем называть эквивалентными ($a \sim b$), если $c_1 \leq a/b \leq c_2$. Через $B_r(x)$ обозначим открытый шар в R^n с радиусом r и центром в точке $x \in R^n$; $B_r = \text{def } B_r(0)$.

Лемма 1.1. (Неравенства Харди для внешнего пика.) Пусть Ω — область в R^n с вершиной 0 внешнего пика на границе, и пусть U — окрестность точки 0 из определения 1.1. Предположим, что функция u задана на множестве $U \cap \Omega$, имеет обобщенные производные порядка $l \geq 1$ и равна нулю в окрестности $z = 1$. Тогда справедливы неравенства

$$(1.1) \quad \|z^{-l}u\|_{p,U \cap \Omega} \leq c \|\nabla_l u\|_{p,U \cap \Omega}, \quad lp < n,$$

$$(1.2) \quad \|z^{-l}\sigma_1 u\|_{p,U \cap \Omega} \leq c \|\sigma_1 \nabla_l u\|_{p,U \cap \Omega}, \quad lp \leq n - 1,$$

$$(1.3) \quad \|z^{-l}\sigma_2 u\|_{p,U \cap \Omega} \leq c \|\sigma_2 \nabla_l u\|_{p,U \cap \Omega}, \quad lp = n - 1,$$

где $\sigma_1(x) = (z/\varphi(z))^l$, $\sigma_2(x) = \sigma_1(x) (\log(z/\varphi(z)))^{(1-p)lp}$.

Доказательство. Достаточно установить оценку

$$(1.4) \quad \|z^{-k}\sigma u\|_{p,U \cap \Omega} \leq c \|z^{1-k}\sigma \nabla u\|_{p,U \cap \Omega}, \quad 1 \leq k \leq l,$$

в следующих случаях: (1) $lp < n$, $\sigma(x) = 1$; (2) $lp \leq n - 1$, $\sigma(x) = \sigma_1(x)$; (3) $lp = n - 1$, $\sigma(x) = \sigma_2(x)$. Оценки (1.1)–(1.3) получаются из (1.4) итерациями.

Пусть $X = (s, t)$, где $s \in R^{n-1}$, $t \in R^1$,

$$\begin{cases} s = y/\varphi(z), \\ t = \int_z^1 \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}. \end{cases}$$

При таком преобразовании область $\Omega \cap U$ переводится в цилиндр $s \in \omega$, $t \in (0, \infty)$. Положим $v(X) = u(x)$. Замечая, что $|\nabla_x u| \sim |\nabla_x v|/\varphi(z(t))$

и $|D(y, z)/D(s, t)| = \varphi(z(t))^n$, приведем неравенство (1.4) к эквивалентному

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} ds \int_0^{\infty} |v(s, t)|^p z(t)^{-kp} \varphi(z(t))^n \sigma(z(t))^p dt \leq \\ & \leq c \int_{\omega} ds \int_0^{\infty} |\nabla_x v|^p z(t)^{-(k-1)p} \varphi(z(t))^{n-p} \sigma(z(t))^p dt, \end{aligned}$$

где $v(s, t) = 0$ в окрестности $t = 0$. Последнее неравенство следует из одномерного неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right|^p z(t)^{-kp} \varphi(z(t))^n \sigma(z(t))^p dt \leq \\ & \leq c \int_0^{\infty} |f(t)|^p z(t)^{(1-k)p} \varphi(z(t))^{n-p} \sigma(z(t))^p dt, \end{aligned}$$

которое, согласно [14], выполняется в том, и только в том случае, если

$$\begin{aligned} & \sup_{r>0} \left[\left(\int_r^{\infty} z(t)^{-kp} \varphi(z(t))^n \sigma(z(t))^p dt \right)^{1/p} \times \right. \\ & \left. \times \left(\int_0^r z(t)^{(k-1)p/(p-1)} \varphi(z(t))^{(p-n)/(p-1)} \sigma(z(t))^{p/(1-p)} dt \right)^{1-1/p} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Делая замену переменной в каждом интеграле, приведем последнее неравенство к виду $\sup \{A(\varepsilon): \varepsilon \in (0, 1)\} < \infty$, где

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \left(\int_0^{\varepsilon} \sigma(z)^p z^{-kp} \varphi(z)^{n-1} dz \right)^{1/p} \times \\ & \times \left(\int_{\varepsilon}^1 (z^{(k-1)p} \varphi(z)^{1-n} / \sigma(z)^p)^{1/(p-1)} dz \right)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

(Если $p = 1$, то второй множитель заменяется выражением

$$\text{ess sup} \{ \varphi(z)^{1-n} z^{k-1} / \sigma(z): z \in (\varepsilon, 1) \}.$$

Рассмотрим, например, случай (1): $lp < n$, $\sigma(z) = 1$. В силу возрастания функции $\varphi(z)/z$ получаем

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &\leq \left(\int_0^{\varepsilon} z^{n-1-kp} dz \right)^{1/p} \left(\int_{\varepsilon}^1 z^{(k-1)p/(p-1)} \varphi(z)^{(1-n)/(p-1)} (\varphi(z) z^{-1})^{(n-1)/(p-1)} dz \right)^{1-1/p} \\ &\leq c \varepsilon^{n/p-k} \left(\int_{\varepsilon}^1 z^{(kp-n)/(p-1)-1} dz \right)^{1-1/p} \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $A(\varepsilon) \leq \text{const}$ и в случаях (2), (3). Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть весовая функция σ определена в R^n , при малых $|x|$ зависит лишь от $|x|$ и возрастает. Тогда всякая гладкая, положительно однородная нулевой степени функция ζ на $R^n \setminus \{0\}$ является мультипликатором в простран-

стве $W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$, где $lp < n$. При этом для любой функции $u \in W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$ верна оценка

$$(1.5) \quad \|\zeta u\|_{W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{W_{l,p,\sigma}(\mathbb{R}^n)}.$$

Доказательство. Поскольку $|(\nabla_s \zeta)(x)| \leq c|x|^{-s}$, то для справедливости (1.5) достаточно установить оценку

$$(1.6) \quad \||x|^{-s} \sigma \cdot (\nabla_{l-s} u)\|_{p,\mathbb{R}^n} \leq c \|\sigma \cdot (\nabla_l u)\|_{p,\mathbb{R}^n}, \quad 0 \leq s \leq l,$$

для функции $u \in W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$, сосредоточенной в окрестности точки 0. Будем считать, что $\text{supp } u \subset B_\varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\sigma(x)$ в шаре B_ε зависит лишь от $|x|$ и возрастает. Заметим, что (1.6) следует из неравенства

$$(1.7) \quad \||x|^{-s} \sigma \nabla_{l-s} u\|_{p,B_\varepsilon} \leq c \||x|^{-(s-1)} \sigma \nabla_{l-s+1} u\|_{p,B_\varepsilon},$$

в котором $0 \leq s \leq l$. Пусть v — любая производная u порядка $l-s$. Тогда (1.7) является следствием оценки

$$\begin{aligned} & \int_{S^{n-1}} d\theta \int_0^\varepsilon |v(r, \theta)|^p \sigma(r)^p r^{n-1-sp} dr \leq \\ & \leq c \int_{S^{n-1}} d\theta \int_0^\varepsilon |(\nabla v)(r, \theta)|^p r^{n-1-(s-1)p} \sigma(r)^p dr, \end{aligned}$$

которая, в свою очередь, вытекает из одномерного неравенства

$$(1.8) \quad \int_0^\varepsilon \left| \int_t^\varepsilon f(\tau) d\tau \right|^p t^\mu \sigma(t)^p dt \leq c \int_0^\varepsilon |f(t)|^p t^{\mu+p} \sigma(t)^p dt$$

при $\mu > -1$. Согласно [14], (1.8) выполняется в том и только том случае, если $\sup \{A(\delta); \delta \in (0, \varepsilon)\} < \infty$, где

$$A(\delta) = \left(\int_0^\delta t^\mu \sigma(t)^p dt \right)^{1/p} \left(\int_\delta^\varepsilon t^{(\mu+p)/(1-p)} \sigma(t)^{p/(1-p)} dt \right)^{1-1/p}$$

(при $p = 1$ второй множитель заменяется выражением $\text{ess sup} \{(t^{\mu+1} \sigma(t))^{-1}, t \in (\delta, \varepsilon)\}$). В силу возрастания σ на промежутке $(0, \varepsilon)$ получаем, что

$$A(\delta) \leq \left(\int_0^\delta t^\mu dt \right)^{1/p} \left(\int_\delta^\infty t^{(\mu+1)/(1-p)-1} dt \right)^{1-1/p} \leq c < \infty.$$

Таким образом установлено неравенство (1.8) и вместе с ним (1.5). Доказательство леммы закончено.

2. ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$, СЛУЧАЙ $lp < n-1$.

Начнем с одного простого утверждения, которым часто будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 2.1. Пусть G — область в \mathbb{R}^n с компактным замыканием и границей

класса $C^{0,1}$. Положим $G_\varepsilon = \{x \in R^n: x/\varepsilon \in G\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда существует линейный оператор E_ε , переводящий функции, заданные на G_ε , в функции, заданные на R^n и такой, что $E_\varepsilon u|_{G_\varepsilon} = u$ и

$$\|\nabla_s(E_\varepsilon u)\|_{p,R^n} \leq c(s, p, n, G) (\varepsilon^{-s} \|u\|_{p,G_\varepsilon} + \|\nabla_s u\|_{p,G_\varepsilon})$$

для любой функции $u \in W_p^l(G_\varepsilon)$, $s = 0, 1, \dots, l \leq p \leq \infty$.

Доказательство. Пусть $\varphi: R^n \ni x \rightarrow \varepsilon x$ и пусть E — построенный Стейном (см. [4] гл. 6, § 3) оператор продолжения из области G на R^n . Тогда с помощью формулы замены переменных в интеграле Лебега легко проверить, что можно положить $E_\varepsilon u = (E(u \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1}$. При этом константа $c(s, p, n, G)$ совпадает с константой c в неравенстве

$$\|\nabla_s(Ev)\|_{p,R^n} \leq c(\|v\|_{p,G} + \|\nabla_s v\|_{p,G}), \quad v \in W_p^s(G).$$

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть Ω — област в R^n с вершиной пика, направленного во внешность Ω , и пусть $lp < n - 1$, $p \in [1, \infty)$ или $l = n - 1$, $p = 1$.

(i) Положим

$$\sigma(x) = \begin{cases} (\varphi(|x|)/|x|)^l, & \text{если } x \in R^n \setminus \bar{\Omega}, |x| < 1, \\ 1 & \text{при остальных } x \in R^n. \end{cases}$$

Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения:

$$W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^l(R^n).$$

(ii) Пусть выполнено условие

$$(2.1) \quad \varphi(2t) \leq c \varphi(t), \quad t \in (0, 1/2),$$

а функция σ при малых $|x|$ и $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$ зависит лишь от $|x|$ и возрастает. Если существует ограниченный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^l(R^n)$, то при достаточно малых $|x|$, $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$, верна оценка

$$\sigma(x) \leq c(\varphi(|x|)/|x|)^l.$$

Доказательство. (i) Построим последовательность $\{z_k\}_{k \geq 0}$ по правилу $z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k$, где $z_0 \in (0, 1/3)$. Нетрудно видеть, что $z_k \searrow 0$, $z_k z_{k+1}^{-1} \rightarrow 1$. Кроме того, справедливо соотношение $\varphi_k \sim \varphi_{k+1}$, где $\varphi_k = \varphi(z_k)$. В самом деле,

$$\varphi_k = \int_{z_{k+1}}^{z_k} \varphi'(t) dt + \varphi_{k+1} \leq (\|\varphi'\|_{\infty, (0,1)} + 1) \varphi_{k+1}.$$

Оценка $\varphi_k \geq \varphi_{k+1}$ очевидна. Будем считать, что число z_0 выбрано столь малым, чтобы выполнялось неравенство $z_0 < 2z_2$ и шар B_{3z_0} содержался в окрестности U вершины пика из определения 1.1.

Пусть $u \in W_p^l(\Omega)$. Продолжим функцию u на R^n . Допустим сначала, что $\text{supp } u \subset U$ и $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$. Положим при $k \geq 1$

$$(2.2) \quad \Omega_k = \Omega \cap U \cap \{x = (y, z), y \in R^{n-1}, z \in (z_{k+1}, z_{k-1})\}.$$

Заметим, что диаметр вписанного и описанного шаров для области $D_k = \{x: \varphi_k x \in \Omega_k\}$ ограничены сверху и снизу положительными величинами, не зависящими от k . Константа Липшица для ∂D_k та же, что и для $\partial \Omega_k$ и ее можно считать не зависящей от k . Таким образом, норма оператора продолжения по Стейну из $W_p^s(D_k)$ в $W_p^s(R^n)$ ограничена сверху числом, не зависящим от k (см. [4]). По лемме 2.1 существует такой линейный оператор продолжения \mathcal{E}_k из области Ω_k на R^n , что

$$(2.3) \quad \|\nabla_s(\mathcal{E}_k u)\|_{p, R^n} \leq c(\varphi_k^{-s} \|u\|_{p, \Omega_k} + \|\nabla_s u\|_{p, \Omega_k}), \quad s \leq l.$$

Пусть ξ_k – срезающая функция класса $C_0^\infty(R^{n-1})$ такая, что $\xi_k(y) = 1$, если $|y| < \varphi_{k-1}$, $\xi_k(y) = 0$, если $|y| > 2\varphi_{k-1}$. Предположим еще, что $|(\nabla_s \xi_k)(y)| \leq c\varphi_k^{-s}$, $y \in R^{n-1}$, $k \geq 1$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$ со следующими свойствами: $\eta_k \in C_0^\infty(z_{k+1}, z_{k-1})$, $|\eta_k^{(s)}(z)| \leq c\varphi_k^{-s}$, $0 \leq s \leq l$, $\sum_{k=1}^\infty \eta_k(z) = 1$ при $z \in (0, z_1]$. Положим

$$(2.4) \quad (\mathcal{E}^{(0)}u)(x) = \sum_{k=1}^\infty \eta_k(z) \xi_k(y) (\mathcal{E}_k u)(x), \quad x = (y, z) \in R^n,$$

и проверим, что $\mathcal{E}^{(0)}$ есть требуемый оператор продолжения. Отметим для всех $k \geq 1$ справедливость включения $\text{supp}(\eta_k \xi_k) \subset B_{3z_0} \subset U$, откуда следует, что $\text{supp}(\mathcal{E}^{(0)}u) \subset U$. Если $z \geq z_1$, то $(\mathcal{E}^{(0)}u)(x) = \eta_1(z) \xi_1(y) (\mathcal{E}_1 u)(x) = 0$, так как $u|_{\Omega_1} = 0$. Далее, при $x \in U \cap \Omega$ имеем $\eta_k(z) \xi_k(y) = \eta_k(z)$, поэтому при тех же x и при $z < z_1$ справедливо равенство

$$(\mathcal{E}^{(0)}u)(x) = \sum_{k=1}^\infty \eta_k(z) u(x) = u(x).$$

Приведенные рассуждения показывают, что $\mathcal{E}^{(0)}u|_\Omega = u$.

Докажем оценку $\|\mathcal{E}^{(0)}u\|_{W_p^l, \sigma(R^n)} \leq c\|u\|_{p, l, \Omega}$. Можно считать что $\sigma(x) = (\varphi(|x|)/|x|)^l$ при всех $x \in B_1$. Заметим прежде всего следующее: для любого $\varepsilon > 0$ множество $R^n \setminus B_\varepsilon$ пересекается лишь с конечным числом носителей функций $\xi_k \eta_k$ и значит, существуют производные $D^\alpha \mathcal{E}^{(0)}u \in L_p^{\text{loc}}(R^n \setminus \{0\})$, $|\alpha| \leq l$. Установим оценку

$$(2.5) \quad \|\sigma \nabla_j \mathcal{E}^{(0)}u\|_{p, R^n} \leq c\|u\|_{p, l, \Omega}, \quad 0 \leq j \leq l.$$

Пусть

$$G_k = \{(y, z): z \in (z_{k+1}, z_k), |y| < 2\varphi_{k-1}\}, \quad k \geq 1.$$

Множество G_k пересекается с $\text{supp}(\eta_i \xi_i)$ лишь при $i = k, k+1$ и, кроме того,

$\sigma|_{G_k} \sim \sigma_k$, где $\sigma_k = (\varphi_k/z_k)^l$. Отсюда

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \|\sigma \nabla_j(\mathcal{E}^{(0)}u)\|_{p, G_k} &\leq c \sigma_k \sum_{i=k}^{k+1} \|\nabla_j(\eta_i \xi_i \mathcal{E} u)\|_{p, R^n} \leq \\ &\leq c \sigma_k \sum_{i=k}^{k+1} \sum_{s=0}^j \varphi_i^{s-j} \|\nabla_s \mathcal{E} u\|_{p, R^n}. \end{aligned}$$

Используя (2.3), мажорируем правую часть в (2.6) выражением

$$c \sigma_k \sum_{i=k}^{k+1} \sum_{s=0}^j (\varphi_i^{-j} \|u\|_{p, \Omega_i} + \varphi_i^{s-j} \|\nabla_s u\|_{p, \Omega_i}),$$

которое будет оценено с помощью неравенства

$$(2.7) \quad \|\nabla_s u\|_{p, \Omega_i} \leq c [(\text{diam } \Omega_i)^{-s} \|u\|_{p, \Omega_i} + (\text{diam } \Omega_i)^{l-s} \|\nabla_l u\|_{p, \Omega_i}].$$

Замечая, что $\text{diam } \Omega_i \sim \varphi_i$, получим

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \|\sigma \nabla_j(\mathcal{E}^{(0)}u)\|_{p, G_k}^p &\leq c \sum_{i=k}^{k+1} (z_k^{-lp} \|u\|_{p, \Omega_i}^p + \|\nabla_l u\|_{p, \Omega_i}^p) \leq \\ &\leq c \|z^{-l} u\|_{p, \Omega_k'}^p + c \|\nabla_l u\|_{p, \Omega_k'}^p, \end{aligned}$$

где $\Omega_k' = \Omega_k \cup \Omega_{k+1}$. Суммируя (2.8) по k и принимая во внимание конечную кратность покрытия $\{\Omega_k'\}$, придем к оценке

$$\|\sigma \nabla_j(\mathcal{E}^{(0)}u)\|_{p, G} \leq c \|z^{-l} u\|_{p, \Omega \cap U} + c \|\nabla_l u\|_{p, \Omega},$$

в которой $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Используем теперь лемму 1.1 (см. неравенство (1.1)) и найдем, что $\|\sigma \nabla_j(\mathcal{E}^{(0)}u)\|_{p, G} \leq c \|\nabla_l u\|_{p, \Omega}$. Поскольку $\text{supp } \mathcal{E}^{(0)}u \subset \bar{G}$, то из последней оценки вытекает (2.5). Итак, требуемый оператор продолжения имеет вид (2.4) в случае, когда $\text{supp } u \subset U$ и $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$.

Переходя к общему случаю, выберем $\varrho = z_0/4$ и построим срезающую функцию $\psi \in C_0^\infty(B_{2\varrho})$ такую, что $\psi|_{B_\varrho} = 1$. Положим $u_0 = \psi u$, $u_1 = (1 - \psi)u$ и доопределим u_1 нулем на множестве $B_\varrho \setminus \bar{\Omega}$. Пусть $\mathcal{E}^{(1)}$ — оператор продолжения из липшицевой области $\Omega \cup B_\varrho$ на R^n (см. [4] гл. 6). Тогда оператор продолжения $\mathcal{E}: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p, \sigma}^l(R^n)$ имеет вид $\mathcal{E}u = \mathcal{E}^{(0)}u + \mathcal{E}^{(1)}u_1$. Доказательство п. (i) теоремы 2.1 закончено.

(ii) Пусть $f \in C_0^\infty(0, 3)$, $f(t) = 1$ при $t \in (1, 2)$. При достаточно малом $\varrho > 0$ положим $u_\varrho|_{\Omega \setminus U} = 0$, $u_\varrho(x) = f(z/\varrho)$, если $x \in U \cap \Omega$ (здесь, как и прежде, $x = (y, z)$, $y \in R^{n-1}$, $z \in R^1$, а U — окрестность точки 0 из определения 1.1). Ясно, что $u_\varrho \in W_p^l(\Omega)$ и $\|u_\varrho\|_{p, l, \Omega}^p \leq c \varrho^{1-lp} \varphi(3\varrho)^{n-1}$. Пусть $\mathcal{E}: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p, \sigma}^l(R^n)$ — ограниченный оператор продолжения в весовое пространство $W_{p, \sigma}^l(R^n)$ с монотонным в окрестности точки 0 весом $\sigma(x)$, зависящим только от $|x|$. В силу монотонности σ имеем

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \|u_\varrho\|_{p, l, \Omega}^p &\geq c \|\nabla_l(\mathcal{E}u_\varrho)\|_{p, R^n}^p \geq \\ &\geq c \sigma(\varrho)^p \int_\varrho^{2\varrho} dz \int_{R^{n-1}} |(\nabla_l \mathcal{E}u_\varrho)(y, z)|^p dy. \end{aligned}$$

Для ограниченной области $D \subset R^{n-1}$ положим

$$(2.10) \quad \gamma_{p,l}(D) = \inf \{ \|\nabla_l v\|_{p,R^{n-1}}^p : v \in W_p^l(R^{n-1}), v = 1 \text{ п.в. на } D \}$$

и заметим, что внутренний интеграл в правой части (2.9) не меньше, чем $\gamma_{p,l}(\varphi(z) \omega) = \varphi(z)^{n-1-lp} \gamma_{p,l}(\omega)$. В силу неравенства С. Л. Соболева $\|v\|_{q,R^{n-1}} \leq c \|\nabla_l v\|_{p,R^{n-1}}$ при $lp < n-1$ и $q = (n-1)p/(n-1-lp)$ получаем, что в этом случае $\gamma_{p,l}(\omega) \geq c(\text{mes}_{n-1} \omega)^{p/q} > 0$. Если $l = n-1$, $p = 1$, то справедливо неравенство $\|v\|_{\infty,R^{n-1}} \leq c \|\nabla_l v\|_{p,R^{n-1}}$ и в этом случае также $\gamma_{p,l}(\omega) \geq c > 0$. Таким образом, внутренний интеграл в правой части (2.9) не меньше, чем $c \varphi(z)^{n-1-lp}$, и мы имеем

$$c_1 \varrho^{1-lp} \varphi(3\varrho)^{n-1} \geq \|u_\varrho\|_{p,l,\Omega}^p \geq c_2 \sigma(\varrho)^p \varrho \varphi(\varrho)^{n-1-lp}.$$

Принимая во внимание, что $\varphi(3\varrho) \sim \varphi(\varrho)$, приходим к оценке $\sigma(\varrho) \leq c(\varphi(\varrho)/\varrho)^l$. Доказательство теоремы закончено.

3. ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ: $W_p^1(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^1(R^n)$, СЛУЧАЙ $lp = n-1$

Установим сначала одно вспомогательное утверждение.

Пусть $\{z_k\}_{k \geq 0}$ — последовательность, построенная при доказательстве п. (i) предыдущей теоремы и ε — фиксированное положительное число. Положим $\varphi_k = \varphi(z_k)$

$$(3.1) \quad \zeta_k(y) = \frac{\log(|y|/\varphi_k)}{\varepsilon \log(\varphi_k/\zeta_k)} + 1, \quad y \in R^{n-1} \setminus \{0\}, \quad k \geq 0.$$

Лемма 3.1. Пусть функция φ , описывающая заострение пика, удовлетворяет условию $\varphi(z + O(\varphi(z))) = \varphi(z) + o(\varphi(z))$ при $z \rightarrow +0$ и пусть λ — функция класса $C^\infty(R^1)$ с ограниченными производными всех порядков. Тогда при всех $k \geq 0$ справедливы оценки

$$(3.2) \quad |\nabla_s(\lambda \circ \zeta_k)(y)| \leq c |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{-1} |y|^{-s},$$

где $s \geq 1$, $y \in R^{n-1} \setminus \{0\}$, и

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & |\nabla_s((\lambda \circ \zeta_k)(y) - (\lambda \circ \zeta_{k+1})(y))| \leq \\ & \leq c |y|^{-s} ((\varphi_k - \varphi_{k+1}) \varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1}), \end{aligned}$$

где $s \geq 0$, $\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$. В обеих оценках $c = c(z_0, s, \varepsilon, \lambda, \varphi)$.

Доказательство. Пусть α — любой мультииндекс размерности $n-1$ и e_i — координатный орт оси ox_i в R^{n-1} . Тогда

$$(3.4) \quad \begin{aligned} D^{\alpha+e_i}(\lambda \circ \zeta_k)(y) &= D_y^\alpha(\lambda'(\zeta_k(y)) \partial \zeta_k / \partial y_i) = \\ &= \mu_k \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D_y^\beta \lambda'(\zeta_k(y))) D_y^{\alpha-\beta+e_i} \log |y|, \end{aligned}$$

где $\mu_k = (\varepsilon \log(\varphi_k z_k^{-1}))^{-1}$. Полагая в (3.4) $|\alpha| = j$, получаем оценку

$$|\nabla_{j+1}(\lambda \circ \zeta_k)(y)| \leq c |\mu_k| \sum_{i=0}^j |\nabla_i(\lambda' \circ \zeta_k)(y)| \cdot |y|^{i-j-1}, \quad |y| \neq 0,$$

из которой по индукции легко выводим (3.2).

Обратимся к доказательству неравенства (3.3). Пусть сначала $s = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |(\lambda \circ \zeta_k)(y) - (\lambda \circ \zeta_{k+1})(y)| &\leq c |\zeta_k(y) - \zeta_{k+1}(y)| = \\ &= c |\mu_k \log(|y| \varphi_k^{-1}) - \mu_{k+1} \log(|y| \varphi_{k+1}^{-1})| \leq \\ &\leq c (|\mu_k - \mu_{k+1}| \log(|y| \varphi_k^{-1}) + |\mu_{k+1} \log(\varphi_{k+1} \varphi_k^{-1})|). \end{aligned}$$

Так как $z_k z_{k+1}^{-1} \rightarrow 1$, $\varphi_k \varphi_{k+1}^{-1} \rightarrow 1$, $\varphi_k z_k^{-1} \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} |(\mu_k - \mu_{k+1}) \log(|y| \varphi_k^{-1})| &\leq |\mu_k - \mu_{k+1}| \log(z_k \varphi_k^{-1}) \leq \\ &\leq c |\log(\varphi_{k+1} \varphi_k^{-1} z_k z_{k+1}^{-1})| \leq c |\varphi_{k+1} \varphi_k^{-1} z_k z_{k+1}^{-1} - 1| \leq \\ &\leq c((\varphi_k - \varphi_{k+1}) \varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1}), \end{aligned}$$

если $\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$. Кроме того,

$$|\mu_{k+1} \log(\varphi_{k+1} \varphi_k^{-1})| \leq c(\varphi_k - \varphi_{k+1}) \varphi_k^{-1}.$$

Таким образом, получено неравенство (3.3) при $s = 0$.

Пусть теперь $s \geq 1$ и для любой функции $\lambda \in C^\infty(R^1)$ с ограниченными производными всех порядков верна оценка

$$(3.5) \quad \begin{aligned} &|\nabla_j(\lambda(\zeta_k(y)) - \lambda(\zeta_{k+1}(y)))| \leq \\ &\leq c |y|^{-j} ((\varphi_k - \varphi_{k+1}) \varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1}), \quad j = 0, \dots, s-1, \end{aligned}$$

если $\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$. Обозначим через γ любой $(n-1)$ -мерный мультииндекс длины s . Тогда $\gamma = \alpha + e_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n-1$ и мультииндекса α длины $s-1$. Из формулы (3.4) следует, что

$$(3.6) \quad \begin{aligned} |D_y^\gamma[(\lambda \circ \zeta_k)(y) - (\lambda \circ \zeta_{k+1})(y)]| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D_y^{\alpha-\beta+e_i} \log |y|| \times \\ &\times |D_y^\beta[\mu_k(\lambda' \circ \zeta_k)(y) - \mu_{k+1}(\lambda' \circ \zeta_{k+1})(y)]| \leq \\ &\leq c \sum_{\beta \leq \alpha} |y|^{|\beta|-s} (|\mu_k - \mu_{k+1}| |D_y^\beta(\lambda' \circ \zeta_k)(y)| + \\ &+ c |\mu_{k+1}| \sum_{\beta \leq \alpha} |y|^{|\beta|-s} |D_y^\beta((\lambda' \circ \zeta_k)(y) - (\lambda' \circ \zeta_{k+1})(y))|). \end{aligned}$$

В силу (3.2) (с заменой λ на λ') получаем, что при $\beta \leq \alpha$

$$\begin{aligned} |(\mu_k - \mu_{k+1}) D_y^\beta \lambda'(\zeta_k(y))| &\leq c |y|^{-|\beta|} |\mu_k - \mu_{k+1}| \leq \\ &\leq c |y|^{-|\beta|} ((\varphi_k - \varphi_{k+1}) \varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1}), \end{aligned}$$

и первая сумма в правой части (3.6) оценивается правой частью неравенства (3.3). Для оценки $|D_y^\beta(\lambda' \circ \zeta_k - \lambda' \circ \zeta_{k+1})(y)|$ при $\beta \leq \alpha$ применим индукционное предположение (3.5) (с заменой λ на λ' и j на $|\beta|$). В результате вторая сумма

в правой части (3.6) также оценится сверху правой частью (3.3). Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть Ω — область в R^n с вершиной пика, направленного во внешность Ω , и пусть $lp = n - 1$, $p \in (1, \infty)$.

(i) Предположим, что выполнено условие

$$(3.7) \quad \varphi(t + O(\varphi(t))) = \varphi(t) (1 + O(\varphi(t))/t)^\delta$$

при $t \rightarrow +0$ и некотором $\delta > 0$. Положим

$$\sigma(x) = (\varphi(|x|)/|x|)^l |\log(\varphi(|x|)/|x|)|^{1-1/p},$$

если $x \in B_1 \setminus \bar{\Omega}$, и $\sigma(x) = 1$ при $x \notin B_1 \setminus \bar{\Omega}$. Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_{p,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^1(R^n)$.

(ii) Пусть функция φ удовлетворяет условию (2.1), а весовая функция σ при $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$ и малых $|x|$ зависит только от $|x|$ и возрастает. Если существует ограниченный оператор продолжения: $W_p^1(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^1(R^n)$, то верна оценка

$$\sigma(x) \leq c(\varphi(|x|)|x|^{-1})^l |\log(\varphi(|x|)|x|^{-1})|^{1-1/p},$$

где x — точка из $R^n \setminus \bar{\Omega}$, достаточно близкая к вершине пика.

Доказательство. (i) Пусть λ — функция класса $C^\infty(R^1)$ такая, что $\lambda(t) = 0$ при $t \leq 1/3$, $\lambda(t) = 1$ при $t \geq 2/3$. Как и в теореме 2.1 построим последовательность $\{z_k\}_{k \geq 0}$ по правилу: $z_0 \in (0, 1/3)$, $z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k$, $k \geq 0$. Эта последовательность обладает следующими свойствами: $z_k \searrow 0$, $z_k z_{k+1}^{-1} \rightarrow 1$, $\varphi_k \varphi_{k+1}^{-1} \rightarrow 1$, $\varphi_k z_k^{-1} \rightarrow 0$, где $\varphi_k = \varphi(z_k)$. Положим $\chi_k = \lambda \circ \zeta_k$, где функции ζ_k определены равенством (3.1), а $0 < \varepsilon < \min\{1/2, \delta/l, 1/l\}$. Ясно, что $\chi_k \in C_0^\infty(R^{n-1})$, $k \geq 0$. Мы имеем: $\zeta_k(y) < 0$, если $|y| > \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$ и $\zeta_k(y) > 1 + \log(\varphi_{k-1}/\varphi_k)/(\varepsilon \log(\varphi_k/z_k))$, если $|y| < \varphi_{k-1}$. Так как $\varphi_{k-1} \varphi_k^{-1} \rightarrow 1$, $\varphi_k z_k^{-1} \rightarrow 0$, то для достаточно больших k верно неравенство $\zeta_k(y) > 2/3$ при $|y| < \varphi_{k-1}$. Выбирая число $z_0 \in (0, 1/3)$ достаточно малым, можно добиться для всех $k \geq 1$ выполнения условий $\chi_k(y) = 1$ при $|y| < \varphi_{k-1}$, $\chi_k(y) = 0$ при $|y| > \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$. Будем, кроме того, считать, что $2\varphi_{k-1} < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$, $z_0/2 < z_2$ и $B_{3z_0} \subset U$, где U — окрестность вершины пика из определения 1.1.

Пусть $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$, $k \geq 1$ — последовательности функций, введенные при доказательстве п. (i) теоремы 2.1. Определим область Ω_k формулой (2.2) и обозначим через \mathcal{E}_k линейный оператор продолжения из Ω_k на R^n , удовлетворяющий условию (2.3).

Продолжим функцию $u \in W_p^1(\Omega)$ с носителем в $\{x \in U: z \leq z_0/2\}$ из Ω на R^n . Положим

$$\bar{u}_k = (\text{mes}_n \Omega_k)^{-1} \int_{\Omega_k} u(x) dx, \quad k \geq 1,$$

и определим оператор $\mathcal{E}^{(0)}$ равенством

$$(3.8) \quad \mathcal{E}^{(0)}u = v + w,$$

где

$$(3.9) \quad v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k \eta_k(z) \chi_k(y), \quad x = (y, z),$$

$$(3.10) \quad w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(z) \xi_k(y) (\mathcal{E}_k(u - \bar{u}_k))(x).$$

Из сформулированных выше требований вытекает, что $\text{supp}(\eta_k \chi_k) \subset U$, $\text{supp}(\eta_k \xi_k) \subset U$, $k \geq 1$. Кроме того, $v(y, z) = w(y, z) = 0$ при $z > z_1$, поскольку $u|_{\Omega_1} = 0$. Если $x = (y, z) \in \Omega \cap U$ и $z \leq z_1$, то

$$\begin{aligned} v(x) + w(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k \eta_k(z) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(z) (u(x) - \bar{u}_k) = u(x). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{E}^{(0)}u|_{\Omega} = u$.

Для любого $r > 0$ и $x \in R^n \setminus B_r$ в суммах (3.9) и (3.10) имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых, и значит, существуют производные $D^\alpha(\mathcal{E}^{(0)}u) \in L_p^{\text{loc}}(R^n \setminus \{0\})$, $|\alpha| \leq l$. Получим оценки

$$(3.11) \quad \|\sigma \nabla_j v\|_{p, R^n} \leq c \|\nabla_l u\|_{p, \Omega}, \quad 0 \leq j \leq l,$$

$$(3.12) \quad \|\sigma \nabla_j W\|_{p, R^n} \leq c \|\nabla_l u\|_{p, \Omega}, \quad 0 \leq j \leq l,$$

где $\sigma(x) = (\varphi(|x|) |x|^{-1})^l |\log(\varphi(|x|) |x|^{-1})|^{1-1/p}$ при $|x| < 1$. Положим

$$G_k = \{x = (y, z): z \in (z_{k+1}, z_k), y \in R^{n-1}, |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}\}, \quad k \geq 0.$$

Отметим, что при $x \in G_k$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} ||x| - z_k| &= ||y|^2 + z^2 - z_k^2| (|x| + z_k)^{-1} < \\ &< \varphi_k (\varphi_k z_k^{-1})^{1-2\varepsilon} + \varphi_k < 2\varphi_k, \end{aligned}$$

поэтому $\varphi(|x|) = \varphi_k + o(\varphi_k)$, и

$$(3.13) \quad \sigma(x) \sim \sigma_k = (\varphi_k z_k^{-1})^l |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{1-1/p}, \quad x \in G_k.$$

Имеем:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} v(y, z)|_{G_k} &= \sum_{i=k}^{k+1} \eta_i(z) \chi_i(y) \bar{u}_i = \bar{u}_{k+1} \chi_{k+1}(y) + \\ &+ \eta_k(z) ((\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}) \chi_k(y) + \bar{u}_{k+1} (\chi_k(y) - \chi_{k+1}(y))). \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ любой n -мерный мультииндекс длины $|\alpha| = j$. Будем различать следующие случаи: (1) $\alpha_n = 0$ и (2) $\alpha_n > 0$.

(1) Предположим сначала, что $j = 0$. В силу (3.13) и (3.14)

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \|v\sigma\|_{p, G_k}^p &\leq c \sigma_k^p (|\bar{u}_k|^p + |\bar{u}_{k+1}|^p) \text{mes}_n G_k \leq \\ &\leq c (\varphi_k z_k^{-1})^{(n-1)(1-\varepsilon)} |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{p-1} \times \\ &\times (|\bar{u}_k|^p + |\bar{u}_{k+1}|^p) \varphi_k^n \leq c \|u\|_{p, \Omega_k}^p. \end{aligned}$$

Здесь $\Omega'_k = \Omega_k \cup \Omega_{k+1}$, $k \geq 1$, и на последнем шаге была использована оценка

$$(3.16) \quad |\bar{u}_k| \varphi_k^n \leq c \|u\|_{p, \Omega_k}^p.$$

Пусть теперь $0 < j \leq l$. Тогда

$$(3.17) \quad \|\sigma D^{\alpha} v\|_{p, G_k}^p \leq c \sigma_k^p \sum_{i=k}^{k+1} |\bar{u}_i|^p \|\nabla_j \chi_i\|_{p, G_k}^p.$$

Так как $\chi_k(y) = \chi_{k+1}(y) = 1$ при $|y| < \varphi_k$, и для производных функции χ_i справедлива оценка (3.2), то

$$\begin{aligned} \|\nabla_j \chi_i\|_{p, G_k}^p &\leq c \varphi_k |\log(\varphi_i z_i^{-1})|^{-p} \int_{\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}} |y|^{-jp} dy \leq \\ &\leq c \varphi_k |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{-p} \times \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon})^{n-1-jp}, \quad j < l, \\ |\log(\varphi_k z_k^{-1})|, \quad j = l \end{array} \right\} \leq \\ &\leq c \varphi_k |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{1-p}. \end{aligned}$$

Поэтому правая часть (3.17) оценивается сверху выражением $c \varphi_k^n z_k^{1-n} (|\bar{u}_k|^p + |\bar{u}_{k+1}|^p)$. Используя (3.16), приходим к неравенству

$$(3.18) \quad \|\sigma D^{\alpha} v\|_{p, G_k} \leq c \|z^{-l} u\|_{p, \Omega_k'}, \quad k \geq 1,$$

в котором $D^{\alpha} v$ — любая производная порядка j , не содержащая дифференцирования по z . Из (3.15) вытекает, что оценка (3.18) верна также и при $\alpha = 0$.

(2) Пусть $D_x^{\alpha} = D_y^{\beta} \partial^{j-s} / \partial z^{j-s}$, где $|\beta| = s < j \leq l$. Тогда из (3.14) следует, что на G_k при $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$(3.19) \quad |D^{\alpha} v| \leq c \varphi_k^{s-j} (|\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}| |D^{\beta} \chi_k| + |\bar{u}_{k+1}| |D^{\beta}(\chi_k - \chi_{k+1})|).$$

Применяя оценку (3.2) для производной $D^{\beta} \chi_k$, получаем:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} &\varphi_k^{sp-jp} |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \|\sigma D^{\beta} \chi_k\|_{p, G_k}^p \leq \\ &\leq c \varphi_k^{sp-n+2} \sigma_k^p \int_{|y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}} |y|^{-sp} dy |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \leq c (\varphi_k z_k^{-1})^{p-\varepsilon(n-1-sp)} |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{p-1} \times \\ &\quad \times z_k^{-p(l-1)} \varphi_k^{n-p} |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \leq c \|z^{1-l} \nabla u\|_{p, \Omega_k'}^p. \end{aligned}$$

Здесь на последнем шаге использовано соотношение $p > \varepsilon(n-1-sp)$ и оценка

$$\varphi_k^{n-p} |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \leq c \|\nabla u\|_{p, \Omega_k'}^p,$$

вытекающая из неравенства

$$(3.21) \quad \|u - \bar{u}_k\|_{p, \Omega_k} \leq c \varphi_k \|\nabla u\|_{p, \Omega_k'}, \quad k \geq 1.$$

Найдем мажоранту для величины $\varphi_k^{s-j} |\bar{u}_{k+1}| \|D^{\beta}(\chi_k - \chi_{k+1}) \sigma\|_{p, G_k}$. Замечая, что $\chi_k(y) = \chi_{k+1}(y) = 1$ при $|y| < \varphi_k$ и ссылаясь на лемму 3.1 при $\varphi_k < |y| <$

$< \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} & \varphi_k^{sp-jp} |\bar{u}_{k+1}|^p \|D^\beta(\chi_k - \chi_{k+1})\|_{p, G_k}^p \leq \\ & \leq c \varphi_k^{sp-n+1} |\bar{u}_{k+1}|^p \sigma_k^p (|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \varphi_k^{-1} + \psi_k^p) \varphi_k \times \\ & \times \int_{|y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon} |y|^{-sp} dy \leq c |\log \psi_k|^{p-1} (\psi_k^{p\delta} + \psi_k^p) \psi_k^{-\varepsilon(n-1-sp)} \varphi_k^n |\bar{u}_{k+1}|^p z_k^{-lp}, \end{aligned}$$

где $\psi_k = \varphi_k z_k^{-1}$. Для оценки правой части последнего неравенства примем во внимание, что $\min\{p, \delta p\} > \varepsilon(n-1-sp)$ и применим (3.16). Найдем тогда, что

$$(3.22) \quad \begin{aligned} & \varphi_k^{sp-jp} |\bar{u}_{k+1}|^p \|D^\beta(\chi_k - \chi_{k+1})\|_{p, G_k}^p \leq \\ & \leq c \varphi_k^n |\bar{u}_{k+1}|^p z_k^{-lp} \leq c \|z^{-l} u\|_{p, \Omega_{k+1}}^p. \end{aligned}$$

Оценки (3.19), (3.20) и (3.22) в случае (2) приводят к неравенству

$$(3.23) \quad \|\sigma D^\alpha v\|_{p, G_k}^p \leq c \|z^{-l} u\|_{p, \Omega_k'}^p + c \|z^{1-l} \nabla u\|_{p, \Omega_k'}^p,$$

в котором $D_x^\alpha v = D_y^\beta D_z^{j-|\beta|} v$, $|\beta| < j$.

Из (3.18) и (3.23) следует, что

$$(3.24) \quad \|\sigma \nabla_j v\|_{p, G_k}^p \leq c (\|z^{-l} u\|_{p, \Omega_k'}^p + \|z^{1-l} \nabla u\|_{p, \Omega_k'}^p),$$

где $\Omega_k' = \Omega_k \cup \Omega_{k+1}$, $k \geq 1$. Суммируя (3.24) по k и используя конечность кратности покрытия $\{\Omega_k'\}$, придем к оценке

$$\|\sigma \nabla_j v\|_{p, G}^p \leq c (\|z^{-l} u\|_{p, U \cap \Omega}^p + \|z^{1-l} \nabla u\|_{p, U \cap \Omega}^p),$$

в которой $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Теперь для того, чтобы получить (3.11), достаточно применить неравенство Харди (1.1) и заметить, что $\text{supp } v \subset \bar{G}$.

Обратимся к оценке (3.12). На области G_k выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\nabla_j w| & \leq c \sum_{s=0}^j \sum_{i=k}^{k+1} |\nabla_{j-s}(\eta_i \xi_i)| |\nabla_s \mathcal{E}_i(u - \bar{u}_i)| \leq \\ & \leq c \sum_{s=0}^j \sum_{i=k}^{k+1} \varphi_i^{s-j} |\nabla_s \mathcal{E}_i(u - \bar{u}_i)|, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\|\sigma \nabla_j w\|_{p, G_k}^p \leq c \sigma_k \sum_{s=0}^l \sum_{i=k}^{k+1} \varphi_i^{s-l} \|\nabla_s \mathcal{E}_i(u - \bar{u}_i)\|_{p, R^n}^p.$$

При помощи (2.3) получим, что

$$\|\sigma \nabla_j w\|_{p, G_k}^p \leq c \sigma_k \sum_{s=0}^l \sum_{i=k}^{k+1} (\varphi_i^{-l} \|u - \bar{u}_i\|_{p, \Omega_i} + \varphi_i^{s-l} \|\nabla_s(u - \bar{u}_i)\|_{p, \Omega_i}).$$

Оценим величину $\|\nabla_s(u - \bar{u}_i)\|_{p, \Omega_i}$ с помощью (2.7) (заменяя u на $u - \bar{u}_i$), а затем применим (3.21). В результате найдем:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \|\sigma \nabla_j w\|_{p, G_k}^p & \leq c \sigma_k^p \sum_{i=k}^{k+1} (\varphi_i^{p-l} \|\nabla u\|_{p, \Omega_i}^p + \|\nabla_l u\|_{p, \Omega_i}^p) \leq \\ & \leq c (\|z^{1-l} \nabla u\|_{p, \Omega_k'}^p + \|\nabla_l u\|_{p, \Omega_k'}^p). \end{aligned}$$

Суммируя (3.25) по k , приходим к неравенству

$$\|\sigma \nabla_j w\|_{p,G} \leq c(\|z^{1-l} \nabla u\|_{p,\Omega \cap U} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}),$$

в котором $0 \leq j \leq l$, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Воспользуемся теперь леммой 1.1 (см. неравенство (1.1)) и заметим, что $\text{supp } w \subset \bar{G}$. В итоге убедимся в справедливости оценки (3.12).

Итак, построен оператор продолжения $\mathcal{E}^{(0)}$, $\mathcal{E}^{(0)}u = v + w$, где v и w определены формулами (3.9), (3.10), а функция $u \in W_p^l(\Omega)$ имеет носитель в U и удовлетворяет условию $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$. Общий случай $u \in W_p^l(\Omega)$ рассматривается точно так же, как в п. (i) теоремы 2.1. Доказательство п. (i) теоремы 3.1 закончено.

(ii) Пусть $\{u_\varrho\}$ — семейство функций, построенное в доказательстве п. (ii) теоремы 2.1. Напомним, что при малых $\varrho > 0$ справедливы следующие соотношения: $u_\varrho \in C^\infty(\Omega)$, $u_\varrho|_{\Omega \setminus U} = 0$, $u_\varrho(y, z) = 1$, если $z \in (\varrho, 2\varrho)$, $(y, z) \in \Omega \cap U$, и, кроме того, $\|u_\varrho\|_{p,l,\Omega} \leq c\varrho^{1/lp-1}\varphi(3\varrho)^l$. Обозначим через ζ гладкую положительно однородную функцию нулевой степени в $R^n \setminus \{0\}$, такую, что $\zeta(x) = 1$ в конусе $2|y| < z$ и $\zeta(x) = 0$ во внешности конуса $z > |y|$. Пусть $\mathcal{E}: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_{p,\sigma}^l(R^n)$ — ограниченный оператор продолжения в пространство $W_{p,\sigma}^l(R^n)$ с монотонным в окрестности точки 0 весом $\sigma(x)$, зависящим только от $|x|$. Положим $v_\varrho = \zeta \mathcal{E}u_\varrho$. Принимая во внимание лемму 1.2 и монотонность σ , при достаточно малых $\varrho > 0$ получаем

$$(3.26) \quad c_1 \varrho^{1-lp} \varphi(3\varrho)^{n-1} \geq \|u_\varrho\|_{p,l,\Omega}^p \geq c_2 \|\mathcal{E}u_\varrho\|_{W_{p,\sigma}^l(R^n)}^p \geq c_3 \|v_\varrho\|_{W_{p,\sigma}^l(R^n)}^p \geq c_3 \sigma(\varrho)^p \int_\varrho^{2\varrho} dz \int_{R^{n-1}} |(\nabla_l v_\varrho)(y, z)|^p dy.$$

Пусть e — компакт, расположенный в открытом множестве $D \subset R^{n-1}$. Введем емкость

$$(3.27) \quad \text{Cap}(e, \dot{L}_p^l(D)) = \inf \{ \|\nabla_l v\|_{p,D}^p : v \in \dot{L}_p^l(D), v = 1 \text{ в окрестности } e \}$$

где $\dot{L}_p^l(D)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(D)$ по норме $\|\nabla_l v\|_{p,D}$ (см. [9]). Имеем $v_\varrho(y, z) = 0$ при $|y| > z$ и $v_\varrho(y, z) = 1$, если $z \in (\varrho, 2\varrho)$, $y \in \varphi(z) \in \omega$, ω — $(n-1)$ -мерная область из определения 1.1 вершины внешнего пика). Таким образом, из (3.26) выводим, что

$$\varrho^{1-lp} \varphi(3\varrho)^{n-1} \geq c \sigma(\varrho)^p \int_\varrho^{2\varrho} \text{Cap}(\varphi(z) \bar{B}, \dot{L}_p^l(B_z)) dz$$

где \bar{B} — замкнутый шар в ω . Используя оценку

$$(3.28) \quad \text{Cap}(\varphi(z) \bar{B}, \dot{L}_p^l(B_z)) \geq c |\log(\varphi(z) z^{-1})|^{1-lp}, \quad lp = n-1,$$

(см. [9], § 9.1), получаем

$$\varrho^{1-lp} \varphi(3\varrho)^{n-1} \geq c \sigma(\varrho)^p \varrho |\log(\varphi(\varrho) \varrho^{-1})|^{1-lp}.$$

Так как $\varphi(3\rho) \sim \varphi(\rho)$, то отсюда следует, что

$$\sigma(\rho) \leq c(\varphi(\rho) \rho^{-1})^l |\log(\varphi(\rho) \rho^{-1})|^{1-1/p}.$$

Доказательство теоремы 3.1 закончено.

4. ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ТИПА УСРЕДНЕНИЯ

Пусть $\Delta = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$, и $r \in (0, 1]$. Положим $\Delta_1 = (a, b + r)$,

$$G = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n: y \in B_r \subset \mathbb{R}^{n-1}, z \in \Delta\},$$

$$G_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n: y \in B_r \subset \mathbb{R}^{n-1}, z \in \Delta_1\}.$$

Обозначим через K функцию класса $C_0^\infty(0, 1)$ и определим оператор T формулой

$$(4.1) \quad (Tv)(y, z) = \int_0^1 K(t) v(y, z + |y|t) dt, \quad (y, z) \in G.$$

В этом параграфе через c обозначаем положительные постоянные, зависящие от l, p, n, K . Начнем изучение свойств оператора T со следующего утверждения.

Лемма 4.1. Пусть $l \geq 1$ и

$$(4.2) \quad \int_0^1 K(t) t^\alpha dt = 0$$

при $\alpha = 0, 1, \dots, l-1$. Тогда для всех $v \in C^\infty(G_1)$ верна оценка

$$(4.3) \quad \|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p, \Delta} \leq c|y|^{l-|\gamma|} \|(\nabla_l v)(y, \cdot)\|_{p, \Delta_1},$$

где $y \in B_r \setminus \{0\}$, $|\gamma| \leq l$.

Кроме того, при $n = 2$ справедливы равенства

$$(4.4) \quad \lim_{y \rightarrow +0} \partial^k (Tv)(y, z) / \partial y^k = 0, \quad k = 0, \dots, l-1, \quad z \in \Delta.$$

Доказательство. Установим сначала оценку (4.3) при $\gamma = 0$. Используя разложения Тейлора с остатком в интегральной форме и принимая во внимание, что ядро K имеет нулевые моменты порядков $0, \dots, l-1$, получаем:

$$(Tv)(y, z) = \frac{|y|^l}{(l-1)!} \int_0^1 K(t) t^l dt \int_0^1 \frac{\partial^l v}{\partial z^l}(y, z + \tau|y|t) (1-\tau)^{l-1} d\tau.$$

Применяя неравенство Минковского, приходим к оценке

$$\|(Tv)(y, \cdot)\|_{p, \Delta} \leq c|y|^l \|(\nabla_l v)(y, \cdot)\|_{p, \Delta_1}.$$

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по l . Пусть $l = 1$. Легко проверяется, что $\lim_{y \rightarrow 0} (Tv)(y, z) = (Tv)(0, z) = 0$, $z \in \Delta$, $n = 2$. Далее,

$$(4.5) \quad \partial(Tv) / \partial y_i = y_i |y|^{-1} \int_0^1 t K(t) v_z(y, z + |y|t) dt +$$

$$+ \int_0^1 K(t) v_{y_i}(y, z + |y|t) dt = y_i |y|^{-1} T_1 v_z + T v_{y_i},$$

где T_1 — оператор вида (4.1) с ядром $K_1(t) = tK(t)$. Используя неравенство Минковского, получаем, что $\|(Tv)_{y_i}(y, \cdot)\|_{p, \mathcal{A}} \leq c \|(\nabla v)(y, \cdot)\|_{p, \mathcal{A}_1}$. Случай $l = 1$ разобран полностью.

Пусть $l \geq 2$ и пусть утверждение леммы верно для порядков, не превосходящих $l - 1$. Установим (4.3) при $|y| \leq l$, $|y| > 0$. Производную D_y^γ запишем в виде $D_y^\gamma = D_y^\alpha \partial / \partial y_i$, где $\alpha = (n - 1)$ -мерный мультииндекс длины $|\alpha| \leq l - 1$ и $1 \leq i \leq n - 1$. Применяя (4.5), получаем, что

$$(4.6) \quad D_y^\gamma(Tv) = D_y^\alpha(Tv_{y_i}) + D_y^\alpha(y_i |y|^{-1} T_1 v_z).$$

Для второго слагаемого в правой части (4.6) верна оценка

$$(4.7) \quad \|D_y^\alpha(y_i |y|^{-1} T_1 v_z)\|_{p, \mathcal{A}} \leq c \sum_{|\alpha| \leq \alpha} \|D_y^\alpha T_1 v_z\|_{p, \mathcal{A}} |y|^{|\alpha| - |\alpha|},$$

и поскольку ядро K_1 имеет нулевые моменты порядков $0, \dots, l - 2$, то по индукционному предположению (примененному к оператору T_1 и функции v_z) имеем:

$$\|(D_y^\alpha T_1 v_z)(y, \cdot)\|_{p, \mathcal{A}} \leq c |y|^{l-1-|\alpha|} \|(\nabla_{l-1} v_z)(y, \cdot)\|_{p, \mathcal{A}_1}, \quad \alpha \leq \alpha.$$

К первому слагаемому в правой части (4.6) также применимо индукционное предположение:

$$\|(D_y^\alpha T v_{y_i})(y, \cdot)\|_{p, \mathcal{A}} \leq c |y|^{l-1-|\alpha|} \|(\nabla_{l-1} v_{y_i})(y, \cdot)\|_{p, \mathcal{A}_1}.$$

Из двух последних оценок и (4.6)–(4.7) следует (4.3).

Установим (4.4) при $k = l - 1$, $n = 2$. Пусть $y > 0$. Используя (4.6), получаем равенство $D_y^{l-1} T v = D_y^{l-2} T v_y + D_y^{l-2} T_1 v_z$. Если $y < 0$, то в правой части знак „+“ заменяется на „–“. Из индукционного предположения относительно (4.4) (примененного к производным v_y и v_z) выводим, что $\lim_{y \rightarrow 0} (D_y^{l-1} T v)(y, z) = 0$ при $z \in \mathcal{A}$. Лемма доказана.

Замечание 4.1. Можно считать, что в оценке (4.3) константа c не зависит от p . При $\gamma = 0$ или $l = 1$ это следует из неравенства Минковского, а в общем случае выводится по индукции при помощи (4.5)–(4.7).

Лемма 4.2. Пусть выполнено условие (4.2) при $\alpha = 1, \dots, l - 1$. Тогда для любой функции $v \in W_p^l(G_1)$ функция Tv принадлежит $W_p^l(G)$, причем

$$(4.8) \quad \|\nabla_l Tv\|_{p, G} \leq c \|\nabla_l v\|_{p, G_1}, \quad l \geq 0.$$

Доказательство. Если $l = 0$, то (4.8) легко следует из неравенства Минковского. При $l \geq 1$ и $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$ установим (4.8) индукцией по l .

Пусть $l = 1$. Мы имеем $(Tv)_z = T(v_z)$ и $(Tv)_{y_i} = T(v_{y_i}) + y_i |y|^{-1} T_1(v_z)$, $i = 1, \dots, n - 1$ (см. формулу (4.5)). Таким образом, если $n \geq 3$, то $Tv \in W_p^1(G)$, и (4.8) при $l = 1$ вытекает из неравенства Минковского. Если $n = 2$, то нужно

еще проверить абсолютную непрерывность функции $(Tv)(\cdot, z)$ на промежутке $(-r, r)$ при $z \in A$. Последнее требование выполняется, так как $\lim_{y \rightarrow +0} (Tv)(y, z) = \lim_{y \rightarrow -0} (Tv)(y, z) = v(0, z)$, $z \in A$, а функция $(Tv)(\cdot, z)$ является гладкой на каждом из промежутков $(-r, 0)$ и $(0, r)$.

Пусть $l \geq 2$ и пусть включение $Tv \in W_p^k(G)$ и неравенство (4.8) с заменой l на k справедливы для всех порядков $k \leq l-1$ при условии $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^k(G_1)$. Получим (4.8). Если $0 \leq \beta \leq l$, $|\gamma| = l - |\beta|$, то

$$(4.9) \quad D_y^\gamma D_z^\beta Tv = D_y^\gamma (TD_z^\beta v),$$

где $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$, $y \neq 0$. При $\beta = l$, $\gamma = 0$ имеем $\|D_z^\beta Tv\|_{p,G} = \|TD_z^\beta v\|_{p,G} \leq c \|\nabla_l v\|_{p,G_1}$. Пусть теперь $0 < |\gamma| < l$. Тогда в силу (4.9) и индукционного предположения, примененного к функции $D_z^\beta v$, находим:

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta Tv\|_{p,G} \leq c \|\nabla_{|\gamma|}(D_z^\beta v)\|_{p,G_1} \leq c \|\nabla_l v\|_{p,G_1}.$$

Если $|\gamma| = l$, $\beta = 0$, то $D_y^\gamma = D_y^\alpha \partial / \partial y_i$ при некотором α , $|\alpha| = l-1$ и $i = 1, \dots, n-1$. Применяя формулы (4.5)–(4.7), получаем, что

$$\begin{aligned} \|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p,A} &\leq \|(D_y^\alpha Tv_{y_i})(y, \cdot)\|_{p,A} + \\ &+ c \sum_{|\alpha| \leq \alpha} |y|^{|\alpha| - |\alpha|} \|(D_y^\alpha T_1 v_z)(y, \cdot)\|_{p,A}. \end{aligned}$$

Применяя далее лемму 4.1 к оператору T_1 и функции v_z , оценим последнюю сумму выражением $c \|\nabla_{l-1} v_z\|_{p,A}$. Интегрируя по переменной y , находим:

$$\|D_y^\gamma Tv\|_{p,G} \leq \|D_y^\alpha Tv_{y_i}\|_{p,G} + c \|\nabla_l v\|_{p,G_1}.$$

По индукционному предположению первое слагаемое в правой части последнего неравенства не превосходит $c \|\nabla_{l-1} v_{y_i}\|_{p,G_1}$. Отсюда следует (4.8).

В случае $n = 2$ нужно проверить, что

$$(4.10) \quad \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}} (Tv)(y, z) = \lim_{y \rightarrow -0} \frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}} (Tv)(y, z), \quad z \in A.$$

В самом деле, пусть $y > 0$. Тогда в силу (4.5), (4.6)

$$(4.11) \quad \frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}} Tv = \frac{\partial^{l-2}}{\partial y^{l-2}} Tv_y + \frac{\partial^{l-2}}{\partial y^{l-2}} T_1 v_z.$$

Если $y < 0$, то в правой части (4.11) знак „+“ заменяется на „-“. По лемме 4.1 (примененной к оператору T_1 и функции v_z) имеем $\partial^{l-2}(T_1 v_z) / \partial y^{l-2} \rightarrow_{y \rightarrow 0} 0$. Таким образом, левая часть в (4.10) равна $\lim_{y \rightarrow +0} \partial^{l-2}(Tv_y) / \partial y^{l-2}$, в то время, как правая часть равна $\lim_{y \rightarrow -0} \partial^{l-2}(Tv_y) / \partial y^{l-2}$. Два последних предела совпадают по индукционному предположению, примененному к v_y .

Итак, для $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$ имеем включение $Tv \in W_p^l(G)$ и оценку (4.8). В общем случае $v \in$

$\in W_p^l(G_1)$, $p \in [1, \infty)$, заметим, что множество $C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$ плотно в $W_p^l(G_1)$ и оператор $T: L_p(G_1) \rightarrow L_p(G)$ ограничен. Отсюда выводится включение $Tv \in W_p^l(G)$ и оценка (4.8). Отметим еще, что константу c в (4.8) можно выбрать не зависящей от p . Это следует из замечания 4.1 и приведенного выше доказательства неравенства (4.8) для гладкой функции v .

Рассмотрим случай $p = \infty$. Пусть $v \in W_\infty^l(G_1)$. Если Δ — конечный промежуток на числовой оси, то $v \in W_p^l(G_1)$ и $Tv \in W_p^l(G)$, где $p \in [1, \infty)$, и при всех $p \in [1, \infty)$ верна оценка (4.8) с константой $c = c(l, n, K)$. Переходя в этой оценке к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем (4.8) с $p = \infty$. Если Δ — бесконечный промежуток, то существует последовательность конечных открытых промежутков $\{\Delta_j\}_{j \geq 1}$ такая, что $\Delta = \bigcup_{j=1}^\infty \Delta_j$. По только что доказанному для каждого $j \geq 1$ верна оценка

$$\|\nabla_l Tv\|_{\infty, G^{(j)}} \leq c(l, n, K) \|\nabla_l v\|_{\infty, G_1},$$

где $G^{(j)} = \{(y, z) \in R^n: y \in B_r \subset R^{n-1}, z \in \Delta_j\}$. Из последнего неравенства вытекает (4.8) при $p = \infty$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. Пусть $\int_0^1 K(t) dt = 1$ и выполнено условие (4.2) при $\alpha = 1, \dots, l-1$. Тогда для любой функции $v \in W_p^l(G_1)$ верна оценка

$$(4.12) \quad \|\nabla_s(Tv - v)\|_{p, G} \leq cr^{l-s} \|\nabla_l v\|_{p, G_1}, \quad 0 \leq s \leq l.$$

Доказательство. Пусть $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$. Докажем сначала оценку (4.12) при $s = 0$. Имеем

$$(Tv)(y, z) - v(y, z) = \int_0^1 K(t) (v(y, z + |y|t) - v(y, z)) dt.$$

Пользуясь разложением Тейлора с остатком в интегральной форме и замечая, что ядро K имеет нулевые моменты порядков $1, \dots, l-1$, оценим сверху модуль последнего интеграла выражением

$$|y|^l \int_0^1 t^l |K(t)| dt \int_0^1 |D_z^l v(y, z + |y|\tau t)| d\tau.$$

С помощью неравенства Минковского выводим отсюда, что

$$(4.13) \quad \|Tv - v\|_{p, G} \leq \|K\|_{1, R^1} r^l \|\nabla_l v\|_{p, G_1}.$$

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по l . Пусть $l = 1$. При $s = 0$ оценка (4.12) уже доказана, а при $s = 1$ она следует из предыдущей леммы. Этим случай $l = 1$ исчерпывается.

Пусть $l \geq 2$ и пусть утверждение леммы справедливо для всех порядков, не превосходящих $l-1$. Докажем неравенство (4.12). Если $0 < \beta \leq l$, $|y| + \beta = s \leq l$, то $D_y^\alpha D_z^\beta (Tv - v) = D_y^\alpha (TD_z^\beta v - D_z^\beta v)$ и по индукционному предположению, примененному к производной $D_z^\beta v$ и оператору T имеем

$$\|D_y^\alpha D_z^\beta (Tv - v)\|_{p, G} \leq cr^{l-\beta-|\alpha|} \|\nabla_{|\alpha|} (D_z^\beta v)\|_{p, G} \leq cr^{l-s} \|\nabla_l v\|_{p, G}.$$

Рассмотрим теперь случай $\beta = 0$, $|\gamma| = s > 0$. Положим $D_y^\alpha = D_y^\alpha \partial / \partial y_i$, где $\alpha - (n - 1)$ -мерный мультииндекс длины $s - 1$ и $1 \leq i \leq n - 1$. Используя формулу (4.6), получим, что

$$(4.14) \quad \begin{aligned} & \|D_y^\alpha(Tv - v)\|_{p,G} \leq \\ & \leq \|D_y^\alpha(Tv_{y_i} - v_{y_i})\|_{p,G} + \|D_y^\alpha(y_i|y|^{-1} T_1 v_z)\|_{p,G}, \end{aligned}$$

где T_1 оператор вида (4.1) с ядром $K_1(t) = t K(t)$. Применим неравенство (4.7), а затем лемму 4.1 к оператору T_1 и функции v_z . В результате оценим сверху второе слагаемое в правой части (4.14) выражением $c(l, n, K) r^{l-s} \|\nabla_l v\|_{p,G_1}$. Для оценки первого слагаемого в правой части (4.14) воспользуемся индукционным предположением относительно оператора T и функции v_{y_i} . Получим тогда, что

$$\|D_y^\alpha(Tv_{y_i} - v_{y_i})\|_{p,G} \leq c r^{l-1-|\alpha|} \|\nabla_{l-1}(v_{y_i})\|_{p,G}.$$

Итак оценка (4.12) доказана в предположении, что $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$. Отметим, что константу c в (4.12) можно считать не зависящей от p . При $s = 0$ и $s = l$ это следует из неравенства (4.13) и леммы 4.2 соответственно, а при $0 < s < l$ — из замечания 4.1 и приведенного выше доказательства оценки (4.12). Справедливость неравенства (4.12) для любой функции $v \in W_p^l(G_1)$ при $1 \leq p < \infty$ вытекает из плотности в $W_p^l(G_1)$ множества гладких функций и ограниченности оператора $T: W_p^l(G_1) \rightarrow W_p^l(G)$.

Пусть $v \in W_\infty^l(G_1)$ и G — ограниченная область. Тогда верна оценка (4.12) при любом $p < \infty$ с константной $c = c(l, n, K)$. Переходя в этой оценке к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим (4.12) с $p = \infty$. Если область G не ограничена, то можно применить представление $G = \bigcup_j G^{(j)}$, где $G^{(j)} = \{(y, z): y \in B_r \subset R^{n-1}, z \in \Delta_j\}$ и Δ_j — конечный промежуток на числовой оси, а затем воспользоваться уже доказанной оценкой

$$\|\nabla_s(Tv - v)\|_{\infty,G} \leq c(l, n, K) \|\nabla_l v\|_{\infty,G_1}.$$

Отсюда вытекает (4.12) при $p = \infty$. Доказательство леммы закончено.

В следующих двух леммах рассматривается случай, когда функция v не зависит от y . Можно считать ее заданной на промежутке $\Delta_1 \subset R^1$. По-прежнему предполагаем, что $y \in B_r \subset R^{n-1}$, $r \leq 1$.

Лемма 4.4. Пусть $v \in L_p(\Delta_1)$. Тогда верна оценка

$$(4.15) \quad \|(D_y^\gamma T v)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leq c |y|^{-|\gamma|} \|v\|_{p,\Delta_1}, \quad y \neq 0,$$

где γ — любой мультииндекс размерности $n - 1$ и $c = c(l, p, n, K, \gamma)$.

Доказательство. Если $\gamma = 0$, то (4.15) следует из неравенства Минковского. Пусть $|\gamma| = 1$. Имеем

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} T v &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(|y|^{-1} \int_0^1 K((t-z)/|y|) v(t) dt \right) = \\ &= y_i |y|^{-2} (T v + T' v), \quad 1 \leq i \leq n - 1, \end{aligned}$$

где T' — оператор вида (4.1) с ядром $t K'(t)$. Из (4.16) при помощи неравенства Минковского выводим (4.15) в случае $|\gamma| = 1$.

Пусть $k \geq 2$ и пусть оценка (4.15) верна для всех производных D_y^γ порядка $|\gamma| \leq k - 1$. Проверим (4.15) для $|\gamma| = k$. Так как $D_y^\gamma = D_y^\alpha \partial / \partial y_i$ при некотором α , $|\alpha| = k - 1$ и $i = 1, \dots, n - 1$, то

$$\begin{aligned} & \|(D_y^\gamma T v)(y, \cdot)\|_{p, A} \leq \\ & \leq c \sum_{\kappa \leq \alpha} |y^{|\kappa| - |\alpha| - 1}| [\|(D_y^\kappa T v)(y, \cdot)\|_{p, A} + \|(D_y^\kappa T' v)(y, \cdot)\|_{p, A}]. \end{aligned}$$

Применяя индукционное предположение к каждому слагаемому в квадратных скобках, получаем (4.15). Лемма доказана.

Лемма 4.5. Пусть $v \in W_p^l(\Delta_1)$, $l \geq 0$, и выполнено условие (4.2) при $\alpha = 1, \dots, l - 1$. Тогда справедлива оценка

$$(4.17) \quad \|(D_y^\gamma T v)(y, \cdot)\|_{p, A} \leq c |y|^{l - |\gamma|} \|v^{(l)}\|_{p, \Delta_1},$$

где $y \in B_r \setminus \{0\}$, γ — любой мультииндекс размерности $n - 1$, удовлетворяющий условию $|\gamma| \geq l$ и $c = c(l, p, n, K, \gamma)$.

Доказательство. Установим (4.17) при $|\gamma| \geq l$ индукцией по l . Если $l = 0$, то (4.17) следует из леммы 4.4. Пусть $l \geq 1$ и верно неравенство

$$\|(D_y^\alpha T v)(y, \cdot)\|_{p, A} \leq c |y|^{l - 1 - |\alpha|} \|v^{(l-1)}\|_{p, \Delta_1},$$

где $|\alpha| \geq l - 1$, $v \in W_p^{l-1}(\Delta_1)$, а ядро оператора T имеет нулевые моменты порядков $1, \dots, l - 2$. Пусть $|\gamma| \geq l$. Тогда $D_y^\gamma = D_y^\alpha \partial / \partial y_i$ при некотором α , $|\alpha| \geq l - 1$ и $i = 1, \dots, n - 1$. Имеем

$$|D_y^\gamma T v| = |D_y^\alpha (y_i |y|^{-1} T_1 v')| \leq c \sum_{\kappa \leq \alpha} |y^{|\kappa| - |\alpha|} |D_y^\kappa T_1 v'|,$$

где T_1 — оператор вида (4.1) с ядром $K_1(t) = t K(t)$. Отсюда получаем

$$(4.18) \quad \|(D_y^\gamma T v)(y, \cdot)\|_{p, A} \leq c(S_1 + S_2),$$

где

$$S_1 = \sum_{\kappa \leq \alpha, |\kappa| \leq l-1} |y^{|\kappa| - |\alpha|} \|D_y^\kappa T_1 v'\|_{p, A},$$

а S_2 — сумма таких же слагаемых при $\kappa \leq \alpha$, $|\kappa| \geq l$. Так как ядро K имеет нулевые моменты порядков $0, \dots, l - 2$, то для каждого слагаемого в первой сумме имеем

$$(4.19) \quad \|(D_y^\kappa T_1 v')(y, \cdot)\|_{p, A} \leq c |y|^{l-1-|\kappa|} \|\nabla_{l-1} v'\|_{p, \Delta_1}.$$

Эта оценка выводится так же, как оценка (4.3) в лемме 4.1. Заметим, что неравенство (4.19) справедливо и для каждого слагаемого второй суммы в силу индукционного предположения. Из (4.18) и (4.19) следует (4.17) при $|\gamma| \geq l$. Лемма доказана.

5. ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗ ТОНКОГО ЦИЛИНДРА В БОЛЕЕ ШИРОКИЙ

В дальнейшем нам понадобится следующий известный результат (см. например, [9], § 1.1).

Лемма 5.1. (Обобщенное неравенство Пуанкаре). Пусть Ω — область в R^n с компактным замыканием и границей класса $C^{0,1}$ и пусть ψ — функция из $C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющая условию $\int_\Omega \psi \, dx = 1$. Положим $\Omega_\varepsilon = \{x \in R^n: x/\varepsilon \in \Omega\}$, $\varepsilon > 0$. Тогда для любой функции $u \in W_p^l(\Omega_\varepsilon)$ и полинома P_ε степени $l - 1$ в R^n , заданного формулой

$$(5.1) \quad P_\varepsilon(x) = \sum_{|\alpha| \leq l-1} \varepsilon^{-n} (\alpha!)^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} D^\alpha u(\xi) (x - \xi)^\alpha \psi(\xi/\varepsilon) \, d\xi,$$

верна оценка

$$\|\nabla_k(u - P_\varepsilon)\|_{p, \Omega_\varepsilon} \leq c \varepsilon^{l-k} \|\nabla_l u\|_{p, \Omega_\varepsilon},$$

где $0 \leq k \leq l$ и $c = c(l, p, n, \psi, \Omega)$.

Перейдем к построению оператора продолжения из тонкого цилиндра. Пусть $A = (a, b) \subset R^1$, $0 < \varepsilon \leq \varrho \leq 1$, $A_1 = (a, b + \varrho)$. Положим

$$G = \{(y, z) \in R^n: y \in B_\varrho \subset R^{n-1}, z \in A\}, \\ g = \{(y, z) \in R^n: y \in B_\varepsilon \subset R^{n-1}, z \in A_1\}.$$

Если $u \in W_p^l(g)$, $l \geq 1$, то при почти всех $z \in A_1$ справедливо включение $u(\cdot, z) \in W_p^l(B_\varepsilon)$, $B_\varepsilon \subset R^{n-1}$. Пусть $\psi \in C_0^\infty(B_1)$, $B_1 \subset R^{n-1}$, $\int_{B_1} \psi(y) \, dy = 1$. Для каждой функции $u \in W_p^l(g)$ в соответствии с (5.1) положим

$$(5.2) \quad P_\varepsilon(y, z) = \sum_{|\alpha| \leq l-1} \varepsilon^{1-n} (\alpha!)^{-1} \int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z) (y - \eta)^\alpha \psi(\eta/\varepsilon) \, d\eta.$$

При почти всех $z \in A_1$ функция $P_\varepsilon(\cdot, z)$ является полиномом степени $l - 1$ в R^{n-1} , коэффициенты которого являются линейными функционалами от $u(\cdot, z)$. По лемме 5.1 функция $u(\cdot, z)$ и полином $P_\varepsilon(\cdot, z)$ удовлетворяют обобщенному неравенству Пуанкаре в шаре $B_\varepsilon \subset R^{n-1}$.

Пусть $K \in C_0^\infty(0, 1)$ и выполнены условия

$$(5.3) \quad \int_0^1 K(t) \, dt = 1, \quad \int_0^1 K(t) t^\beta \, dt = 0, \quad \beta = 1, \dots, l - 1.$$

Обозначим через T оператор вида (4.1) с ядром K . Рассмотрим еще оператор продолжения E_ε из $(n - 1)$ -мерного шара B_ε на R^{n-1} , построенный в лемме 2.1.

Лемма 5.2. Оператор \mathcal{E} , заданный формулой

$$(\mathcal{E}u)(y, z) = (TP_\varepsilon)(y, z) + (E_\varepsilon(u(\cdot, z) - (TP_\varepsilon)(\cdot, z)))(y)$$

является непрерывным линейным оператором из $W_p^l(g)$ в $W_p^l(G)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Справедливы оценки

$$(5.4) \quad \|TP_\varepsilon\|_{p,l,G} \leq c(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p} \|u\|_{p,l,g},$$

$$(5.5) \quad \|\nabla_k E_\varepsilon(u - TP_\varepsilon)\|_{p,G} \leq c\varepsilon^{l-k} \|u\|_{p,l,g}, \quad 0 \leq k \leq l,$$

в которых $c = c(l, p, n)$.

Доказательство. Положим $G^* = \{(y, z) \in R^n, y \in B_\varepsilon \subset R^{n-1}, z \in \Delta\}$ и рассмотрим оператор $W_p^l(G^*) \ni v \rightarrow \mathcal{E}_\varepsilon v$, где $(\mathcal{E}_\varepsilon v)(y, z) = (E_\varepsilon v(\cdot, z))(y)$. Покажем, что $\mathcal{E}_\varepsilon v \in W_p^l(G)$ и установим соотношение

$$(5.6) \quad \frac{\partial^l}{\partial z^l} \mathcal{E}_\varepsilon v = \mathcal{E}_\varepsilon \left(\frac{\partial^l v}{\partial z^l} \right), \quad v \in W_p^l(G^*).$$

Докажем предварительно следующее утверждение: если $z_1, z_2 \in \Delta$, $z_1 < z_2$, то для $v \in L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2))$ почти всюду на R^{n-1} имеет место равенство

$$(5.7) \quad \int_{z_1}^{z_2} (\mathcal{E}_\varepsilon v)(y, z) dz = E_\varepsilon \int_{z_1}^{z_2} v(y, z) dz.$$

Если v является конечной линейной комбинацией функций вида $f(y)h(z)$, где $f \in L_1(B_\varepsilon)$, $h \in L_1(z_1, z_2)$, то равенство (5.7) очевидно. Множество указанных функций плотно в $L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2))$ и в общем случае (5.7) устанавливается предельным переходом с учетом непрерывности операторов

$$L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2)) \ni v \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} v(\cdot, z) dz \in L_1(B_\varepsilon),$$

$$L_1(R^{n-1} \times (z_1, z_2)) \ni v \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} v(\cdot, z) dz \in L_1(R^{n-1}),$$

$$E_\varepsilon: L_1(B_\varepsilon) \rightarrow L_1(R^{n-1}), \quad \mathcal{E}_\varepsilon: L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2)) \rightarrow L_1(R^{n-1} \times (z_1, z_2)).$$

Перейдем к доказательству соотношения (5.6). Пусть $v \in W_p^l(G^*)$. Положим $w = \mathcal{E}_\varepsilon v$. В силу (5.7) получаем, что $w(y, z_2) - w(y, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} (\mathcal{E}_\varepsilon v_z)(y, z) dz$ при $z_1, z_2 \in \Delta$ п.в. $y \in R^{n-1}$. Таким образом, функция w абсолютно непрерывна на почти всех прямых области $R^{n-1} \times \Delta$, параллельных координатным осям (абсолютная непрерывность по переменным y_1, \dots, y_{n-1} следует из включения $w(\cdot, z) \in W_p^l(R^{n-1})$ п.в. $z \in \Delta$). Кроме того,

$$w_z = \mathcal{E}_\varepsilon v_z, \quad w_{y_i} \in L_p(R^{n-1} \times \Delta), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Отсюда вытекают включение $w \in W_p^l(R^{n-1} \times \Delta)$ (см., например, [9], § 1.1) и равенство (5.6) при $l = 1$. Принадлежность функции $\mathcal{E}_\varepsilon v$ пространству $W_p^l(R^{n-1} \times \Delta)$ и равенство (5.6) при $l \geq 2$ легко доказываются по индукции.

Получим оценку для производной $D_y^\gamma D_z^\beta \mathcal{E}_\varepsilon v$ в случае $v \in W_p^l(G^*)$ и $|\gamma| + \beta \leq l$. Имеем

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta (\mathcal{E}_\varepsilon v)\|_{p,G} = \|D_y^\gamma (\mathcal{E}_\varepsilon D_z^\beta v)\|_{p,G} \leq$$

$$\leq \| \|D_y^\gamma (E_\varepsilon (D_z^\beta v))(\cdot, z)\|_{p,R^{n-1}} \|_{p,\Delta}.$$

По лемме 2.1 внутренняя норма в правой части последнего неравенства не превосходит

$$ce^{-|\gamma|} \|(D_z^\beta v)(\cdot, z)\|_{p, B_\varepsilon} + c \sum_{|\alpha|=|\gamma|} \|(D_y^\alpha D_z^\beta v)(\cdot, z)\|_{p, B_\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$(5.8) \quad \|D_y^\gamma D_z^\beta \mathcal{E}_\varepsilon v\|_{p, G} \leq ce^{-|\gamma|} \|D_z^\beta v\|_{p, G^*} + c \sum_{|\alpha|=|\gamma|} \|D_y^\alpha D_z^\beta v\|_{p, G^*}.$$

Обратимся к доказательству оценки (5.5). Пусть $0 \leq \beta \leq l$, γ — мультииндекс размерности $n-1$, $|\gamma| + \beta = k \leq l$. Ясно, что

$$(5.9) \quad \begin{aligned} & \|D_y^\gamma D_z^\beta \mathcal{E}_\varepsilon (u - TP_\varepsilon)\|_{p, G} \leq \\ & \leq \|D_y^\gamma \mathcal{E}_\varepsilon (D_z^\beta (u - Tu))\|_{p, G} + \|D_y^\gamma \mathcal{E}_\varepsilon D_z^\beta T(u - P_\varepsilon)\|_{p, G}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (5.8) и лемму 4.3 (при $r = \varepsilon$), получим:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} & \|D_y^\gamma \mathcal{E}_\varepsilon (D_z^\beta (u - Tu))\|_{p, G} \leq \\ & \leq ce^{-|\gamma|} \|D_z^\beta (u - Tu)\|_{p, G^*} + c \|\nabla_k (u - Tu)\|_{p, G^*} \leq ce^{l-k} \|\nabla_l u\|_{p, g}. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в правой части (5.9) с помощью (5.8) находим:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} & \|D_y^\gamma \mathcal{E}_\varepsilon D_z^\beta T(u - P_\varepsilon)\|_{p, G} \leq \\ & \leq ce^{-|\gamma|} \|D_z^\beta T(u - P_\varepsilon)\|_{p, G^*} + c \|\nabla_k T(u - P_\varepsilon)\|_{p, G^*}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $k < l$. По лемме 4.2 имеем $\|\nabla_k T(u - P_\varepsilon)\|_{p, G^*} \leq c \|\nabla_k (u - P_\varepsilon)\|_{p, g}$. Докажем оценку

$$(5.12) \quad \|D_y^\gamma D_z^\beta (u - P_\varepsilon)\|_{p, g} \leq ce^{l-s-|\gamma|} \|\nabla_l u\|_{p, g}, \quad s + |\gamma| < l,$$

с помощью которой правую часть в (5.11) мажорируем выражением $ce^{l-k} \|\nabla_l u\|_{p, g}$. Сумму в правой части (5.2) разобьем на две: в первую сумму включим слагаемые удовлетворяющие условию $|\alpha| \leq l-1-s$ и обозначим ее через Q_ε , а сумму оставшихся слагаемых обозначим S_ε . Заметим, что по лемме 5.1 при почти всех $z \in \Delta_1$ верна оценка

$$\begin{aligned} & \|D^\gamma ((D_z^s u)(\cdot, z) - (D_z^s Q_\varepsilon)(\cdot, z))\|_{p, B_\varepsilon} \leq \\ & \leq ce^{l-s-|\gamma|} \sum_{|\alpha|=1-s} \|D^\alpha (D_z^s u)(\cdot, z)\|_{p, B_\varepsilon}, \end{aligned}$$

интегрируя которую по переменной z , придем к неравенству

$$(5.13) \quad \|D_y^\gamma D_z^s (u - Q_\varepsilon)\|_{p, g} \leq ce^{l-s-|\gamma|} \|\nabla_l u\|_{p, g}.$$

Для доказательства (5.12) осталось проверить, что

$$(5.14) \quad \|D_y^\gamma D_z^s S_\varepsilon\|_{p, g} \leq ce^{l-s-|\gamma|} \|\nabla_l u\|_{p, g}.$$

Если $s = 0$, то $S_\varepsilon = 0$, и оценка (5.14) верна. Пусть $0 < s < l$. Имеем

$$S_\varepsilon(y, z) = \sum_{l-s \leq |\alpha| \leq l-1} \varepsilon^{1-n} (\alpha!)^{-1} \int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z) (y - \eta)^\alpha \psi(\eta/\varepsilon) d\eta.$$

Зафиксируем $(n-1)$ -мерный мультииндекс α , $l-s \leq |\alpha| \leq l-1$ и заметим, что $(y-\eta)^\alpha = \sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} y^\delta (-\eta)^{\alpha-\delta}$. Пусть δ_1 — такой мультииндекс размерности $n-1$, что $\delta_1 \leq \alpha$, $|\delta_1| = l-s$. Тогда

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z) \eta^{\alpha-\delta} \psi(\eta/\varepsilon) d\eta = \\ & = (-1)^{|\alpha-\delta_1|} \varepsilon^{|\delta_1|-|\delta|-n+1} \int_{B_\varepsilon} D_\eta^{\delta_1} u(\eta, z) f(\eta/\varepsilon) d\eta, \end{aligned}$$

где $f(\eta) = D^{\alpha-\delta_1}(\eta^{\alpha-\delta} \psi(\eta))$. Введем обозначение

$$Fv = \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} v(\eta) f(\eta/\varepsilon) d\eta.$$

Имеем:

$$S_\varepsilon(y, z) = \sum_{l-s \leq |\alpha| \leq l-1} \sum_{\delta \leq \alpha} (\alpha!)^{-1} \binom{\alpha}{\delta} (-\varepsilon)^{l-s-|\delta|} y^\delta F(D^{\delta_1} u)(\cdot, z).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \|D_y^\nu D_z^s S_\varepsilon\|_{p,g} \leq \\ & \leq c\varepsilon^{l-s} \sum_{l-s \leq |\alpha| \leq l-1} \sum_{\nu \leq \delta \leq \alpha} \|D_y^\nu (y/\varepsilon)^\delta D_z^s (F(D^{\delta_1} u)(\cdot, z))\|_{p,g}. \end{aligned}$$

Так как $|D_y^\nu (y/\varepsilon)^\delta| \leq c\varepsilon^{-|\nu|}$ при $y \in B_\varepsilon$ и $D_z^s F(D^{\delta_1} u)(\cdot, z) = F(D^{\delta_1} D_z^s u)(\cdot, z)$, то каждое слагаемое в последней сумме не превосходит $c\varepsilon^{-|\nu|+(n-1)/p} \times \|F(D^{\delta_1} D_z^s u)(\cdot, z)\|_{p,l}$. Замечая, что $|Fv| \leq c\varepsilon^{(1-n)/p} \|v\|_{p,B_\varepsilon}$, приходим к оценке (5.14). Из (5.14) и (5.13) вытекает (5.12).

Итак доказано, что

$$(5.15) \quad \|D_y^\nu \varepsilon D_z^\beta T(u - P_\varepsilon)\|_{p,g} \leq c\varepsilon^{l-k} \|u\|_{p,l,g},$$

если $|\gamma| + \beta = k < l$. Осталось разобрать случай $k = l$. Оценим оба слагаемых в правой части (5.11) при $k = l$. Если $0 \leq \beta < l$, то первое слагаемое с помощью (5.12) мажорируется выражением $c\|\nabla_l u\|_{p,g}$. Таким образом, для доказательства (5.15) при $k = l$ достаточно проверить, что $\|\nabla_l T(u - P_\varepsilon)\|_{p,g} \leq c\|u\|_{p,l,g}$. Но по лемме 4.2 верна оценка $\|\nabla_l T u\|_{p,g} \leq c\|\nabla_l u\|_{p,g}$, так что дело сводится к проверке неравенства $\|\nabla_l T P_\varepsilon\|_{p,g} \leq c\|u\|_{p,l,g}$. Заметим, что последняя оценка является частным случаем (5.4) при $\varrho = \varepsilon$. Отметим еще, что оценка (5.5) следует из (5.9), (5.10) и (5.15). Итак для доказательства леммы осталось установить неравенство (5.4).

Из формулы (5.2) получаем:

$$P_\varepsilon(y, z) = \sum_{|\alpha| \leq l-1} \varepsilon^{1-n} (\alpha!)^{-1} \sum_{\delta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} (-1)^{|\alpha-\delta|} y^\delta \int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z) \eta^{\alpha-\delta} \psi\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) d\eta.$$

Здесь α, δ — мультииндексы размерности $n-1$. Заметим, что при $\delta \leq \alpha$

$$(-1)^{|\alpha-\delta|} \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z) \eta^{\alpha-\delta} \psi(\eta/\varepsilon) d\eta = \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z) \varphi(\eta/\varepsilon) d\eta,$$

где $\varphi(\eta) = D^{\alpha-\delta}(\psi(\eta) \eta^{\alpha-\delta})$, $\eta \in B_1 \subset R^{n-1}$. Введем обозначение $\Phi v = \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} v(\eta) \varphi(\eta/\varepsilon) d\eta$. Тогда

$$(5.16) \quad \begin{aligned} & \|D_y^\gamma D_z^\beta TP_\varepsilon\|_{p,G} \leq \\ & \leq c \sum_{|\alpha| \leq l-1} \sum_{\delta \leq \alpha} \|D_y^\gamma y^\delta D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z))\|_{p,G} \end{aligned}$$

где $|\gamma| + \beta = k \leq l$. Оценим в последней сумме каждое слагаемое. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $\beta + |\delta| \leq k$. Тогда $D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z)) = T\Phi(D^\delta D_z^\beta u(\cdot, z))$. Полагая $w(z) = \Phi(D^\delta D_z^\beta u(\cdot, z))$, получаем

$$\begin{aligned} & \|D_y^\gamma (y^\delta (Tw))(y, \cdot)\|_{p,A} \leq \\ & \leq c \sum_{\alpha \leq \gamma, \alpha \leq \delta} |y^{|\delta| - |\alpha|} \|D_y^{\gamma-\alpha} (Tw)(y, \cdot)\|_{p,A}, \end{aligned}$$

где $y \in B_\varrho \subset R^{n-1}$, $y \neq 0$. Замечая, что $w \in W_p^{k-|\delta|-\beta}(A_1)$ и пользуясь леммой 4.5, находим:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \|D_y^\gamma (y^\delta (Tw))(y, \cdot)\|_{p,A} & \leq c \sum_{\alpha \leq \gamma, \alpha \leq \delta} \|\nabla_{k-|\beta-|\delta||} w\|_{p,A_1} \leq \\ & c \sum_{|\nu|=k} \|\Phi(D^\nu u)\|_{p,A_1} \leq c\varepsilon^{(1-n)/p} \|\nabla_k u\|_{p,g}. \end{aligned}$$

Здесь в последней сумме ν означает n -мерный мультииндекс длины k ; кроме того, мы применили неравенство $|\Phi v| \leq c\varepsilon^{(1-n)/p} \|v\|_{p,B_\varepsilon}$ для $v \in L_p(B_\varepsilon)$, $B_\varepsilon \subset R^{n-1}$. Интегрируя (5.17) по шару $B_\varrho \subset R^{n-1}$, приходим к оценке

$$(5.18) \quad \|D_y^\gamma y^\delta D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z))\|_{p,G} \leq c(\varrho/\varepsilon)^{(n-1)/p} \|\nabla_k u\|_{p,g}.$$

2) Пусть $|\delta| > k$. Полагая здесь $w(z) = \Phi(D^\delta u(\cdot, z))$, находим, что $D_z^\beta (Tw) = (-|y|)^{-\beta} T'w$, где T' — оператор вида (4.1) с ядром $D^\beta K$. Имеем

$$\begin{aligned} & \|D_y^\gamma (y^\delta (D_z^\beta Tw))(y, \cdot)\|_{p,A} \leq \\ & \leq c \sum_{\alpha \leq \gamma} |D_y^\alpha (y^\delta |y|^{-\beta})| \|(D_y^{\gamma-\alpha} T'w)(y, \cdot)\|_{p,A} \leq \\ & \leq c \sum_{\alpha \leq \gamma} |y|^{|\delta| - \beta - |\alpha|} \|(D_y^{\gamma-\alpha} T'w)(y, \cdot)\|_{\varrho,A}, \quad 0 < |y| \leq \varrho. \end{aligned}$$

По лемме 4.4 каждое слагаемое в последней сумме не больше $c|y|^{|\delta|-k} \|w\|_{p,A_1}$, что не превосходит $c\|w\|_{p,A_1}$. Используя теперь оценку $\|w\|_{p,A_1} \leq c\varepsilon^{(1-n)/p} \|D^\delta u\|_{p,g}$ и интегрируя по переменной y , приходим к неравенству

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta y^\delta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z))\|_{p,G} \leq c(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p} \|\nabla_{|\delta|} u\|_{p,g}.$$

3) Пусть $\beta + |\delta| > k$, $|\delta| \geq k$. Полагая $\beta' = k - |\delta|$, $w(z) = \Phi(D_z^{\beta'} D^\delta u(\cdot, z))$, находим, что

$$D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z)) = D_z^{\beta-\beta'} T'w = (-|y|)^{\beta'-\beta} T'w$$

где $y \in B_\varrho \subset R^{n-1}$, $y \neq 0$, а T' — оператор вида (4.1) с ядром $K^{(\beta-\beta')}$. Таким

образом,

$$\begin{aligned} & \|D_y^\gamma(y^\delta D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z)))\|_{p, \Delta} = \\ & = \|D_y^\gamma(y^\delta |y|^{|\gamma|-|\delta|}(T'w)(y, \cdot))\|_{p, \Delta} \leq \\ & \leq c \sum_{\kappa \leq \gamma} |D_y^\kappa(y^\delta |y|^{|\gamma|-|\delta|})| \|(D_y^{\gamma-\kappa} T'w)(y, \cdot)\|_{p, \Delta} \leq \\ & \leq c \sum_{\kappa \leq \gamma} |y|^{|\gamma|-|\kappa|} \|(D_y^{\gamma-\kappa} T'w)(y, \cdot)\|_{p, \Delta}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4.4, оценим сверху каждое слагаемое в последней сумме выражением $c \|w\|_{p, \Delta_1}$, которое, в свою очередь, не превосходит $c \varepsilon^{(1-n)/p} \|D_z^{\beta'} D_y^{\delta'} u\|_{p, \Delta_1}$. Интегрируя по переменной $y \in B_a$, приходим к (5.18). Из (5.18), (5.19) и (5.16) следует (5.4). Лемма доказана.

Литература

- [1] Бабич В. М.: К вопросу о распространении функций. — Успехи мат. наук, 1953, т. 8, № 2, с. 111—113.
- [2] Никольский С. М.: Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. — Мат. сб., 1953, т. 33, № 2, с. 261—326.
- [3] Calderon A. P.: Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. Proc. Sympos. Pure Math., 1961, v. 4, p. 33—49.
- [4] Стейн И.: Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.
- [5] Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфулин Т. Г.: Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей. — Сиб. мат. журн., 1979, т. 20, № 2, с. 416—419.
- [6] Gol'dstein V. M., Vodopianov S. K.: Prolongement des fonctions de classe L_p^1 et applications quasi conformes. — C.R. Acad. Sci. Paris, 1980, v. 290, p. 453—456.
- [7] Jones P. W.: Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. — Acta Math., 1981, v. 147, p. 71—88.
- [8] Гольдштейн В. М.: Продолжение функций с первыми обобщенными производными из плоских областей. — Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 2, с. 268—271.
- [9] Мазья В. Г.: Пространства С. Л. Соболева — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985, 416 с.
- [10] Альфорс Л.: Лекции по квазиконформным отображениям. М., 1969, 132 с.
- [11] Буренков В. И.: Об одном способе продолжения дифференцируемых функций. — Труды Мат. ин-та АН СССР им В. А. Стеклова, 1976, т. 140, с. 27—67.
- [12] Гольдштейн В. М., Ситников В. Н.: О продолжении функций класса W_p^1 через гильберовы границы. — В кн.: Теоремы вложения и их приложения (Труды семинара С. Л. Соболева). Новосибирск, 1982, № 1, с. 31—43.
- [13] Мазья В. Г., Поборчий С. В.: О продолжении функций из пространств С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе. — Докл АН СССР, 1984, т. 275, № 5, с. 1066—1069.
- [14] Muckenhoupt B.: Hardy's inequality with weights. — Studia Math., 1972, v. 44, p. 31—38.

Адрес авторов: Ленинградский государственный университет, Ленинград, СССР.