Open access • Journal Article • DOI:10.1007/BF02684313

Extensions du groupe additif — Source link

Lawrence Breen

Institutions: University of Rennes

Published on: 01 Dec 1978 - Publications Mathématiques de l'IHÉS (Springer-Verlag)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

LAWRENCE BREEN

Extensions du groupe additif

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 48 (1978), p. 39-125
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1978__48__39_0>

EXTENSIONS DU GROUPE ADDITIF

par LAWRENCE BREEN

SOMMAIRE

INTRODUCTION 39

I. GÉNÉRALITÉS 45

II. ALGÈBRE SIMPLICIALE 56

Topo-logie 57
Foncteurs dérivés 59
Produits 62
Accouplements de foncteurs dérivés; suspension 65
Foncteurs dérivés stables 68
Stabilisation dans la catégorie dérivée 69

III. UNE RÉSOLUTION CANONIQUE D'UN FAISCEAU ABÉLIEN 72

Rappels sur la bar-construction 73
Construction de la résolution canonique 75
La suite spectrale fondamentale 76
L'algèbre de Steenrod 77
L'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod 80

IV. FONCTEURS DÉRIVÉS DE Γ 82

L'algèbre de Steenrod étendue et sa duale 88

V. LES TERMES INITIAUX DE LA SUITE SPECTRALE FONDAMENTALE 94

Structures multiplicatives 97

VI. UNE NOUVELLE RÉSOLUTION CANONIQUE 98

VII. ÉTUDE DES DIFFÉRENTIELLES SUPÉRIEURES 109

APPENDICE : SPECTRES ET STABILISATION 118

BIBLIOGRAPHIE 123

Introduction.

Soient G et H deux schémas en groupes commutatifs sur une base S. Le groupe $\mathrm{Ext}^1(G, H)$ des extensions de G par H a fait l'objet de nombreuses études. Son calcul a notamment été effectué par J.-P. Serre dans [62, chap. VII] lorsque G et H sont lisses et sont définis sur un corps de base. Il montre que ce calcul repose sur la connaissance de la partie primitive (pour la comultiplication induite par la loi de groupe de G) du groupe de cohomologie $H^1(G, H)$ du schéma G, à valeurs dans le faisceau représenté par H, et d'un groupe de 2-cocycles symétriques, à la Eilenberg-Mac Lane, calqué sur celui permettant de résoudre le problème similaire pour des groupes abstraits G et H. Lorsque la base est un corps parfait de caractéristique $p>0$, le groupe $\mathrm{Ext}^1(G, H)$ est désormais bien connu, sans hypothèses de lissité sur les groupes G, H (voir [51], [18]). De plus, une première étude des groupes $\mathrm{Ext}^i(G, H)$ d'extensions supérieures de G par H a été entreprise par F. Oort, en utilisant une définition de ces extensions « à la Yoneda ».

On a adopté dans [9] une approche différente qui consistait à plonger de la manière usuelle G et H dans une catégorie de faisceaux abéliens sur S et à définir le groupe $\mathrm{Ext}^i(G, H)$ comme i-ème foncteur dérivé de Hom. On sait que ces deux définitions coïncident dans la plupart des cas lorsque $i=1$: c'est une conséquence élémentaire de la théorie de la descente. De plus, on a montré dans [9] que, lorsque la base est un corps parfait de caractéristique p, ces groupes d'extensions ne diffèrent au plus que par leurs composantes de p-torsion; celle-ci est généralement beaucoup plus grosse pour les Ext^i foncteurs dérivés, comme le montre l'exemple de [10].

En général, on sait fort peu de chose sur les Ext^i supérieurs; on trouvera dans [11] un théorème d'annulation valable pour une grande classe de groupes G et H, en des degrés relativement bas $(1<i<2p-1)$. Ici, la démarche est inverse : on considère le cas particulier du groupe additif G_a, dont la bigèbre est la plus simple qui soit, et l'on a mené les calculs des groupes $\mathrm{Ext}^i(G_a, G_a)$ pratiquement jusqu'au bout, à deux lacunes près. Tout d'abord, on se borne à calculer les Ext dans la catégorie des faisceaux de $\mathbf{F}_p$-vectoriels, et non de tous les faisceaux abéliens. Par exemple, si l'on prend $i=1$, ceci revient à éliminer toutes les extensions, puisque l'on sait que les extensions abéliennes sont engendrées par l'extension :

$$0 \to G_a \to W_2 \to G_a \to 0$$

et que le groupe des vecteurs de Witt W_2 n'est pas d'ordre p. D'autre part, on n'a pas su déterminer la structure d'algèbre de $\mathrm{Ext}^*(G_a, G_a)$ induite par le produit de Yoneda, dont on ne donne qu'une description conjecturale. Le résultat principal de notre travail est le théorème suivant (pour un énoncé plus général, voir le théorème (1.3)) :

Théorème. — Soient k le corps fini $\mathbf{F}_p$ à p éléments, et G_a le groupe additif sur k, considéré comme faisceau en $\mathbf{F}_p$-vectoriels pour l'une des topologies usuelles (Zariski, étale, f.p.p.f.) sur un site sur k comprenant parmi ses objets l'espace affine $\mathbf{A}^n_k$ pour n quelconque. Alors :

$$\mathrm{Ext}^{2j+1}(G_a, G_a) = 0 \qquad \textit{pour} \quad j \geqslant 0$$

$$\mathrm{Ext}^{2j}(G_a, G_a) = k[F]/(F^{v_p(j)+1}) \qquad \textit{pour} \quad j>0$$

$v_p(\ )$ désignant la valuation p-adique sur les entiers rationnels.

La signification géométrique de ces groupes d'extensions est obscure à l'heure actuelle et il semble bien qu'elle ne pourra être élucidée qu'une fois étendu le concept d'objet géométrique (c'est-à-dire d'objet destiné à être étudié par les géomètres) de façon à y englober les catégories de Picard (voir [3], XVIII) et, mieux, les « n-catégories de Picard », objets dont la définition précise n'existe pas pour l'instant. Rappelons à titre d'illustration qu'à toute catégorie de Picard stricte $\mathscr{C}$, telle que le groupe $\Pi_0(\mathscr{C})$ des classes d'isomorphismes d'objets de $\mathscr{C}$ soit un groupe abélien A (resp. telle que le groupe $\Pi_1(\mathscr{C})$ des automorphismes de l'objet neutre O de $\mathscr{C}$, soit un groupe abélien B), on sait associer un invariant $k(\mathscr{C})\in\mathrm{Ext}^2(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ qui caractérise cette catégorie équivalence près (voir [63]). Le même énoncé reste vrai par faisceautisation lorsque $\mathscr{C}$ est un champ de Picard strict, A et B étant maintenant des faisceaux abéliens.

Remarquons également que l'on possède une assez bonne interprétation géométrique, au sens traditionnel, d'un groupe Ext^2, puisque l'un des théorèmes principaux de la thèse de L. Illusie [34, chapitre VII, théorème (4.2.1)] est que l'obstruction au relèvement à S d'un S_0-schéma en groupes commutatifs plat G_0 (S_0 étant un sous-schéma fermé de S défini par un Idéal de carré nul) est un élément de $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{G}_0, \mathrm{L})$, où L est un certain objet de la catégorie dérivée des faisceaux construit à partir du complexe cotangent de G_0 sur S_0. Il existe d'ailleurs une démonstration non rédigée de ce théorème, due à P. Deligne, qui utilise le formalisme des catégories de Picard mentionnées ci-dessus.

Pour en revenir au cas particulier du groupe additif, il semble que la nullité du groupe $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)$ des extensions dans la catégorie des faisceaux abéliens (qui à proprement parler n'est pas du ressort du théorème qu'on se propose de démontrer ici, mais plutôt de [11]) soit connue de divers auteurs, notamment de J. Tate. On en trouve une trace dans les calculs de 3-cocycles symétriques de Heaton [33] et d'Effroymson [23]. Ces calculs sont notamment à la base du théorème de déformation des groupes formels de Lubin-Tate [41], leur signification étant désormais clarifiée par le résultat de L. Illusie que l'on vient de mentionner.

Quant aux groupes $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)$ avec $i>2$, ils n'interviennent pour l'instant en géométrie que sous la forme suivante, qui doit être considérée comme la principale application de notre théorème à l'heure actuelle : soit $\mathrm{G}_a^{\mathrm{parf}}$ la restriction du faisceau G_a au site des schémas parfaits au-dessus d'un corps parfait k de caractéristique $p>0$. On remarquera que l'homomorphisme de Frobenius $\mathrm{F}:\mathrm{G}_a^{\mathrm{parf}}\to\mathrm{G}_a^{\mathrm{parf}}$ est bijectif. Or le théorème énoncé ci-dessus implique notamment que tout élément de $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)$ est tué par une puissance de F. Il est facile d'en déduire le corollaire suivant, par un argument de passage à la limite.

Corollaire. — Dans la catégorie des faisceaux abéliens sur le site parfait au-dessus de k (pour la topologie étale ou zariskienne), on a $\mathrm{Ext}^n(\mathrm{G}_a^{\mathrm{parf}}, \mathrm{G}_a^{\mathrm{parf}})=0$ *pour* $n>1$.

Ce corollaire est un point technique important dans la démonstration que J. Milne a récemment donnée d'un théorème de dualité plate pour les surfaces [48]. On en trouvera une démonstration directe à partir des quatre premiers chapitres de ce travail dans un exposé de l'auteur au Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay (1976-1977) intitulé *Extensions du groupe additif sur le site parfait* (à paraître).

On va calculer ici les groupes Ext^i par la méthode des résolutions canoniques, déjà employée dans [9] et [11] : afin de calculer $\mathrm{Ext}^i(G, H)$ on considère les groupes d'hyper-extensions $\mathrm{Ext}^i(X(G), H)$, où $X(G)$ est un complexe de faisceaux tel que

$$H_0(X(G)) \simeq G \tag{0.1}$$

et que chaque composante $X(G)_i$ de $X(G)$ soit de la forme $\mathbf{Z}[Y]$ avec Y un faisceau représenté par un schéma de la forme

$$Y \simeq G^m \tag{0.2}$$

ou

$$Y \simeq G^m \times A^n, \quad \text{où A est un faisceau constant (1).} \tag{0.3}$$

Les suites spectrales usuelles d'hypercohomologie permettent alors, dans les bons cas, de calculer $\mathrm{Ext}^n(G, H)$ à partir des groupes de cohomologie $H^*(Y, H)$ des schémas Y.

Tant qu'on se contentait, comme dans [9], [11], de calculer les groupes Ext^i pour i petit, il suffisait de prendre pour $X(G)$ le complexe des chaînes sur le faisceau simplicial $K(G, n)$ associé au faisceau G. C'est un complexe relativement simple à décrire, qui satisfait à (0.1), (0.2), et dont l'homologie est bien connue. Mais pour le calcul qui nous concerne ici, il s'est révélé indispensable d'utiliser une résolution canonique $X(G)$ de G, satisfaisant aux conditions (0.2) ou (0.3). Une telle résolution canonique a été définie par S. Mac Lane [43], en utilisant une construction cubique. L'objet qui nous servira ici est une version simpliciale de celle-ci, qui satisfait à (0.3) mais qui est malheureusement bien plus difficile à décrire que la précédente (voir la remarque (3.2) pour quelques variantes).

Signalons à ce propos un progrès technique important. Soit X un faisceau simplicial de connexité suffisamment grande dont les composantes sont du type (0.3); alors le faisceau simplicial $\mathbf{Z}[X]$ engendré par X est N-quasi-isomorphe, pour N assez grand, à un faisceau simplicial du même type (voir la proposition (6.5) pour une assertion précise). Ceci se trouve déjà énoncé (dans le cas ponctuel où la question de la représentabilité n'apparaît évidemment pas) dans [36] et, sous une forme plus directement utilisable, dans l'article de D. Anderson ([2], II).

Cette remarque est assez inattendue, dans la mesure où elle est évidemment fausse pour un faisceau simplicial constant associé à un schéma X, puisque le faisceau $\mathbf{Z}[X]$ n'est alors pratiquement jamais représentable. Elle permet de se libérer du carcan que représente la condition (0.3), donc de remplacer $X(G)$ par des résolutions canoniques dont la description est élémentaire; on peut s'attendre à ce que leur utilisation connaisse un grand développement à l'avenir.

---

(1) $\mathbf{Z}[Y]$ désigne le faisceau abélien libre engendré par Y, noté $\mathbf{Z}_Y$ dans [3], $\mathbf{Z}^{(Y)}$ dans [34].

On verra que les calculs effectués ici font appel, à la différence de [9] où seul le calcul des groupes d'homologie d'un espace d'Eilenberg-Mac Lane intervenait, à une grande partie de l'arsenal de la topologie algébrique. Il est tout d'abord indispensable d'utiliser la description moderne de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane (donnée par Milnor), c'est-à-dire de connaître la structure de l'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod. On utilise en outre, pour achever la démonstration en caractéristique impaire, des résultats très calculatoires, dont la complexité est en partie cachée par des renvois à des références : d'une part un théorème de S. Kochman sur la nature des produits de Massey supérieurs dans le complexe des chaînes d'un espace de lacets itérés, et d'autre part les relations de Nishida entre les opérateurs de Dyer-Lashof sur de tels espaces et les transposées en homologie des opérations de Steenrod. C'est la complexité même de ces calculs qui nous oblige à considérer simultanément le complexe X(G) à la Mac Lane, qui est du type bar-construction sur une algèbre, et pour lequel les résultats qu'on vient de citer sont disponibles, et les résolutions plus élémentaires mentionnées ci-dessus pour lesquelles (0.3) n'est plus satisfait. Ceci nous contraint à une vérification, de nature technique, de la compatibilité entre ces diverses résolutions. Son seul mérite est d'expliquer la résolution de Mac Lane, qui apparaissait jusqu'ici assez peu naturelle, malgré la description extrêmement compacte qu'en a donnée L. Illusie dans [34]. Pour faciliter la compréhension de celle-ci, on a esquissé dans un appendice la construction assez ardue, mais pourtant nécessaire, qu'Illusie effectue dans ([34], VI, 11) du foncteur stabilisé associé à un foncteur non additif. Cet appendice contient également des sorites sur les accouplements de foncteurs dérivés dont on a besoin ici, et qui ne figurent pas dans [34].

Les méthodes employées expliquent la nature un peu hybride de ce travail. Alors qu'il s'adresse par son résultat aux géomètres (pour lesquels, d'autre part, le cadre des topos dans lequel on s'est placé est naturel), il utilise des outils familiers aux seuls topologues. Il nous a donc paru indispensable, afin de ne pas décourager le lecteur par des renvois systématiques à la littérature, de faire des rappels fastidieux pour les spécialistes. Ainsi le premier paragraphe ne fait qu'énoncer, dans un cadre axiomatique, les propriétés élémentaires de l'algèbre des sections et de la cohomologie de l'espace affine et du schéma constant associé au groupe $\mathbf{Z}/p$. Quant au second, il résume le formalisme de la catégorie homotopique des faisceaux simpliciaux développé par D. Quillen [53], L. Illusie [34] et K. Brown [12], ainsi que le formalisme, dû à Dold-Puppe, des foncteurs dérivés des foncteurs non additifs. On rappelle alors au § 3 la construction de la résolution de Mac Lane. On y a également réuni les principaux résultats classiques sur l'algèbre de Steenrod et sa duale. Ce n'est qu'au moment où l'on entreprend le calcul des termes initiaux de la suite spectrale fondamentale aboutissant aux groupes $\mathrm{Ext}^i(G_a, G_a)$ que l'on s'éloigne des sentiers battus.

Cependant il convient de signaler que le premier de ces calculs, à savoir celui des groupes de cohomologie $\mathbf{H}^{\bullet}(K(G_a, n), G_a)$ des faisceaux d'Eilenberg-Mac Lane $K(G_a, n)$ a déjà été effectué sous une forme ou une autre par divers auteurs. Tout d'abord, lorsque $n=1$, ces groupes ne sont rien d'autre que les « groupes de cohomologie de l'analyseur classique à coefficients dans les entiers modulo p » étudiés par M. Lazard dans [40], et l'on généralise ici sa démonstration au cas de n quelconque. D'autre part, au langage près, ces résultats ont été également obtenus, par d'autres méthodes, par S. Priddy [52], et l'interprétation que l'on donne ici de ces groupes comme groupes d'opérations cohomologiques dans un topos éclaire bien ses résultats. Signalons à ce propos que des opérations de Steenrod en cohomologie étale ont été introduites par Michèle Raynaud [56]. A vrai dire, l'auteur a renoncé à son projet initial qui était d'entreprendre de manière générale l'étude des opérations de Steenrod dans les topos. En effet, ce travail a déjà été effectué, dans un cadre légèrement différent, par D. B. A. Epstein et il a paru préférable de ne pas reprendre cette étude délicate, afin de ne pas allonger démesurément ce texte (voir [27]).

Observons également que le phénomène de la non-trivialité des extensions supérieures du groupe additif repose en dernière analyse sur un fait bien connu de tous ceux qui ont eu à étudier les opérations de Steenrod en cohomologie à coefficients dans un faisceau ([27], [8]) : l'opération de Steenrod P^0 (resp. Sq^0) de degré o s'identifie à l'opération cohomologique induite par l'homomorphisme de Frobenius sur les coefficients, et non à l'opération identique comme c'est le cas en cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/p$.

Le dernier point de convergence avec des calculs connus est le suivant : il semble que l'énoncé de la proposition (7.7) ne diffère guère de calculs effectués par D. Kraines, dans un tout autre contexte ([38], th. (3.3)). Plutôt que de traduire son assertion, formulée dans un autre langage, il a paru préférable de donner une démonstration directe, dans notre cadre, du résultat qui nous importait.

Il sera clair à la lecture de ce travail que l'auteur a été influencé par l'étude accomplie par L. Illusie de la catégorie dérivée des faisceaux simpliciaux. On pourra également se référer à la catégorie homotopique associée à la catégorie des faisceaux simpliciaux introduite par D. Quillen et étudiée par K. Brown ([53], [12]). Ces diverses catégories fournissent le formalisme qui est à la base de notre étude. On sait que le but de la topologie algébrique (classique) est le calcul d'invariants homotopiques, plutôt que la mise en place, pourtant nécessaire, du formalisme de la catégorie homotopique. On doit considérer ce travail comme un premier pas dans l'étude des invariants analogues, pour la topologie algébrique dans le cadre faisceautique. On mesurera la complexité et la richesse de la nouvelle situation au fait que le calcul des groupes d'extensions de groupes abéliens (abstraits) s'effectue en quelques lignes.

Je remercie les membres du « Laboratoire de Mathématiques de l'École Polytechnique » pour leur hospitalité lors de la préparation de ce travail. La rédaction définitive en a été entreprise dans le cadre de l'E.R.A. 451 du C.N.R.S. à l'Université de Rennes. La frappe a été effectuée par Mme J. Liger avec un soin pour lequel je lui suis reconnaissant.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude à D. Anderson, A. K. Bousfield, L. Illusie, B. Mazur, S. Priddy, G. Segal et W. Singer pour leur aide. A des titres divers, ils m'ont prodigué des conseils précieux et des encouragements amicaux tout au long de l'élaboration de ce texte. Je suis également reconnaissant à P. Cartier pour sa lecture

attentive d'une première version du manuscrit. La forme que revêt la version définitive doit beaucoup à ses pertinentes remarques.

1. Généralités.

Soient $\mathcal{U}$ un univers, T un $\mathcal{U}$-topos (on omettra toujours $\mathcal{U}$ dans la notation). Choisissons un objet final e de T ou, ce qui revient au même, un morphisme $u : \mathrm{T} \to (\mathrm{ens})$ de T dans le topos ponctuel (voir [3], IV, (4.3)). Pour tout ensemble I, muni de l'une des structures algébriques usuelles (loi de groupe, d'anneau, etc.) on notera **I** l'objet constant de T qui lui est associé.

Pour un nombre premier $p>0$ fixé, soient $\mathcal{O}$ un objet de T muni d'une structure d'Anneau commutatif de caractéristique p, et $\mathrm{R}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(e, \mathcal{O})=u_*(\mathcal{O})$ l'anneau des sections globales de $\mathcal{O}$. Le morphisme d'adjonction :

$$(1.1) \qquad \varphi : \mathbf{R}=u^*u_*\mathcal{O}\to\mathcal{O}$$

munit $\mathcal{O}$ d'une structure de **R**-algèbre. De plus, l'homomorphisme canonique $\alpha : \mathsf{F}_p\to\mathrm{R}$ induit un morphisme canonique d'Anneaux :

$$(1.2) \qquad \alpha : \Lambda\to\mathbf{R}$$

(Λ désignant l'anneau constant associé à F_p), d'où, par restriction des scalaires, une structure de Λ-algèbre sur $\mathcal{O}$. Il sera commode de désigner par G_a l'objet de la catégorie T^{Λ} des Λ-modules de T obtenu à partir de $\mathcal{O}$ par oubli de la structure multiplicative, et par D l'objet de T sous-jacent, éventuellement pointé par la section nulle. Le choix des notations G_a (groupe additif) et D (droite affine) sera justifié par l'exemple (1.4).

Pour tout objet X de T, $\mathscr{D}(\mathrm{X})$ désignera « l'anneau des fonctions de X », soit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathrm{X}, \mathcal{O})$. On observera que la structure d'anneau de $\mathscr{D}(\ )$ induit un produit externe :

$$(1.3) \qquad \rho : \mathscr{D}(\mathrm{X})\otimes_{\mathrm{R}}\mathscr{D}(\mathrm{Y}) \to \mathscr{D}(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})$$

pour toute paire d'objets X et Y de T. En particulier, en prenant $\mathrm{X}=e$, on obtient une structure naturelle de R-algèbre sur $\mathscr{D}(\mathrm{Y})$, et donc, par restriction des scalaires, de F_p-algèbre.

Soit M un F_p-module de type fini. Par abus de langage, on appellera « R-dual » de M le R-module $\mathrm{M}^*=\mathrm{Hom}_{\mathsf{F}_p}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$. On a, bien sûr, un isomorphisme canonique de R-modules ($\mathrm{M}^{\vee}$ désignant le F_p-module dual de M) :

$$\mathrm{M}^*\simeq\mathrm{M}^{\vee}\otimes_{\mathsf{F}_p}\mathrm{R}.$$

On conviendra d'autre part de noter $\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a$ le Λ-module $\mathbf{M}\otimes_{\Lambda}\mathrm{G}_a$ de T. Ces notations étant choisies, remarquons qu'il existe un homomorphisme naturel de R-modules $\varphi(\mathrm{M}) : \mathrm{M}^* \to \mathscr{D}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)$ obtenu en associant à un élément $f\in\mathrm{M}^*$ la flèche composée suivante (où g est le morphisme canonique provenant de la structure de **R**-module de $\mathcal{O}$ décrite précédemment) :

$$\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a \xrightarrow{f\otimes 1} \mathbf{R}\otimes\mathrm{G}_a \xrightarrow{g} \mathrm{G}_a.$$

$\varphi(\mathrm{M})$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de R-algèbres, fonctoriel en M :

(1.4) $$\varphi_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}) : \mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}^*) \to \mathscr{D}(\mathrm{M}\otimes \mathrm{G}_a),$$

$\mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{P})$ (ou $\mathrm{Sym}(\mathrm{P})$ lorsque cela ne prête pas à confusion) désignant l'algèbre symétrique associée à un R-module P.

On fait l'hypothèse suivante sur $\mathcal{O}$:

A1 : *Pour tout* F_p*-module de type fini* M, $\varphi_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$ *est un isomorphisme.*

Remarque **(1.1)**. — Tout choix d'une base de M permet d'identifier $\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a$ avec le produit G_a^n de n copies de G_a. Compte tenu de cette identification, A1 se récrit :

A1' : *L'homomorphisme de* R-*algèbres* :

$$\varphi_{\mathrm{R}}^n : \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathscr{D}(\mathrm{D}^n),$$

qui envoie x_i *sur le i-ème morphisme de projection, est un isomorphisme.*

Formulons une seconde hypothèse sur l'objet $\mathcal{O}$:

A2 : *Pour tout objet* X *de* T *de la forme* $\mathrm{X}=\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a$ (M *étant un* F_p*-module de type fini*) *on a* $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a)=0$ *pour* $q>0$.

En particulier, pour $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a$ s'identifie à l'objet final e et l'on postule notamment que $\mathrm{H}^q(e, \mathrm{G}_a)$ est nul pour $q>0$.

A titre d'initiation au théorème principal, on va maintenant rappeler le calcul classique du groupe $\mathrm{Hom}(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)$ lorsque $\mathcal{O}$ satisfait à A1 : par hypothèse, tout morphisme dans T de D dans lui-même correspond à un polynôme $\mathrm{F}(x)\in\mathrm{R}[x]$; dire que c'est un homomorphisme pour la loi de groupe de G_a revient à affirmer, vu la remarque (1.1), que ce polynôme satisfait dans $\mathrm{R}[x,y]$ à :

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Il est bien connu que c'est le cas si et seulement si $f(x)$ est de la forme $f(x)=g(x^p)$ avec $g(x)\in\mathrm{R}[x]$. Ainsi l'anneau des endomorphismes de G_a est décrit par le

Lemme **(1.2)**. — *L'anneau des endomorphismes de* G_a *s'identifie à l'anneau de Hilbert-Witt* H *des polynômes non commutatifs en une variable* F *sur l'anneau* R, *la multiplication étant caractérisée par* :

(1.5) $$\mathrm{F}a=a^\sigma\mathrm{F}$$

et donc définie, plus généralement, sur des monômes, par la règle :

(1.6) $$(b\mathrm{F}^j)(a\mathrm{F}^i)=ba^{\sigma^j}\mathrm{F}^{i+j}$$

pour tous $a, b\in\mathrm{R}$, σ *désignant le Frobenius absolu sur* R.

Le monôme F^i correspond au morphisme d'élévation à la puissance p^i-ième de $\mathcal{O}$.

Il résulte de ce lemme que les produits de Yoneda à gauche et à droite induisent sur chaque groupe $\mathrm{Ext}^q(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)$ une structure de $(\mathrm{H}, \mathrm{H}^0)$-bimodule. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce travail.

Théorème **(1.3)**. — *Soit* $\mathcal{O}$ *un objet en anneaux, de caractéristique p première positive, d'un topos* T. *Supposons que* $\mathcal{O}$ *satisfasse aux conditions* A1 *et* A2 *définies ci-dessus. Alors :*

1) $\mathrm{Ext}^{2j+1}_\Lambda(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a) = 0$ *pour tout* $j \geqslant 0$.

2) *On a pour tout* $j > 0$ *un isomorphisme de* $(\mathrm{H}, \mathrm{H}^0)$*-bimodules :*

$$\mathrm{Ext}^{2j}_\Lambda(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a) \simeq \mathrm{H}/\mathrm{I}_j, \quad j > 0,$$

où I_j *est l'idéal bilatère de* H *engendré par* $\mathrm{F}^{v_p(j)+1}$, v_p *désignant la valuation p-adique sur les entiers rationnels.*

Donnons tout de suite l'exemple qui motive le choix de la notation employée :

Exemple **(1.4)**. — Soient $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ un schéma affine de caractéristique $p > 0$, T le topos des faisceaux sur le gros site fidèlement plat de présentation finie sur S (f.p.p.f.), et $\mathcal{O}$ le faisceau structural. On sait que le faisceau d'ensembles sous-jacent D est représenté par un objet du site, à savoir la droite affine $\mathbf{A}^1_\mathrm{S} = \mathrm{Spec}\,\mathrm{R}[\mathrm{X}]$ sur S. Plus généralement, avec la notation de A1, soient $\widetilde{\mathrm{M}}_\mathrm{R}$ le faisceau quasi cohérent sur S associé au R-module $\mathrm{M}_\mathrm{R} = \mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$, $\mathrm{W}(\widetilde{\mathrm{M}}_\mathrm{R})$ le faisceau de $\mathcal{O}_\mathrm{S}$-modules correspondant sur le site f.p.p.f. sur S ([19], I, (4.6.1)), qu'on considère comme un Λ-module par restriction des scalaires. On a un isomorphisme :

$$\mathrm{W}(\widetilde{\mathrm{M}}_\mathrm{R}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a$$

et l'on sait que pour tout M de type fini $\mathrm{W}(\widetilde{\mathrm{M}}_\mathrm{R})$ est représenté par le schéma affine $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_\mathrm{R}(\mathrm{M}^*))$, compte tenu de ([19], I, corollaire (4.6.5)). Il résulte alors du lemme de Yoneda que :

$$\mathscr{D}(\mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a) = \mathrm{G}_a(\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_\mathrm{R}(\mathrm{M}^*))) \simeq \mathrm{Sym}_\mathrm{R}(\mathrm{M}^*)$$

ce qui montre que A1 est satisfait.

La démonstration de A2 est plus profonde : le « théorème 90 de Hilbert » de Grothendieck affirme, dans sa forme additive, que pour tout schéma X et pour tout $i \geqslant 0$:

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{fppf}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a) = \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a) = \mathrm{H}^i_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a). \tag{1.7}$$

Or on vient de voir que tout faisceau X de la forme $\mathrm{X} = \mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a$ est représenté par un schéma affine, ce qui entraîne par le théorème de Serre ([30], (1.3)) :

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 0,$$

donc A2 est satisfait.

Voici deux variantes de l'exemple (1.4) :

Exemple **(1.5)**. — Dans la démonstration de A1 dans l'exemple précédent, on a seulement utilisé le fait que $\mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a$ était représenté par un objet du site, ainsi que la définition du faisceau structural. De plus, on vient de voir que A2 était valable pour des topologies moins fines que la topologie f.p.p.f. Ainsi, on peut prendre pour T le topos des faisceaux sur le gros site étale (resp. Zariskien) sur S, $\mathcal{O}$ étant toujours le faisceau structural. Un sous-site quelconque de ceux-ci convient également, pourvu qu'il contienne l'espace affine de dimension quelconque n au-dessus de S. Par contre le petit site des schémas étales sur S (resp. des ouverts Zariskiens de S) ne convient pas, puisque $\mathcal{O}$ n'est plus représenté par un objet du site.

Exemple (**1.6**). — On peut même prendre la topologie chaotique, autrement dit considérer le topos T des préfaisceaux sur la catégorie $(\mathrm{Sch}_{/S})$ des schémas sur $S=\mathrm{Spec}(R)$, $\mathcal{O}$ étant de nouveau le faisceau structural. Dans ce cas, si l'on se restreint à la catégorie des schémas affines au-dessus de S, T s'identifie à la catégorie $\mathscr{C}_R$ des foncteurs covariants de la catégorie des R-algèbres dans celle des ensembles. Les Λ-modules (resp. les $\mathbf{Z}$-modules) de T correspondent aux foncteurs à valeurs dans la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels (resp. des groupes abéliens). $\mathcal{O}$ est maintenant le foncteur « oubli de structure » de la catégorie des R-algèbres dans celle des ensembles, muni de sa structure naturelle d'objet en anneaux de caractéristique p de T, donc

$$G_a : (\text{R-alg}) \to (\mathbf{F}_p\text{-vect})$$

est le foncteur « oubli de structure partiel ». $\mathcal{O}$ satisfait à A1 pour les mêmes raisons que dans l'exemple 1. A2, par contre, est ici élémentaire : en effet le foncteur sections globales est exact dans une catégorie de préfaisceaux, ce qui entraîne l'annulation des groupes de cohomologie supérieurs. Observons pour terminer qu'un élément f de $\mathrm{Hom}_T(M\otimes G_a, N\otimes G_a)$ est exactement une application polynomiale de M dans N. Le point de départ pour l'étude de telles applications dans [57] est d'ailleurs la démonstration de A1 qui vient d'être donnée.

Signalons qu'il existe également une version relative du théorème. On remarquera tout d'abord que pour tout objet Y de T on sait définir (en appliquant la construction de (1.4) au topos $T|Y$) un morphisme :

$$\varphi_{R'}(M) : \mathrm{Sym}_{R'}(M^*_{R'}) \to \mathrm{Hom}_{T|Y}(M\otimes G_a|Y, G_a|Y)$$

où R′ est la R-algèbre $\mathrm{Hom}_T(Y, \mathcal{O})$. La première hypothèse relative est :

A1 rel. : *Pour tout* $\mathbf{F}_p$*-module de type fini* M, *et pour tout objet* Y *du topos* T, $\varphi_{R'}(M)$ *est un isomorphisme.*

Quant à la seconde, c'est évidemment :

A2 rel. : *Pour tout objet* X *de* T *de la forme* $X=M\otimes G_a$, *on a* $R^q f_*(f^*G_a)=0$ *pour* $q>0$, f *étant le morphisme structural de* X.

On désigne par $\mathbf{H}$ le faisceau $\mathcal{O}[F]$ des polynômes non commutatifs en une variable F sur l'Anneau $\mathcal{O}$, la loi de multiplication étant à nouveau donnée par (1.6); $\mathbf{I}_j$ est l'Idéal bilatère engendré par $F^{\nu_p(j)+1}$. On a alors le

Théorème **(1.7).** — *Soit $\mathcal{O}$ un Anneau commutatif de caractéristique* $p>0$ *d'un topos* T *satisfaisant aux conditions* A1 rel. *et* A2 rel. *Alors* :

1) $\mathcal{E}xt^{2j+1}(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a) = 0, \quad j \geqslant 0$;
2) $\mathcal{E}xt^{2j}(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a) = \mathbf{H}/\mathbf{I}_j, \quad j>0$.

Le théorème (1.7) se démontre de façon tout à fait similaire au théorème (1.3) en faisceautisant à chaque stade de la démonstration. Aussi nous bornerons-nous dans ce qui suit à la démonstration du cas absolu. La version relative est utile dans la mesure où elle permet d'étudier les groupes $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)$ lorsque l'hypothèse A2 rel. est satisfaite, alors que A2 ne l'est pas : on dispose en effet de la suite spectrale de passage du local au global :

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(e, \mathcal{E}xt^q(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a)$$

et le théorème (1.7) permet donc d'en étudier le terme E_2. On se trouve notamment dans cette situation lorsque, dans l'exemple (1.4) ci-dessus (et sa variante (1.5)), on prend pour base un schéma S de caractéristique $p>0$ qu'on ne suppose plus affine.

Passons maintenant en revue diverses conséquences de l'hypothèse A1. Celles-ci sont bien familières dans le cadre de l'exemple (1.4). La discussion suivante n'est alors que l'étude des bigèbres associées aux schémas en groupes G_a et Λ, ainsi que les comultiplications sur les algèbres affines associées aux lois d'anneaux sur $\mathcal{O}$ et Λ. On étudiera également les bigèbres duales, au sens de Cartier.

Il convient tout d'abord de remarquer que, pour deux $\mathbf{F}_p$-vectoriels de type fini M et N, le produit externe $\rho : \mathcal{D}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)\otimes_{\mathrm{R}}\mathcal{D}(\mathrm{N}\otimes\mathrm{G}_a) \to \mathcal{D}((\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)\times(\mathrm{N}\otimes\mathrm{G}_a))$ défini en (1.3) est un isomorphisme. Ceci résulte de la commutativité du diagramme suivant, dans lequel on a négligé d'expliciter certains isomorphismes évidents :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}^*)\otimes\mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N}^*) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\varphi(\mathrm{M})\otimes\varphi(\mathrm{N})"'] & \mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}^*\times\mathrm{N}^*) \arrow[d, "\varphi(\mathrm{M}\times\mathrm{N})"] \\
\mathcal{D}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)\otimes\mathcal{D}(\mathrm{N}\otimes\mathrm{G}_a) \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{D}((\mathrm{M}\times\mathrm{N})\otimes\mathrm{G}_a)
\end{tikzcd}$$

où φ est l'isomorphisme canonique $\mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \to \mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{A})\otimes\mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{B})$ lorsque A (resp. B) est le R-module libre M^* (resp. N^*). Le lemme suivant est une conséquence immédiate des considérations précédentes.

Lemme **(1.8).** — *La comultiplication*

$$\mathcal{D}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a) \longrightarrow \mathcal{D}((\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)\times(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)) \xrightarrow{\rho^{-1}} \mathcal{D}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)\otimes\mathcal{D}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a)$$

induite par la loi de groupe m de $\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a$ *correspond,* via *les isomorphismes* φ_{R} (1.4), *à la comultiplication* :

$$m^* : \mathrm{Sym}(\mathrm{M}^*) \to \mathrm{Sym}(\mathrm{M}^*\times\mathrm{M}^*) \to \mathrm{Sym}(\mathrm{M}^*)\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{Sym}(\mathrm{M}^*) \tag{1.8}$$

induite par l'application diagonale $\Delta : \mathrm{M}^* \to \mathrm{M}^*\times\mathrm{M}^*$.

On peut également associer à tout homomorphisme de $\mathbf{F}_p$-vectoriels $u : \mathrm{M}\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{N}\to\mathrm{P}$ un morphisme Λ-bilinéaire dans T, en utilisant la loi d'anneau $\nu : \mathcal{O}\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}$:

$$\mathbf{u} : (\mathrm{M}\otimes\mathcal{O})\times(\mathrm{N}\otimes\mathcal{O}) \longrightarrow (\mathrm{M}\otimes\mathcal{O})\otimes(\mathrm{N}\otimes\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\otimes\mathcal{O}\otimes\mathcal{O} \xrightarrow{u\otimes\nu} \mathrm{P}\otimes\mathcal{O},$$

la première flèche étant la projection canonique et la seconde la permutation des tenseurs. Celui-ci induit un homomorphisme d'algèbres :

$$\rho^{-1}\circ\mathcal{D}(\mathbf{u}) : \mathcal{D}(\mathrm{P}\otimes\mathcal{O}) \to \mathcal{D}((\mathrm{M}\otimes\mathcal{O})\times(\mathrm{N}\otimes\mathcal{O})) \to \mathcal{D}(\mathrm{M}\otimes\mathcal{O})\otimes\mathcal{D}(\mathrm{N}\otimes\mathcal{O}).$$

Lemme (**1.9**). — *Le diagramme suivant est commutatif, où* $i : \mathrm{E}\to\mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}\mathrm{E}$ *est l'injection canonique et la flèche horizontale intermédiaire est l'unique homomorphisme d'algèbres rendant le carré inférieur commutatif* :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(\mathrm{P}\otimes\mathcal{O}) \arrow[r, "\rho^{-1}\circ\mathcal{D}(\mathbf{u})"] & \mathcal{D}(\mathrm{M}\otimes\mathcal{O})\otimes_{\mathrm{R}}\mathcal{D}(\mathrm{N}\otimes\mathcal{O}) \\
\mathrm{Sym}(\mathrm{P}^*) \arrow[u, "\varphi_{\mathrm{R}}(\mathrm{P})"] \arrow[r, "u^*"] & \mathrm{Sym}(\mathrm{M}^*)\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{Sym}(\mathrm{N}^*) \arrow[u, "\varphi_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})\otimes\varphi_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})"'] \\
\mathrm{P}^* \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u^*"] & \mathrm{M}^*\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{N}^* \arrow[u, "i\otimes i"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Par fonctorialité de φ_{R}, on peut supposer que $u = 1_{\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}}$. Il suffit de vérifier que le carré composé commute, ce qui revient à montrer que pour tout $m\in\mathrm{M}^*$ (resp. $n\in\mathrm{N}^*$), le diagramme suivant est commutatif, $\varphi(m)$ (resp. $\varphi(n)$, resp. $\varphi(m\otimes n)$) désignant l'élément $\varphi(\mathrm{M})(m)$ (resp. $\varphi(\mathrm{N})(n)$, resp. $\varphi(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N})(m\otimes n)$) :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{M}\otimes\mathcal{O})\times(\mathrm{N}\otimes\mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(m)\times\varphi(n)"'] & \mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\otimes\mathcal{O} \arrow[d, "\varphi(m\otimes n)"] \\
\mathcal{O}\times\mathcal{O} \arrow[r, "\nu"] & \mathcal{O}
\end{tikzcd}$$

Cette dernière assertion est élémentaire.

Soit M un $\mathbf{F}_p$-vectoriel. Nous allons maintenant donner une description similaire de l'anneau des fonctions $\mathcal{D}(\mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathbf{M}, \mathcal{O})$ du Λ-module constant $\mathbf{M}$ de T associé à M. Par définition de M, on a :

$$(\mathbf{1.9}) \qquad \begin{aligned}\mathcal{D}(\mathbf{M}) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ens}}(\mathrm{M}, \mathrm{R}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{R\text{-}mod}}(\mathrm{R}[\mathrm{M}], \mathrm{R})\end{aligned}$$

(où R[M] désigne la R-algèbre du groupe M).

Soit $\psi(\mathrm{M}) : \mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{ens}}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$ l'homomorphisme d'algèbres induit par l'inclusion de M^* dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ens}}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$. Soit m un élément de $\mathrm{M}^{\vee}$; son image (notée également m) dans $\mathrm{M}^{\vee}\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathrm{R} = \mathrm{M}^*$ satisfait à la relation $m^p = m$ dans Hom(M, R).

De manière générale, soient P un F_p-module, P_R le R-module obtenu par extension des scalaires. Notons $\nu(P_R)$ l'algèbre quotient de $\mathrm{Sym}_R(P_R)$ par l'Idéal $J=J(P)$ engendré par les éléments de la forme m^p-m, pour tout $m\in P\subset P_R$. On vient d'observer que $\psi_R(M)$ se factorise en un homomorphisme d'algèbres :

$$\chi_R(M) : \nu(M^*)\to \mathscr{D}(\mathbf{M}).$$

Le lemme suivant, qui est l'analogue de A1 pour le faisceau constant $\mathbf{M}$, est vrai sans hypothèses supplémentaires.

Lemme (**1.10**). — *Pour tout F_p-vectoriel de type fini* M, $\chi_R(M)$ *est un isomorphisme.*

Une fois choisie une base $X_1, \ldots, X_n$ de M, le lemme est un cas particulier du lemme suivant, qu'on démontre par récurrence sur *n*.

Lemme (**1.11**). — *Soit* S *une* F_p-*algèbre. L'homomorphisme de* S-*algèbres* :

$$\chi_n : S[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^p-X_1, \ldots, X_n^p-X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{ens}}(\mathsf{F}_p^n, S),$$

qui envoie X_i *sur la composée de la i-ème projection* $\mathsf{F}_p^n\to\mathsf{F}_p$ *et de l'inclusion canonique, est un isomorphisme.*

A un F_p-vectoriel M, on associe l'homomorphisme :

$$\beta(M) : \mathbf{M}\simeq\mathbf{M}\otimes_\Lambda\Lambda \xrightarrow{1\otimes\partial} M\otimes G_a$$

avec $\partial=\varphi\circ\alpha$ (voir (1.1), (1.2)). On vérifie que le diagramme suivant est commutatif, la flèche horizontale inférieure étant l'homomorphisme canonique :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(M\otimes G_a) \arrow[r, "\mathscr{D}(\beta(M))"] & \mathscr{D}(\mathbf{M}) \\
\mathrm{Sym}(M^*) \arrow[u, "\varphi_R(M)"] \arrow[r] & \nu(M^*) \arrow[u, "\chi_R(M)"']
\end{tikzcd}$$

Puisque $\beta(M)$ est un homomorphisme de groupes, la comultiplication sur $\mathscr{D}(\mathbf{M})$ induite par la loi de groupe sur M correspond *via* l'isomorphisme $\chi_R(M)$ à la comultiplication sur $\nu(M^*)$ induite par passage au quotient par J à partir de l'homomorphisme d'algèbre m^* défini en (1.8).

Le lemme (1.10) et l'hypothèse A1 ont une généralisation commune :

Corollaire (**1.12**). — *Soient* $\mathscr{O}$ *un objet de* T *satisfaisant à l'hypothèse* A1, *et* M, N *deux* F_p-*vectoriels de type fini. Alors l'homomorphisme d'algèbres* :

$$\rho\circ(\chi_R(N)\times\varphi_R(M)) : \nu(N^*)\otimes\mathrm{Sym}(M^*) \to \mathscr{D}(\mathbf{N})\otimes\mathscr{D}(M\otimes G_a)\to\mathscr{D}(\mathbf{N}\times(M\otimes G_a))$$

est un isomorphisme.

Ceci résulte des isomorphismes d'adjonction :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathbf{N}\times(\mathrm{M}\otimes \mathrm{G}_a), \mathrm{G}_a) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathbf{N}, \mathscr{H}om_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\otimes \mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a))\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ens}}(\mathrm{N}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\otimes \mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a))\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ens}}(\mathrm{N}, \mathrm{Sym}(\mathrm{M}_{\mathrm{R}}))\end{aligned}$$

et du lemme (1.11).

En particulier il résulte du corollaire (1.12) que le produit externe :

$$\rho : \mathscr{D}(\mathbf{N})\otimes\mathscr{D}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a) \to \mathscr{D}(\mathbf{N}\times(\mathrm{M}\otimes\mathrm{G}_a))$$

est un isomorphisme.

On observera que la flèche $\partial : \Lambda\to\mathcal{O}$ est un homomorphisme d'anneaux et donc que, pour tout homomorphisme $u : \mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\to\mathrm{P}$ de F_p-modules, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}\times\mathbf{N} \arrow[r] \arrow[d, "1\times\beta(\mathrm{N})"'] & \mathbf{M}\otimes\mathbf{N} \arrow[r, "u"] & \mathbf{P} \arrow[d] \\
\mathbf{M}\times(\mathrm{N}\otimes\mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta(\mathrm{M})\times 1"'] & \mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\otimes\mathcal{O} \arrow[r, "u\otimes 1"] & \mathrm{P}\otimes\mathcal{O} \\
\mathrm{M}\otimes\mathcal{O}\times\mathrm{N}\otimes\mathcal{O} \arrow[urr, "u"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si l'on applique le foncteur contravariant $\mathscr{D}(\ )$ à ce diagramme, on obtient un diagramme de R-algèbres qui correspond, *via* les isomorphismes φ_{R} et χ_{R}, au diagramme suivant, où les flèches verticales sont les surjections canoniques :

$$(\mathbf{1.10})\qquad \begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sym}(\mathrm{M}^*)\otimes\mathrm{Sym}(\mathrm{N}^*) \arrow[d] \\
\mathrm{Sym}(\mathrm{P}^*) \arrow[ur, "n_3^*"] \arrow[r, "n_2^*"'] \arrow[d] & \nu(\mathrm{M}^*)\otimes\mathrm{Sym}(\mathrm{N}^*) \arrow[d] \\
\nu(\mathrm{P}^*) \arrow[r, "n_1^*"'] & \nu(\mathrm{M}^*)\otimes\nu(\mathrm{N}^*)
\end{tikzcd}$$

On remarquera que les flèches horizontales se déduisent toutes de n_3^* par passage au quotient.

Complétons cette description des conséquences de nos hypothèses en remarquant que l'hypothèse A2 a elle aussi une généralisation faisant intervenir les faisceaux constants :

Proposition (**1.13**). — *Soient* M *et* N *des* F_p*-modules,* $\mathcal{O}$ *un objet de* T *satisfaisant à* A2. *Alors* $\mathrm{H}^i((\mathrm{M}\otimes\mathcal{O})\times\mathbf{N}, \mathcal{O})=0$ *pour* $i>0$.

Ceci résulte de la formule de Künneth, qui est facile à démontrer dans le cas qui nous intéresse. La platitude du Λ-module Λ_{X} engendré par un objet quelconque X de T entraîne notamment l'isomorphisme suivant, dans la catégorie dérivée des Λ-modules de T (les produits tensoriels étant pris sur Λ) :

$$\Lambda_{M\otimes\mathcal{O}}\overset{L}{\otimes}\Lambda_N \simeq \Lambda_{M\otimes\mathcal{O}}\otimes\Lambda_N \simeq \Lambda_{(M\otimes\mathcal{O})\times N}$$

d'où une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i(\Lambda_{M\otimes\mathcal{O}}, \mathcal{E}xt^j(\Lambda_N, \mathcal{O})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(\Lambda_{(M\otimes\mathcal{O})\times N}, \mathcal{O}).$$

Or les foncteurs $I \mapsto \mathcal{E}xt^j(\Lambda_N, I)$ sont les foncteurs dérivés du foncteur :

$$I \mapsto \mathcal{H}om(\Lambda_N, I) = I^n \quad (\text{avec } n = \mathrm{rg}\, N).$$

Ils s'annulent donc pour $j>0$, ce dernier foncteur étant exact. On en déduit, par A2 et par l'additivité des foncteurs Ext^i, que $E_2^{i,j}=0$ pour $(i,j)\neq(0,0)$, d'où l'annulation de l'aboutissement en degrés positifs, ce qu'il fallait démontrer, compte tenu de ([3], V, (3.5)).

Pour terminer, on explicitera les structures duales de celles décrites ici. Commençons par rappeler que l'on a, pour tout R-module M, un accouplement canonique de l'algèbre symétrique et de l'algèbre à puissances divisées $\Gamma_R(M)$ (que l'on notera parfois $\Gamma(M)$) :

(1.11) $$\Gamma_R(M)\otimes_R \mathrm{Sym}(\check{M}) \to R$$

(où $\check{M}$ désigne le R-module Hom(M, R)). Il permet d'identifier, pour M de type fini, chacune de ces algèbres, munie de la comultiplication induite par la diagonale sur M, avec la bigèbre duale graduée de l'autre. De plus la bigèbre duale (non graduée) de $\mathrm{Sym}(\check{M})$ s'identifie au moyen de (1.11) à la bigèbre formelle $\hat{\Gamma}(M)$, complétée de $\Gamma(M)$ pour la topologie linéaire pour laquelle l'ensemble ordonné des $U_N = \bigoplus_{i\geqslant N}\Gamma_i(M)$ forme un système fondamental de voisinages de 0. $\hat{\Gamma}(M)$ n'est autre que le produit $\prod_i \Gamma_i(M)$ des parties homogènes $\Gamma_i(M)$ de $\Gamma(M)$. Rappelons, pour fixer les idées, que la comultiplication u sur $\hat{\Gamma}(M)$ transposée de la multiplication sur l'algèbre symétrique est définie par :

$$\mu^*\gamma_k(m) = \sum_{i+j=k}\gamma_i(m)\otimes\gamma_j(m).$$

La transposée de l'application n_3^* associée en (1.10) à un homomorphisme $u: M\otimes N \to P$ est peu agréable à écrire. C'est une flèche :

(1.12) $$n_3 : \hat{\Gamma}(M)\hat{\otimes}\hat{\Gamma}(N) \to \hat{\Gamma}(P)$$

nulle sur les composantes de la forme $\Gamma_i(M)\otimes\Gamma_j(N)$ avec $i\neq j$ et caractérisée sur sa restriction :

$$(n_3)_i : \Gamma_i(M)\otimes\Gamma_i(N) \to \Gamma_i(P)$$

à $\Gamma_i(M)\otimes\Gamma_i(N)$, par $n_3(\gamma_i(m)\otimes\gamma_i(n)) = \gamma_i(u(m,n))$. En fait, pour $i=\sum_j s_j = \sum_j t_j$:

(1.13) $$n_3(\gamma_{s_1}(m_1)\ldots\gamma_{s_r}(m_r)\otimes\gamma_{t_1}(n_1)\ldots\gamma_{t_k}(n_k)) = \sum_{\mathbf{a}}\prod_{i,j}\gamma_{a_{ij}}(u(m_i,n_j))$$

où $\mathbf{a}=(a_{ij})$ parcourt l'ensemble des matrices de type $r\times k$ à coefficients entiers non négatifs tels que $s_i=\sum_{j=1}^{k} a_{ij}$ et $t_j=\sum_{i=1}^{r} a_{ij}$ (voir [6]).

Passons maintenant à la bigèbre $\nu(M^*)$. Vu (1.9) et le lemme (1.10), sa bigèbre duale est bien évidemment la R-algèbre $R[M]$ associée au groupe M, munie de la comultiplication induite par la diagonale sur M. La transposée de l'application :

$$\nu(P^*)\to\nu(M^*)\otimes\nu(N^*)$$

associée en (1.10) à un homomorphisme $n: M\otimes N\to P$ est l'homomorphisme :

$$(\mathbf{1.14})\qquad R[M]\otimes R[N]\xrightarrow{\approx} R[M\times N]\longrightarrow R[M\otimes N]\xrightarrow{R[n]} R[P].$$

Il reste à expliciter la transposée de l'homomorphisme canonique $\chi: \mathrm{Sym}(M_R)\to\nu(M_R)$.

Proposition **(1.14)**. — *La transposée de* χ *est l'application exponentielle* :

$$\exp: R[M]\to\Gamma_R(M_R)$$

définie sur les générateurs de $R[M]$ *par* :

$$(\mathbf{1.15})\qquad \exp(m)=\sum_i \gamma_i(\bar{m})$$

(*où* $\bar{m}$ *désigne l'image de* m *dans* M_R).

Démonstration. — On commence par remarquer que exp est un homomorphisme de R-algèbres, ce qui résulte de la relation :

$$\gamma_k(m+n)=\sum_{i+j=k}\gamma_i(m)\otimes\gamma_j(n)$$

dans l'algèbre à puissances divisées. De plus l'homomorphisme exp est compatible à la comultiplication sur $R[M]$ (resp. $\hat{\Gamma}(M)$) induite par la diagonale sur M. Ceci permet de vérifier la formule :

$$\langle\exp(m),f\rangle=\langle m,\chi(f)\rangle$$

dans le seul cas où $f\in M_R=\mathrm{Sym}^1(M_R)$. C'est alors immédiat.

Ecrivons pour terminer le diagramme transposé de (1.10) ; compte tenu de ce qui précède, c'est :

$$(\mathbf{1.16})\qquad \begin{tikzcd} R[M]\otimes R[N] \arrow[r, "n_1"] \arrow[d] & R[P] \arrow[d] \\ R[M]\otimes\hat{\Gamma}(N_R) \arrow[r, "n_2"] \arrow[d] & \hat{\Gamma}(P_R) \\ \hat{\Gamma}(M_R)\hat{\otimes}\hat{\Gamma}(N_R) \arrow[ur, "n_3"'] & \end{tikzcd}$$

où n_1 (resp. n_3) est la flèche définie en (1.14) (resp. (1.13)) et les flèches verticales non identiques sont les exponentielles (1.15). Quant à n_2, il résulte de la commutativité du diagramme et de la définition de n_3 qu'elle est définie, pour tous $m \in \mathrm{M}$ et $n_1, \ldots, n_k \in \mathrm{N_R}$, par :

(1.17) $$n_2([m] \otimes \gamma_{t_1}(n_1) \ldots \gamma_{t_k}(n_k)) = \gamma_{t_1}(u(\bar{m}, n_1)) \ldots \gamma_{t_k}(u(\bar{m}, n_k)).$$

Remarque **(1.15)**. — Il est préférable d'éviter dans ce qui suit tout recours aux anneaux topologiques. Observons donc que pour tout $i \geqslant 0$, la flèche n_2 de (1.16) définit par restriction un homomorphisme :

$$\mathrm{R}[\mathrm{M}] \otimes \Gamma^i(\mathrm{N_R}) \to \Gamma^i(\mathrm{P_R}).$$

Puisque $\Gamma(\mathrm{M}) = \bigoplus_{i \geqslant 0} \Gamma^i(\mathrm{M})$, ceci s'étend en un homomorphisme de modules gradués :

$$\mathrm{R}[\mathrm{M}] \otimes \Gamma(\mathrm{N_R}) \to \Gamma(\mathrm{P_R}),$$

$\mathrm{R}[\mathrm{M}]$ étant concentré en degré 0. La flèche n_2^* de (1.10) s'interprète comme la transposée de celui-ci, au sens des modules duaux *gradués*.

Remarque **(1.16)**. — Toutes les considérations qui précèdent demeurent valables lorsque l'on se place dans la catégorie $\mathrm{T}^{\bullet}$ des objets X de T pointés par une section $x : e \to \mathrm{X}$. En particulier $\mathscr{O}$ (resp. $\mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a$) est pointé par l'élément neutre pour sa loi de groupe, ce qui permet de définir l'anneau $\mathscr{D}_{\bullet}(\mathrm{X})$ des applications pointées de X dans $\mathscr{O}$ (resp. l'anneau $\mathscr{D}_{\bullet}(\mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a)$). L'homomorphisme $\varphi_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$ (1.4) se restreint en un homomorphisme :

$$\varphi_{\mathrm{R}}^{+}(\mathrm{M}) : \mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}^{+}(\mathrm{M}^*) \to \mathscr{D}_{\bullet}(\mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a)$$

$\mathrm{Sym}^+(\ )$ désignant l'idéal d'augmentation dans l'algèbre symétrique. On définit d'autre part les groupes de cohomologie réduite comme foncteurs dérivés du foncteur « section pointée ». Ceci revient à poser, pour (X, x) un objet de $\mathrm{T}^{\bullet}$:

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a) = \ker(\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a) \xrightarrow{x^*} \mathrm{H}^q(e, \mathrm{G}_a)).$$

Il est facile de voir que les hypothèses A1 et A2 impliquent les variantes pointées suivantes :

A1 pt. : Pour tout $\mathbf{F}_p$-module de type fini M, $\varphi_{\mathrm{R}}^{+}(\mathrm{M})$ est un isomorphisme.
A2 pt. : Pour tout X de la forme $\mathrm{M} \otimes \mathrm{G}_a$, $\widetilde{\mathrm{H}}^q(\mathrm{X}, \mathrm{G}_a) = 0$.

On en déduit des résultats similaires à tous ceux énoncés ci-dessus. On remplace $\mathscr{D}(\ )$ par $\mathscr{D}_{\bullet}(\ )$, $\mathrm{H}^q(\ )$ par $\widetilde{\mathrm{H}}^q(\ )$, $\mathrm{Sym}(\ )$ par $\mathrm{Sym}^+(\ )$ et $\nu(\ )$ par l'image $\nu^+(\ )$ de Sym^+ par la projection canonique $\mathrm{Sym}(\ ) \to \nu(\ )$. Dualement, il convient de remplacer l'algèbre $\mathrm{R}[\mathrm{M}]$ engendrée par le R-module M (resp. $\Gamma(\mathrm{M})$) par son quotient :

(1.18) $$\mathrm{R}^+[\mathrm{M}] = \mathrm{R}[\mathrm{M}]/\mathrm{R}[0]$$

(resp. $\Gamma^+(\mathrm{M}) = \Gamma(\mathrm{M})/\Gamma^0(\mathrm{M})$).

2. Algèbre simpliciale.

On rassemble ici, pour la commodité du lecteur, les principaux résultats d'algèbre simpliciale qui seront utilisés par la suite. Ils ont généralement pour origine le mémoire de A. Dold et D. Puppe [21]. La description qu'on en donne ici est largement inspirée de la thèse d'Illusie. Celui-ci a en effet adapté une partie de cette théorie au cadre des topos (on aura aussi intérêt à consulter à ce propos [53] et [12]). C'est à lui que nous empruntons la délicate description des foncteurs stabilisés qui termine ce chapitre.

Soit X un objet simplicial d'une catégorie $\mathscr{C}$. On notera d_i^n (resp. s_i^n) la i-ème flèche de face (resp. de dégénérescence) de source X_n. On simplifiera la notation en d_i (resp. s_i) lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Pour tout foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, on notera également F, sans autre précision, le foncteur de la catégorie $\mathrm{Simpl}(\mathscr{C})$ des objets simpliciaux de $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{Simpl}(\mathscr{D})$ défini par :

$$(FX)_i = F(X_i)$$

avec les opérateurs face et dégénérescence évidents.

Commençons par rappeler qu'à tout objet simplicial X d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, on sait associer fonctoriellement de deux manières différentes un complexe de $\mathscr{A}$, à différentielle de degré -1, nul en degrés négatifs. D'une part, on définit le complexe associé $\widetilde{X}$ de X par :

$$\widetilde{X}_n = X_n \text{ pour tout } n,$$

la différentielle $d : \widetilde{X}_n \to \widetilde{X}_{n-1}$ étant définie par $d = \sum_j (-1)^j d_j^n$. D'autre part, le complexe normalisé NX de X est défini par :

$$(NX)_n = \bigcap_{i>0} \ker(d_i^n : X_n \to X_{n-1}), \tag{2.1}$$

la différentielle sur $(NX)_n$ étant la restriction de d_0 à $(NX)_n$. On observera que NX est un sous-complexe de $\widetilde{X}$, et en fait on a un scindage :

$$\widetilde{X} = NX \oplus DX,$$

DX étant le sous-complexe dégénéré de X, défini par $(DX)_n = \bigcup_i \mathrm{im}(s_i^{n-1})$. En fait on vérifie par le calcul que DX est homotopiquement trivial, ce qui implique le lemme suivant :

Lemme (2.1). — *L'inclusion* $NX \to \widetilde{X}$ *est une équivalence de chaînes.*

Passons maintenant à la construction fondamentale de Dold-Puppe. Soit $C.(\mathscr{A})$ la catégorie des complexes de $\mathscr{A}$ nuls en degrés négatifs. Pour la démonstration du théorème suivant, on renvoie à [21].

Théorème (2.2) (Dold-Puppe). — *Le foncteur* $N : \mathrm{Simpl}(\mathscr{A}) \to C(\mathscr{A})$ *possède un quasi-inverse* K.

Définition (**2.3**). — *Soit* P *un objet de* $\mathscr{A}$. *On définit, pour* $n \geqslant 0$, *un objet d'Eilenberg-Mac Lane* $K(P, n)$ *dans* $\mathrm{Simpl}(\mathscr{A})$ *par* :

$$K(P, n) = K(P[n])$$

$P[n]$ *étant le complexe concentré en degré* n *de valeur* P.

Remarques (**2.4**). — *a)* $K(P, 0)$ n'est autre que l'ensemble simplicial constant $\underline{P}$ de valeur P.

b) $K(P, n)_i = 0$ pour $i < n$.

c) $K(P, n)_i = P^I$, I étant l'ensemble des applications surjectives $f : (i) \to (n)$ dans la catégorie usuelle Δ. En particulier $\mathrm{card}(I) = \binom{i}{n}$.

d) Soit T^i le foncteur translation de degré $+1$ sur $C.(A)$. Le théorème précédent permet de le transporter en un foncteur translation sur Simpl(A) et l'on écrira $X[i]$ pour $KT^iN(X)$. En particulier, $K(P, n+i) = K(P, n)[i]$.

e) Pour $n < 0$, on définit de même un objet cosimplicial $K(P, n)$ de A en renversant toutes les flèches dans $K(P, -n)$.

Topo-logie

Le cadre dans lequel nous étudierons la théorie homotopique et homologique des $K(P, n)$ est le suivant : soit T un topos ; on va définir, d'après Illusie, la catégorie dérivée des faisceaux simpliciaux de T. C'est une généralisation commune de la notion de catégorie dérivée, due à Verdier, et de la catégorie homotopique telle qu'elle est décrite dans [28].

Soit X un objet simplicial de T, pointé par une flèche $x : \mathbf{e} \to X$ ($\mathbf{e}$ désignant l'ensemble simplicial constant associé à l'objet final e de T). Par faisceautisation à partir de la définition usuelle des groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial, on associe à la paire (X, x) un objet $\pi_i(X, x)$ de T muni d'une structure de groupe (resp. de groupe abélien) pour $i > 0$ (resp. $i > 1$), qu'on appelle le i-ème faisceau d'homotopie de X. On dit qu'une flèche $f : X \to Y$ dans Simpl(T) est un quasi-isomorphisme (resp. un N-quasi-isomorphisme) si les applications induites $\pi_i(f) : \pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, f(x))$ sont des isomorphismes (resp. sont des isomorphismes pour $i < N$ et un épimorphisme pour $i = N$). Deux flèches $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont homotopes s'il existe une application $\mathbf{I} \times X \to Y$ dans Simpl(T) satisfaisant à la condition usuelle ($\mathbf{I}$ étant le faisceau constant simplicial de T associé à l'ensemble simplicial « intervalle unité » usuel).

Ceci posé, on définit comme d'habitude la catégorie Hot.(T) des objets simpliciaux de T, les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications simpliciales, et on a la

Définition (**2.5**). — *On appelle catégorie dérivée des faisceaux simpliciaux sur* T *la catégorie* D.(T) *localisée de* Simpl(T) *par rapport aux quasi-isomorphismes.*

En fait, lorsque T a assez de points, l'ensemble des quasi-isomorphismes admet un calcul de fractions à gauche dans la catégorie Hot.(T) et D.(T) est équivalente à la catégorie localisée de Hot.(T) par rapport aux quasi-isomorphismes.

Lorsque X est un groupe simplicial, la définition précédente, assez peu maniable, des faisceaux d'homotopie de X, équivaut à la suivante, qui est indépendante du choix du point de base :

(2.2) $$\pi_i(X) = H_i(NX)$$

(on remarquera que le terme de droite a un sens même si X n'est pas abélien). En particulier, on a par construction :

(2.3) $$\begin{aligned}\pi_i(K(P, n)) = H_i(NK(P, n)) = H_i(P[n]) &= P, \quad i = n\\ &= 0, \quad i \neq n\end{aligned}$$

ce qui justifie la terminologie employée.

Soient maintenant $X \in \mathrm{Simpl}(T)$, R un anneau de T. Par analogie avec le cas ensembliste, on définit les groupes d'homologie de X par :

$$H_i(X, R) = H_i(R[X]^{\sim}),$$

R[M] désignant le R-module de T engendré par un objet M de T, et $(\quad)^{\sim}$ le foncteur « complexe associé » défini ci-dessus. Compte tenu de (2.2) et du lemme (2.1), on a :

$$H_i(X, R) = H_i(NR[X]) = \pi_i(R[X]).$$

On définit de même, pour X pointé par $x : \mathbf{e} \to X$, les groupes d'homologie réduite de X (avec la notation de (1.18)), par :

(2.4) $$\widetilde{H}_i(X, R) = H_i(R^+[X]) \simeq \pi_i(R^+[X]).$$

Il résulte de ces définitions que pour tout anneau R, l'application canonique :

(2.5) $$\varepsilon : X \to R[X] \quad (\text{resp. } X \to R^+[X])$$

induit sur les groupes d'homotopie des homomorphismes, dits de Hurewicz :

(2.6) $$\mathscr{H}_i : \pi_i(X, x) \to H_i(X, R)$$

(2.7) $$(\text{resp. } \mathscr{H}_i : \pi_i(X, x) \to \widetilde{H}_i(X, R)).$$

Exemple **(2.6)**. — Soit S^n la sphère simpliciale pointée, obtenue à partir du n-simplexe type $\Delta(n)$ en contractant son bord $\dot{\Delta}(n)$ en un point. Désignons également par S^n le faisceau simplicial constant de T qui lui est associé. Il est facile de vérifier sur la définition de $K(R, n)$ que :

(2.8) $$R^+[S^n] \xrightarrow{\sim} K(R, n),$$

d'où un homomorphisme :

(2.9) $$\mathscr{H} : S^n \to K(R, n).$$

Signalons, pour en terminer avec les groupes d'homologie, que l'on a, dans le cadre des topos, un théorème de Whitehead :

Théorème **(2.7)** ([34], I, (2.2)). — *Soit* $F : X \to Y$ *un morphisme de faisceaux simpliciaux dans un topos* T *possédant assez de points. Si f est un quasi-isomorphisme* (resp. *un n-quasi-isomorphisme pour* $n \geq 2$), *alors* $R[f]$ *est un quasi-isomorphisme (*resp. *un n-quasi-isomorphisme).*

Foncteurs dérivés

Nous aurons à étudier par la suite les groupes d'homologie réduite à coefficients dans R des objets d'Eilenberg-Mac Lane de T. Il est intéressant de remarquer que ces groupes s'interprètent comme des foncteurs dérivés du foncteur $R^+[\ \ ]$. Commençons par rappeler brièvement la théorie des foncteurs dérivés des foncteurs non additifs ([21], [34]).

Soient donc A et B deux anneaux du topos T, F un foncteur du champ des A-modules dans le champ des B-modules. La prolongation naïve $F : C.(A) \to C.(B)$ de F aux complexes (nuls en degrés négatifs) ne préserve pas les homotopies à moins que F ne soit additif [1]. La bonne définition du prolongement est la suivante : pour tout $X \in C.(A)$, on pose

$$FX = NFKX\,;$$

F préserve maintenant les homotopies. On désigne par $LF : D.(A) \to D.(B)$ la prolongation de F à la catégorie dérivée $D.(A)$ des complexes de A-modules.

Proposition **(2.8)**. — *Lorsque* F *commute aux limites inductives locales, le foncteur dérivé gauche* LF *de* F *existe.*

On trouvera une démonstration de cet énoncé dans ([34] (1.4.2.2)). Le lecteur y trouvera un résultat plus général concernant la catégorie dérivée des complexes bornés supérieurement. Lorsque l'on se limite au cas des complexes nuls en degrés négatifs, on n'a pas besoin d'introduire dans la démonstration les objets simpliciaux mixtes de *loc. cit.* et celle-ci s'en trouve considérablement raccourcie. On se bornera ici à la remarque suivante : cette proposition équivaut à l'assertion que pour tout objet X de $D.(A)$, le pro-objet $\{F(X')\}$ de $D.(B)$ (où $X' \to X$ parcourt les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes de but X) est essentiellement constant de valeur $F(X')$ pour n'importe quel X' à composantes plates.

On définit les foncteurs dérivés $L_iF : D.(A) \to B$ pour tout $i \geq 0$ par :

$$L_iF = H_i \circ LF.$$

Lorsque F est contravariant, on définit de manière analogue des dérivés droits R^jF.

Exemples **(2.9)**. — *a)* Soit T le topos ponctuel. Pour tout A-module P, $L_iF(P[n])$ n'est autre que le foncteur dérivé gauche $L_iF(P, n)$ de Dold-Puppe. Pour T quelconque, on utilisera indifféremment l'une ou l'autre notation.

b) Soient (T, R) un topos annelé quelconque, P un groupe abélien de T. Pour tout $n \geq 0$, les dérivés gauches du foncteur $R^+[\ \ ]$ sont calculables : on vient de remarquer que :

$$H_i(LR^+(P[n])) = H_i(R^+X')$$

[1] A la différence de [3], [34] et pour préserver les conventions adoptées en topologie, nous considérons les complexes comme étant munis d'une différentielle de degré -1.

où $X' \to K(P, n)$ est un quasi-isomorphisme, et X' est à composantes plates. Or, il résulte du théorème (2.7) que $R^+X' \to R^+K(P, n)$ est un quasi-isomorphisme. Ainsi :

$$L_i R^+(P[n]) = \widetilde{H}_i(X', R) = \widetilde{H}_i(K(P, n), R)$$

et l'on a identifié les foncteurs dérivés de $R^+[\ \ ]$ aux groupes d'homologie réduite des objets d'Eilenberg-Mac Lane correspondants.

On sait que, dans le cas ponctuel, l'intérêt principal des espaces d'Eilenberg-Mac Lane est qu'ils représentent la cohomologie, dans la catégorie homotopique [13]. On verra qu'il en est de même dans le cas d'un topos quelconque T. Commençons par rappeler que si A est un anneau de T et P un A-module, on définit les groupes d'hypercohomologie (resp. d'hypercohomologie réduite) à valeurs dans P d'un objet simplicial X de T (resp. d'un objet simplicial X pointé par une section $x : \mathbf{e} \to X$ dans T), par :

$$\mathbf{H}^n(X, P) = \mathbf{Ext}^n_A(A[X]^\sim, P)$$
$$\widetilde{\mathbf{H}}^n(X, P) = \mathbf{Ext}^n_A(A^+[X]^\sim, P)$$

où $\sim$ a été défini ci-dessus, et le terme de droite est l'hyperext habituel dans la catégorie des A-modules. On trouvera une discussion complète de ces groupes dans [17]. Contentons-nous ici d'illustrer la définition par un exemple élémentaire.

Exemple **(2.10)**. — Soit X_* un objet simplicial de T. Supposons que pour tout i on ait :

(2.10) $$H^j(X_i, P) = 0 \quad j > 0.$$

Alors $\mathbf{H}^n(X, P)$ s'identifie au n-ième groupe de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_A(A[X_*]^\sim, P)$. En effet, sous cette hypothèse la suite spectrale d'hypercohomologie :

$$E_1^{i,j} = H^j(X_i, P) \Rightarrow \mathbf{H}^{i+j}(X, P)$$

dégénère.

Il revient au même de dire que sous ces hypothèses, on peut définir les groupes de cohomologie de l'objet simplicial X comme dans le cas classique du topos ponctuel. Toute classe de cohomologie z est notamment représentée par un cocycle :

$$z \in \mathrm{Hom}(A[X_*]^\sim, P).$$

Voici deux cas particuliers qui nous concernent dans lesquels ces hypothèses sont satisfaites.

a) $\mathbf{X}$ est l'objet simplicial constant de T associé à un ensemble simplicial X et $H^q(e, P) = 0$ pour tout $q > 0$. Ainsi, dans ce cas, on a par la formule d'adjonction :

(2.11) $$\mathbf{H}^q(\mathbf{X}, P) = H^q(X, P(e))$$

pour $q \geq 0$, le terme de droite désignant le groupe de cohomologie ordinaire de l'ensemble simplicial X.

b) Soit $\mathcal{O}$ un objet en caractéristique p d'un topos T. Avec la notation introduite en I, on a un isomorphisme :

(2.12) $$K(\mathsf{F}_p, n) \otimes G_a \xrightarrow{\sim} K(G_a, n).$$

Ainsi, lorsque $\mathcal{O}$ satisfait à A2, $K(G_a, n)$ possède la propriété (2.10).

Si l'objet $\mathcal{O}$ de T satisfait à A1 et A2, les remarques précédentes permettent de calculer les groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^*(K(G_a, n), G_a)$ (resp. d'hypercohomologie réduite $\widetilde{\mathbf{H}}^*(K(G_a, n), G_a)$).

On vient en effet de voir que ces groupes s'identifient aux groupes de cohomologie du complexe des cochaînes :

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda[K(G_a, n)]^\sim, G_a) \qquad (\text{resp. } \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^+[K(G_a, n)]^\sim, G_a)).$$

Par A1 (resp. A1 pt.), on a, compte tenu de (1.4), des isomorphismes canoniques :

(2.13) $$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda[K(G_a, n)]^\sim, G_a) \simeq \mathrm{Sym}(K(R, -n))^\sim \\ &\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^+[K(G_a, n)]^\sim, G_a) \simeq \mathrm{Sym}^+(K(R, -n))^\sim. \end{aligned}$$

De même, par le lemme (1.11) et l'exemple (2.10), on sait décrire de plusieurs façons le complexe des cochaînes usuelles de $K(\mathsf{F}_p, n)$:

(2.14) $$\mathrm{Hom}(\mathsf{F}_p[K(\mathsf{F}_p, n)]^\sim, \mathsf{F}_p) \simeq \mathrm{Hom}(\Lambda[K(\Lambda, n)]^\sim, \mathcal{O}) \simeq \nu(K(R, -n))^\sim$$

et on a des isomorphismes analogues pour les chaînes réduites, ν étant remplacé par ν^+. L'inclusion $i : K(\Lambda, n) \to K(\mathcal{O}, n)$ induite par le morphisme canonique $\Lambda \to \mathcal{O}$ correspond, *via* (2.13) et (2.14), à la flèche :

$$\mathrm{Sym}(K(R, -n))^\sim \to \nu(K(R, -n))^\sim$$

induite par l'aplication canonique $\mathrm{Sym}(\ ) \to \nu(\ )$.

Par passage à la cohomologie, on a obtenu le lemme suivant :

Lemme **(2.11)**. — *Soit $\mathcal{O}$ un objet de* T *satisfaisant à* A1 *et* A2. *On a alors des isomorphismes d'algèbres graduées.*

(2.15) $$\mathbf{H}^*(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O}) \simeq R^*\mathrm{Sym}(R, -n)$$

(2.16) $$\mathbf{H}^*(K(\mathsf{F}_p, n), R) \simeq \mathbf{H}^*(K(\Lambda, n), \mathcal{O}) \simeq R^*\nu(R, -n)$$

l'isomorphisme (2.15) *faisant seul intervenir les hypothèses* A1 *et* A2. *L'application induite en cohomologie par le morphisme canonique* $i : K(\Lambda, n) \to K(\mathcal{O}, n)$ *correspond au morphisme* :

$$R^*\mathrm{Sym}(R, -n) \to R^*\nu(R, -n)$$

induit par la projection canonique de $\mathrm{Sym}(\ )$ *sur* $\nu(\ )$. *Les énoncés demeurent valables,* mutatis mutandis, *en cohomologie réduite.*

On déduit du corollaire (1.12), du lemme (2.11) et de la formule de Künneth, la généralisation suivante de ce lemme (ici $\wedge$ désigne le smash-produit) :

Corollaire **(2.12)**. — *Soient* $m_1, \ldots, m_r, n$ *une suite d'entiers. On a alors sous les hypothèses précédentes les isomorphismes suivants d'algèbres graduées :*

$$\mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\Lambda, m_1)\times\ldots\times\mathrm{K}(\Lambda, m_r)\times\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$$
$$\simeq \mathrm{R}^*\nu(\mathrm{R}, -m_1)\otimes\ldots\otimes\mathrm{R}^*\nu(\mathrm{R}, -m_r)\otimes\mathrm{R}^*\mathrm{Sym}(\mathrm{R}, -n)$$
$$\widetilde{\mathbf{H}}^*(\mathrm{K}(\Lambda, m_1)\wedge\ldots\wedge\mathrm{K}(\Lambda, m_r)\wedge\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$$
$$\simeq \mathrm{R}^*\nu^+(\mathrm{R}, -m_1)\otimes\ldots\otimes\mathrm{R}^*\nu^+(\mathrm{R}, -m_r)\otimes\mathrm{R}^*\mathrm{Sym}^+(\mathrm{R}, -n).$$

Revenons-en maintenant à la situation générale, afin d'énoncer le théorème de représentabilité de l'hypercohomologie. Celui-ci est tout à fait similaire au théorème de représentabilité usuel de la cohomologie par les espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

Proposition **(2.13)** ([34], chapitre I, (3.2.1.16)). — *Soit* T *un topos possédant assez de points. Alors, pour tout objet simplicial* X *de* T (resp. *pour tout objet simplicial pointé* (X, x)) *et pour tout groupe abélien* F, *on a des isomorphismes fonctoriels en* X *et en* F :

(2.17) $$\mathbf{H}^n(\mathrm{X}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D(T)}}(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{F}, n))$$

(2.18) $$\widetilde{\mathbf{H}}^n(\mathrm{X}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D(T^{pt})}}(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{F}, n))$$

T^{pt} *désignant le topos des objets pointés de* T.

En particulier il existe une classe fondamentale $i_q \in \mathbf{H}^q(\mathrm{K}(\mathrm{F}, q), \mathrm{F})$ correspondant par cet isomorphisme à l'application identique de K(F, q). Si l'on appelle opération (hyper-)cohomologique de type (F, n, G, $n+m$) une transformation naturelle de foncteurs:

$$\Phi : \mathbf{H}^n(\ , \mathrm{F}) \to \mathbf{H}^{n+m}(\ , \mathrm{G}),$$

on déduit comme corollaire de la proposition, en utilisant le lemme de Yoneda, que de telles opérations correspondent bijectivement aux éléments du groupe $\mathbf{H}^{n+m}(\mathrm{K}(\mathrm{F}, n), \mathrm{G})$.

Précisément :

Corollaire **(2.14)**. — *L'application* $\Phi \mapsto \Phi(i_n)$ *est une bijection de l'ensemble des opérations cohomologiques de type* (F, n, G, $n+m$) *sur* $\mathbf{H}^{n+m}(\mathrm{F}, n), \mathrm{G})$.

On renvoie à [13] pour la définition des opérations cohomologiques stables, la généralisation au cas des topos étant immédiate.

Produits

On sait que lorsque R est un anneau (commutatif) de T, les groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^*(\mathrm{X}, \mathrm{R})$ (resp. $\widetilde{\mathbf{H}}^*(\mathrm{X}, \mathrm{R})$) possèdent une structure d'algèbre définie par le cup-produit. L'outil technique qui permet de définir celui-ci est le théorème d'Eilenberg-Zilber, et plus précisément la donnée des applications d'Eilenberg-Zilber et d'Alexander-Whitney qui, dans le cas classique, relient les cochaînes sur un produit d'espaces topologiques au produit tensoriel des complexes de cochaînes sur les espaces en question. D'autre part, compte tenu de la représentabilité de l'hypercohomologie (2.17), un tel produit est déterminé par l'accouplement (dit « du cup-produit ») des objets d'Eilenberg-Mac Lane correspondants. De manière précise, soit T un topos annelé par R. On va associer à tout homomorphisme $d : A \otimes B \rightarrow C$ de R-modules une famille d'applications dans Simpl(T) :

$$d_{m,n} : K(A, m) \times K(B, n) \rightarrow K(C, m+n) \qquad (m, n \geq 0)$$

telles que, pour tout X (resp. Y) de Simpl(T), l'application évidente :

$$\mathrm{Hom}_{D.(T)}(X, K(A, m)) \times \mathrm{Hom}_{D.(T)}(Y, K(B, n)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{D.(T)}(X \times Y, K(C, m+n))$$

induite par $d_{m,n}$ corresponde, compte tenu de (2.17), au cup-produit externe des classes d'hypercohomologie.

Mieux, $d_{m,n}$ se factorise en une application pointée :

(2.19) $$d_{m,n} : K(A, m) \wedge K(B, n) \rightarrow K(C, m+n)$$

permettant de définir, *via* (2.18), le produit externe des classes d'hypercohomologie réduites :

$$\widetilde{\mathbf{H}}^*(X, A) \otimes \widetilde{\mathbf{H}}^*(Y, B) \rightarrow \widetilde{\mathbf{H}}^*(X \wedge Y, C).$$

Vu les remarques précédentes, il n'est guère étonnant que le théorème d'Eilenberg-Zilber intervienne dans la définition des applications $d_{m,n}$. Commençons par observer que la définition des foncteurs N, donnée en (2.1), peut être généralisée. On définit de manière évidente des foncteurs N (normalisé) et $\sim$ (n-complexe associé) de la catégorie n-simpl($\mathscr{C}$) des objets n-simpliciaux d'une catégorie abélienne $\mathscr{C}$ dans la catégorie n-C.($\mathscr{C}$) des n-complexes de $\mathscr{C}$ (concentrés en degrés positifs) et l'on démontre la généralisation suivante du lemme (2.1) :

Lemme **(2.15)**. — *Le foncteur* $N : n\text{-simpl}(\mathscr{C}) \rightarrow n\text{-C.}(\mathscr{C})$ *possède un quasi-inverse* K.

Des foncteurs « ensemble simplicial diagonal » $\Delta : n\text{-simpl}(\mathscr{C}) \rightarrow \text{simpl}(\mathscr{C})$ et « complexe total associé » $\int : n\text{-C}_{\bullet}(\mathscr{C}) \rightarrow C_{\bullet}(\mathscr{C})$ relient ces objets à ceux qu'on a étudiés précédemment, via la généralisation suivante du théorème d'Eilenberg-Zilber, due à Cartier (voir [34], I, (1.3.2)) :

Théorème **(2.16)**. — *Soit* X *un objet n-simplicial d'une catégorie abélienne* $\mathscr{C}$. *Alors on a des homomorphismes uniques à homotopie près de complexes inverses l'un de l'autre à homotopie fonctorielle près :*

(2.20) $$\varphi : \int \widetilde{X} \rightarrow (\Delta X)^{\sim}$$

(2.21) $$\psi : (\Delta X)^{\sim} \rightarrow \int \widetilde{X}.$$

Remarque **(2.16)**. — *a)* Dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer le foncteur $(\ )^{\sim}$ par N. On obtient alors un énoncé qui est également correct, et qui est compatible avec le précédent, *via* l'inclusion i mentionnée dans le lemme (2.1).

b) On a des énoncés en apparence plus généraux en considérant des diagonales partielles n-simpl$(\mathscr{C}) \to m$-simpl$(\mathscr{C})$ $(m<n)$ et les complexes totaux partiels correspondants. Lorsqu'on itère ce procédé, et que l'on considère les diagonales partielles m-simpl$(\mathscr{C}) \to p$-simpl$(\mathscr{C})$ $(n>m>p)$, les applications φ (resp. ψ) correspondantes sont « associatives » (resp. « coassociatives ») à homotopie près en un sens qui est explicité dans ([34], chapitre I, (1.2.2.3)) pour n (resp. m, resp. p) $=3$ (resp. 2, resp. 1). On a également un énoncé de « commutativité » (resp. de « cocommutativité ») à homotopie près, correspondant à la permutation des indices de l'objet X de n-simpl$(\mathscr{C})$.

c) Il existe un choix classique de flèches φ, ψ dans leur classe d'homotopie qu'on appelle l'homomorphisme des « shuffles » et l'homomorphisme d'Alexander-Whitney. Avec ces choix de flèches les diagrammes d'associativité et de coassociativité dont il vient d'être question sont strictement commutatifs, ainsi que le diagramme de commutativité. Quand au diagramme de cocommutativité faisant intervenir la flèche d'Alexander-Whitney, on sait qu'il ne fait que commuter à homotopie près (à vrai dire de manière très forte) et c'est d'ailleurs ce fait qui est à la base de l'existence d'opérations de Steenrod en cohomologie. Il n'est pas possible de le rendre strictement commutatif de manière fonctorielle en choisissant une autre flèche qui soit homotope à celle-ci. Cette remarque a une grande importance pour la suite (voir la remarque (7.8) à ce propos).

Citons l'application suivante du théorème (2.16) :

Lemme **(2.17)**. — *Soit* A *un anneau simplicial associatif* (resp. M *un* A-*module simplicial*). *Alors le complexe associé* $\widetilde{\mathrm{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{M}}$) *possède une structure naturelle d'algèbre différentielle graduée associative* (resp. *de* $\widetilde{\mathrm{A}}$-*module différentiel gradué*) *induite par la structure d'anneau simplicial* :

$$\mu : \mathrm{A}\otimes\mathrm{A} \to \mathrm{A} \ \textit{de}\ \mathrm{A}$$

(resp. *la structure de module* $\nu : \mathrm{A}\otimes\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *de* M).

Démonstration. — La structure d'algèbre sur $\widetilde{\mathrm{A}}$ est définie par la flèche composée suivante ($\underline{\otimes}$ désignant le produit tensoriel externe d'objets multisimpliciaux) :

$$\widetilde{\mathrm{A}}\otimes\widetilde{\mathrm{A}} = \int(\mathrm{A}\underline{\otimes}\mathrm{A})^{\sim} \xrightarrow{\varphi} \Delta(\mathrm{A}\underline{\otimes}\mathrm{A})^{\sim} = (\mathrm{A}\otimes\mathrm{A})^{\sim} \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathrm{A}^{\sim}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter la flèche $d_{m,n}$. C'est la composée :

$$\textbf{(2.22)}\qquad \mathrm{K}(\mathrm{A}, m)\times\mathrm{K}(\mathrm{B}, n) \xrightarrow{\pi} \mathrm{K}(\mathrm{A}, m)\otimes\mathrm{K}(\mathrm{B}, n) \xrightarrow{\partial_{m,n}} \mathrm{K}(\mathrm{C}, n+m)$$

où la première flèche est l'application canonique $\pi(x, y) = x\otimes y$ et où $\partial_{m,n}$ est déterminée par sa normalisée $\mathrm{N}(\partial_{m,n})$, compte tenu du théorème de Dold-Puppe. Quant à $\mathrm{N}(\partial_{m,n})$, c'est la flèche composée :

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\mathrm{K}(\mathrm{A}, m)\otimes\mathrm{K}(\mathrm{B}, n)) \xrightarrow{\psi} & \ \mathrm{NK}(\mathrm{A}, m)\otimes\mathrm{NK}(\mathrm{B}, n)\\ & = \mathrm{A}[m]\otimes\mathrm{B}[n] \xrightarrow{d[m,n]} \mathrm{C}[m+n]\end{aligned}$$

où ψ est la flèche d'Alexander-Whitney et $d[m, n]$ la flèche induite par d. On déduit de la remarque (2.16) des assertions d'associativité et de commutativité. On a notamment la proposition suivante :

Proposition **(2.18)**. — *Soit* R *un anneau commutatif* (resp. M *un* R-*module*). *Les deux premiers diagrammes suivants sont commutatifs, et le troisième l'est à homotopie près, pour tous* $m, n, p \geq 0$ *(d désignant une quelconque des applications* $d_{r,s}$ *et* τ *le morphisme de permutation des facteurs)* :

(2.23)
$$\begin{array}{ccc} K(R, m) \wedge K(R, n) \wedge K(R, p) & \xrightarrow{1 \wedge d} & K(R, m) \wedge K(R, n+p) \\ \downarrow{\scriptstyle d \wedge 1} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ K(R, m+n) \wedge K(R, p) & \xrightarrow{d} & K(R, m+n+p) \end{array}$$

(2.24)
$$\begin{array}{ccc} K(R, m) \wedge K(R, n) \wedge K(M, p) & \xrightarrow{1 \wedge d} & K(R, m) \wedge K(M, n+p) \\ \downarrow{\scriptstyle d \wedge 1} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ K(R, m+n) \wedge K(M, p) & \xrightarrow{d} & K(M, m+n+p) \end{array}$$

(2.25)
$$\begin{tikzcd} K(R, m) \wedge K(R, n) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "d"'] & & K(R, n) \wedge K(R, m) \arrow[dl, "d"] \\ & K(R, n+m) & \end{tikzcd}$$

Accouplements de foncteurs dérivés : *suspension*

L'accouplement du cup-produit permet de définir, par composition avec l'application de Hurewicz (2.9), un morphisme de suspension reliant les divers objets d'Eilenberg-Mac Lane associés à un R-module M du topos T :

(2.26) $\sigma : S^1 \wedge K(M, n) \xrightarrow{\mathscr{H} \wedge 1} K(R, 1) \wedge K(M, n) \xrightarrow{d_{1,n}} K(M, n+1)$.

Plus généralement, on définit des applications de suspension itérée :

(2.27) $\sigma^i : S^i \wedge K(M, n) \to K(M, n+i)$

de la même manière. On en déduit un morphisme de suspension en homologie réduite :

(2.28) $S : \widetilde{H}_i(K(M, n)) \to \widetilde{H}_{i+1}(K(M, n+1))$

par adjonction à partir de l'application induite par σ en homologie :

(2.29) $\widetilde{H}_1(S^1) \otimes \widetilde{H}_i(K(M, n)) \to \widetilde{H}_{i+1}(S^1 \wedge K(M, n)) \to \widetilde{H}_{i+1}(K(M, n+1))$.

La construction que l'on vient d'effectuer pour les groupes d'homologie à valeurs dans un anneau R (qui sont, comme on l'a vu en (2.9) *b)*, les foncteurs dérivés de $R^+[\ \ ]$) est également possible pour d'autres foncteurs dérivés.

Soient F, G, H trois foncteurs de la catégorie des S-modules dans celle des R-modules. On suppose que :

(2.30) $F(0) = G(0) = H(0) = 0$

et que pour toute paire de S-modules M et N, on ait une application λ, fonctorielle en M et N :

(2.31) $\lambda : F(M) \otimes G(N) \to H(M \otimes N)$.

En utilisant les morphismes $d_{m,n} : \mathrm{K}(\mathrm{A}, m)\otimes\mathrm{K}(\mathrm{B}, n) \to \mathrm{K}(\mathrm{C}, m+n)$ associés à un homomorphisme de S-modules $d : \mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ donné (2.22), on obtient un accouplement de complexes :

$$\mathrm{FK}(\mathrm{A}, m)^{\sim}\otimes\mathrm{GK}(\mathrm{B}, n)^{\sim} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{H}(\mathrm{K}(\mathrm{A}, m)\otimes\mathrm{K}(\mathrm{B}, n))^{\sim} \longrightarrow \mathrm{HK}(\mathrm{C}, m+n)^{\sim}$$

où la première flèche est la composée de la flèche d'Alexander-Whitney (2.21) et de la flèche induite par λ, et la seconde est $\mathrm{H}(d_{m,n})^{\sim}$. Mieux, dans la catégorie dérivée, on en déduit, lorsque F, G et H commutent aux limites inductives locales, un accouplement :

$$\mathrm{LF}(\mathrm{A}[m])\overset{l}{\otimes}\mathrm{LG}(\mathrm{B}[n]) \to \mathrm{LH}(\mathrm{C}[m+n])$$

d'où, par passage à l'homologie, un accouplement des foncteurs dérivés gauches correspondants :

$$\mathrm{L}_i\mathrm{F}(\mathrm{A}[m])\otimes\mathrm{L}_j\mathrm{G}(\mathrm{B}[n]) \to \mathrm{L}_{i+j}\mathrm{H}(\mathrm{C}[m+n]). \tag{2.32}$$

Remarque **(2.19)**. — Supposons que l'on se donne six foncteurs $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_6$ satisfaisant aux conditions précédentes, et de plus un énoncé d'associativité :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_1(\mathrm{M})\otimes\mathrm{F}_2(\mathrm{N})\otimes\mathrm{F}_3(\mathrm{P}) \arrow[r, "\lambda_{12}\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\lambda_{23}"] & \mathrm{F}_4(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N})\otimes\mathrm{F}_3(\mathrm{P}) \arrow[d, "\lambda_{43}"] \\
\mathrm{F}_1(\mathrm{M})\otimes\mathrm{F}_5(\mathrm{N}\otimes\mathrm{P}) \arrow[r, "\lambda_{15}"] & \mathrm{F}_6(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\otimes\mathrm{P})
\end{tikzcd}$$

entre les applications λ_{ij} (2.31) correspondantes. On en déduit, compte tenu de la proposition (2.18), que les applications dérivées (2.32) induites satisfont à la condition d'associativité correspondante.

Exemples **(2.20)**. — *a)* Soit un foncteur $\mathrm{F} : (\mathbf{F}_p\text{-mod})\to(\mathrm{R}\text{-mod})$ satisfaisant $\mathrm{F}(0)=0$. On a alors une application fonctorielle en X et Y :

$$\mathrm{R}^+[\mathrm{X}]\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{F}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{F}(\mathrm{X}\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Y}) \tag{2.33}$$

définie par adjonction. D'où une application :

$$\mathrm{LR}^+(\mathrm{A}[m])\overset{l}{\otimes}\mathrm{LF}(\mathrm{B}[n]) \to \mathrm{LF}(\mathrm{C}[m+n]) \tag{2.34}$$

associée à un homomorphisme $d : \mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ et induisant en homologie :

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{K}(\mathrm{A}, m), \mathrm{R})\otimes\mathrm{L}_j\mathrm{F}(\mathrm{B}[n]) \to \mathrm{L}_{i+j}\mathrm{F}(\mathrm{C}[m+n]). \tag{2.35}$$

En particulier, pour $\mathrm{F}=\mathrm{R}^+[\ \ ]$, (2.33) n'est autre que l'application canonique $\mathrm{R}^+[\mathrm{X}]\otimes\mathrm{R}^+[\mathrm{Y}] \to \mathrm{R}^+[\mathrm{X}\wedge\mathrm{Y}] \to \mathrm{R}^+[\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y}]$ et l'on retrouve ainsi l'application :

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{K}(\mathrm{A}, m), \mathrm{R})\otimes\widetilde{\mathrm{H}}_j(\mathrm{K}(\mathrm{B}, n), \mathrm{R}) \to \widetilde{\mathrm{H}}_{i+j}(\mathrm{K}(\mathrm{C}, m+n), \mathrm{R})$$

induite en homologie réduite par $d_{m,n}$.

b) Soit un foncteur $F : (\text{S-mod}) \to (\text{R-mod})$ satisfaisant à (2.30). Si l'on compose (2.35), dans le cas $m=1$, $A=S$, avec l'homomorphisme induit par l'application de Hurewicz $\mathscr{H} : S^1 \to K(S, 1)$ définie en (2.9), on obtient un morphisme :

$$R^+(S^1) \otimes LF(B[n]) \to LR^+(S[1]) \overset{l}{\otimes} LF(B[n]) \to LF(B[n+1]) \tag{2.36}$$

d'où, par passage à l'homologie et par adjonction, un homomorphisme de suspension :

$$L_j F(B[n]) \to L_{j+1}(F(B[n+1])) \tag{2.37}$$

qui s'identifie à celui défini dans [21] dans le cas général, et notamment en (2.28) pour $F = R^+[\ \ ]$. Les homomorphismes supérieurs $L_j F(B[n]) \to L_{i+j} F(B[n+m])$, définis de même par adjonction à partir des éléments des groupes d'homologie d'Eilenberg-Mac Lane $\widetilde{H}_{i+j}(K(A, m)\,;R)$ au moyen de la flèche (2.35) (dans le cas où B est un A-module), ont été étudiés en détail par A. K. Bousfield dans son manuscrit clandestin [7] (voir également ([52], 7)).

c) On a défini en (1.12) une flèche :

$$(u^*)^t : \hat{\Gamma}(M) \hat{\otimes} \hat{\Gamma}(N) \to \hat{\Gamma}(M \otimes N)$$

associée à l'homomorphisme identique $u : M \otimes N \to M \otimes N$. L'application :

$$\hat{\Gamma}^+(M) \hat{\otimes} \hat{\Gamma}^+(N) \to \hat{\Gamma}^+(M \otimes N)$$

induite par passage au quotient définit, par le procédé décrit ci-dessus, un morphisme (1) :

$$L\hat{\Gamma}^+(A[m]) \overset{l}{\hat{\otimes}} L\hat{\Gamma}^+(B[n]) \to L\hat{\Gamma}^+(C[m+n])$$

associé à un morphisme de F_p-modules $d : A \otimes B \to C$.

Les exemples *a)* et *c)* sont reliés par l'observation suivante :

L'application composée :

$$R^+[M] \otimes \hat{\Gamma}^+(N) \xrightarrow{\exp \otimes 1} \hat{\Gamma}^+(M) \otimes \hat{\Gamma}^+(N) \xrightarrow{(u^+)^t} \hat{\Gamma}^+(M \otimes N)$$

coïncide avec l'application définie en (2.33) lorsque F est le foncteur Γ^+. On le vérifie facilement à l'aide de la description explicite de $(u^*)^t$ donnée en (1.17). Ainsi, au diagramme (1.16) correspond le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R^+K(A, m) \overset{l}{\otimes} R^+K(B, n) \arrow[r, "n_1"] \arrow[d] & R^+K(C, m+n) \arrow[d] \\
R^+K(A, m) \overset{l}{\otimes} L\hat{\Gamma}^+(B, n) \arrow[r, "n_2"] \arrow[d] & L\hat{\Gamma}^+(C, m+n) \\
L\hat{\Gamma}^+(A, m) \overset{l}{\hat{\otimes}} L\hat{\Gamma}^+(B, n) \arrow[ur, "n_3"] &
\end{tikzcd} \tag{2.38}$$

(1) Comme ce morphisme n'est introduit qu'à titre d'illustration, on n'élaborera pas ici un formalisme de la catégorie dérivée des foncteurs non additifs à valeurs dans une catégorie de modules topologiques, pourtant nécessaire pour lui donner un sens.

où les flèches verticales sont induites par l'application exponentielle et où n_1 est l'application induite sur les chaînes à coefficients dans R par l'application $d_{m,n}$, n_2 l'application (2.34) pour le foncteur $F=\Gamma(-\otimes R)$ et n_3 l'application mentionnée ci-dessus.

Ce diagramme intervient de la façon suivante dans ce qui suit : soit $\mathcal{O}$ un objet de T satisfaisant aux axiomes A1 et A2, muni de sa structure naturelle de Λ-algèbre. On a alors un diagramme commutatif, pour $m, n \geq 0$, où les flèches horizontales sont du type (2.19) :

$$\begin{tikzcd}
K(\Lambda, m) \wedge K(\Lambda, n) \arrow[r, "n_1^*"] \arrow[d] & K(\Lambda, m+n) \arrow[d] \\
K(\Lambda, m) \wedge K(\mathcal{O}, n) \arrow[r, "n_2^*"] \arrow[d] & K(\mathcal{O}, m+n) \\
K(\mathcal{O}, m) \wedge K(\mathcal{O}, n) \arrow[ur, "n_3^*"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.39}$$

d'où, en passant aux cochaînes réduites à coefficients dans $\mathcal{O}$ et en utilisant (2.13) et (2.14), un diagramme d'algèbres cosimpliciales :

$$\begin{tikzcd}
\nu^+(K(R, -m)) \otimes \nu^+(K(R, -n)) & \nu^+(K(R, -m-n)) \arrow[l, "n^1"'] \\
\nu^+(K(R, -m)) \otimes \mathrm{Sym}^+(K(R, -n)) \arrow[u] & \mathrm{Sym}^+(K(R, -m-n)) \arrow[l, "n^2"'] \arrow[u] \arrow[dl, "n^3"] \\
\mathrm{Sym}^+(K(R, -m)) \otimes \mathrm{Sym}^+ K(R, -n) \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{2.40}$$

les flèches n^i étant induites par les flèches n_i^* du diagramme (2.39). Or le diagramme (2.40) n'est autre que celui obtenu à partir de (2.38) par passage au dual.

Foncteurs dérivés stables

Par le lemme de suspension de Freudenthal, on sait que pour tout ensemble simplicial X, $(n-1)$-connexe, l'application évidente $\pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX)$ est un isomorphisme pour $i<2n-1$ et un épimorphisme pour $i=2n-1$ (on utilise dorénavant la notation traditionnelle SX pour désigner $S^1 \wedge X$). Il en résulte directement que σ (2.26) est un $(2n-1)$-quasi-isomorphisme, d'où en particulier, par le théorème de Hurewicz, que la suspension S (2.28) est un isomorphisme (resp. un épimorphisme) pour $i<2n$ (resp. $i=2n$). En particulier, pour $i \geq 0$ fixé, le système inductif $\widetilde{H}_{n+i}(K(M, n))$, indexé par n, avec pour morphisme de transition les homomorphismes de suspension, est essentiellement constant, la valeur de la limite étant atteinte dès que $n>i$. On définit [25] les groupes d'homologie stables de M à coefficients dans un groupe abélien A, par :

$$H_i^{st}(M, A) = \varinjlim_n \widetilde{H}_{n+i}(K(M, n), A).$$

On vérifie que les accouplements de cup-produit sont compatibles, à homotopie près, avec les morphismes de suspension (pour un énoncé précis, voir [68]) ; dans la terminologie usuelle, on dit que les objets d'Eilenberg-Mac Lane associés à un anneau commutatif A forment un spectre en anneaux. En particulier, les morphismes induits par $d_{m,n}$ en homologie à coefficients dans un anneau R :

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{m+i}(\mathrm{K}(\mathrm{A}, m) ; \mathrm{R}) \otimes \widetilde{\mathrm{H}}_{n+j}(\mathrm{K}(\mathrm{B}, n) ; \mathrm{R}) \rightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{n+m+i+j}(\mathrm{K}(\mathrm{C}, m+n) ; \mathrm{R})$$

sont compatibles à la suspension, d'où, en passant à la limite, un homomorphisme :

$$(2.41) \qquad d^{st} : \widetilde{\mathrm{H}}_i^{st}(\mathrm{A} ; \mathrm{R}) \otimes \widetilde{\mathrm{H}}_j^{st}(\mathrm{B} ; \mathrm{R}) \rightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{i+j}^{st}(\mathrm{C} ; \mathrm{R}).$$

Ainsi on a, compte tenu des énoncés d'associativité et de commutativité de la proposition (2.18), la proposition suivante :

Proposition **(2.21)**. — *Soit* A *un anneau commutatif* (resp. M *un* A-*module*) *d'un topos* T. *Pour tout anneau commutatif* R, *les accouplements du cup-produit induisent sur* $\widetilde{\mathrm{H}}^{st}(\mathrm{A} ; \mathrm{R})$ (resp. $\widetilde{\mathrm{H}}_*^{st}(\mathrm{M} ; \mathrm{R})$) *une structure d'algèbre graduée associative et commutative* (resp. *une structure de module gradué sur cette algèbre graduée*).

Plus généralement, on définit des foncteurs dérivés d'un foncteur F : A-mod $\rightarrow$ B-mod satisfaisant $\mathrm{F}(0)=0$ par :

$$\mathrm{L}_i^{st}\mathrm{F}(\mathrm{M}) = \varinjlim_n \mathrm{L}_{i+n}\mathrm{F}(\mathrm{K}(\mathrm{M}, n))$$

la limite étant prise suivant les applications de suspension définies en (2.37). Les accouplements (2.38) sont de nouveau compatibles avec la suspension à homotopie près, d'où un énoncé généralisant la proposition (2.21). Bornons-nous à l'expliciter dans le seul cas qui nous concerne, celui de l'accouplement n_2.

Proposition **(2.22)**. — *Soient* A *un anneau commutatif de* T, M *un* A-*module. La flèche* n_2 *du diagramme* (2.38) *induit par stabilisation sur* $\mathrm{L}_*^{st}\hat{\Gamma}(\mathrm{M})$ *une structure de module topologique différentiel gradué sur* $\mathrm{H}_*^{st}(\mathrm{A} ; \mathrm{R})$. *Par restriction à la composante* Γ^i *de* $\hat{\Gamma}$, n_2 *induit sur* $\mathrm{L}_*^{st}\Gamma^i(\mathrm{M})$ *une structure de module différentiel gradué sur* $\mathrm{H}_*^{st}(\mathrm{A} ; \mathrm{R})$ *pour tout* $i \geq 0$.

Stabilisation dans la catégorie dérivée

Remarquons que, pour n fixé, on a, au niveau des foncteurs dérivés $\mathrm{L}_*\mathrm{F}(\mathrm{A}[m])$ d'un foncteur F donné, un objet plus fin que ces derniers, à savoir l'objet $\mathrm{LF}(\mathrm{A}[m])$ de la catégorie dérivée (dont les $\mathrm{L}_*\mathrm{F}(\mathrm{A}[m])$ sont les groupes d'homologie). Il importe de savoir qu'on sait de même définir, pour tout foncteur F : (S-mod) $\rightarrow$ (R-mod) un foncteur stable F^{st} à partir duquel on peut retrouver les constructions précédentes. En particulier, on souhaite que $\mathrm{H}_i(\mathrm{F}^{st}(\mathrm{M}))$ coïncide avec le foncteur dérivé stable $\mathrm{L}_i^{st}\mathrm{F}(\mathrm{M})$ défini ci-dessus, et que $\mathrm{LF}^{st}(\mathrm{M})$ soit la limite inductive (dans un sens qu'il convient de préciser) des $\mathrm{LF}(\mathrm{M}[n])$ suivant des applications de suspension. Enfin, à un homomorphisme $d : \mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$ (resp. à des foncteurs F, G, H munis d'un accouplement λ (2.31)), on souhaite pouvoir associer un accouplement $\lambda^{st} : \mathrm{F}^{st}(\mathrm{A}) \otimes \mathrm{G}^{st}(\mathrm{B}) \rightarrow \mathrm{H}^{st}(\mathrm{C})$ induisant par passage à l'homologie des accouplements sur les foncteurs dérivés stables du type de celui explicité dans la proposition (2.22).

L'idée évidente consiste à définir par adjonction à partir de (2.36) une application de suspension de degré $+1$:

$$\textbf{(2.42)} \qquad \mathrm{LF}(\mathrm{M}[n]) \to \mathrm{LF}(\mathrm{M}[n+1])$$

et de définir $\mathrm{F}^{st}(\mathrm{M}) = \varinjlim_n \mathrm{LF}(\mathrm{M}[n])$. Malheureusement, dans ce cas les accouplements induits :

$$\mathrm{F}^{st}(\mathrm{A}) \otimes \mathrm{G}^{st}(\mathrm{B}) \to \mathrm{H}^{st}(\mathrm{C})$$

ne sont plus strictement associatifs, comme l'étaient ceux des propositions (2.21) et (2.22). En effet, ils ne commutent avec la suspension qu'à homotopie près (ceci étant une conséquence de la non commutativité stricte du diagramme (2.25)), si bien qu'en passant à la limite, on n'obtient que des accouplements associatifs à homotopie près. Pour remédier à cet état de choses, Illusie construit un nouveau complexe $\mathrm{F}^{st}(\mathrm{M})$, et même mieux, un R-module simplicial possédant les propriétés suivantes :

P1) *Pour tout* S-*module* M (*et plus généralement pour tout* $\mathrm{M} \in \mathrm{Simpl(S)}$), *il existe un quasi-isomorphisme de* R-*modules simpliciaux* :

$$\textbf{(2.43)} \qquad \rho(\mathrm{F}, \mathrm{M}) : \mathrm{F}^{st}(\mathrm{M}) \to \varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{F}(\mathrm{M}[n])[-n]$$

naturel en F *et* M. *Ici le système inductif* :

$$\ldots \to \mathrm{F}(\mathrm{M}[n])[-n] \to \mathrm{F}(\mathrm{M}[n+1])[-n-1] \to \ldots$$

indexé par la catégorie I *(dont les objets sont les ensembles finis* $\{n\}$ *et les morphismes sont les applications croissantes injectives) est obtenu à partir du système inductif naïf par un procédé que l'on décrit en appendice. En particulier, en passant à l'homologie,* $\rho(\mathrm{F}, \mathrm{M})$ *induit un isomorphisme* :

$$\textbf{(2.44)} \qquad \mathrm{H}_i(\mathrm{F}^{st}(\mathrm{M})) \simeq \mathrm{H}_{n+i}(\mathrm{F}(\mathrm{M}, n)), \qquad i<n.$$

P2) *Les applications* λ (2.31) *induisent par passage à la limite des applications* :

$$\mathrm{F}^{st}(\mathrm{A}) \otimes \mathrm{G}^{st}(\mathrm{B}) \to \mathrm{H}^{st}(\mathrm{G}).$$

Ces applications sont associatives lorsque les applications λ *le sont* (*au sens de la remarque* (2.19)).

La construction de ces foncteurs stabilisés est assez délicate, aussi renvoyons-nous à l'appendice pour des indications sur celle-ci. Dans ce qui suit, seule l'existence de tels objets importe, et non leur forme particulière. Bornons-nous ici à en donner des exemples qui correspondent à ceux déjà étudiés.

Exemple **(2.23)**. — Soit F : (S-mod) $\to$ (R-mod) un foncteur satisfaisant $\mathrm{F}(0)=0$. On a une application de R-modules simpliciaux induite :

$$\mathrm{R}^{+\,st}(\mathrm{A}) \otimes \mathrm{F}^{st}(\mathrm{B}) \to \mathrm{F}^{st}(\mathrm{C}).$$

En particulier, $R^{+\,st}(S)$ est un anneau simplicial associatif, commutatif à homotopie près, dont l'homologie est l'algèbre $H_*^{st}(S, R)$. De même, pour tout S-module M, $R^{+\,st}(M)$ est un $R^{+\,st}(S)$-module simplicial. Enfin la flèche n_2 de (2.38) se stabilise en :

$$R^{st}(A) \otimes \hat{\Gamma}^{st}(B) \to \hat{\Gamma}^{+\,st}(C).$$

Lorsque l'on se restreint à la i-ème composante de $\hat{\Gamma}$, pour éviter l'usage d'algèbres topologiques, on se borne à considérer l'application induite :

$$R^{st}(A) \otimes \Gamma^{i\,st}(B) \to \Gamma^{i\,st}(C). \tag{2.45}$$

Remarques **(2.24)**. — *a)* Pour alléger la notation, on écrira dorénavant $S^{st}(R)$ pour $S^{+\,st}(R)$, ce qui est compatible avec les notations de [34]. On désignera par $\widetilde{S}^{st}(R)$ l'algèbre graduée associée à l'anneau simplicial $S^{st}(R)$ (voir le lemme (2.17)).

b) Pour tout R-module P, on a une application canonique $\varepsilon : R^+[P] \to P$. On en déduit en stabilisant une application $R^{st}[P] \to Id^{st}[P]$ (Id désignant le foncteur identique). Or $Id^{st}[P]$ n'est rien d'autre que l'ensemble simplicial constant P, d'où une augmentation $\varepsilon : R^{st}[P] \to P$. Celle-ci est compatible aux structures multiplicatives. En particulier, l'augmentation $\varepsilon : R^{st}[R] \to R$ est un homomorphisme d'anneaux simpliciaux.

c) Soient M et N des A-modules. Une conséquence immédiate de la condition P1 est que l'on a, pour n fixé, un n-quasi-isomorphisme :

$$\mathrm{Rhom}(A^{st}(M), N) \simeq \mathrm{Rhom}(A(K(M, n))[-n], N). \tag{2.46}$$

En particulier, pour tout $r < n$:

$$\mathbf{H}^r(A^{st}(M), N) \simeq \mathbf{H}^{n+r}(K(M, n), N) \tag{2.47}$$

et les groupes de cohomologie de $A^{st}(M)$ s'identifient donc bien aux groupes de cohomologie stables des objets d'Eilenberg-Mac Lane $K(M, n)$.

Examinons le cas particulier de la remarque (2.24) *c)* qui nous servira par la suite. Il utilise pratiquement toutes les notions introduites jusqu'ici. Soit $\mathcal{O}$ un anneau de caractéristique p de T satisfaisant aux hypothèses A1 et A2. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^r(\Lambda^{st}(\mathcal{O}), \mathcal{O}) &\simeq \mathbf{H}^{n+r}(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O}) \quad \text{avec} \quad r<n && (2.47) \\ &\simeq R^{n+r}\,\mathrm{Sym}(R, -n) && (\text{lemme } (2.11)). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Par le théorème des coefficients universels, ce dernier groupe s'identifie au R-dual gradué du groupe :

$$L_r^{st}\Gamma_{\mathsf{F}_p}(\mathsf{F}_p) \simeq L_{n+r}\Gamma(\mathsf{F}_p, n).$$

En résumé on a démontré, compte tenu du corollaire (2.14), la

Proposition **(2.25)**. — *Soit $\mathcal{O}$ un objet en anneaux de caractéristique première $p>0$ d'un topos* T, *satisfaisant aux hypothèses* A1 *et* A2. *Le groupe des opérations hypercohomologiques stables de degré r, $\mathbf{H}^*(\ ,\mathcal{O}) \to \mathbf{H}^{*+r}(\ ,\mathcal{O})$, s'identifie au module* R-*dual gradué du r-ième foncteur dérivé stable $L_r^{st}\Gamma_{\mathsf{F}_p}(\mathsf{F}_p)$ du foncteur Γ_{F_p}.*

Plus généralement, on a l'énoncé suivant dans la catégorie dérivée :

$$\text{(2.49)} \qquad \mathrm{Rhom}(\Lambda^{st}(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \simeq \mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{cost}}(\mathrm{R}) \simeq \mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathsf{F}_p}(\Gamma^{st}_{\mathsf{F}_p}(\mathsf{F}_p), \mathrm{R})$$

$\mathrm{Hom}^{\bullet}$ désignant le Hom gradué.

Remarque **(2.26)**. — *a)* La graduation par le degré sur l'algèbre symétrique induit, *via* (2.47), (2.48), une graduation, qu'on appellera graduation par le poids, sur le groupe des opérations cohomologiques (resp. le groupe des opérations cohomologiques stables) à coefficients dans $\mathcal{O}$. En particulier le R-dual du groupe $\mathrm{L}^{st}_r\Gamma^i(\mathsf{F}_p)$ s'identifie au groupe des opérations cohomologiques de poids i et de degré r à coefficients dans $\mathcal{O}$. A titre d'exercice, calculons les opérations de poids 1 : on sait que $\Gamma^1(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{M}$; ainsi :

$$\mathrm{L}^{st}\Gamma^1(\mathsf{F}_p) \simeq \mathrm{L}^{st}\,\mathrm{Id}(\mathsf{F}_p) \simeq \mathsf{F}_p[0]$$

(voir la remarque (2.24) *b)*) ; ainsi les seules opérations cohomologiques de poids 1 à coefficients dans $\mathcal{O}$ sont de degré 0 et elles forment le R-module libre de rang 1 des opérations induites par les homomorphismes des coefficients $r : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ $(r \in \mathrm{R})$.

Terminons en signalant qu'on trouvera dans ([25], 14, 16) une description terre à terre de $\Gamma(\mathrm{K}(\mathsf{Z}, 1))$; la terminologie « graduation par le poids » que nous employons est compatible avec celle qui y est introduite.

b) Il convient également de signaler au lecteur qu'il existe une autre version de l'algèbre associée à $\mathsf{Z}^{st}(\mathrm{R})$. C'est une algèbre différentielle graduée $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$, due à Mac Lane, qui est bien associative comme on le souhaite, et dont la définition est élémentaire. C'est elle que Mac Lane utilise dans sa construction originale de la résolution canonique d'un R-module [43], et il démontre dans [24] qu'elle possède les propriétés homologiques requises (voir également [26]). Malheureusement, $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ est définie par un procédé cubique, et son emploi nécessiterait que l'on refasse le formalisme des objets d'Eilenberg-Mac Lane dans ce cadre peu employé à l'heure actuelle, nous entraînant ainsi encore plus loin de notre sujet (voir cependant [42] pour un début de ce formalisme). On ne peut éviter le fait qu'une construction simpliciale du stabilisé soit plus complexe qu'une construction cubique : la difficulté à définir des produits dans le cadre simplicial tient à la complication des flèches d'Alexander-Whitney et des « shuffles » qui figurent dans le théorème d'Eilenberg-Zilber, et donc en dernière analyse au fait que le produit de deux simplexes types admet une décomposition simpliciale relativement délicate, alors que le produit de deux hypercubes admet une décomposition cubique tautologique.

3. Une résolution canonique d'un faisceau abélien

Soit (T, R) un topos annelé et P un R-module de T. On va construire fonctoriellement en P un complexe $\mathrm{M}_*(\mathrm{P})$ de R-modules de T, augmenté vers P et qui possède les deux propriétés suivantes :

P3) L'augmentation $\varepsilon : \mathrm{M}_*(\mathrm{P}) \to \mathrm{P}$ est un quasi-isomorphisme (autrement dit $\mathrm{M}_*(\mathrm{P})$ est une résolution de P).

P4) Chaque composante $M_i(P)$ du complexe est de la forme $R^+[R^s \times P^t]$, où s, t sont des entiers qui dépendent de i.

Pour plus de détails sur la construction de $M_*(P)$ que nous allons maintenant décrire, voir [43], [34].

Rappels sur la bar-construction (voir [25], [13], [44])

On sait qu'à toute R-algèbre A augmentée vers R par $\eta : A \to R$, on associe une résolution canonique plate $B(A) \xrightarrow{\varepsilon} R$ de R dans la catégorie des A-modules à droite, la bar-construction (non réduite) définie de la manière suivante : on pose $B(A)_n = A^{\otimes(n+1)}$ et l'on munit $B(A)_n$ de la structure de A-module à droite définie par le facteur de droite du produit tensoriel ; on définit la différentielle $d_n : B(A)_n \to B(A)_{n-1}$ (resp. l'augmentation $\varepsilon : B(A)_0 \to R$) par les formules suivantes :

$$(3.1) \qquad d_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-i} a_{n-i+1} \otimes \ldots \otimes a_n + (-1)^{n+1} \eta(a_0)\, a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$$

$$(3.2) \qquad \varepsilon(a_0) = \eta(a_0).$$

Pour diverses variantes et plus de détails sur la bar-construction, voir [44].

Soit maintenant M un A-module à gauche; le complexe $B(A) \otimes_A M$ est donc un représentant de l'objet $R \overset{l}{\otimes}_A M$ de la catégorie dérivée des R-modules. En particulier, par passage à l'homologie :

$$(3.3) \qquad H_*(B(A) \otimes_A M) \simeq \mathrm{Tor}_*^A(R, M).$$

Plus généralement, lorsque A est une algèbre différentielle graduée augmentée vers R, B(A) défini ci-dessus est de manière naturelle un bicomplexe :

$$(3.4) \qquad B(A)_{r,s} = k_s(A^{\otimes(r+1)})$$

$k_s(B)$ désignant ici (et dans toute la suite de ce travail) la partie homogène de degré s de l'algèbre graduée B. La première différentielle est donnée par les formules (3.1), (3.2). Quant à la seconde, c'est la différentielle usuelle sur $A^{\otimes(r+1)}$ déduite de la différentielle donnée sur A. B(A) est maintenant une résolution de R dans la catégorie des A-modules à droite différentiels gradués et pour tout A-module différentiel gradué M, le complexe total associé au bicomplexe $B(A) \otimes_A M$ représente $R \overset{l}{\otimes}_A M$ et l'isomorphisme (3.3) définit une bigraduation sur le terme $\mathrm{Tor}_*^A(R, M)$.

Si l'on filtre le bicomplexe $B(A) \otimes_A M$ par le premier indice, on obtient une suite spectrale aboutissant à $H_*(R \overset{l}{\otimes}_A M)$. On déduit immédiatement de la construction que :

$$(3.5) \qquad E^1_{p,q} = k_q(H_*(A^{\otimes(p+1)}))$$

et, puisque $d^1 : E^1_{**} \to E^1_{**}$ est induite par la différentielle de B(A), elle est définie par des formules du type (3.1) et l'on a un isomorphisme si l'on suppose $H_*(A)$ plat sur R :

$$(3.6) \qquad (E^1_{**}, d_1) \simeq B(H_*(A)) \otimes_R M.$$

Cette remarque permet de calculer le terme E^2 :

(3.7) $$E^2_{r,s} = k_s(\mathrm{Tor}_r^{H_*(A)}(R, H_*(M)) \Rightarrow H_*(R \overset{l}{\otimes}_A M)).$$

Remarques **(3.1)**. — *a)* On remarquera que $B(A)$ est en fait le complexe associé à un A-module simplicial $\mathscr{B}(A)$ (on définit les opérateurs de dégénérescence :

$$S^i_n : \mathscr{B}(A)_n \to \mathscr{B}(A)_{n+1}$$

par :

$$S^i_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \ldots \otimes a_n$$

l'élément unité étant placé en i-ème position).

Ceci permet d'effectuer toute la construction précédente dans le cadre simplicial. On en déduit l'existence, sous des hypothèses de platitude convenables, pour toute paire de modules simpliciaux E, F sur un A-module simplicial, d'une suite spectrale :

$$E^2_{r,s} = k_s \, \mathrm{Tor}_r^{H_*(A)}(H_*(E), H_*(F)) \Rightarrow H_*(E \overset{l}{\otimes}_A F)$$

(le produit tensoriel dérivé étant ici pris dans la catégorie des A-modules simpliciaux), dont (3.7) est un cas particulier (voir [55], [34]).

b) On a l'habitude d'appeler bar-construction réduite de l'algèbre A augmentée par $\eta : A \to R$ le complexe $\overline{B}(A) = B(A) \otimes_A R$. La formule suivante est un cas particulier de (3.3) :

(3.8) $$H_*(\overline{B}(A)) \simeq \mathrm{Tor}_*^A(R, R)$$

et l'on dispose d'une suite spectrale du type (3.7) aboutissant à ce terme. Signalons qu'il est de tradition de noter $[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ (ou $[a_0 | \ldots | a_{n-1}]$) l'élément $a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes 1$ de $\overline{B}(A)_n$. Ceci explique la terminologie « filtration par le nombre de barres » utilisée pour désigner la filtration induisant la suite spectrale (3.7).

Terminons ces préliminaires par l'observation suivante, inutile dans la construction de la résolution canonique, mais qui nous servira par la suite (voir chap. V). Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que l'algèbre A est commutative (resp. que l'algèbre différentielle graduée A est anticommutative), alors le complexe (resp. le bicomplexe) $B(A)$ est muni d'un produit qui en fait une algèbre différentielle graduée commutative (resp. bigraduée anticommutative) : on prend pour multiplication l'application composée $\nu = B(\mu) \circ \varphi$:

(3.9) $$B(A) \otimes B(A) \xrightarrow{\varphi} B(A \otimes A) \xrightarrow{B(\mu)} B(A)$$

où la première flèche est la flèche des « shuffles » (2.20) appliquée à l'objet bisimplicial :

$$\mathscr{B}(A, A) = B(A) \underline{\otimes} B(A)$$

$\underline{\otimes}$ désignant le produit tensoriel externe des objets simpliciaux $B(A)$ (voir la remarque (3.1) *a)*). Puisque A est commutative, la multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ est un homomorphisme d'algèbres, ce qui permet de définir $B(\mu)$ par fonctorialité de la bar-construction. Les propriétés d'associativité et de commutativité de φ décrites dans la remarque (2.16) impliquent que ν est associatif et anticommutatif. En particulier lorsque, de plus, M est une R-algèbre, la suite spectrale (3.7) est munie d'une structure multiplicative, les différentielles étant des dérivations. Pour une formule explicite de multiplication sur la bar-construction B(A) associée à une algèbre différentielle commutative A, d'où notamment une formule explicite pour la multiplication dans E^1_{**} compte tenu de (3.6), voir [25].

Construction de la résolution canonique

On reprend les notations du début de ce chapitre. Puisqu'on suppose que T possède assez de points, il suffit de vérifier la propriété P3 dans le cas du topos ponctuel. Soit $\widetilde{R}^{st}(R)$ l'algèbre différentielle graduée augmentée vers R (resp. $\widetilde{R}^{st}(P)$ le $\widetilde{R}^{st}(R)$-module différentiel gradué) associée à l'anneau simplicial $R^{st}(R)$ (resp. au module simplicial $R^{st}(P)$) décrit au chapitre II (exemple (2.23)). On considère le bicomplexe :

$$\mathscr{M}_{**}(P) = B(\widetilde{R}^{st}(R)) \otimes_{\widetilde{R}^{st}(R)} \widetilde{R}^{st}(P)$$

augmenté vers P (en degré (0, 0)) par la flèche

$$B(\widetilde{R}^{st}(R)) \otimes_{\widetilde{R}^{st}(R)} \widetilde{R}^{st}(P) \to R \otimes_R P \to P$$

induite par les augmentations $\widetilde{R}^{st}(P) \to P$ (resp. $\widetilde{R}^{st}(R) \to R$). Notons $M_{**}(P)$ le complexe total associé à $\mathscr{M}_{**}(P)$, muni de l'application induite :

$$\varepsilon : \mathscr{M}_*(P) \to P.$$

Par définition :

$$\mathscr{M}_{i,j}(P) = k_j(\widetilde{R}^{st}(R)^{\otimes i} \otimes \widetilde{R}^{st}(P))$$

la première différentielle étant celle de (3.1) et la seconde celle de l'algèbre différentielle $\widetilde{R}^{st}(R)^{\otimes i} \otimes \widetilde{R}^{st}(P)$. En particulier $M_*(P)$ satisfait bien à la propriété P4, vu la description de $\widetilde{R}^{st}(R)$ et de $\widetilde{R}^{st}(P)$. Pour vérifier que $M_*(P)$ est bien une résolution de P, on renvoie à [43], [34]. Contentons-nous d'observer que $M_*(P)$ représente le produit tensoriel dérivé $R \overset{l}{\otimes}_{\widetilde{R}^{st}(R)} \widetilde{R}^{st}(P)$ et que l'on se réduit, par exactitude du produit tensoriel dérivé, au cas élémentaire où $P = R$.

Remarques **(3.2)**. — *a)* On trouvera dans ([31], VII) (voir aussi [10]), une résolution partielle de P de longueur 2 par des objets de la forme $\mathbf{Z}[P^s]$. C'est essentiellement $\mathbf{Z}^{st}(P)$ (ou plutôt, avec la notation évidente, $\mathbf{Z}K(P, n)[-n]$ pour $n = 2$) ce qui fait l'affaire si l'on est en degré 1 puisque l'on sait que :

$$\widetilde{H}^{st}_i(P\,;\,\mathbf{Z}) = \begin{cases} P & i = 0 \\ 0 & i = 1 \end{cases}$$

D'autre part, $\widetilde{H}^{st}_2(P\,;\,\mathbf{Z}) \simeq P/2P$ ce qui montre bien que dès le degré 2, $\mathbf{Z}^{st}(P)$ ne convient pas et qu'il faut le remplacer par $M_*(P)$ si l'on veut obtenir une résolution de P.

b) En fait on peut définir une résolution canonique de P par des objets de la forme $\mathbf{Z}[P^s]$ (et non de la forme $\mathbf{Z}[P^s \times \mathbf{Z}^t]$ comme c'est le cas pour $M_*(P)$). On ne sait pas décrire explicitement une telle résolution, mais Eilenberg et Mac Lane en ont démontré l'existence dans [24], théorème (6.2) (une autre démonstration non publiée est due à Deligne). Ces auteurs démontrent, dans un contexte sensiblement plus général, comment associer de manière essentiellement unique à tout groupe abélien M un complexe K(M) (par un procédé appelé la « construction librement acyclique associée à la catégorie des groupes abéliens ») possédant les propriétés de fonctorialité requises (*loc. cit.* (5.0)-(5.3)) et qui de plus, est une résolution de M lorsque M est libre. Il résulte par dévissage en employant le théorème d'additivité (11.1) de *loc. cit.* que K(M) est en fait une résolution de M pour M quelconque. On observera que l'existence d'une telle résolution canonique permet de supprimer une hypothèse gênante dans le théorème d'annulation des Ext^i de [11] (voir notamment la remarque 3 de l'introduction).

c) La complexité de la résolution M(P) provient de ce que l'algèbre associative $R^{st}(R)$ est difficile à décrire. Dans sa définition, Mac Lane emploie un complexe cubique Q(R) dont la définition est aisée, mais on se heurte alors aux difficultés signalées dans la remarque (2.26) *b)*. Une autre méthode consisterait à remplacer $R^{st}(R)$ par une algèbre A plus simple qui ne soit associative qu'à homotopie près. On sait que Stasheff a défini en [64] la « tilde construction », d'une algèbre non strictement associative. Cette construction, qui est l'analogue de B(A), conviendrait sans doute dans notre contexte.

La suite spectrale fondamentale

Revenons maintenant à nos hypothèses initiales : soient donc T un topos possédant assez de points, $\mathcal{O}$ un anneau de caractéristique $p>0$ muni de sa structure naturelle de Λ-module, qui satisfait aux hypothèses A1 et A2. Le quasi-isomorphisme :

$$\varepsilon(\mathcal{O}) : M_*(\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$$

dans la catégorie dérivée des Λ-modules induit un quasi-isomorphisme :

(3.10) $$\mathrm{Rhom}_\Lambda(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Rhom}(M_*(\mathcal{O}), \mathcal{O}).$$

En vertu de la propriété P4 de $M_*(\mathcal{O})$ et de l'hypothèse A2 sur $\mathcal{O}$, on a :

(3.11) $$\mathrm{Rhom}(M_*(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \simeq \mathrm{Hom}(M_*(\mathcal{O}), \mathcal{O}).$$

Il résulte de la définition de $M_*(\mathcal{O})$ et de l'isomorphisme (2.48) que l'on a :

(3.12) $$\mathrm{Hom}_\Lambda(M_*(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_p \overset{l}{\otimes}_{\tilde{\mathbf{F}}_p^{st}(\mathbf{F}_p)} \Gamma^{st}(\mathbf{F}_p), R)$$

$\Gamma^{st}(\mathbf{F}_p)$ étant muni de la structure de $\mathbf{F}_p^{st}(\mathbf{F}_p)$-module décrite dans l'exemple (2.23). Or

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbf{F}_p \overset{l}{\otimes}_{\mathbf{F}_p^{st}(\mathbf{F}_p)} \Gamma^{st}(\mathbf{F}_p), R) \simeq \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Hom}(\mathbf{F}_p \overset{l}{\otimes}_{\mathbf{F}_p^{st}(\mathbf{F}_p)} \Gamma^{i\,st}(\mathbf{F}_p), R)$$

puisque la décomposition $\Gamma^{st}(\mathsf{F}_p) = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma^{i\,st}(\mathsf{F}_p)$ est compatible avec la structure de $\mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p)$-module de $\Gamma^{st}(\mathsf{F}_p)$. En passant à la cohomologie on obtient le théorème suivant :

Théorème (3.3). — *Pour tout* $j \geqslant 0$, *la graduation par le degré sur l'algèbre symétrique* (resp. *à puissances divisées*) *induit une graduation sur* $\mathrm{Ext}^j(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. *La composante de poids i, que l'on notera* $\mathrm{Ext}^j(\mathcal{O}, \mathcal{O})_i$, *est isomorphe au module* R*-dual du* F_p*-module*

$$\mathrm{H}_j(\mathsf{F}_p \overset{l}{\otimes}_{\mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p)} \Gamma^{i\,st}(\mathsf{F}_p)).$$

Ainsi le théorème fournit un procédé de calcul des groupes $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. En effet, on a vu plus haut que ce groupe d'homologie est l'aboutissement d'une suite spectrale. Précisément, dans le cas qui nous intéresse, la suite spectrale décrite en (3.6), (3.7) prend la forme suivante :

Proposition (3.4). — *Pour tout* $i \geqslant 0$ *il existe une suite spectrale du premier quadrant de* $\mathrm{H}_*^{st}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$*-modules gradués* :

$$\mathrm{E}^2_{r,s} = k_s \, \mathrm{Tor}_r^{\mathrm{H}_*^{st}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)}(\mathsf{F}_p, \mathrm{L}_*^{st}\Gamma^i(\mathsf{F}_p)) \Rightarrow \mathrm{H}_{r+s}(\mathsf{F}_p \overset{l}{\otimes}_{\mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p)} \Gamma^{i\,st}(\mathsf{F}_p)). \tag{3.13}$$

Remarque (3.5). — On prendra garde qu'on se trouve ici en présence de la seule composante de poids i, alors que la bigraduation (r, s) dont il est question dans cet énoncé concerne le degré des groupes d'homologie qui interviennent.

Remarques (3.6). — *a)* Rappelons que le terme $\mathrm{E}^1_{r,s}$ de cette suite est :

$$\mathrm{E}^1_{r,s} = k_s(\mathrm{H}_*^{st}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)^{\otimes r} \otimes \mathrm{L}_*^{st}\Gamma^j(\mathsf{F}_p)) \tag{3.14}$$

muni de la différentielle d^1 décrite en (3.1).

b) Il sera parfois commode de considérer directement la suite R-duale de (3.13), aboutissant à $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})_i$. C'est la suite :

$$\mathrm{E}_2^{r,s} = k_s \, \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{H}_*^{st}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)}(\mathrm{L}_*^{st}\Gamma^i(\mathsf{F}_p), \mathrm{R}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}(\mathcal{O}, \mathcal{O})_i. \tag{3.15}$$

Le terme $\mathrm{E}_1^{r,s}$ est le R-dual du $\mathrm{E}^1_{r,s}$ de (3.13) autrement dit :

$$\mathrm{E}_1^{r,s} = k_s(\mathrm{H}^{*st}(\mathsf{F}_p, \mathrm{R})^{\otimes r} \otimes \mathrm{R}^{*st}\,\mathrm{Sym}^i(\mathrm{R})).$$

L'algèbre de Steenrod

Il nous faut maintenant calculer le terme E^2 de la suite spectrale (3.13). Commençons par rappeler que la structure du groupe $\mathrm{H}_*^{st}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$ est bien connue. En effet $\mathrm{H}_*^{st}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$ a pour dual gradué le groupe de cohomologie stable $\mathrm{H}^*(\mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p), \mathsf{F}_p)$ et l'on a vu (cor. (2.14) et (2.47)) que ceci n'est rien d'autre que le groupe des opérations cohomologiques stables de type $(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$. Si l'on munit ce groupe, gradué par le degré, de la structure multiplicative correspondant à la composition d'opérations cohomologiques stables, on est en présence de l'algèbre de Steenrod A.

Rappelons brièvement quelle est la structure de A. Celle-ci diffère selon que la caractéristique p est paire ou impaire. Pour $p \neq 2$, A est l'algèbre associative graduée engendrée sur F_p par des éléments P^i de degré $2i(p-1)$ pour $i \geq 0$ et par un élément β de degré 1, satisfaisant aux relations suivantes :

$$P^0 = 1 \tag{3.16}$$

$$\beta^2 = 0. \tag{3.17}$$

Relations d'Adem : pour $a < pb$,

$$P^a P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} P^{a+b-t} P^t \tag{3.18}$$

et pour $a \leq pb$,

$$P^a \beta P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)}{a-pt} \beta P^{a+b-t} P^t + \sum_{t=0}^{[a-1/p]} (-1)^{a+t-1} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1} P^{a+b-t} \beta P^t. \tag{3.19}$$

Dans ces formules, le symbole ( ) désigne la réduction dans F_p du coefficient binomial.

Lorsque $p=2$, A est l'algèbre associative graduée engendrée sur F_2 par les carrés de Steenrod Sq^i de degré $i \geq 0$, satisfaisant aux seules relations :

$$Sq^0 = 1. \tag{3.20}$$

Relations d'Adem : pour $0 < a < 2b$,

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j. \tag{3.21}$$

Dans tous les cas, on a un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$\varphi : A \simeq H^*(\mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p), \mathsf{F}_p) \tag{3.22}$$

et l'on identifie au moyen de cet isomorphisme les P^i (resp. β, resp. Sq^i) aux opérations cohomologiques stables correspondantes. On notera également par ces symboles les opérations cohomologiques de type $(\mathsf{F}_p, q, \mathsf{F}_p, q+2i(p-1))$ pour $p \neq 2$ (resp. de type $(\mathsf{F}_p, q, \mathsf{F}_p, q+1)$ pour $p \neq 2$, resp. de type $(\mathsf{F}_2, q, \mathsf{F}_2, q+i)$ pour $q \geq 0$ variable).

Pour la construction de ces opérations et pour leurs principales propriétés, on renvoie à [65]. On donnera d'ailleurs plus loin un aperçu de leur construction dans un cadre un peu plus général. Bornons-nous à signaler les propriétés suivantes de ces opérations :

1) $P^0 = 1$ est l'opération identique.

2) L'opération β (resp. Sq^1) n'est autre que l'opération de Bockstein usuelle en cohomologie.

3) Soit $x \in H^{2k}(X, \mathsf{F}_p)$ avec $p \neq 2$. Alors $P^k x = x^p$.

4) Soit $x \in H^j(X, \mathsf{F}_p)$ avec $j < 2k$. Alors $P^k x = 0$.

En caractéristique 2, ces propriétés deviennent :

3') Pour tout $x \in H^n(X, \mathsf{F}_2)$, $Sq^n x = x^2$.

4') Pour tout $x \in H^m(X, \mathsf{F}_2)$ avec $m < n$, $Sq^n x = 0$.

5) (Formule de Cartan). Pour toutes classes de cohomologie $x \in H^*(X, \mathsf{F}_p)$ et $y \in H^*(Y, \mathsf{F}_p)$, on a, lorsque $p \neq 2$:

(3.23) $$P^k(x \cup y) = \bigoplus_i P^i x \cup P^{k-i} y$$

(resp. (**3.23** *bis*) $Sq^k(x \cup y) = \bigoplus_i Sq^i x \cup Sq^{k-i} y$ lorsque $p = 2$)

$\cup$ désignant le cup-produit externe des classes de cohomologie.

On désigne, pour $p \neq 2$, par P^I le monôme $\beta^{\varepsilon_1} P^{s_1} \beta^{\varepsilon_2} \ldots P^{s_k} \beta^{\varepsilon_{k+1}}$ dans A où I est la suite :

(3.24) $$I = (\varepsilon_1, s_1, \varepsilon_2, s_2, \ldots, s_k, \varepsilon_{k+1})$$

les ε_i (resp. s_i) étant des entiers qui satisfont aux conditions :

(3.25) $$\varepsilon_i = 0, 1, \quad i \geq 1$$

(3.26) $$s_i \geq 1, \quad i \geq 1.$$

Par convention, on pose $\beta^1 = \beta$, $\beta^0 = 1$. On définit le degré $d(I)$ (resp. la longueur $l(I)$, resp. l'excès $e(I)$), de la suite I par les formules suivantes :

(3.27) $$d(I) = \sum_j \varepsilon_j + \sum_j 2s_j(p-1)$$

(3.28) $$l(I) = k \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon_{k+1} = 0, \qquad l(I) = k+1 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon_{k+1} = 1$$

(3.29) $$e(I) = 2s_1 + \varepsilon_1 - d(J)$$

lorsque I est une suite de la forme $I = (\varepsilon_1, s_1, J)$ (J étant également une suite de la forme (3.24)).

On dit de plus qu'une suite I du type (3.24) est *admissible* lorsque l'on a les relations suivantes pour tout $i \geq 1$:

(3.30) $$s_i \geq p s_{i+1} + \varepsilon_{i+1}.$$

Enfin, on fait correspondre à la suite vide $I = (\emptyset)$ le monôme $P^I = 1$. Par convention :

(3.31) $$d(\emptyset) = l(\emptyset) = e(\emptyset) = 0.$$

On démontre alors (voir [65]) la

Proposition (**3.7**). — *Les monômes* P^I *correspondant aux suites* I *admissibles forment une base (additive) de l'algèbre* A.

La terminologie qu'on vient d'introduire permet de décrire la variante non stable de (3.22) ; c'est le calcul classique des anneaux de cohomologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

Théorème **(3.8)** ([13], [46]). — *Pour tout* $n \geqslant 1$, $H^*(K(\mathsf{F}_p, n), \mathsf{F}_p)$ *est isomorphe à l'algèbre commutative libre sur* F_p *engendrée par les éléments* $P^I i_n$, *où* I *est admissible et satisfait en outre à l'une des deux conditions suivantes* :

$$e(I) < n$$

$$e(I) = n \quad et \quad \varepsilon_1 = 1.$$

(On rappelle que $i_n \in H^n(K(\mathsf{F}_p, n), \mathsf{F}_p)$ est la classe fondamentale, et que l'algèbre commutative libre est le produit tensoriel de l'algèbre symétrique sur les générateurs de degré pair et de l'algèbre extérieure sur les générateurs de degré impair.)

Pour un aperçu de la démonstration du théorème (3.8) dans un cadre un peu plus général, voir [46]. Le lecteur remarquera que la version stable (3.22) du théorème est une conséquence de celui-ci, compte tenu de la proposition (3.7).

Lorsque $p = 2$, la situation est un peu plus simple : on définit un monôme Sq^I de A, pour une suite d'entiers positifs (éventuellement vide) :

$$I = (s_1, \ldots, s_k),$$

par :

$$Sq^I = Sq^{s_1} \ldots Sq^{s_k}$$

$$Sq^{\varnothing} = 1.$$

On définit le degré (resp. la longueur, resp. l'excès) de I par les formules :

(3.32) $$d(I) = \sum_i s_i$$

(3.33) $$l(I) = k$$

(3.34) $$e(I) = s_1 - d(J) \quad \text{pour I de la forme } I = (s_1, J)$$

et l'on adopte les mêmes conventions que précédemment (3.31) lorsque I est vide. On dit ici que I est *admissible* s'il est vide ou si

(3.35) $$s_i \geq 2_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Avec ces nouvelles définitions la proposition (3.7) reste valable en caractéristique 2. Quant au théorème (3.8) il prend maintenant la forme suivante :

Théorème **(3.9)** (Serre) [61]. — *Pour* $n > 1$, *l'algèbre* $H^*(K(\mathsf{F}_2, n), \mathsf{F}_2)$ *est l'algèbre symétrique sur* F_2 *engendrée par les éléments* $Sq^I i_n$, *où* I *est admissible et* $e(I) < n$.

La démonstration, tout comme l'énoncé, est moins technique dans ce cas qu'en caractéristique impaire ; on renvoie, pour cette démonstration, à la référence citée, en observant qu'elle fournit une bonne introduction aux notions rappelées ici.

L'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod

A la structure d'algèbre associative et commutative μ sur $H_*^{st}(\mathsf{F}_p)$ définie en (2.41) correspond par dualité une structure de cogèbre coassociative et cocommutative :

$$\mu^* : A \to A \otimes A$$

sur l'algèbre de Steenrod A, que nous allons maintenant expliciter [49]. Puisque la structure d'algèbre de $H_*^{st}(\mathsf{F}_p)$ est induite par l'accouplement du cup-produit, il en est de même de la structure duale de cogèbre sur A. Identifions un élément $x \in A_u$ à l'opération cohomologique stable de degré u, et également à toute application correspondante d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane $x : K(\mathsf{F}_p, m+n) \to K(\mathsf{F}_p, m+n+u)$, avec $u < \min(m, n)$. Compte tenu de la représentabilité des classes de cohomologie par des classes d'applications d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, $\mu^*(x) = \sum_{i+j=u} y_i \otimes z_j$, où l'élément y_i (resp. z_j) de A_i (resp. A_j) correspond à l'unique application :

$$y_i : K(\mathsf{F}_p, m) \to K(\mathsf{F}_p, m+i)$$
$$z_j : K(\mathsf{F}_p, n) \to K(\mathsf{F}_p, n+j)$$

rendant commutatif le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales sont les accouplements du cup-produit :

$$\begin{tikzcd}
K(\mathsf{F}_p, m) \wedge K(\mathsf{F}_p, n) \arrow[r, "\vee(y_i \wedge z_j)"] \arrow[d] & \bigvee_{i+j=u} K(\mathsf{F}_p, m+i) \wedge K(\mathsf{F}_p, n+j) \arrow[d] \\
K(\mathsf{F}_p, m+n) \arrow[r, "x"] & K(\mathsf{F}_p, m+n+u)
\end{tikzcd}$$

On peut traduire la commutativité de ce diagramme en une assertion qui concerne les foncteurs représentés par les différents espaces qui y figurent, à savoir :

Proposition **(3.10)**. — *Soit x une opération cohomologique stable de type $(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$, de degré u; alors $\mu^*(x) = \sum_{i,j} y_i \otimes z_j$ où les $\{y_i\}$* (resp. $\{z_j\}$) *forment l'unique collection d'opérations cohomologiques (nécessairement stables) de type $(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$, y_i étant de degré i* (resp. *z_j de degré j*), *et satisfaisant à la condition suivante : pour toute paire de classes de cohomologie $\alpha \in H^m(X, \mathsf{F}_p)$ et $\beta \in H^n(Y, \mathsf{F}_p)$, on a l'équation suivante dans $H^{m+n+u}(X \times Y, \mathsf{F}_p)$:*

$$x(\alpha \cup \beta) = \sum_{i,j} (-1)^{mj} y_i(\alpha) \cup z_j(\beta),$$

le symbole $\cup$ désignant le cup-produit externe des classes de cohomologie.

Exemple **(3.11)**. — Les formules suivantes sont des conséquences immédiates de la proposition (3.10) et de la formule de Cartan (3.23) et (3.23 *bis*) :

(3.36) $$\mu^*(P^k) = \sum_i P^i \otimes P^{k-i}$$

(3.37) $$\mu^*(Sq^k) = \sum_i Sq^i \otimes Sq^{k-i}.$$

La proposition (3.10) implique que la définition de la comultiplication sur A donnée ici coïncide avec celle de Milnor dans [49]. Milnor considère également l'algèbre A_*

duale graduée de la cogèbre A (pour la structure comultiplicative qu'on vient d'étudier). A_* s'identifie comme algèbre à $H_*^{st}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$. Alors que la structure de l'algèbre de Steenrod est très complexe, vu le caractère peu naturel des relations d'Adem, Milnor a montré que la structure de l'algèbre A_* est très élémentaire.

De manière précise, pour $p \neq 2$, soient ξ_k l'élément de A_* dual, par rapport à la base des monômes admissibles, du monôme P^{J_k} $(k>0)$, et τ_k le dual de $P^{J'_k}$ $(k \geq 0)$, où l'on définit les suites admissibles J_k et J'_k par :

$$J_k = (0, p^{k-1}, 0, p^{k-2}, \ldots, 0, p^1, 0, 1)$$
$$J'_k = (0, p^{k-1}, 0, p^{k-2}, \ldots, 0, p^1, 0, 1, 1).$$

En particulier $\deg \xi_k = 2p^k - 2$ et $\deg \tau_k = 2p^k - 1$. Considérons de même en caractéristique 2 des éléments ξ_k de degrés $2^k - 1$, duaux des monômes Sq^{I_k}, où I_k est la suite admissible :

$$I_k = (2^{k-1}, 2^{k-2}, \ldots, 2, 1) \qquad k>0.$$

Théorème **(3.12)** (Milnor [49]). — *Pour* $p \neq 2$, A_* *est isomorphe, comme algèbre, à l'algèbre commutative libre engendrée sur* F_p *par les* ξ_k *et les* τ_k. A_* *est l'algèbre symétrique engendrée sur* F_2 *par les* ξ_k, *pour* $p=2$.

Milnor détermine également la comultiplication sur A_* induite par la structure d'algèbre de A, mais nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser ce résultat.

4. Foncteurs dérivés de Γ.

Il nous faut maintenant calculer les termes $L_*^{st}\Gamma(\mathsf{F}_p)$ qui figurent dans la suite spectrale (3.13), c'est-à-dire les foncteurs dérivés stables gauches de Γ. On a vu que les modules R-duaux de ces groupes n'étaient autres que les groupes des opérations hypercohomologiques stables de type $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. On est donc amené à entreprendre l'étude de ces opérations, et l'on verra qu'elle est tout à fait parallèle à celle des opérations cohomologiques de type $(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$ résumée ci-dessus. On commencera par les opérations non nécessairement stables, ce qui revient, comme on l'a vu, à étudier le groupe $\mathsf{H}^*(K(\mathcal{O}, q), \mathcal{O})$ avec q fixé. Pour tout ce chapitre, on aura intérêt à consulter [52], [27].

On va définir des opérations de Steenrod P^i de type $(\mathcal{O}, q, \mathcal{O}, q+2i(p-1))$ et Q^i de type $(\mathcal{O}, q, \mathcal{O}, q+2i(p-1)+1)$ pour tout $i \geq 0$, lorsque le corps de base est de caractéristique $p \neq 2$; de même, pour $p=2$, on définira des Sq^i de type $(\mathcal{O}, q, \mathcal{O}, q+i)$ pour tout $i \geq 0$. En fait, une construction générale de ces opérations, valable dans toute catégorie abélienne satisfaisant à certaines hypothèses, a été donnée par Epstein dans [27]. La situation qui nous concerne est suffisamment proche de celle qui prévaut dans le cas classique pour qu'il ne soit pas nécessaire de faire appel à ce formalisme général. On sait qu'il suffit de définir des classes de cohomologie $P^i i_q \in H^{q+2i(p-1)}(K(\mathcal{O}, q), \mathcal{O})$ (resp. $Q^i i_q \in H^{q+2i(p-1)+1}(K(\mathcal{O}, q), \mathcal{O})$, resp. $Sq^i i_q \in H^{q+i}(K(\mathcal{O}, q), \mathcal{O})$). On se bornera à en esquisser la définition, puisqu'elle est directement calquée sur celle de Dold [20] dans le cas ponctuel (voir également [39]).

De manière générale, soit X un objet simplicial de T de la forme $X = Y \otimes \mathcal{O}$ au sens du chapitre I, où Y est un ensemble simplicial (on a vu en (2.12) que c'était le cas pour $X = K(\mathcal{O}, q)$). A tout $x \in H^q(X, \mathcal{O})$ on commence par associer de la manière suivante une classe de cohomologie Π-équivariante $Qx \in {}_\Pi H^*(L \times X, \mathcal{O})$ où Π désigne le faisceau abélien constant sous-jacent à Λ, et L la résolution simpliciale standard du faisceau constant $\mathbf{Z}$ (muni de l'action triviale de Π) dans la catégorie des Π-modules : un cocycle dans la classe de X correspond à un morphisme de complexes de faisceaux abéliens :

$$\tilde{x} : \mathbf{Z}[X]^{\sim} \to \mathcal{O}[q].$$

Soit $Q\tilde{x}$ le cocycle correspondant au morphisme :

$$\mathbf{(4.1)} \qquad \mathbf{Z}[L \times X]^{\sim} \xrightarrow{G} \mathbf{Z}[X]^{\sim \otimes p} \xrightarrow{f_{\tilde{x}}} \mathcal{O}[q]^{\otimes p} \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}[pq].$$

Ce morphisme est Π-équivariant si l'on fait agir Π sur les différents objets de (4.1) de la manière suivante : Π agit par sa définition sur L, il agit trivialement sur X et sur $\mathcal{O}[pq]$, et, sur $\mathbf{Z}[X]^{\sim \otimes p}$ et $\mathcal{O}[q]^{\otimes p}$, à travers l'action du faisceau constant Σ_p associé au groupe symétrique par permutation des tenseurs. La flèche Π-équivariante $f_{\tilde{x}}$ est définie par :

$$f_{\tilde{x}} = (-1)^{p(p-1)/2} \tilde{x}^{\otimes p}$$

et μ est la p-ième itérée de la loi d'anneau de $\mathcal{O}$. Le point délicat est la définition d'un homomorphisme de complexes Π-équivariant $G : \mathbf{Z}[L \times X]^{\sim} \to \mathbf{Z}[X]^{\sim \otimes p}$, naturel en X, qui s'identifie en degré 0 à l'homomorphisme :

$$G_0 : \mathbf{Z}[L_0 \times X_0] \to \mathbf{Z}[X]^{\sim \otimes p}$$

défini par $G_0(l_0, x_0) = x_0^{\otimes p}$. Pour la démonstration, qui est la même que dans le cas ponctuel (et qui en est d'ailleurs une conséquence immédiate), voir [20], [39].

On note Qx la classe de cohomologie équivariante représentée par le cocycle $Q\tilde{x}$ et l'on vérifie qu'elle est indépendante du choix du représentant $\tilde{x}$ de la classe x. Puisque Π agit trivialement sur X :

$${}_\Pi H^{pq}(L \times X, \mathcal{O}) = H^{pq}(\mathbf{K} \times X, \mathcal{O})$$

où $\mathbf{K} = L/\Pi = K(\Pi, 1)$ est le faisceau simplicial constant associé à l'ensemble simplicial $K = K(\mathbf{Z}/p, 1)$. Par le théorème d'Eilenberg-Zilber, on a un quasi-isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[\mathbf{K} \times X], \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[\mathbf{K}] \otimes \mathbf{Z}[X], \mathcal{O})$$

et par le corollaire (1.12), ce dernier complexe est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ens}}(\mathbf{Z}[K], \mathbf{F}_p) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X], \mathcal{O}).$$

Par Künneth, on obtient :

$$\mathbf{(4.2)} \qquad H^{pq}(\mathbf{K} \times X, \mathcal{O}) = \bigoplus_{i+j=pq} H^i(K, \mathbf{F}_p) \otimes H^j(X, \mathcal{O}).$$

Ici $H^*(K, \mathbf{F}_p)$ désigne le groupe de cohomologie *ordinaire* (c'est-à-dire défini avec des cochaînes *a priori* non nécessairement polynomiales) de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane K, ou, ce qui revient au même, le groupe de cohomologie associé, au sens de la cohomologie des groupes, au groupe cyclique $\mathbf{Z}/p$. On sait qu'il existe une $\mathbf{F}_p$-base additive usuelle de $H^*(K, \mathbf{F}_p)$ formée d'éléments w_k pour tout $k \geq 0$, avec $\deg(w_k) = k$ (ce calcul étant d'ailleurs celui qui permet de commencer la récurrence dans la démonstration usuelle du théorème (3.8)). On définit de manière unique des classes de cohomologie :

$$D_k(x) \in H^{pq-k}(X, \mathcal{O})$$

par la formule :

$$Qx = \sum_k w_k \otimes D_k(x). \tag{4.3}$$

Les $P^i x$ (resp. $Q^i x$, resp. $Sq^i x$) coïncident, à constante près, avec les $D_k(x)$ convenablement réindexés. Pour une formule précise, à une faute typographique près, voir ([27], § 7.1) ; on se référera également à ([46], p. 182), où l'opération Q^i est notée βP^i (voir à ce propos la remarque (4.2) *b)* ci-dessous).

Enonçons maintenant les principales propriétés des opérations que nous venons d'introduire. On remarquera qu'elles coïncident, à une exception près, avec les propriétés des opérations de Steenrod usuelles et il en est de même de leurs démonstrations. Nous omettrons donc ces dernières, en nous contentant de renvoyer le lecteur aux références citées ci-dessus. Commençons par signaler l'unique différence avec le cas classique.

Lemme (**4.1**). — *L'opération cohomologique de degré zéro* P^0 *(resp.* Sq^0*) est induite par l'homomorphisme de Frobenius* $F : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *sur les coefficients.*

Cette apparente différence n'en est en fait pas une, la relation classique $P^0 = 1$ (resp. $Sq^0 = 1$) provenant de ce que le Frobenius s'identifie, lorsque les ensembles de coefficients sont les corps $\mathbf{F}_p$, à l'application identique. Ainsi, même ce lemme se démontre par la méthode usuelle (voir ([39], IX, (6.2) *e)*)).

Voici les autres propriétés de ces opérations :

1) Les P^i (resp. Sq^i) satisfont aux relations d'Adem (3.18) (resp. (3.21)). Il existe en outre trois relations supplémentaires du même type, que l'on trouvera explicitées dans ([27], théorème (9.8)) ; l'une d'entre elles n'est d'ailleurs que (3.19), si l'on considère que les expressions du type βP^i qui y figurent désignent les opérations Q^i. En particulier, P^0 (resp. Sq^0) commute à toutes les opérations de Steenrod.

2) Soit X un ensemble simplicial de T. Pour tout $x \in \mathbf{H}^s(X, \mathcal{O})$, on a $P^i x = x^p$ lorsque $2i = s$ (resp. pour tout $x \in \mathbf{H}^n(X, \mathcal{O})$, on a $Sq^n x = x^2$ pour tout n). D'autre part, $P^i x = Q^i x = 0$ lorsque $2i > s$ (resp. $Sq^i x = 0$ pour $i > n$).

3) (Formule de Cartan). Pour tout $x, y \in \mathbf{H}^*(X, \mathcal{O})$, on a, pour tout $k \geq 0$:

$$P^k(x \cup y) = \sum_{i \geq 0} P^i x \cup P^{k-i} y \quad (p \neq 2) \tag{4.4}$$

$$Q^k(x \cup y) = \sum_{i \geq 0} (Q^i x \cup P^{k-i} y + (-1)^{\deg x} P^i x \cup Q^{k-i} y) \quad (p \neq 2) \tag{4.5}$$

$$Sq^k(x \cup y) = \sum_{i \geq 0} Sq^i x \cup Sq^{k-i} y \quad (p = 2) \tag{4.6}$$

$\cup$ désignant le cup-produit externe de classes d'hypercohomologie à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Supposons $p \neq 2$. Soit J une suite d'entiers, vide ou non, du type (3.24), satisfaisant à la condition (3.25) et à la condition :

(4.7) $\qquad s_i \geq 0 \quad$ pour tout i

qui remplace (3.26). On lui associe un monôme P^J en les opérations de Steenrod comme on l'a fait au chapitre III, avec la convention (nécessaire puisqu'on n'a pas défini ici de Bockstein β) que chaque terme du type βP^i qui apparaît dans le monôme $\beta^{\varepsilon_1} P^{s_1} \beta^{\varepsilon_2} \ldots P^{s_k} \beta^{\varepsilon_{k+1}}$ désigne formellement l'élément Q^i. On définit le degré (resp. la longueur, resp. l'excès) de J par les mêmes formules (3.27)-(3.29) que précédemment, et la définition d'une suite admissible est à nouveau (3.30). A la suite vide, admissible par convention, on fait correspondre le monôme constant 1, représentant l'opération cohomologique identique.

Remarques **(4.2)**. — *a)* La condition d'admissibilité (3.30) implique que si $s_i = 0$, alors $s_j = \varepsilon_j = 0$ pour tout $j > i$: ainsi un monôme est-il admissible si et seulement s'il est de la forme :

$$P^j = P^I (P^0)^j$$

avec P^I une suite admissible au sens classique (c'est-à-dire ne faisant pas intervenir de terme P^0). Dans ce cas, on a :

$$d(J) = d(I)$$
$$l(J) = l(I) + j$$
$$e(J) = e(I).$$

b) L'identification formelle de Q^i avec βP^i, qui intervient, pour préserver l'uniformité de la notation, dans la définition des monômes admissibles (et qui permet de retrouver les relations d'Adem et la formule de Cartan mentionnées ci-dessus à partir des formules classiques correspondantes) peut prêter à confusion. On sait en effet qu'il existe une opération de Bockstein (que nous noterons $\underline{\beta}$) en cohomologie à coefficients dans $\mathcal{O}$: c'est l'opérateur bord associé en cohomologie à la suite exacte de dévissage du groupe de vecteurs de Witt de longueur 2 (voir [51]) :

$$0 \to \mathcal{O} \to W_2(\mathcal{O}) \to \mathcal{O} \to 0.$$

$\underline{\beta}$ est une opération cohomologique de degré 1, et l'on vérifie, en considérant la définition de la loi de groupe dans $W_2(\mathcal{O})$, qu'elle est de poids p au sens de la remarque (2.26) *a)*. Il résulte alors du théorème (4.3) ci-dessous (voir également la remarque (4.5) *b)*) que l'on a $\underline{\beta} = cQ^0$ où c est une constante, puisque Q^0 engendre l'espace vectoriel des opérations cohomologiques de degré 1 et de longueur 1. De plus $\underline{\beta}$ s'envoie par passage aux fibres sur le Bockstein classique, et il en est de même de Q^0 ([46], p. 183). Ainsi $c = 1$, donc :

$$\underline{\beta} = Q^0.$$

La relation d'Adem ([27], (9.8.4)) pour $a=0$ s'écrit donc :

$$\underline{\beta}\mathrm{P}^i = \mathrm{Q}^i\mathrm{P}^0 \quad \text{pour} \quad i>0$$

(cette formule étant tautologique pour $i=0$).

Il y a donc lieu de distinguer Q^i de $\underline{\beta}\mathrm{P}^i$, ce qui explique qu'à la différence de [46] et de [52], nous emploierons le moins possible la notation $\beta\mathrm{P}^i$ pour désigner l'opération Q^i.

c) $\mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, q), \mathcal{O})$ est muni d'une structure naturelle de H-module à gauche, où $\mathrm{H}=\mathrm{End}(\mathcal{O})$ est l'anneau de Hilbert-Witt défini au lemme (1.12). Celle-ci est induite par l'homomorphisme des coefficients correspondant à chacun des éléments $h\in\mathrm{H}$. En particulier, par restriction des scalaires au sous-anneau $\mathrm{R}\subset\mathrm{H}$, $\mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, q), \mathcal{O})$ est de manière naturelle une R-algèbre graduée (pour une étude plus approfondie des actions à gauche et à droite de H sur $\mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, q), \mathcal{O})$, voir la remarque (4.11)).

Le résultat principal de ce chapitre est l'analogue suivant du théorème (3.8) :

Théorème **(4.3)** (voir également [52], théorème (4.01)). — *Pour p premier $\neq 2$, $n\geq 1$, $\mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ est isomorphe en tant que* R-*algèbre graduée à l'algèbre commutative libre sur* R *engendrée par les éléments* $\mathrm{P}^{\mathrm{J}}(n)$, *où* J *parcourt l'ensemble des monômes admissibles satisfaisant en outre à l'une des deux conditions suivantes* :

$$e(\mathrm{J})<n$$

$$e(\mathrm{J})=n \quad \text{et} \quad \varepsilon_1=1,$$

$i_n\in\mathbf{H}^n(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ *désignant la classe fondamentale.*

Indiquons brièvement quel est l'énoncé correspondant pour $p=2$. Dans ce cas, on définit de manière évidente des monômes Sq^{I} associés aux suites $\mathrm{I}=(s_1, \ldots, s_k)$ avec $s_i\geq 0$ (et non plus $s_i>0$ comme précédemment). A cette différence près, les définitions et les formules du chapitre III restent encore valables et l'on a le

Théorème **(4.4)**. — *Pour $p=2$, $n\geq 1$, $\mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ est l'algèbre symétrique engendrée sur* R *par les éléments* $\mathrm{Sq}^{\mathrm{I}}i_n$ *avec* I *admissible et* $e(\mathrm{I})<n$.

Démonstrations des théorèmes (4.3) *et* (4.4)

Les deux théorèmes se démontrent par récurrence sur n. Les groupes de cohomologie commutent au changement de base plat. On peut donc supposer que $\mathrm{R}=\mathbf{F}_p$ (resp. $\mathbf{F}_2$). Le calcul pour $n=1$ a été effectué par M. Lazard dans ([40], théorème (12.1)) sous l'appellation de « cohomologie de l'analyseur classique à $\mathbf{F}_p$-coefficients ». A partir de là, on peut reprendre la démonstration du théorème (3.9) donnée par Serre [61] (voir [46] pour une démonstration de ce type valable en toutes caractéristiques). On considère donc la suite spectrale $\mathrm{E}_r\Rightarrow\mathbf{F}_p$ en cohomologie associée à la fibration, d'espace total E acyclique :

$$\mathrm{K}(\mathcal{O}, n-1)\to\mathrm{E}\to\mathrm{K}(\mathcal{O}, n).$$

Comme on ne tient pas à développer le formalisme des fibrations dans une catégorie de faisceaux (pour lequel on renvoie à [12]), on observera que cette suite spectrale peut être définie de manière simple en filtrant « par le nombre de barres » la bar-construction (non réduite) associée à l'algèbre différentielle graduée $\mathsf{Z}[K(\mathcal{O}, n-1)]$ des chaînes de $K(\mathcal{O}, n-1)$. On construit alors une suite spectrale abstraite E' faisant intervenir la cohomologie de $K(\mathcal{O}, n-1)$ (connue par l'hypothèse de récurrence), la cohomologie de $K(\mathcal{O}, n)$ telle qu'elle découle de la conclusion du théorème, et dont l'aboutissement est trivial (tout comme l'aboutissement de la suite spectrale $E_r \Rightarrow \mathsf{F}_p$, puisque l'espace total E associé à la fibration est acyclique). Le théorème de comparaison des suites spectrales permet maintenant de conclure.

Remarques **(4.5)**. — *a)* Les théorèmes (4.3) et (4.4) peuvent être démontrés de plusieurs autres manières. Tout d'abord, plutôt que de citer le résultat de Lazard pour $n=1$ et de procéder par récurrence, comme on l'a fait par commodité, on peut démontrer directement ces résultats à partir des théorèmes (3.8) et (3.9), en employant la technique utilisée par Lazard pour $n=1$. Rappelons d'autre part que les foncteurs dérivés gauches de Γ coïncident essentiellement avec les foncteurs dérivés gauches de l'algèbre symétrique : c'est ce qui résulte de la formule de décalage de Bousfield-Quillen ([54], (7.21), [34], I, (4.3.2)). Or on sait ([21], proposition (4.16)) que ces derniers coïncident avec les groupes d'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, ce qui fournit une autre méthode de calcul. Pour une dernière façon de calculer ces groupes, ou plutôt les foncteurs dérivés *droits* de l'algèbre symétrique qui leur correspondent par dualité, voir [52].

b) On a défini (remarque (2.26) *a)*) une graduation par le poids sur l'algèbre $\mathbf{H}^*(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$. On voit maintenant qu'elle coïncide essentiellement avec la graduation par la longueur sur les monômes admissibles. On vérifie en effet en examinant la construction explicite des puissances de Steenrod P^i (resp. Q^i, resp. Sq^i) que, pour toute classe de cohomologie $x \in \mathbf{H}^*(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ de poids j, et pour tout $i \geq 0$, $P^i x$ (resp. $Q^i x$, resp. $Sq^i x$) est de poids pj. Or la classe fondamentale i_n est de poids $p^0=1$ (voir (2.26) *a)*). Il en résulte que pour toute suite admissible I, $P^I i_n$ (resp. $Sq^I i_n$) est de poids p^k avec $k = l(I)$.

L'application $K(\Lambda, n) \to K(\mathcal{O}, n)$ associée à l'injection canonique $\alpha : \Lambda \to \mathcal{O}$ induit en cohomologie un homomorphisme de R-algèbres :

$$\lambda : \mathbf{H}^*(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O}) \to \mathbf{H}^*(K(\Lambda, n), \mathcal{O}) \simeq H^*(K(\mathsf{F}_p, n), R).$$

Il est caractérisé par ses valeurs sur les générateurs $P^J i_n$ (resp. $Sq^I i_n$) de la R-algèbre $\mathbf{H}^*(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$.

Or la classe fondamentale $i_n \in \mathbf{H}^n(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ s'envoie évidemment par λ sur la classe $i'_n \in H^n(K(\mathsf{F}_p, n), R) = \mathrm{Hom}(\mathsf{F}_p, R)$ correspondant à l'injection canonique. D'autre part, on a vu que $P^0 i_n \in \mathbf{H}^n(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ n'est autre que $F \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. Il s'envoie donc sur $\mathsf{F}_p \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{F} R \in \mathrm{Hom}(\mathsf{F}_p, R)$. Or $F\alpha = \alpha$, donc :

(4.8) $$\lambda(P^0 i_n) = i'_n.$$

Enfin la construction des opérations de Steenrod esquissée plus haut était calquée sur la construction usuelle ; il est donc bien clair que par passage aux fibres, on obtiendra les opérations de Steenrod usuelles de type $(\mathrm{R}, n, \mathrm{R}, n+s)$ correspondantes. Ainsi :

$$\lambda(\mathrm{P}^{\mathrm{J}} i_n) = \mathrm{P}^{\mathrm{J}_{\mathrm{red}}} i'_n \tag{4.9}$$

$$\lambda(\mathrm{Sq}^{\mathrm{J}} i_n) = \mathrm{Sq}^{\mathrm{J}_{\mathrm{red}}} i'_n \tag{4.10}$$

où $\mathrm{J}_{\mathrm{red}}$ est la suite admissible usuelle obtenue à partir de la suite admissible J en omettant les entiers s_i de valeur nulle.

Cette description de λ, jointe à la formule de Cartan, permet de conclure que les opérateurs P^i (resp. Sq^i) qu'on vient de définir sont stables. On sait en effet que ceci revient à vérifier que les homomorphismes S induits par la suspension en cohomologie $\mathrm{S}^* : \mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n+1), \mathcal{O}) \to \mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ satisfont à :

$$\mathrm{S}^*(\mathrm{P}^i i_{n+1}) = \mathrm{P}^i i_n. \tag{4.11}$$

Par définition S est induit en cohomologie par l'application :

$$\mathrm{S}^1 \wedge \mathrm{K}(\mathcal{O}, n) \xrightarrow{\mathscr{H}\wedge 1} \mathrm{K}(\Lambda, 1) \wedge \mathrm{K}(\mathcal{O}, n) \xrightarrow{\mu} \mathrm{K}(\mathcal{O}, n+1)$$

(voir (2.26)). Or μ se factorise en :

$$\mathrm{K}(\Lambda, 1) \wedge \mathrm{K}(\mathcal{O}, n) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{O}, 1) \wedge \mathrm{K}(\mathcal{O}, n) \xrightarrow{\nu_{1,n}} \mathrm{K}(\mathcal{O}, n+1)$$

où $\nu_{1,n}$ est l'application du cup-produit définie en (2.19). Remarquons que pour tout $m, n \geq 0$, la flèche $\nu_{m,n} : \mathrm{K}(\mathcal{O}, m) \wedge \mathrm{K}(\mathcal{O}, n) \to \mathrm{K}(\mathcal{O}, m+n)$ induit en cohomologie réduite un homomorphisme $\nu^* = \nu^*_{m,n}$ satisfaisant par définition du cup-produit à la formule :

$$\nu^*(i_{m+n}) = i_m \cup i_n.$$

On en déduit par naturalité des opérations de Steenrod, en utilisant la formule de Cartan (4.4), que pour tout $i \geq 0$:

$$\nu^*(\mathrm{P}^i i_{m+n}) = \mathrm{P}^i \nu^*(i_{m+n}) = \mathrm{P}^i(i_m \cup i_n) = \sum_k \mathrm{P}^k i_m \cup \mathrm{P}^{i-k} i_n. \tag{4.12}$$

Ces formules, pour $m=1$, jointes à la description de λ donnée en (4.9), impliquent les formules (4.11). On démontre de la même manière la stabilité des Q^i et des Sq^i en utilisant les formules Cartan correspondantes.

L'algèbre de Steenrod étendue et sa duale

Soit R un anneau de caractéristique première $p \neq 2$. On appelle R-algèbre de Steenrod étendue l' « algèbre » [1] associative graduée $\mathscr{A}_{\mathrm{R}}$ engendrée sur R par des éléments P^i de degré $2i(p-1)$ et Q^i de degré $2i(p-1)+1$ pour tout $i \geq 0$, satisfaisant

[1] $\mathscr{A}_{\mathrm{R}}$ n'est pas à proprement parler une R-algèbre, puisque l'image de R n'est pas centrale dans $\mathscr{A}_{\mathrm{R}}$, vu (4.13)-(4.14). On peut préférer le terme « anneau à opérateurs ».

aux relations engendrées par la relation d'Adem (3.18), par les trois autres relations d'Adem de ([27], théorème (9.8)) mentionnées précédemment, et par les relations :

(4.13) $\quad \mathrm{P}^i a = a^\sigma \mathrm{P}^i$

(4.14) $\quad \mathrm{Q}^i a = a^\sigma \mathrm{Q}^i$

pour tout $a \in \mathrm{R}$, σ désignant le Frobenius absolu sur R. On pose $\mathscr{A}_{\mathbf{F}_p} = \mathscr{A}$; c'est l'algèbre étudiée par Priddy dans [52].

A tout élément P de $\mathscr{A}_\mathrm{R}$, on associe le système projectif d'éléments :

$$\mathrm{P}i_n \in \mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$$

pour n variable, d'où, compte tenu de l'isomorphisme :

(4.15) $$\mathbf{H}^*(\Lambda^{\mathrm{st}}(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \simeq \varprojlim_n \mathbf{H}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$$

mentionné en (2.47), un élément :

$$\mathrm{P}i \in \mathbf{H}^*(\Lambda^{\mathrm{st}}(\mathcal{O}), \mathcal{O}).$$

On sait que ce dernier groupe classifie les opérations cohomologiques stables ; il est donc muni d'une structure multiplicative correspondant à la composition des opérations cohomologiques stables.

Théorème **(4.6)**. — *L'application* $\varphi : \mathscr{A}_\mathrm{R} \to \mathbf{H}^*(\Lambda^{\mathrm{st}}(\mathcal{O}), \mathcal{O})$ *définie par* $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}i$ *est un isomorphisme de* R-« *algèbres* ».

Démonstration. — C'est essentiellement une conséquence du théorème (4.3) et de l'isomorphisme (4.15). La relation (4.13) n'est autre que (1.5) lorsque $i = 0$, puisque P^0 s'identifie avec F. Le cas général se ramène au cas $i = 0$ de la façon suivante : pour tout $a \in \mathrm{R}$, l'élément $ai_n \in \mathbf{H}^n(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ est le cup-produit de la classe de cohomologie de degré 0, $a \in \mathbf{H}^0(\mathrm{K}(\mathcal{O}, n), \mathcal{O}) = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathcal{O}) = \mathrm{R}$, par la classe fondamentale i_n. Par la formule de Cartan, on a donc :

$$(\mathrm{P}^i a)\, i_n = \mathrm{P}^i(a \cup i_n) = \sum_j \mathrm{P}^j(a) \cup \mathrm{P}^{i-j}(i_n).$$

Or $\mathrm{P}^j(a) = 0$ pour $j > 0$ puisque a est de degré 0, et $\mathrm{P}^0(a) = a^\sigma$, d'où la relation. On démontre (4.14) de la même manière, au moyen de (4.5).

Pour terminer la démonstration, on vérifie l'analogue de la proposition (3.7), à savoir que les monômes admissibles P^I forment une base additive de $\mathscr{A}_\mathrm{R}$ (considéré comme R-module à gauche) ce que l'on fait comme pour la proposition (3.7).

Remarques **(4.7)**. — *a)* Lorsque $p = 2$, on définit de manière analogue une « algèbre » associative $\mathscr{A}_\mathrm{R}$: celle-ci est engendrée par des éléments Sq^i de degré $i \geq 0$, satisfaisant aux relations d'Adem (3.21) et aux relations $\mathrm{Sq}^i a = a^\sigma \mathrm{Sq}^i$. Le théorème (4.6) reste valable, *mutatis mutandis.*

b) On vient de montrer que toutes les classes de cohomologie stables sont combinaisons linéaires de celles qui s'obtiennent à partir de la classe fondamentale en lui appliquant des opérations de Steenrod itérées. La version stable de la remarque (4.5) *b)* peut donc être formulée de la manière suivante : les seules classes de cohomologie stables non nulles de type $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ ont pour poids une puissance de p. Autrement dit les $L_*^{st}\Gamma^i(\mathbf{F}_p)$ (resp. $R^{st}\mathrm{Sym}^i(R)$) sont nuls pour $i \neq p^t$ $(t \geq 0)$. De plus, considérons le scindage :

$$\mathscr{A}_R \simeq \bigoplus_{i \geq 0} \mathscr{A}_R^{(i)}$$

$\mathscr{A}_R^{(i)}$ désignant la composante de $\mathscr{A}$ engendrée par les monômes de longueur i (à la différence du cas classique, les relations d'Adem sont maintenant homogènes pour la fonction longueur $l(\ )$) ; l'application φ est compatible à cette graduation et à la graduation par le poids sur les dérivées droites de l'algèbre symétrique, et la i-ème composante de φ est donc un isomorphisme :

$$\textbf{(4.16)} \qquad \varphi_i : \mathscr{A}_R^{(i)} \xrightarrow{\approx} R^{*\,st}\mathrm{Sym}^{p^i}(R).$$

Il sera commode, dans ce qui suit, de considérer $\mathscr{A}_R$ comme R-algèbre au sens usuel, au moyen de la formule :

$$\textbf{(4.17)} \qquad r.P = P.r = rP \quad \text{pour} \quad r \in R,\ P \in \mathscr{A}_R.$$

Autrement dit, la structure de R-module à gauche est celle qui est induite par la structure multiplicative de $\mathscr{A}_R$, alors que la structure de R-module à droite en diffère, vu les relations (4.13), (4.14). On appelle ceci la structure de R-algèbre *banale* sur $\mathscr{A}_R$ et c'est toujours elle que l'on considère, sauf mention expresse du contraire. Si l'on veut préserver la multiplication à droite de $\mathscr{A}_R$ par des scalaires dans R, on doit considérer $\mathscr{A}_R$ comme un (R, R)-bimodule, ou mieux une (R, R)-bi-« algèbre » (ce dernier terme n'étant pas pris dans le sens usuel d'algèbre muni d'une comultiplication), la multiplication à gauche par un scalaire étant définie comme précédemment, et la multiplication à droite par les relations qui découlent de (4.13), (4.14), c'est-à-dire :

$$\textbf{(4.18)} \qquad Pr = r^{\sigma^i}P$$

pour $P \in \mathscr{A}_R^{(i)}$, $r \in R$. On appellera ceci la structure d'algèbre *tordue* sur $\mathscr{A}_R$. Remarquons à ce propos que pour $R = \mathbf{F}_p$, la situation est plus simple, puisque le Frobenius σ est l'application identique. Dans ce cas les structures banale et tordue coïncident.

Un des avantages de la structure banale est qu'elle commute au changement des scalaires. En particulier, on a un isomorphisme de R-modules :

$$\theta_R : R \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathscr{A} \xrightarrow{\approx} \mathscr{A}_R$$

défini par $\theta_R(r \otimes P) = rP$. On prendra garde que θ_R n'est pas compatible aux structures multiplicatives.

On a vu plus haut que les accouplements du cup-produit :

$$\nu_{m,n} : K(\mathcal{O}, m) \wedge K(\mathcal{O}, n) \to K(\mathcal{O}, m+n)$$

induisaient en cohomologie des applications ν^* définies par les formules (4.11) et (4.12), conséquences immédiates de la formule de Cartan. Il est donc aisé de décrire la version stabilisée de ces formules. Soit en effet $\mathscr{A}_R \otimes_R \mathscr{A}_R$ le produit tensoriel pour la structure banale de R-algèbre sur $\mathscr{A}_R$ (on prendra garde que ce choix de structure conduit à des formules du type :

$$Pr \otimes Q = P \otimes r^{\sigma^i} Q$$

pour $P, Q \in \mathscr{A}_R$, $r \in R$ et $l(P) = i$). Tout comme dans le cas classique, on observe que la comultiplication :

(4.18) $$\Delta : \mathscr{A}_R \to \mathscr{A}_R \otimes_R \mathscr{A}_R$$

obtenue en stabilisant les ν^* (et en utilisant l'isomorphisme φ du théorème (4.6)) est compatible aux structures de R-algèbre banale sur $\mathscr{A}_R$ et $\mathscr{A}_R \otimes \mathscr{A}_R$. Δ est donc caractérisé par les formules suivantes, où l'on pose par convention $P^t = Sq^t = 0$ pour $t < 0$.

(4.19) $$\Delta(P^i) = \sum_{k \geq 0} P^k \otimes P^{i-k}$$

(4.20) $$\Delta(Q^i) = \sum_{k \geq 0} (Q^k \otimes P^{i-k} + P^k \otimes Q^{i-k})$$

(resp. :

(4.21) $$\Delta(Sq^i) = \sum_{k \geq 0} Sq^k \otimes Sq^{i-k}$$

lorsque $p = 2$).

Les formules (4.19)-(4.21) sont des conséquences immédiates de (4.4)-(4.6). Il convient également de préciser quelle est la version stabilisée de l'homomorphisme λ (4.9) ; on désigne par A_R le quotient de $\mathscr{A}_R$ par l'idéal à gauche J_R engendré par l'élément $P^0 - 1$. A_R n'est pas une algèbre (à moins que $R = \mathbf{F}_p$, auquel cas J est bilatère), mais possède notamment une structure de R-module induite par la structure de R-module banale sur $\mathscr{A}_R$. Soit $\Psi : A_R \to H^*(\mathbf{F}_p^{st}(\mathbf{F}_p), R)$ l'application définie sur la classe $[P^I] \in A_R$ d'un élément $P^I \in \mathscr{A}_R$ par la formule :

(4.22) $$\Psi([P^I]) = P^{I_{\mathrm{red}}} i'$$

où Pi' est la limite projective des $Pi'_n \in H^*(K(\mathbf{F}_p, n), R)$ (pour les notations i'_n et I^{red}, voir (4.9)-(4.10)). On a vu dans *loc. cit.* que le diagramme :

(4.23)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_R & \xrightarrow[\approx]{\varphi} & \mathbf{H}^*(\Lambda^{st}(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ A_R & \xrightarrow[\approx]{\Psi} & H^*(\mathbf{F}_p^{st}(\mathbf{F}_p), R) \end{array}$$

était commutatif, la flèche verticale de gauche étant la projection canonique, que l'on notera également λ. D'autre part les formules (4.9), (4.10) montrent que λ envoie un monôme admissible sur un monôme admissible et que tous les monômes admissibles au sens classique sont dans l'image de λ. Il en résulte que Ψ est un isomorphisme de

R-modules gradués. Ceci est d'ailleurs une assertion classique pour $R=\mathsf{F}_p$; $A_R=A$ est alors l'algèbre de Steenrod classique et Ψ' n'est autre que l'isomorphisme (3.22). Le cas général s'en déduit directement par extension des scalaires.

Précisons la structure de λ; soit $\lambda_i : \mathscr{A}_R^{(i)} \to A_R$ la restriction de λ à la composante $\mathscr{A}_R^{(i)}$ de $\mathscr{A}_R$, et notons $A_R^{(i)}$ le sous-R-module de A_R engendré par les monômes admissibles classiques (c'est-à-dire correspondant à des suites ne comprenant que des entiers strictement positifs) P^I de longueur $\leq i$. Les formules (4.9), (4.10) impliquent que $A_R^{(i)}$ est l'image de λ_i dans A_R, et que l'image d'un monôme admissible P^I est un monôme admissible classique $P^{I_{\mathrm{red}}}$. Le lemme suivant est désormais évident :

Lemme **(4.8)**. — *L'application* $\lambda_i : \mathscr{A}_R^{(i)} \to A_R^{(i)}$ *est un isomorphisme de* R-*modules.*

Remarquons d'autre part que l'on est maintenant en mesure d'expliciter le diagramme induit en cohomologie stable par le diagramme (2.40). C'est le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_R\otimes A_R & A_R \arrow[l, "\partial"'] \\
A_R\otimes\mathscr{A}_R \arrow[u, "1\otimes\lambda"] & \mathscr{A}_R \arrow[l, "\bar{\Delta}"'] \arrow[u, "\lambda"'] \arrow[dl, "\Delta"] \\
\mathscr{A}_R\otimes_R\mathscr{A}_R \arrow[u, "\lambda\otimes 1"] &
\end{tikzcd}$$

où Δ est défini ci-dessus (4.19)-(4.21). Ces formules suffisent à caractériser $\bar{\Delta}$ et ∂, compte tenu de la surjectivité de λ et de la commutativité du diagramme. En particulier la flèche $\bar{\Delta}$ fait de $\mathscr{A}_R$ un A_R-comodule à gauche, dont la structure est caractérisée par des formules identiques à celles-là, mais où les tenseurs qui interviennent sont interprétés comme des éléments de $A_R\otimes\mathscr{A}_R$.

Enfin, lorsque l'on restreint Δ à la composante $\mathscr{A}_R^{(i)}$ de $\mathscr{A}_R$, on obtient une comultiplication (encore notée Δ) $\mathscr{A}_R^{(i)} \to \mathscr{A}_R^{(i)}\otimes\mathscr{A}_R^{(i)}$, d'où un diagramme commutatif :

(4.24)
$$\begin{tikzcd}
A_R\otimes A_R & A_R \arrow[l, "\partial"'] \\
A_R\otimes A_R^{(i)} \arrow[u, hook] & A_R^{(i)} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u, hook] \\
A_R\otimes\mathscr{A}_R^{(i)} \arrow[u, "1\otimes\lambda_i", "\wr"'] & \mathscr{A}_R^{(i)} \arrow[l, "\bar{\Delta}"'] \arrow[u, "\lambda_i"', "\wr"] \arrow[dl, "\Delta"] \\
\mathscr{A}_R^{(i)}\otimes\mathscr{A}_R^{(i)} \arrow[u, "\lambda_i\otimes 1"] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\mathscr{A}_{\mathrm{R}}^{(i)}$ est muni d'une structure de A_{R}-comodule à gauche et celle-ci s'identifie par transport de structure à la structure de A_{R}-comodule induite sur $\mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{(i)}$ par restriction à $\mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{(i)}$ de la comultiplication classique ∂ sur A_{R}. Notons pour terminer que la commutativité du diagramme entraîne que l'application ∂' se factorise en :

$$\mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{(i)} \to \mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{(i)} \otimes \mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{(i)} \to \mathrm{A}_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{(i)}.$$

Il est donc loisible de considérer $\mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{(i)}$ comme une cogèbre (isomorphe à $\mathscr{A}_{\mathrm{R}}^{(i)}$).

On a vu (proposition (3.12)) que l'algèbre A_{R} était R-duale d'une F_p-algèbre A_* de structure élémentaire. Il reste à décrire le diagramme dont (4.24) est le R-dual. Puisque l'énoncé commute au changement de base, on se bornera au cas où $\mathrm{R} = \mathsf{F}_p$. Soit $\mathrm{A}_*^{(i)}$ l'algèbre duale de la cogèbre $\mathrm{A}_{\mathsf{F}_p}^{(i)} = \mathrm{A}^{(i)}$. L'isomorphisme φ_i (4.16) s'identifie, *via* l'application λ_i du lemme (4.8), au transposé d'un isomorphisme :

$$\textbf{(4.25)} \qquad \varphi_i' : \mathrm{L}^{*\,\mathrm{st}}\Gamma^{p^i}(\mathsf{F}_p) \xrightarrow{\approx} \mathrm{A}_*^{(i)}.$$

D'autre part $\mathrm{A}^{(i)}$ est une sous-cogèbre de A et donc :

$$\textbf{(4.26)} \qquad \mathrm{A}_*^{(i)} \simeq \mathrm{A}_*/\mathrm{A}_{(i)}^{\perp}$$

où $\mathrm{A}_{(i)}^{\perp}$ désigne l'orthogonal de $\mathrm{A}^{(i)}$ pour l'accouplement de dualité sur A. De même $\mathscr{A}_*^{(i)}$ désigne l'algèbre duale de la cogèbre $\mathrm{A}_{\mathsf{F}_p}^{(i)} = \mathrm{A}^{(i)}$ et ces deux algèbres sont évidemment isomorphes.

Lemme **(4.9)**. — *Pour tout* $i \geq 0$, $\mathrm{A}_i^{\perp}$ *est l'idéal de* A_* *engendré par les éléments* ξ_j, τ_k $(j>i,\ k\geq i)$ (resp. *les éléments* ξ_j *tels que* $j>i$ *si* $p=2$).

Démonstration. — Dans la correspondance définie dans ([65], p. 85) entre les suites admissibles I satisfaisant aux conditions d'admissibilité (3.30), (3.35) et les suites d'entiers naturels $\mathrm{I}' = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, r_2, \ldots)$ soumis à la seule condition :

$$\varepsilon_i = 0, 1 \quad \text{pour tout } i,$$

une suite I de longueur $\leq i$ correspond à une suite I′ satisfaisant à :

$$\varepsilon_s = 0 \quad \text{pour tout} \quad s>i,$$

$$r_t = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \geq i.$$

Compte tenu de ce dictionnaire, le lemme est une conséquence immédiate du lemme 8 de [49]. On obtient donc, vu la proposition (3.12), l'énoncé suivant :

Proposition **(4.10)**. — *Pour tout* $i \geq 0$, *on a, pour* $p \neq 2$, *un isomorphisme de* F_p*-algèbres* :

$$\textbf{(4.27)} \qquad \mathrm{A}_*^{(i)} \simeq \mathrm{Sym}(\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_i) \otimes_{\mathsf{F}_p} \Lambda(\widetilde{\tau}_0, \ldots, \widetilde{\tau}_{i-1})$$

où $\deg(\widetilde{\xi}_s) = 2p^s - 2$, $\deg(\widetilde{\tau}_t) = 2p^t - 1$ (resp. $\mathrm{A}_*^{(i)} \simeq \mathrm{Sym}(\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_i)$ *où* $\deg \xi_i = 2^i - 1$ *lorsque* $p=2$). *De plus, soit* $\lambda_*^{(i)} : \mathrm{A}_* \to \mathrm{A}_*^{(i)}$ *la transposée de l'inclusion* $\lambda^{(i)} : \mathrm{A}^{(i)} \to \mathrm{A}$; *alors* :

(4.28) $$\lambda_*^{(i)}(\xi_s)=\begin{cases}\widetilde{\xi}_s & s\leq i\\ 0 & s>i\end{cases}$$

(4.29) $$\lambda_*^{(i)}(\tau_t)=\begin{cases}\widetilde{\tau}_t & t<i\\ 0 & t\geq i\end{cases}$$

la formule (4.28) *demeurant valable en caractéristique* 2.

Remarque **(4.11)**. — La sous-« algèbre » des éléments de degré 0 de $\mathscr{A}_R$ est engendrée sur R par P^0 et elle s'identifie, compte tenu des relations (4.13) pour $i=0$, à l'anneau non commutatif H des endomorphismes de $\mathcal{O}$. Cette « algèbre » opère sur $\mathscr{A}_R$ tout entier par multiplication à gauche (resp. à droite) dans $\mathscr{A}_R$, ce qui correspond évidemment à la composition à droite (resp. à gauche) des opérations cohomologiques par les opérations de degré 0 correspondantes.

En particulier, on peut considérer la multiplication à gauche (resp. à droite) par l'élément P^0. C'est une opération σ-linéaire (resp. linéaire) pour la structure de R-module banale de $\mathscr{A}_R$, et puisque P^0 est de poids p, sa restriction à $\mathscr{A}_R^{(i)}$ est de la forme $\mathscr{A}_R^{(i)}\to\mathscr{A}_R^{(i+1)}$. Ces opérations sont caractérisées par le fait qu'elles envoient un monôme admissible P de $\mathscr{A}_R^{(i)}$ sur $PP^0=P^0P$. En particulier, la multiplication à droite par P^0 s'obtient par R-dualité à partir d'une application $f: A_*^{(i+1)}\to A_*^{(i)}$. Celle-ci n'est autre que la projection naturelle définie, avec les notations de (4.27), par $f(\widetilde{\xi}_{i+1})=f(\widetilde{\tau}_i)=0$.

5. Les termes initiaux de la suite spectrale fondamentale

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter les termes E^1 et E^2 dans la suite spectrale (3.13). Il résulte de la remarque (4.7) *b)*, et de la description en (3.14) des termes E^1, que tous ces termes sont nuls lorsque le poids i n'est pas une puissance de p. Introduisons donc la terminologie suivante : on notera :

$${}^tE_{**}^{*}\Rightarrow H(\mathsf{F}_p\overset{l}{\otimes}_{\mathsf{F}_p^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p)}(\Gamma^{p^t})^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p))$$

(resp. ${}^tE_*^{**}\Rightarrow \mathrm{Ext}^*(\mathcal{O},\mathcal{O})_{p^t}$) la suite spectrale (3.13) (resp. (3.15)) de poids $i=p^t$, pour tout $t\geq 0$. Compte tenu de l'isomorphisme transposé de (3.14) et de l'isomorphisme (4.25), on peut maintenant préciser les termes E^1 et E^2 de la suite spectrale fondamentale : pour tout $t\geq 0$ on a :

(5.1) $${}^tE_{r,s}^1\simeq k_s(A_*^{\otimes r}\otimes A_*^{(t)})$$

(5.2) $${}^tE_{r,s}^2\simeq k_s\mathrm{Tor}_r^{A_*}(\mathsf{F}_p, A_*^{(t)})$$

$A^{(t)}$ étant munie de la structure de A-module dont la transposée est la structure de A-comodule sur $A^{(t)}$ décrite dans le diagramme (4.24). Le théorème (3.12) et l'isomorphisme (4.27) permettent de décrire explicitement ces termes. On a notamment, pour $p \neq 2$:

$$({5.3}) \qquad {}^t\mathrm{E}^2_{r,s} \simeq k_s \ \mathrm{Tor}_r^{\mathrm{Sym}(\xi_1,\ldots)\otimes\Lambda(\tau_0,\ldots)}(\mathsf{F}_p, \mathrm{Sym}(\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_t)\otimes\Lambda(\widetilde{\tau}_0, \ldots, \widetilde{\tau}_{t-1}))$$

(resp. pour $p=2$:

$$({5.4}) \qquad {}^t\mathrm{E}^2_{r,s} \simeq k_s \ \mathrm{Tor}_r^{\mathrm{Sym}(\xi_1,\ldots)}(\mathsf{F}_2, \mathrm{Sym}(\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_t))).$$

Proposition (**5.1**). — *Pour* $p \neq 2$, $t \geq 0$, *on a un isomorphisme de modules bigradués* ${}^t\mathrm{E}^2_{**} \simeq \Lambda(\overline{\xi}_{t+1}, \overline{\xi}_{t+2}, \ldots)\otimes\Gamma(\overline{\tau}_t, \overline{\tau}_{t+1}, \ldots)$, *où* $\overline{\xi}_m$ *est de bidegré* $(1, 2p^m-2)$ *et* $\overline{\tau}_n$ *de bidegré* $(1, 2p^n-1)$ (*d'où plus généralement* $\gamma_j(\overline{\tau}_n)$ *de bidegré* $(j, 2jp^n-j)$). *Pour* $p=2$, *on a* ${}^t\mathrm{E}^2_{**} \approx \Lambda(\overline{\xi}_{t+1}, \overline{\xi}_{t+2}, \ldots)$, *où* $\overline{\xi}_m$ *est de bidegré* $(1, 2^m-1)$.

Démonstration. — On calcule le terme (5.3) en résolvant F_p à la Koszul par le $\mathrm{Sym}(\xi_1, \ldots)\otimes\Lambda(\tau_0, \ldots)$-module gradué :

$$\mathrm{X}_* = \mathrm{Sym}(\xi_1, \ldots)\otimes\Lambda(\tau_0, \ldots)\otimes\Lambda(\overline{\xi}_1, \ldots)\otimes\Gamma(\overline{\tau}_0, \ldots)$$

muni de la différentielle d définie par :

$$d(\xi_m) = d(\tau_n) = 0$$
$$d(\overline{\xi}_m) = \xi_m$$
$$d(\gamma_j(\overline{\tau}_n)) = \tau_n\gamma_{j-1}(\overline{\tau}_n)$$

(voir [13]).

Par produit tensoriel sur $\mathrm{Sym}(\xi_1, \ldots)\otimes\Lambda(\tau_0, \ldots)$ avec

$$\mathrm{Sym}(\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_t)\otimes\Lambda(\widetilde{\tau}_0, \ldots, \widetilde{\tau}_{t-1})$$

on obtient le complexe :

$$\mathrm{Sym}(\xi_1, \ldots, \xi_t)\otimes\Lambda(\tau_0, \ldots, \tau_{t-1})\otimes\Lambda(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots)\otimes\Gamma(\overline{\tau}_0, \overline{\tau}_1, \ldots)$$

muni de la différentielle définie par :

$$({5.5}) \qquad \begin{aligned} & d(\xi_m) = d(\tau_n) = 0 \\ & d(\overline{\xi}_m) = \begin{cases} \xi_m & m \leq t \\ 0 & m > t \end{cases} \\ & d(\overline{\xi}_n) = \begin{cases} \tau_n & n < t \\ 0 & n \geq t \end{cases} \end{aligned}$$

Si l'on récrit ce complexe sous forme du produit tensoriel du complexe :

$$(\mathrm{Sym}(\xi_1, \ldots, \xi_t)\otimes\Lambda(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_t))\otimes(\Lambda(\tau_0, \ldots, \tau_{t-1})\otimes\Gamma(\overline{\tau}_0, \ldots, \overline{\tau}_{t-1}))$$

muni de la différentielle définie par les formules (5.5) et du complexe :

$$\Lambda(\overline{\xi}_{t+1}, \overline{\xi}_{t+2}, \ldots)\otimes\Gamma(\overline{\tau}_t, \overline{\tau}_{t+1}, \ldots)$$

muni de la différentielle nulle, on obtient immédiatement le résultat par passage à l'homologie, le premier de ces deux complexes étant acyclique.

Remarques **(5.2)**. — *a)* Il est facile de décrire explicitement les générateurs $\bar{\xi}_m$ et $\gamma_j(\bar{\tau}_n)$ de ${}^t\mathrm{E}^2_{**}$, puisque ${}^t\mathrm{E}^2_{**}$ est l'homologie de ${}^t\mathrm{E}^1_{**}$ (pour la différentielle d^1 de la suite spectrale), et que l'on connaît une description explicite du terme E^1 (5.1). On trouve que $\bar{\xi}_m$ (resp. $\gamma_j(\bar{\tau}_n)$) est la classe (dans E^2) du cycle $\xi_m \otimes 1 \in k_{2p^m-2}(\mathrm{A}_* \otimes \mathrm{A}^{(t)}_*) = {}^t\mathrm{E}^1_{1,2p^m-2}$ (resp. du cycle $\tau_n \otimes \ldots \otimes \tau_n \otimes 1 \in k_{2jp^n-j}(\mathrm{A}_*^{\otimes j} \otimes \mathrm{A}^{(t)}_*) = {}^t\mathrm{E}^1_{j,2jp^n-j}$).

En particulier $\mathrm{A}^{(0)}_* = \mathsf{F}_p$, ${}^0\mathrm{E}^1_{**} = \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{A}_*)$ et ${}^0\mathrm{E}^2_{**} = \mathrm{H}_*(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{A}_*))$ (avec les notations de la remarque (3.1) *b)*) et, si l'on utilise la notation traditionnelle pour des éléments de la bar-construction réduite $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{A}_*)$ associée à une algèbre différentielle A_*, on peut écrire que $\bar{\xi}_m$ (resp. $\gamma_j(\bar{\tau}_n)$) est la classe dans ${}^0\mathrm{E}^2_{**}$ du cycle $[\xi_m]$ (resp. $[\tau_n, \ldots, \tau_n]$).

b) L'action de $\mathrm{End}(\mathcal{O})$ sur $\mathscr{A}_\mathrm{R}$ décrite dans la remarque (4.11) provient d'une action sur le foncteur dérivé stable $\mathrm{RSym}^{\mathrm{st}}(\mathrm{R})$. En particulier, l'application f qui y est décrite provient d'une application $f : (\Gamma^{p^{t+1}})^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p) \to (\Gamma^{p^t})^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p)$ compatible à la structure de $\mathsf{F}^{\mathrm{st}}_p(\mathsf{F}_p)$-module. On a donc un morphisme de suites spectrales :

$$\begin{tikzcd}
{}^{t+1}\mathrm{E}^*_{**} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{H}(\mathsf{F}_p \overset{l}{\otimes}_{\mathsf{F}^{\mathrm{st}}_p(\mathsf{F}_p)} (\Gamma^{p^{t+1}})^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p)) \arrow[d, "1 \overset{l}{\otimes} f"] \\
{}^t\mathrm{E}^*_{**} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{H}(\mathsf{F}_p \overset{l}{\otimes}_{\mathsf{F}^{\mathrm{st}}_p(\mathsf{F}_p)} (\Gamma^{p^t})^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p))
\end{tikzcd}$$

Or on connaît la description de f au niveau E^1 : elle est conséquence immédiate de (5.1) et de la remarque (4.11). Il est facile d'en déduire ce qu'est f au niveau E^2 en reprenant la démonstration précédente. On trouve que $f : {}^{t+1}\mathrm{E}^2 \to {}^t\mathrm{E}^2$ s'identifie via la proposition (5.1) à l'inclusion naturelle.

En caractéristique 2, le théorème principal (1.3) est une conséquence directe de la proposition (5.1). En effet, tous les termes de l'algèbre ${}^t\mathrm{E}^2_{**} \simeq \Lambda(\bar{\xi}_{t+1}, \ldots)$ sont de degré total pair, puisqu'il en est ainsi des générateurs $\bar{\xi}_m$.

Ainsi la suite spectrale fondamentale est dégénérée (puisque toute différentielle dans la suite spectrale est de degré total -1), d'où l'isomorphisme de modules gradués :

(5.6) $$\mathrm{H}_*(\mathsf{F}_2 \overset{l}{\otimes}_{\mathsf{F}^{\mathrm{st}}_2(\mathsf{F}_2)} (\Gamma^{2^t})^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_2)) \simeq \Lambda(\bar{\xi}_{t+1}, \bar{\xi}_{t+2}, \ldots)$$

(chacun des générateurs $\bar{\xi}_m$ du terme de gauche étant gradué par le degré total 2^m). La suite R-duale de la suite spectrale fondamentale (décrite dans la remarque (3.6) *b)*) est également dégénérée et l'isomorphisme (5.6) induit un isomorphisme de R-modules gradués :

(5.7) $$\Lambda_\mathrm{R}(\xi^*_{t+1}, \xi^*_{t+2}, \ldots) \simeq \mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})_{2^t}$$

ξ^*_m désignant l'élément de degré 2^m transposé de $\bar{\xi}_m$. On a donc démontré la proposition suivante :

Proposition **(5.3).** — *Lorsque* $p=2$, *on a, sous les hypothèses* A1 *et* A2, *un isomorphisme de* R*-modules gradués* :

$$\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O},\mathcal{O}) \simeq \bigoplus_{t\geq 0} \Lambda_{\mathrm{R}}(\xi^*_{t+1}, \xi^*_{t+2}, \ldots)$$

avec $\deg(\xi^*_m)=2^m$.

Il ne reste plus qu'à mettre cette proposition sous la forme de l'énoncé du théorème (1.3). Si l'on se reporte à la définition des éléments ξ^*_m, on peut expliciter l'action à gauche et à droite de $\mathrm{H}=\mathrm{End}(\mathcal{O})$ sur $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O},\mathcal{O})$. Désignons pour éviter toute confusion, par $\xi^*_{s,j}$ (pour $s>j\geq 0$) le terme ξ^*_s dans la $(j+1)$-ième composante $\Lambda_{\mathrm{R}}(\xi^*_{j+1},\ldots)$ de $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O},\mathcal{O})$. L'action de H est caractérisée par celle de $\mathrm{F}\in\mathrm{H}$ et celle-ci s'obtient par transposition, en ce qui concerne la multiplication à droite, à partir de la description du morphisme f donnée dans la remarque (5.2) *b)*. On calcule de manière similaire la multiplication à gauche par F. En définitive, on obtient les relations :

$$\mathbf{(5.8)}\qquad \mathrm{F}^r\xi^*_{s,0}=\xi^*_{s,0}\mathrm{F}^r=\begin{cases}\xi^*_{s,r} & \text{pour } r<s\\ 0 & \text{pour } r\geq s\end{cases}$$

Autrement dit, pour tout $j>0$, $\mathrm{Ext}^{2j}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ est le $(\mathrm{H},\mathrm{H}^0)$-module monogène engendré par l'élément $\xi^{*\alpha_1}_{1,0}\ldots\xi^{*\alpha_n}_{n,0}$ de degré $2j$, les entiers $\alpha_i=0, 1$ étant caractérisés par la décomposition 2-adique de j :

$$j=\sum_{i\geq 0}\alpha_{i+1}2^i.$$

Ceci termine la traduction, compte tenu des relations (5.8).

Structures multiplicatives

La suite spectrale fondamentale a malheureusement un comportement plus compliqué en caractéristique impaire. Nous verrons par la suite que les seules différentielles non nulles sont d_1 et d_{p-1}, et celles-ci ne coïncidant plus en dehors du cas envisagé ci-dessus, le terme E^2 calculé dans la proposition (5.1) ne pourra plus être identifié avec l'aboutissement.

Pour pouvoir progresser dans l'étude de cette suite spectrale, il faut remarquer qu'elle possède une structure plus riche que celle envisagée jusqu'à présent. Comme on l'a remarqué dans les rappels sur la bar-construction (chapitre III), le terme ${}^t\mathrm{E}^2_{**}\simeq k_*\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}_*}(\mathbf{F}_p, \mathrm{A}^{(t)}_*)$ de la suite spectrale est muni d'une structure naturelle d'algèbre (compatible avec la bigraduation) induite par la structure d'algèbre commutative graduée de A_*. C'est d'ailleurs celle-ci que l'on a pris soin de faire figurer dans l'énoncé et dans la démonstration de la proposition (5.1). On souhaite maintenant démontrer que la suite spectrale (3.13) tout entière est munie d'une structure multiplicative induisant sur le terme E^2 celle que l'on a déjà explicitée. Comme on l'a vu, le terme $\mathbf{F}_p\overset{l}{\otimes}_{\mathbf{F}_p^{\mathrm{st}}(\mathbf{F}_p)}\Gamma^{p^t}(\mathbf{F}_p)$ dont l'homologie est l'aboutissement est bien du type « bar-construction » mais on ne peut malheureusement pas lui appliquer directement les considérations du chapitre III. En effet l'algèbre associative $\mathbf{F}_p^{\mathrm{st}}(\mathbf{F}_p)$ n'est pas commutative, condition nécessaire pour définir une multiplication par le procédé (3.9).

Il existe deux façons de contourner cet obstacle. La plus directe est d'observer que l'algèbre $\mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p)$ possède de très bonnes propriétés de commutativité à homotopie près (voir la remarque (2.16) *c)* et la proposition (2.18)). Or on trouve en ([14], proposition (3.4)) une liste de conditions de commutativité à homotopie près que doit satisfaire une R-algèbre différentielle graduée A augmentée vers R pour qu'il soit possible de définir sur la bar-construction B(A) une structure d'algèbre différentielle, compatible avec celle de A. Il reste alors à vérifier que l'algèbre $\mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p)$ satisfait bien à ces conditions, ce que l'on peut faire en utilisant la représentabilité des cochaînes par les objets d'Eilenberg-Mac Lane correspondants, pour se ramener à vérifier une assertion de commutativité du cup-produit des cochaînes d'un espace, à homotopies supérieures près. On trouvera la vérification de cette dernière assertion dans l'article [47] de Milgram, sous le nom de « higher associating homotopies ».

Ces conditions de commutativité sont malheureusement compliquées à écrire, ce qui donne un caractère assez fastidieux à la démonstration qui vient d'être esquissée. Aussi procéderons-nous d'une autre manière, qui a l'avantage d'être plus conceptuelle. Elle consiste à remplacer la résolution de Mac-Lane $M_*(P)$ d'un R-module, employée au chapitre III dans la construction de la suite spectrale fondamentale, par une nouvelle résolution canonique pour laquelle la structure multiplicative est plus facile à définir. La construction de cette nouvelle résolution, de sa structure multiplicative, et sa comparaison avec $M_*(P)$, feront l'objet du prochain chapitre. On conseille au lecteur d'omettre celui-ci en première lecture en se contentant de l'assertion qu'une telle structure multiplicative existe, compatible avec celle que l'on connaît sur le terme E^2. On y fait librement usage des notions rappelées dans l'appendice.

6. Une nouvelle résolution canonique.

Soit (T, R) un topos annelé. Au foncteur oubli

$$F : (\text{R-modules}) \to (\text{ensembles pointés})$$

et à son adjoint à gauche R^+ correspondent des transformations naturelles :

$$\Phi : R^+F \to \mathrm{id} \tag{6.1}$$

$$\Psi : \mathrm{id} \to FR^+. \tag{6.2}$$

On désigne, pour tout R-module P, par $(R^+, F)P$ la construction simpliciale standard correspondante (voir [29], App., [34], I, (1.5)) :

$$R^{+(m+1)}P \dots \overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\rightarrow}}}} R^+R^+P \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{\rightarrow}} R^+P. \tag{6.3}$$

Le complexe associé $[(R^+, F)P]^\sim$ est augmenté par $\Phi(P)$ vers P et il fournit une résolution fonctorielle de P qui ne satisfait pas à la condition P4 du chapitre III. Pour tout $n \geq 0$, on définit un R-module bisimplicial $N(P, n) = (R^+, F)K(P, n)$ en résolvant chaque composante du R-module simplicial $K(P, n)$ comme en (6.3). De manière précise, posons :

$$N(P, n)_{i,j} = (R^+)^{i+1}K(P, n)_j \tag{6.4}$$

où les opérateurs face horizontaux (correspondant au premier indice) sont définis comme en (6.3) et les opérateurs verticaux sont induits par la structure simpliciale de $K(P, n)$. Soient $\mathcal{N}(P, n)$ le bicomplexe $N(P, n)^{\sim}$ associé à $N(P, n)$ et $\int\mathcal{N}(P, n)$ le complexe simple correspondant. Pour tout $j \leq 0$, le complexe associé au module simplicial $N(P, n)_{*, j}$ est une résolution de $K(P, n)_j$, ce qui implique le lemme suivant, compte tenu de (2.3):

Lemme **(6.1)**. — *$\int\mathcal{N}(P, n)$ est une résolution de* $P[n]$ (P *concentré en degré* n).

Remarques **(6.2)**. — *a)* On notera $\Phi : \int\mathcal{N}(P, n) \to P[n]$ l'homomorphisme d'augmentation correspondant.

b) Pour $n = 0$, $\int\mathcal{N}(P, n)$ coïncide essentiellement avec la résolution de P associée à (6.3).

c) Soit $\mathbf{N}(P, n) = \Delta N(P, n)$ l'objet simplicial diagonal associé à $N(P, n)$. La transformation naturelle Φ induit un homomorphisme simplicial $\Phi : \mathbf{N}(P, n) \to K(P, n)$. Par le théorème d'Eilenberg-Zilber-Cartier (2.16), le complexe associé $\mathbf{N}(P, n)^{\sim}$ est homotopiquement équivalent à $P[n]$ et $N(P, n)$ est une résolution simpliciale de $K(P, n)$ au sens de ([21], (4.1)).

d) Soient P et Q des R-modules de T. Il résulte du lemme que, pour $n \geq 0$ fixé, la suite spectrale d'hypercohomologie obtenue en filtrant le bicomplexe $\mathcal{N}(P, n)$ par le premier indice est de la forme suivante :

(6.5) $$E_1^{p,q}(n) = \mathbf{Ext}^{q+n}(R^{+(p+1)}K(P, n)^{\sim}, Q) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(P, Q),$$

une fois réindexée pour tenir compte du lemme (6.1). Observons que, par définition des groupes d'hypercohomologie, on peut récrire le terme E_1 sous la forme :

$$E_1^{p,q}(n) = \widetilde{\mathbf{H}}^{q+n}(R^{+(p)}K(P, n), Q).$$

Pour obtenir une structure comultiplicative sur la suite spectrale (6.5), il suffit de procéder de la manière suivante : à tout homomorphisme de R-modules $m : A \otimes B \to C$, on associera pour $i, j \geq 0$ un morphisme de bicomplexes :

(6.6) $$\Lambda_{i,j} : \mathcal{N}(A, i) \otimes \mathcal{N}(B, j) \to \mathcal{N}(C, i+j)$$

d'où, par passage aux complexes simples associés, un morphisme de complexes :

$$\int\Lambda_{i,j} : \int\mathcal{N}(A, i) \otimes \int\mathcal{N}(B, j) \to \int\mathcal{N}(C, i+j)$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\int\mathcal{N}(A, i) \otimes \int\mathcal{N}(B, j) \arrow[r, "\int\Lambda_{i,j}"] \arrow[d, "\Phi\otimes\Phi"'] & \int\mathcal{N}(C, i+j) \arrow[d, "\Phi"] \\
A[i] \otimes B[j] \arrow[r, "m"] & C[i+j]
\end{tikzcd}$$

La structure multiplicative sur la suite spectrale (6.5) associée à un accouplement $m: A\otimes B \to C$ s'en déduit (voir plus bas).

La construction du morphisme $\Lambda_{i,j}$ s'effectue de la manière suivante, le symbole $\otimes$ désignant ici le produit tensoriel interne de R-modules simpliciaux (resp. multisimpliciaux) et $\underline{\otimes}$ le produit externe correspondant. On va tout d'abord définir un morphisme de R-modules bisimpliciaux :

(6.7) $$\theta : N(A, i)\otimes N(B, j) \to N(C, i+j)$$

associé à $m: A\otimes B \to C$ de la façon suivante.

Soit :

$$\theta_p : R^{+(p+1)}K(A, i)\otimes R^{+(p+1)}K(B, j) \to R^{+(p+1)}K(C, i+j)$$

un morphisme d'ensembles simpliciaux défini par récurrence sur p : on prend pour θ_0 le morphisme :

$$\theta_0 : R^+K(A, i)\otimes R^+K(B, j) \xrightarrow{\approx} R^+(K(A, i)\wedge K(B, j)) \xrightarrow{R^+(d_{i,j})} R^+(C, i+j)$$

composé de l'isomorphisme canonique et de l'application induite sur les chaînes réduites par l'application $d_{i,j}$ (2.19). On pose $\theta_p = R^+[\theta_{p-1}\circ\pi]$, où :

$$\pi : R^{+p}K(A, i)\wedge R^{+p}K(B, j) \to R^{+p}K(A, i)\otimes R^{+p}K(B, j)$$

est la projection canonique (le morphisme θ_p ainsi défini a bien pour source :

$$R^{+(p+1)}K(A, i)\otimes R^{+(p+1)}K(B, j) \simeq R^+[R^{+p}K(A, i)\wedge R^{+p}K(B, j)]).$$

On vérifie d'autre part que les θ_p sont compatibles avec les opérateurs face et dégénérescence définis en (6.3) ; ce sont donc les composantes d'un homomorphisme simplicial. Soit $\widetilde{\theta} : [N(A, i)\otimes N(B, j)]^{\sim} \to N(C, i+j)^{\sim} = \mathcal{N}(C, i+j)$ le morphisme de bicomplexes associés. On remarquera que la source de θ est la diagonale partielle de type (13), (24) dans le module quadrisimplicial $N(A, i)\underline{\otimes} N(B, j)$. Le théorème d'Eilenberg-Zilber-Cartier (voir la remarque (2.16) *b)*) permet de définir une flèche φ (on prendra la flèche des « shuffles » pour fixer les idées) de type suivant :

$$\varphi : \int_{(13)(24)} (N(A, i)\underline{\otimes} N(B, j))^{\sim} \to [N(A, i)\otimes N(B, j)]^{\sim}$$

$\int_{(13)(24)}$ désignant le bicomplexe obtenu en sommant les indices 1 et 3 (resp. 2 et 4) dans le quadricomplexe associé à $N(A, i)\underline{\otimes} N(B, j)$. On définit maintenant le morphisme $\Lambda_{i,j}$ (6.6) comme étant le composé $\widetilde{\theta}\circ\varphi$.

Comparaison des résolutions canoniques

La suite spectrale (6.5) n'est utile que dans la mesure où l'on sait calculer le terme $E_1^{p,q}(n) = \widetilde{\mathbf{H}}^{q+n}(R^{+(p)}K(p, n), Q)$. Le cas qui nous intéresse est celui où $R = \Lambda$, $P = Q = \mathcal{O}$ (avec $\mathcal{O}$ un anneau de T de caractéristique $p > 0$ satisfaisant aux hypothèses A1 et A2), et l'on a déjà étudié dans ce cas les termes $E_1^{0,q}(n) = \widetilde{\mathbf{H}}^q(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})$ (théorèmes (4.3) et (4.4)). Le calcul des termes $E_1^{p,q}(n)$ avec $p>0$ est plus délicat. Observons par exemple que nos hypothèses sur $\mathcal{O}$ ne nous permettent pas, en l'état actuel des connaissances, de calculer les groupes $E_1^{p,q}(0)=\widetilde{\mathbf{H}}^q(\Lambda^{+p}(\mathcal{O}), \mathcal{O})$ lorsque $p>0$. Le lecteur s'en convaincra en se plaçant dans le cadre de l'exemple (1.4) : on a vu que $\mathcal{O}$ est alors représenté par la droite affine, mais $\Lambda^p(\mathcal{O})$ (resp. $\Lambda^{+p}(\mathcal{O})$) n'est pas représentable par un schéma pour $p>0$). Plus généralement, pour $r\geq 1$ et $n\geq 0$, chacune des composantes X_i de l'objet simplicial $X_*=\Lambda^r K(\mathcal{O}, n)$ est de la forme $\Lambda^r(\mathcal{O}^s)$, compte tenu de la remarque (2.4) *c)*, et on ne sait donc pas calculer les groupes de cohomologie $H^*(X_i, \mathcal{O})$. Le miracle est que l'on va néanmoins parvenir à calculer les groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^*(X_*, \mathcal{O})$ en bas degré, en identifiant X_* (par un quasi-isomorphisme partiel) avec un autre objet simplicial de T.

En toute généralité, soit R un anneau de T. Dans ce qui suit, on identifie l'ensemble d'Eilenberg-Mac Lane $K(R, m)$ à $R^+[S^m]$, au moyen de l'isomorphisme défini en (2.8). Pour tout objet simplicial X de T, on désigne par $\Psi^m(X) : K(R, m)\wedge X \to R^+(S^m\wedge X)$ l'application composée :

$$R^+[S^m]\wedge X \xrightarrow{1\wedge\varepsilon} R^+[S^m]\wedge R^+[X] \xrightarrow{\pi} R^+[S^m]\otimes R^+X \xrightarrow{\approx} R^+[S^m\wedge X]$$

où ε a été défini en (2.5), π est la projection canonique et la dernière flèche est l'isomorphisme canonique. L'application $\Psi^m(X)$ a été étudiée par D. Anderson dans [2].

Exemple **(6.3)**. — L'application $\Psi^m(S^n) : K(R, m)\wedge S^n \to R^+[S^m\wedge S^n]\simeq K(R, m+n)$ coïncide, au signe près, avec l'application $K(R, m)\wedge S^n \xrightarrow{T} S^n\wedge K(R, m) \xrightarrow{\sigma^n} K(R, m+n)$ où T permute les facteurs et σ^n est la suspension itérée (2.27).

Soit P un R-module de T. On abrège $\Psi^m(K(P, n))$ en $\Psi_{m,n}(P)$ (où même $\Psi_{m,n}$ s'il n'y a pas de risque de confusion). La flèche fondamentale pour l'application que nous avons en vue est la flèche :

$$\varphi_{i_1,i_2}(P) : K(R, i_1)\wedge K(P, i_2) \to R^+K(P, i_1+i_2)$$

définie, pour tout $i_1, i_2\geq 0$, par :

$$\varphi_{i_1,i_2}(P)=R^+(\sigma^{i_1})\circ\Psi_{i_1,i_2}(P).$$

Plus généralement on définit, par itération, pour toute suite d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_{r+1})$, une application :

$$\textbf{(6.8)}\qquad \varphi_{i_1,\ldots,i_{r+1}}(P) : K(R, i_1)\wedge\ldots\wedge K(R, i_r)\wedge K(P, i_{r+1}) \to R^{+r}(K(P, n))$$

où $n=\sum_j i_j$:

$$\begin{aligned} &K(R, i_1)\wedge\ldots\wedge K(P, i_{r+1}) \\ &\xrightarrow{\Psi^{i_1}(K(R,i_2)\wedge\ldots\wedge K(P,i_{r+1}))} R^+[S^{i_1}\wedge K(R, i_2)\wedge\ldots\wedge K(P, i_{r+1})] \\ &\xrightarrow{R^+[\sigma^{i_1}\wedge 1]} R^+[K(R, i_1+i_2)\wedge\ldots\wedge K(R, i_r)\wedge K(P, i_{r+1})] \\ &\xrightarrow{\varphi_{i_1+i_2, i_3, \ldots, i_{r+1}}} R^{+r}[K(P, n)]. \end{aligned}$$

On vérifie que les flèches φ_{i_1,i_2} satisfont aux propriétés suivantes :

Lemme **(6.4)**. — *Les diagrammes suivants sont commutatifs* (Φ *et* Ψ *étant les foncteurs* (6.1), (6.2) *et* $d_{i,j}$ *l'accouplement du cup-produit*) :

$$\begin{tikzcd} K(R, i_1)\wedge K(P, i_2) \arrow[r, "\varphi_{i_1,i_2}(P)"] \arrow[dr, "d_{i_1,i_2}"'] & R^+K(P, n) \arrow[d, "\Phi(K(P,n))"] \\ & K(P, n) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S^{i_1}\wedge K(P, i_2) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathscr{H}\wedge 1"'] & K(P, n) \arrow[d, "\Psi(K(P,n))"] \\ K(R, i_1)\wedge K(P, i_2) \arrow[r, "\varphi_{i_1,i_2}(P)"] & R^+K(P, n) \end{tikzcd}$$

On a des diagrammes commutatifs similaires faisant intervenir les applications $\varphi_{i_1,\ldots,i_{r+1}}(P)$.

L'intérêt de la flèche $\varphi_{i_1,\ldots,i_{r+1}}(P)$ provient de la proposition suivante (voir à ce propos [36]) :

Proposition **(6.5)**. — *Supposons que* $i_j > 0$ *pour tout* j. *Alors l'application* $\varphi_{i_1,\ldots,i_{r+1}}(P)$ *est un* $(n+\min_j(i_j)-1)$-*quasi-isomorphisme.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes. On l'explicitera pour $r=1$, le cas général s'en déduisant aisément. Puisque T possède assez de points, on peut raisonner fibre par fibre, ce qui permet de supposer que l'on se trouve dans le cas usuel où T est le topos ponctuel. Commençons par rappeler le lemme fondamental suivant :

Lemme **(6.6)** (Freudenthal). — *Soit* X *un espace* $(n-1)$-*connexe*; *alors l'homomorphisme de suspension* $S : \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX)$ *est un isomorphisme pour* $i<2n-1$ (resp. *un épimorphisme pour* $i=2n-1$).

On en déduit que l'application de suspension itérée :

$$\sigma^{i_1} : S^{i_1}\wedge K(P, i_2) \to K(P, i_1+i_2)$$

est un (i_1+2i_2-1)-quasi-isomorphisme, et il en est donc de même, par le théorème de Whitehead, pour $R^+(\sigma^{i_1})$. On va maintenant démontrer que Ψ_{i_1,i_2} est un $(2i_1+i_2-1)$-quasi-isomorphisme. La proposition en résulte, par la définition de φ_{i_1,i_2}, puisque $\min(i_1+2i_2-1, 2i_1+i_2-1)=(i_1+i_2)+\min(i_1, i_2)-1$. En fait on démontre l'énoncé plus général suivant :

Proposition **(6.7)**. — *Pour tout* X $(n-1)$-*connexe*, $\Psi^m(X)$ *est un* $(2m+n-1)$-*quasi-isomorphisme.*

On commence par démontrer le cas spécial suivant de la proposition (6.7) :

Lemme **(6.8)**. — $\Psi^m(S^n)$ *est un* $(2m+n-1)$*-quasi-isomorphisme.*

Ceci résulte de l'identification de $\Psi^m(S^n)$ avec $\sigma^n \circ T$ (voir l'exemple (6.3)) et de la remarque précédente.

Pour démontrer la proposition dans le cas général, on commence par définir, pour $m \geq 0$ fixé et pour tout $i > 1$, des foncteurs k_i^m sur la catégorie homotopique, à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens (resp. des groupes pour $i=1$), par :

(6.9) $$k_i^m(X) = \pi_{m+i}(K(R, m) \wedge X).$$

Observons que les foncteurs $k_*^m(\ )$ forment une théorie de l'homologie (généralisée) partielle, au sens de [68], [15]. Précisément :

Lemme **(6.9)**. — *Soit* $X \xrightarrow{f} Y \to C_f$ *une cofibration, où* X *est* $(r-1)$*-connexe et* C_f $(s-1)$*-connexe. On a une longue suite exacte d'homotopie associée à cette cofibration* :

$$k_i^m(X) \to k_i^m(Y) \to k_i^m(C_f) \to k_{i-1}^m(X) \to \dots$$

dès que $i \leq 2m+r+s-3$.

En effet :

$$K(R, m) \wedge X \xrightarrow{1 \wedge f} K(R, m) \wedge Y \longrightarrow K(R, m) \wedge C_f$$

est également une cofibration, et l'on applique ([15], théorème (1.6)).

Démonstration de la proposition (6.7)

Soit $X = \bigcup_{s \geq n} X^s$ la filtration de X par les squelettes. On va démontrer par récurrence sur s que $\Psi^m(X^s)$ est un quasi-isomorphisme partiel, le cas $s=n-1$ étant trivial, compte tenu de l'hypothèse de connexité sur X. On définit une nouvelle collection de foncteur h_*^n de la catégorie homotopique à valeurs dans (Ab) par :

$$\begin{aligned} h_i^m(X) &= \pi_{m+i}(R^+(S^m \wedge X)) \\ &= \widetilde{H}_{m+i}(S^m \wedge X\,;\,R) \quad (2.4) \\ &= \widetilde{H}_i(X, R) \quad \text{(Künneth)}. \end{aligned}$$

Ainsi les foncteurs h_i^m sont indépendants de m et coïncident avec les foncteurs d'homologie usuelle à valeurs dans R. Aussi satisfont-ils à une propriété d'exactitude similaire à celle énoncée pour les k_i^m dans le lemme (6.9), pour i maintenant quelconque. L'application $\Psi^m(\ )$ induit en homotopie une transformation naturelle de foncteurs gradués $\alpha^m : k_*^m \to h_*^m$. Il s'agit de montrer que α_*^m est un isomorphisme en degrés inférieurs à $2m+n-1$.

Soit $VS^s \to X^s \to X^{s+1}$ la cofibration induite par la décomposition de X par son squelette. On peut donc lui associer un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & k_i^m(\mathsf{V}S^s) & \longrightarrow & k_i^m(X^s) & \longrightarrow & k_i^m(X^{s+1}) & \longrightarrow & k_{i-1}(\mathsf{V}S^s) & \longrightarrow & k_{i-1}(X^s) & \longrightarrow \ldots \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_m(\mathsf{V}S^s)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_m(X^s)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_m(X^{s+1})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_m(\mathsf{V}S^s)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_m(X^s)} & \\
\longrightarrow & h_i^m(\mathsf{V}S^s) & \longrightarrow & h_i^m(X^s) & \longrightarrow & h_i^m(X^{s+1}) & \longrightarrow & h_{i-1}(\mathsf{V}S^s) & \longrightarrow & h_{i-1}(X^s) & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

La suite supérieure est exacte pour $i \leq 2(m+s-1)$, et la suite inférieure pour tout i. Par le lemme des cinq et l'hypothèse de récurrence, on est ramené au cas $X = \mathsf{V}S^\alpha$, d'où, par le même type de dévissage que ci-dessus, au cas $X = S^\alpha$ déjà démontré au lemme (6.8).

Remarque **(6.10)**. — On reconnaîtra la démonstration, due à G. Whitehead, du fait que la théorie d'homologie généralisée associée au spectre d'Eilenberg-Mac Lane coïncide avec l'homologie usuelle. On a seulement pris soin, dans ce qui précède, de préciser quelle était la flèche $\alpha_m(X) = \Psi^m(X)$ permettant de comparer ces deux théories k_* et h_*. L'autre différence est qu'il nous est utile de travailler pour l'instant directement avec les foncteurs k_i^m définis ci-dessus, plutôt que de passer à la limite sur m par suspension, de manière à obtenir des foncteurs k_i^∞ satisfaisant à la propriété d'exactitude du lemme (6.8) pour tout i.

Supposons maintenant que P soit un objet en anneaux $\mathcal{O}$ de T, muni de sa structure de Λ-module, satisfaisant à A1 et A2. On sait désormais calculer les termes :

$$E_1^{r,s}(n) = \widetilde{\mathbf{H}}^{s+n}(\Lambda^{+r}(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O}))$$

de la suite spectrale (6.5) lorsque r est petit par rapport à n. Précisément, soient $i_1, \ldots, i_{r+1}$ des entiers positifs satisfaisant à $\sum_j i_j = n$. La proposition (6.7) entraîne que, pour tout $s < n + \min(i_j) - 1$:

$$\textbf{(6.10)} \qquad \widetilde{\mathbf{H}}^{s+n}(\Lambda^{+r}(K(\mathcal{O}, n), \mathcal{O})) \simeq \widetilde{\mathbf{H}}^{s+n}(K(\Lambda, i_1) \wedge \ldots \wedge K(\mathcal{O}, i_{r+1}), \mathcal{O}).$$

Or on a vu au chapitre précédent comment calculer le terme de droite. Pour résumer :

Proposition **(6.11)**. — *Soient $i_1, \ldots, i_{r+1}$ des entiers positifs satisfaisant à $\sum_j i_j = n$. Alors, pour tout $s < \min(i_j) - 1$, l'application $\varphi_{i_1, \ldots, i_{r+1}}(\mathcal{O})$ induit en cohomologie un isomorphisme entre le terme $E_1^{r,s}(n)$ de la suite spectrale* (6.5) *et la partie de degré total $n+s$ de l'algèbre graduée :*

$$\widetilde{H}^*(K(\mathbf{F}_p, i_1), R) \otimes \ldots \otimes \widetilde{H}^*(K(\mathbf{F}_p, i_r), R) \otimes \widetilde{\mathbf{H}}^*(K(\mathcal{O}, i_{r+1}), \mathcal{O}).$$

Remarque **(6.12)**. — *a)* Pour obtenir le résultat optimal, on a intérêt à choisir les entiers $i_1, \ldots, i_{r+1}$ de manière à ce que, pour tout j, on ait $i_j \geq \left[\dfrac{n}{r+1}\right]$. Ce choix permet de calculer $E_1^{r,s}(n)$ pour tout $s < \left[\dfrac{n}{r+1}\right] - 1$.

b) On notera d'autre part que ceux des termes $E_{1_j}^{r,s}(n)$ de la suite spectrale (6.5) que l'on sait calculer sont indépendants du choix de l'entier n, pourvu que n satisfasse à la condition $s<\left[\frac{n}{r+1}\right]-1$. En effet on sait que chacune des algèbres $\widetilde{\mathrm{H}}^*(\mathrm{K}(\mathsf{F}_p, i_j), \mathrm{R})$ (resp. $\widetilde{\mathbf{H}}^*(\mathrm{K}(\mathcal{O}, i_{r+1}), \mathcal{O})$) est nulle en degré $<i_j$ (resp. i_{r+1}). Ainsi la composante de degré $n+s$ de l'algèbre qui intervient dans l'énoncé de la proposition est engendrée par des termes de la forme $a_1\otimes\ldots\otimes a_{r+1}$ où a_i est de degré i_j+b_j pour $i\leq j\leq r+1$. Puisque $\sum_j(i_j+b_j)=s+n<n+\min(i_j)-1$ et que d'autre part $\sum_j i_j=n$, on a nécessairement $b_j<i_j$ pour tout j. Or, on a vu plus haut que les groupes $\mathrm{H}^{i_j+b_j}(\mathrm{K}(\mathsf{F}_p, i_j), \mathrm{R})$ et $\mathbf{H}^{i_{r+1}+b_{r+1}}(\mathrm{K}(\mathcal{O}, i_{r+1}), \mathcal{O})$ étaient indépendants de i_j (resp. i_{r+1}), pour autant que l'on ait la relation $b_j<i_j$ (resp. $b_{r+1}<i_{r+1}$) (voir la remarque (2.24) *c)*).

Les remarques qui précèdent conduisent à penser qu'il est possible de comparer les suites spectrales $\mathrm{E}_*^{r,s}(n)$ puisqu'elles ont, pour n variable, leurs termes initiaux isomorphes pour certaines valeurs de r, s, et qu'elles ont toutes le même aboutissement. Observons d'autre part que ceux des termes $\mathrm{E}_1^{r,s}(n)$ que l'on sait calculer sont isomorphes aux termes $\mathrm{E}_1^{r,s}$ correspondants de la suite spectrale (3.15) obtenue en résolvant l'objet $\mathcal{O}$ de T par la résolution de Mac Lane $\mathrm{M}_*(\mathcal{O})$.

En fait, il est possible de comparer les suites spectrales $\mathrm{E}_*^{r,s}(n)$ et $\mathrm{E}_*^{r,s}$ tout entières en introduisant une nouvelle (et dernière) résolution canonique $\int\mathrm{N}(\mathrm{P}, \infty)$ d'un R-module P. Il s'agit du complexe total associé à l'objet simplicial $\mathrm{N}(\mathrm{P}, \infty)$ suivant, augmenté vers P :

(6.11) $$(\mathrm{R}^i)^{\mathrm{st}}(\mathrm{P})\ldots(\mathrm{R}^2)^{\mathrm{st}}(\mathrm{P}) \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} \mathrm{R}^{\mathrm{st}}(\mathrm{P}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{P},$$

les opérateurs face et dégénérescence étant définis par stabilisation à partir des opérateurs correspondants de (6.3). Rappelons en effet (voir la fin du chapitre II et l'appendice) que l'on compare un foncteur dérivé $\mathrm{LF}(\mathrm{M}, n)=\mathrm{FK}(\mathrm{M}, n)$ au foncteur stabilisé $\mathrm{F}^{\mathrm{st}}(\mathrm{M})$ en modifiant légèrement le système inductif $\mathrm{FK}(\mathrm{M}, n)$ indexé par n, pour le remplacer par un système inductif $\mathrm{FK}(\mathrm{M}, \langle n\rangle)$ indexé par la catégorie I décrite dans l'énoncé de la propriété P1 au chapitre II. On va maintenant appliquer la même construction aux modules bisimpliciaux $\mathrm{N}(\mathrm{P}, n)$ définis en (6.4) : on construit un diagramme :

$$\mathrm{N}(\mathrm{P}, \langle 0\rangle)\langle 0\rangle \rightrightarrows \mathrm{N}(\mathrm{P}, \langle 1\rangle)\langle -1\rangle \rightrightarrows \mathrm{N}(\mathrm{P}, \langle 2\rangle)\langle -2\rangle \rightrightarrows \ldots$$

où $\mathrm{N}(\mathrm{P}, \langle n\rangle)\langle -n\rangle$ est l'objet $(n+1)$-simplicial :

(6.12) $$\ldots\mathrm{R}^{+2}\mathrm{K}(\mathrm{P}, \langle n\rangle)\langle -n\rangle \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} \mathrm{R}^{+}\mathrm{K}(\mathrm{P}, \langle n\rangle)\langle -n\rangle,$$

chacun des objets $\mathrm{R}^{+j}\mathrm{K}(\mathrm{P}, \langle n\rangle)\langle -n\rangle$ étant la version n-simpliciale de $\mathrm{R}^{+j}\mathrm{K}(\mathrm{P}, n)$ décrite dans l'appendice. On obtient par stabilisation un objet simplicial $\mathrm{N}(\mathrm{P}, \infty)$ qui n'est autre que (6.11), muni d'un quasi-isomorphisme :

(6.13) $$\rho(\mathrm{P}) : \mathrm{N}(\mathrm{P}, \infty) \to \varinjlim_{\mathrm{I}} \Delta\mathrm{N}(\mathrm{P}, \langle n\rangle)\langle -n\rangle.$$

En particulier le complexe total $\int\mathcal{N}(\mathrm{P}, \infty)$ obtenu à partir du bicomplexe $\mathcal{N}(\mathrm{P}, \infty)$ associé à $\mathrm{N}(\mathrm{P}, \infty)$ est une résolution de P, puisqu'il en est ainsi de chacun des $\int\mathcal{N}(\mathrm{P}, n)$ (et donc de leurs avatars $\Delta\mathrm{N}(\mathrm{P}, \langle n\rangle)\langle -n\rangle$).

Si l'on applique le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \mathrm{Q})$ à $\int \mathcal{N}(\mathrm{P}, \infty)$, filtré par rapport au premier indice du bicomplexe $\mathcal{N}(\mathrm{P}, \infty)$, on obtient une suite spectrale :

$$\mathrm{E}_*^{r,s}(\infty) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

avec $\mathrm{E}_1^{r,s}(\infty) \simeq \mathbf{Ext}^s((\mathrm{R}^{r+1})^{\mathrm{st}}\mathrm{P}, \mathrm{Q})$. D'autre part on sait (voir l'appendice, proposition (8.1)) que le système projectif $\mathrm{E}_1^{r,s}(n)$ indexé par n est essentiellement constant de valeur $\mathrm{E}_1^{r,s}(\mathrm{N}_s)$, où N_s est un entier quelconque $>s$, et que :

$$\mathrm{E}_1^{r,s}(\infty) \simeq \mathrm{E}_1^{r,s}(\mathrm{N}_s).$$

Par exemple, lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{Q} = \mathcal{O}$ est un Λ-module satisfaisant à nos hypothèses habituelles, la proposition (6.11) implique que l'on a $\mathrm{E}_1^{r,s}(\infty) \simeq k_s(\mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{\otimes r} \otimes \mathscr{A}_{\mathrm{R}})$; remarquons que ceci est le terme $\mathrm{E}_1^{r,s}$ dans la suite spectrale définie au moyen de la résolution de Mac Lane (dont on trouvera une composante pour le poids explicitée en (5.1)).

Proposition **(6.13)**. — *Les suites spectrales* E_*^{**} *et* $\mathrm{E}_*^{**}(\infty)$ *correspondant aux bicomplexes* $\mathcal{M}_{**}(\mathrm{P})$ *et* $\mathcal{N}(\mathrm{P}, \infty)$ *sont isomorphes.*

Démonstration. — Il suffit de définir un morphisme de bicomplexes :

$$\mathbf{(6.14)} \qquad \mathrm{R}[\varphi] : \mathcal{M}_{**}(\mathrm{P}) \to \mathcal{N}(\mathrm{P}, \infty)$$

induisant un isomorphisme sur les termes E_1 correspondants. Or les applications :

$$\varphi_{i_1, \ldots, i_{r+1}} : \mathrm{K}(\mathrm{R}, i_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{K}(\mathrm{P}, i_{r+1}) \to \mathrm{R}^{+r}(\mathrm{K}(\mathrm{P}, n)),$$

définies en (6.8) pour $(i_1, \ldots, i_{r+1})$ variable vérifiant $\sum_j i_j = n$, sont compatibles avec les différentes applications de suspension, d'où un morphisme :

$$\varphi_{*\ldots*} : \mathrm{K}(\mathrm{R}, \langle i_1 \rangle)\langle -i_1 \rangle \underline{\wedge} \ldots \underline{\wedge} \mathrm{K}(\mathrm{P}, \langle i_{r+1} \rangle)\langle -i_{r+1} \rangle \to \mathrm{R}^{+r}[\mathrm{K}(\mathrm{P}, \langle n \rangle)]\langle -n \rangle$$

d'un système inductif indexé par I^{r+1} dans un système indexé par I, compatible au foncteur d'addition $\mathrm{I}^{r+1} \to \mathrm{I}$ ($\underline{\wedge}$ désigne le smash-produit externe d'ensembles pointés multisimpliciaux). En appliquant le foncteur $\mathrm{R}^+[\ ]$, on obtient donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{R}^+[\mathrm{K}(\mathrm{R}, \langle i_1 \rangle)]\langle -i_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \mathrm{R}^+[\mathrm{K}(\mathrm{P}, \langle i_{r+1} \rangle)]\langle -i_{r+1} \rangle & \xrightarrow{\mathrm{R}^+[\varphi_{i_1, \ldots, i_{r+1}}]} & \mathrm{R}^{r+1}[\mathrm{K}(\mathrm{P}, \langle n \rangle)]\langle -n \rangle \\
\downarrow & & \downarrow \\
\varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{RKR} \otimes \ldots \otimes \varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{RKP} & \xrightarrow{\lim \mathrm{R}[\varphi]} & \varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{R}^{r+1}\mathrm{KP} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{R}^{\mathrm{st}}(\mathrm{R}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{R}^{\mathrm{st}}(\mathrm{P}) & \xrightarrow{\mathrm{R}[\varphi]^{\mathrm{st}}} & (\mathrm{R}^{r+1})^{\mathrm{st}}(\mathrm{P})
\end{array}$$

les flèches verticales inférieures (resp. supérieures) étant les quasi-isomorphismes (resp. les quasi-isomorphismes partiels) qui interviennent dans la proposition (8.1) de l'appendice, auquel on renvoie également pour la notation et pour des précisions sur toute cette démonstration. Or la flèche horizontale supérieure est un quasi-isomorphisme par la proposition (6.5) et le théorème de Whitehead, ce qui termine la démonstration, à ceci près qu'il reste à vérifier que les flèches $R[\varphi]^{st}$, pour r variable, forment un morphisme de bicomplexe (6.14). Ceci est une conséquence de la commutativité des diagrammes que l'on obtient en appliquant le foncteur $R^+[\ \ ]$ aux diagrammes commutatifs du lemme (6.4) (voir (8.6)-(8.8)).

On est maintenant en mesure de définir la comultiplication promise sur $E_*^{**}(\infty)$ (et donc, par transport de structure, une comultiplication sur la suite spectrale E_*^{**}). On a associé en (6.7) à chaque $m : A\otimes B \to C$ un morphisme de R-modules bisimpliciaux :

(6.15) $$\theta_{i,j} = \theta : N(A, i)\otimes N(B, j) \to N(C, i+j)$$

compatible aux différentes suspensions. Par le yoga usuel d'Illusie (voir l'appendice) on remplace $N(A, i)$ par $\Delta N(A, \langle i\rangle)\langle -i\rangle$, d'où un morphisme d'un système inductif indexé par $I\times I$ dans un système inductif indexé par I, compatible au foncteur évident $+ : I\times I \to I$:

$$\theta_{i,j} : \Delta N(A, \langle i\rangle)\langle -i\rangle \otimes \Delta N(B, \langle j\rangle)\langle -j\rangle \to \Delta N(C, \langle i+j\rangle)\langle -i-j\rangle\,;$$

en passant à la limite des systèmes inductifs, on obtient un morphisme de modules bisimpliciaux :

$$\theta : N(A, \infty)\otimes N(B, \infty) \to N(C, \infty)$$

tel que le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales ont été définies en (6.13), soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
N(A, \infty)\otimes N(B, \infty) & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & N(C, \infty) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \rho(A)\otimes\rho(B)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho(C)} \\
\varinjlim_{I} \Delta N(A, \langle i\rangle)\langle -i\rangle \otimes \varinjlim_{I} \Delta N(B, \langle j\rangle)\langle -j\rangle & \xrightarrow[I\times I]{\varinjlim(\theta_{ij})} & \varinjlim_{I} \Delta N(C, \langle i+j\rangle)\langle -i-j\rangle
\end{array}$$

θ induit par passage au bicomplexe associé un accouplement de bicomplexes :

(6.16) $$\theta : \mathcal{N}(A, \infty)\otimes\mathcal{N}(B, \infty) \to \mathcal{N}(C, \infty)$$

qui va permettre de définir la comultiplication sur $E_*^{**}(\infty)$. Revenons au cas qui nous concerne, où l'accouplement que l'on considère est la loi d'anneau $m : \mathcal{O}\otimes\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ associée à un objet $\mathcal{O}$ satisfaisant à nos hypothèses A1 et A2. Les morphismes de bicomplexes $\Lambda_{i,j}$ (6.6) (resp. θ (6.16)) induisent des morphismes de bicomplexes :

$$\mathrm{Hom}(\Lambda_{i,j}, \mathcal{O}) : \mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O}, i+j), \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O}, i)\otimes\mathcal{N}(\mathcal{O}, j), \mathcal{O})$$

(resp. $\mathrm{Hom}(\theta, \mathcal{O}) : \mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O}, \infty), \mathcal{O})) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O}, \infty)\otimes\mathcal{N}(\mathcal{O}, \infty), \mathcal{O})$).

Soit $\tilde{E}_*^{**}(i,j)$ (resp. $\tilde{E}_*^{**}(\infty,\infty)$) la suite spectrale obtenue en filtrant le bicomplexe $\mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O},i)\otimes\mathcal{N}(\mathcal{O},j),\mathcal{O})$ (resp. $\mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O},\infty)\otimes\mathcal{N}(\mathcal{O},\infty),\mathcal{O})$) par le second indice. Les morphismes précédents induisent des morphismes de suites spectrales :

(6.17) $$\mu_*(i,j) : E_*^{**}(i+j) \to \tilde{E}_*^{**}(i,j)$$

(resp. $\mu_*(\infty,\infty) : E_*^{**}(\infty) \to \tilde{E}_*^{**}(\infty,\infty)$).

Soient d'autre part :

$$\rho_{i,j} : \mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O},i),\mathcal{O})\otimes\mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O},j),\mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{O},i)\otimes\mathcal{N}(\mathcal{O},j),\mathcal{O})$$

l'application qui envoie un élément $f\otimes g$ sur le morphisme composé :

$$\mathcal{N}(\mathcal{O},i)\otimes\mathcal{N}(\mathcal{O},j) \xrightarrow{f\otimes g} \mathcal{O}\otimes\mathcal{O} \xrightarrow{m} \mathcal{O} \ (^1)$$

et $\rho_{\infty,\infty}$ l'application correspondante. Ces flèches induisent des morphismes de suites spectrales :

$$\rho_*(i,j) \quad : E_*^{**}(i)\otimes E_*^{**}(j) \quad \to \tilde{E}_*^{**}(i,j)$$
$$\rho_*(\infty,\infty) : E_*^{**}(\infty)\otimes E_*^{**}(\infty) \to \tilde{E}_*^{**}(\infty,\infty)$$

et $\rho_*(i,j)$ est un isomorphisme en E_1 là où l'on sait calculer les termes du but et de la source en utilisant la proposition (6.11) (c'est-à-dire sur les termes $E_1^{*,s}(i)\otimes E_1^{*,t}(j)$ avec $s<i$, $t<j$). Les systèmes projectifs $E_*^{**}(i)\otimes E_*^{**}(j)$ (resp. $\tilde{E}_*^{**}(i,j)$) indexés par $I^0\times I^0$ (resp. I^0) sont essentiellement constants. Par passage à la limite on conclut que $\rho_*(\infty,\infty)$ est un isomorphisme. Ceci permet de définir une application composée :

$$\partial_* = \rho_*(\infty,\infty)^{-1}\circ\mu_*(\infty,\infty) : E_*^{**}(\infty) \to E_*^{**}(\infty)\otimes E_*^{**}(\infty)$$

qui est la comultiplication souhaitée.

Proposition **(6.14)**. — *La comultiplication* $\partial_1 : E_1^{**}(\infty) \to E_1^{**}(\infty)\otimes E_1^{**}(\infty)$ *ainsi définie coïncide* (via *les identifications de la proposition* (6.13) *et de* (5.1)) *avec la comultiplication sur* $A_R^{*r-1}\otimes\mathcal{A}_R$ *induite par la comultiplication sur* A_R (resp. $\mathcal{A}_R$) *définie en* (3.36)-(3.37), (4.19)-(4.21).

Nous ne démontrerons pas cette proposition, qui résulte de la description explicite de la flèche θ par un calcul explicite qu'on épargne au lecteur. L'intérêt principal de la proposition est qu'elle permet d'identifier la comultiplication au niveau E_2 : pour décrire celle-ci, on va se limiter à la composante ${}^tE_*^{**}(\infty)$ de poids p^t de la suite spectrale $E_*^{**}(\infty)$. Rappelons quel en est le terme ${}^tE_2^{**}(\infty)$ (voir la remarque (3.6)) :

(6.18) $${}^tE_2^{r,s}(\infty) \simeq k_s\,\mathrm{Ext}^r_{A_*}(A_*^{(t)},R).$$

De même, le terme E^2 de la suite duale s'écrit :

(6.19) $${}^tE^2_{r,s}(\infty) \simeq k_s\,\mathrm{Tor}^{A_*}_r(\mathbf{F}_p, A_*^{(t)}).$$

---

(1) Avec la convention de signe usuelle dans la définition de $f\otimes g$.

La proposition précédente implique que la multiplication sur ${}^t\mathrm{E}^2_{**}$ duale de la comultiplication ∂_* n'est autre que la multiplication naturelle induite sur le terme (6.19) par la structure d'algèbre commutative de A_*, dont on a mentionné la définition dans les rappels sur la bar-construction au chapitre III, et c'est bien ceci que l'on s'était proposé de vérifier (voir la discussion des structures multiplicatives à la fin du chapitre précédent). En particulier la structure d'algèbre de ${}^t\mathrm{E}^2_{**}(\infty)={}^t\mathrm{E}^2_{**}$ est précisément celle qui figure dans la proposition (5.1).

7. Etude des différentielles supérieures.

Nous allons maintenant utiliser l'existence d'une structure multiplicative sur la suite spectrale ${}^t\mathrm{E}^*_{**}$, démontrée au chapitre précédent, pour calculer les différentielles supérieures d^i dans celle-ci ; on suppose $p\neq 2$.

Proposition (**7.1**). — *Soit* $t\geq 0$. *Alors* $d^j=0$ *pour* $2\leq j<p-1$ *dans la suite spectrale* ${}^t\mathrm{E}^*_{**}$.

Démonstration. — On a défini un morphisme de suites spectrales $f: {}^{t+1}\mathrm{E}^*_{**}\to {}^t\mathrm{E}^*_{**}$ (voir la remarque (5.2) *b)*) et observé qu'il était injectif au niveau E^2. Il suffit donc de démontrer la proposition pour $t=0$. Rappelons que dans ce cas la suite spectrale s'identifie par construction (voir remarque (3.1) *b)* et proposition (3.4)) à celle que l'on obtient en filtrant le bicomplexe $\overline{\mathrm{B}}(\mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p))$ (bar-construction réduite associée à l'algèbre différentielle $\mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p)$) par le premier degré (« nombre de barres »). Son aboutissement est donc l'homologie de ce bicomplexe et le terme E^1 (resp. E^2) est bien le complexe $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{A}_*)$, bar-construction réduite associée à l'algèbre différentielle graduée $\mathrm{A}_*=\mathrm{H}_*(\mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p))$ (resp. l'homologie $\mathrm{H}_*(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{A}_*))\simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{A}_*}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p)$ de ce complexe), comme on a eu l'occasion de le constater ci-dessus (voir notamment la remarque (5.2) *a)*). Or on peut définir sur la bar-construction réduite $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_*)$ d'une F_p-algèbre différentielle graduée quelconque C_* une comultiplication :

$$\eta:\ \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_*)\to\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_*)\otimes\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_*)$$

en posant, pour $a_i\in\mathrm{C}_*$:

$$\eta([a_1,\ldots,a_n])=\sum_{i=0}^{n}[a_1,\ldots,a_i]\otimes[a_{i+1},\ldots,a_n]. \tag{7.1}$$

Cette comultiplication est compatible à la filtration de $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_*)$ par le nombre de barres et induit donc une comultiplication sur la suite spectrale associée à cette filtration qui, sur le terme $\mathrm{E}^1=\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{H}_*(\mathrm{C}_*))$, est définie par la même formule (7.1) (les a_i étant maintenant des éléments de $\mathrm{H}_*(\mathrm{C}_*)$). De plus, lorsque l'algèbre C_* est commutative, cette comultiplication est compatible à la structure d'algèbre de $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{C}_*)$ (voir [25], II, page 74).

Le cas qui nous intéresse est celui où $\mathrm{C}_*=\mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p)$, $\mathrm{H}_*(\mathrm{C}_*)=\mathrm{A}_*$. Il résulte de la description explicite des éléments $\bar{\xi}_m$ et $\gamma_{pj}(\bar{\tau}_n)$ de E^1 donnée dans la remarque (5.2) *a)* que l'on a dans E^2 les formules suivantes :

(7.2) $$\eta(\bar{\xi}_m) = \bar{\xi}_m \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\xi}_m$$

(7.3) $$\eta(\gamma_j(\bar{\tau}_n)) = \sum_{s+t=j} \gamma_s(\bar{\tau}_n) \otimes \gamma_t(\bar{\tau}_n)$$

et celles-ci suffisent à caractériser η au niveau E^2, puisque les éléments $\bar{\xi}_m$ et $\gamma_{p^r}(\bar{\tau}_n)$ engendrent l'algèbre $H_*(\overline{B}(A_*))$. La proposition est alors une conséquence directe du lemme suivant, appliqué successivement aux algèbres $E^2 = H_*(\overline{B}(A_*))$, E^3, ..., E^{p-2} munies des différentielles d^j correspondantes.

Lemme **(7.2)**. — *Soit* $U = \Lambda(\bar{\xi}_1, \ldots) \otimes \Gamma(\bar{\tau}_0, \ldots)$ *la* F_p*-algèbre bigraduée par* $\deg(\bar{\xi}_m) = (1, 2p^m - 2)$ *et* $\deg(\gamma_j(\bar{\tau}_n)) = (j, 2jp^n - j)$, *munie de la structure de bigèbre définie par les formules* (7.2) *et* (7.3). *Alors toute différentielle* d^j *sur* U, *de bidegré* $(-j, j-1)$, *compatible à la structure de bigèbre de* U, *est nulle pour* $1 \leq j < p-1$.

Démonstration. — Il résulte des formules (7.2), (7.3) que la bigèbre bigraduée duale de U^* n'est autre que :

$$U^* = \Lambda(\xi_1^*, \ldots) \otimes \mathrm{Sym}(\tau_0^*, \ldots)$$

où ξ_m^* (resp. τ_n^*) est l'élément dual de $\bar{\xi}_m$ (resp. $\bar{\tau}_n$), munie d'une comultiplication $\nu : U^* \to U^* \otimes U^*$ définie sur les générateurs de U^* par les formules :

(7.4) $$\nu(\xi_n^*) = \xi_m^* \otimes 1 + 1 \otimes \xi_m^*$$

(7.5) $$\nu(\tau_n^*) = \tau_n^* \otimes 1 + 1 \otimes \tau_n^*.$$

La différentielle d_j transposée de d^j envoie les éléments primitifs de U^* sur des éléments primitifs, puisque d_j est compatible à ν. Or, les seuls éléments primitifs de U^* sont les duaux des indécomposables de U, c'est-à-dire les ξ_m^* et les $(\tau_n^*)^{p^s}$ pour tout $s \geq 0$, de bidegrés $(1, 2p^m - 2)$ et $(p^s, (2p^n - 1)p^s)$ respectivement, duaux de $\bar{\xi}_m$ et $\gamma_{p^s}(\bar{\tau}_n)$. En particulier, le premier degré de ces éléments primitifs est toujours une puissance de p. Ainsi d_j, qui est de bidegré $(j, 1-j)$ est nécessairement nulle sur les générateurs ξ_m^* et τ_n^* de U^*, ce qui termine la démonstration du lemme.

Il nous faut maintenant examiner la différentielle d^{p-1} dans ${}^0E_{**}^{p-1}$. Il sera agréable de commencer par raisonner comme ci-dessus dans la suite spectrale duale E_*^{**}. Il nous suffira de connaître d_{p-1} sur les générateurs de

(7.6) $$E_{p-1}^{**} = E_2^{**} = \Lambda(\xi_1^*, \ldots) \otimes \mathrm{Sym}(\tau_0^*, \ldots).$$

L'argument de primitivité employé dans le lemme précédent implique que

(7.7) $$d_{p-1}(\tau_n^*) = 0$$

pour tout n, puisqu'il n'y a aucun élément primitif dans E_{p-1}^{**} de bidegré $(p, 2p^n - p + 1)$. Par contre $d_{p-1}(\xi_m^*)$ a quelque chance d'être non nul puisque c'est un élément de l'espace vectoriel $E_{p-1}^{p,2p^m-p}$ engendré par l'élément primitif $(\tau^*_{m-1})^p$. Le but principal de ce chapitre est la démonstration de la formule suivante, pour tout $m \geq 1$:

$$(7.8) \qquad d_{p-1}(\xi^*_m) = \alpha(\tau^*_{m-1})^p.$$

(α désignant un scalaire non nul). Les formules (7.7) et (7.8) permettent alors de calculer E_p facilement. On verra ensuite que toutes les différentielles d_j sont nulles pour $j \geq p$, ce qui terminera l'analyse de la suite spectrale.

En fait, on va calculer directement la différentielle dans E^*, plutôt que dans sa duale E_* comme on l'a fait pour les différentielles de plus bas degré. La formule à démontrer est alors, pour $\alpha \neq 0$:

$$(7.9) \qquad d^{p-1}(\gamma_p(\bar{\tau}_{m-1})) = \alpha\bar{\xi}_m.$$

En l'état actuel des connaissances, on ne dispose d'aucun procédé permettant de calculer une telle différentielle directement. En effet E^* est, comme on l'a vu, une suite spectrale associée à la filtration par le nombre de barres de la bar-construction réduite $\overline{B}(C_*)$ associée à l'algèbre différentielle graduée $C_* = \mathsf{F}_p^{st}(\mathsf{F}_p)$:

$$(7.10) \qquad E^2 = \mathrm{Tor}^{H_*(C_*)}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{C_*}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p).$$

Or, C_* est dans le cas présent une algèbre sur laquelle on a peu de prise. Aussi convient-il de la remplacer par une algèbre différentielle graduée plus élémentaire, pour laquelle les propriétés de la suite spectrale (7.10) correspondante sont mieux connues. On prendra pour remplaçante de C_* l'algèbre $C_*(X)$ des chaînes (à coefficients dans F_p) associée à un H-espace convenable X. Dans ce cas (7.10) prend la forme :

$$(7.11) \qquad E^2 = \mathrm{Tor}^{H_*(X, \mathsf{F}_p)}(\mathsf{F}_p, \mathsf{F}_p) \Rightarrow H_*(B_X, \mathsf{F}_p)$$

et n'est autre que la suite spectrale dite d'Eilenberg-Moore (ou de Steenrod-Rothenberg, voir [58], [59]) permettant de calculer l'homologie du classifiant B_X de X à partir de celle de X.

L'espace X que l'on va considérer est donné par :

$$(7.12) \qquad X = \prod_{j \geq 1} K(\mathsf{F}_p, 2j),$$

que l'on munit d'une multiplication définie de la façon suivante : soit F le foncteur de la catégorie homotopique dans la catégorie des groupes abéliens, qui à tout espace Y associe la série formelle $1 + a_2t^2 + \ldots + a_{2j}t^{2j} + \ldots$ avec $a_i \in H^i(Y, \mathsf{F}_p)$, la loi de groupe étant la multiplication des séries formelles. Il résulte du théorème de représentabilité de la cohomologie par les objets d'Eilenberg-Mac Lane (rappelée dans la proposition (2.13)) que l'espace X représente le foncteur ensembliste sous-jacent à F, ce qui définit sur X une loi de H-espace $\mu : X \times X \rightarrow X$. Pour simplifier la notation, posons :

$$(7.13) \qquad K_i = K(\mathsf{F}_p, 2i)$$

et appelons $\partial_n : \mathrm{K}_n \to \mathrm{X}$ (resp. $\varepsilon_n : \mathrm{X} \to \mathrm{K}_n$) l'inclusion (resp. la projection) naturelle. Alors le diagramme suivant est commutatif, comme il résulte de la définition de μ (la flèche horizontale inférieure désignant l'accouplement du cup-produit) :

(7.14)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \times \mathrm{X} \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{X} \arrow[d, "\varepsilon_{n+m}"] \\
\mathrm{K}_n \times \mathrm{K}_m \arrow[u, "\partial_n \times \partial_m"] \arrow[r] & \mathrm{K}_{n+m}
\end{tikzcd}$$

Notons maintenant $\mathrm{C}_*(\mathrm{Y})$ le bicomplexe $\mathsf{F}_p[\mathrm{Y}]^{\sim}$ des chaînes modulo p associées à un espace Y. Le diagramme précédent induit par passage aux chaînes le carré supérieur du diagramme commutatif de complexes suivant :

(7.15)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_*(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{C}_*(\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{C}_*(\mathrm{X}) \arrow[d, "\varepsilon_{n+m}"] \\
\mathrm{C}_*(\mathrm{K}_n) \otimes \mathrm{C}_*(\mathrm{K}_m) \arrow[u, "\partial_n \otimes \partial_n"] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{T}_{-2n} \otimes \mathrm{T}_{-2m}"'] & \mathrm{C}_*(\mathrm{K}_{n+m}) \arrow[d, "\mathrm{T}_{-2n-2m}"] \\
\mathrm{C}_*(\mathrm{K}_n)(-2n) \otimes \mathrm{C}_*(\mathrm{K}_m)(-2m) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C}_*(\mathrm{K}_{n+m})(-2n-2m) \arrow[d] \\
\varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{C}_*(\mathrm{K}_n)(-n) \otimes \varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{C}_*(\mathrm{K}_m)(-m) \arrow[r] & \varinjlim_{\mathrm{I}} \mathrm{C}_*(\mathrm{K}_{n+n})(-n-m) \\
\mathsf{F}_p^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p) \otimes \mathsf{F}_p^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p) \arrow[u, "\rho(\mathsf{F}_p[\ ], \mathsf{F}_p) \otimes \rho(\mathsf{F}_p[\ ], \mathsf{F}_p)"] \arrow[r] & \mathsf{F}_p^{\mathrm{st}}(\mathsf{F}_p) \arrow[u, "\rho(\mathsf{F}_p[\ ], \mathsf{F}_p)"']
\end{tikzcd}$$

T_{-2n} désignant le morphisme de translation de degré $-2n$, et $\rho(\mathsf{F}_p[\ \ ], \mathsf{F}_p)$ le quasi-isomorphisme partiel de complexes associé à la flèche correspondante décrite en (2.43).

Les propriétés de commutativité de la loi de H-espace μ sur X (qu'on se gardera bien de confondre avec la loi de groupe induite par la structure de groupe abélien simplicial de chacune des composantes K_i de X) sont décrites par le théorème suivant de G. Segal, dont on trouvera la démonstration dans ([60] (proposition (1.1))).

Théorème (7.3). — *L'espace* X, *muni de la loi de* H-*espace* μ *décrite ci-dessus, a le type d'homotopie d'un espace de lacets infini.*

Or, dès que X est un double espace de lacets, l'algèbre $\mathrm{H}_*(\mathrm{X}, \mathsf{F}_p)$ est commutative et l'on sait que la suite spectrale (7.11) est munie d'une structure multiplicative qui, sur le terme E^2 décrit en (7.10), coïncide avec celle qui est induite par la structure d'algèbre commutative de $H_*(X, \mathsf{F}_p)$. Lorsque X est soumis à la condition plus restrictive d'être un triple espace de lacets, cette suite spectrale a d'autres belles propriétés. Tout d'abord, l'algèbre des chaînes modulo p $C_*(X)$ est munie d'un cup-1-produit au sens de Dyer-Lashof :

$$\underset{1}{\cup} : C_i(X) \otimes C_j(X) \to C_{i+j+1}(X)$$

(voir [37], déf. 2, [46], § 6), ce qui permet d'associer de manière récurrente à un élément $x \in H_{2s+1}(X, \mathsf{F}_p)$ de degré impair des éléments a_i dans $C_*(X)$:

$$a_1 = x$$

$$a_i = \frac{1}{i}(x \underset{1}{\cup} a_{i-1}) \qquad 1 < i < p.$$

On montre (voir [46], remarque (6.9), [37]) que ces éléments satisfont aux relations :

(7.16) $$da_i = \sum_{1 \leq j < i} a_j a_{i-j}$$

dans l'algèbre $C_*(X)$ et que la classe $\langle x \rangle^p \in H_{2sp-2}(X, \mathsf{F}_p)$ du cycle

$$a_p = \sum_{1 \leq j < p} a_j a_{p-j}$$

est indépendante du choix des éléments $a_i \in C_*(X)$ $(1 < i < p)$ satisfaisant aux relations (7.16). L'importance de la classe $\langle x \rangle^p$ provient du fait suivant, démontré par May dans ([45], théorème 6) (on travaille dans la suite spectrale (7.11)) :

Proposition **(7.4)**. — *Soit* $x \in H_{2s-1}(X, \mathsf{F}_p)$. *Si l'on désigne par* $\gamma_p(x)$ *la classe dans* $E^2_{p,2sp-p} = E^{p-1}_{p,2sp-p}$ *de l'élément* $[x, \ldots, x]$ *de* $E^1_{p,2sp-p} = k_{2sp-p} H_*(X)^{\otimes p}$ *(*k_t *désignant, comme toujours, la partie homogène de degré* t *de l'algèbre graduée considérée), alors :*

$$d^{p-1}(\gamma_p(x)) = [\langle x \rangle^p]$$

où $[y]$ *désigne l'image dans* $E^{p-1}_{1,*}$ *d'un élément* $y \in E^1_{1,*} \simeq H_*(X)$.

Or la proposition (7.4) a été en fait démontrée par May dans le cadre général d'une suite spectrale (7.10) associée à une algèbre différentielle graduée quelconque C_*. Elle reste donc valable lorsque $C_* = \mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p)$ et nous fournit donc un procédé de calcul des éléments $d^{p-1}(\gamma_p(\bar{\tau}_i))$ dans la suite spectrale fondamentale E^*_{**}, puisque la définition de $\gamma_p(x)$ que l'on vient de donner est compatible avec celle des éléments $\gamma_p(\bar{\tau}_i)$ donnée précédemment (voir la remarque (5.2) *a)*). Compte tenu de la commutativité du diagramme (7.14), le calcul d'une classe $[\langle x \rangle^p]$ (donc de l'élément $d^{p-1}(\gamma_p(x))$) peut se faire indifféremment dans la suite spectrale (7.11) associée à l'algèbre $C_*(X)$ ou dans la suite spectrale (7.10) associée à $\mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p)$. Plus précisément, pour tout $n > s$, on a l'énoncé suivant :

Proposition **(7.5)**. — *Soient* $x \in H_{2(n+s)-1}(K(\mathsf{F}_p, 2n), \mathsf{F}_p)$ *et* $x' \in H_{2(n+s)-1}(X, \mathsf{F}_p)$ (resp. $x'' \in H_{2s-1}(\mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p))$) *son image par* ∂_n (resp. *par stabilisation*). *Alors* $\langle x'' \rangle^p$ *est la classe dans* $H_{2sp-2}(\mathsf{F}^{st}_p(\mathsf{F}_p))$ *du stabilisé de l'élément* $(\varepsilon_{np})_*(\langle x' \rangle^p) \in H_{2p(n+s)-2}(K(\mathsf{F}_p, 2np), \mathsf{F}_p)$.

En particulier, la proposition (7.4) implique maintenant que l'élément

$$d^{p-1}\gamma_p(x'') \in \mathrm{E}^{p-1}_{1,2sp-2}$$

est la classe du stabilisé de l'élément $(\varepsilon_{np})_*(\langle x' \rangle^p) = (\varepsilon_{np})_*(d_{p-1}(\gamma_p(x')))$ ($\gamma_p(x')$ désignant comme d'habitude la classe dans $\mathrm{E}^{p-1}_{p,2sp-p}$ de l'élément $[x', \ldots, x']$ de $\mathrm{E}^1_{p,2sp-p}$ dans la suite spectrale (7.11) associée à $\mathrm{C}_*[\mathrm{X}]$), et l'on peut donc, comme on l'a annoncé, faire le calcul de $d^{p-1}\gamma_p(x)$ dans l'une ou l'autre des suites spectrales considérées. Or, si toutes les propriétés des suites spectrales utilisées jusqu'à présent étaient valables pour chacune de celles-ci, il en est une qui n'est connue pour l'instant que pour la suite spectrale (7.11), alors qu'elle n'est qu'au stade conjectural dans le cas de la suite spectrale générale (7.10) (voir [46], remarque (6.9)).

Théorème **(7.6)** (S. Kochman [37], corollaire 20). — *Soit* X *un triple espace de lacets. Alors l'opération homologique :*

$$\langle\ \ \rangle^p : \mathrm{H}_{2s-1}(\mathrm{X}, \mathbf{F}_p) \to \mathrm{H}_{2sp-2}(\mathrm{X}, \mathbf{F}_p)$$

définie ci-dessus s'identifie à l'opération de Dyer-Lashof — $\beta\mathrm{Q}^s$.

(Rappelons que les opérations de Dyer-Lashof sont à l'homologie d'un espace de lacets itéré ce que les opérations de Steenrod sont à la cohomologie d'un espace quelconque. Pour leur définition précise, voir [22], [37], [46].)

Il résulte du théorème (7.6) et de la proposition (7.5) (et des remarques qui suivent celle-ci) que la formule (7.9) est conséquence immédiate de la proposition suivante :

Proposition **(7.7)**. — *Pour tout* $i \geq 0$ *et tout* $n > p^i$, *soient* $x_i \in \mathrm{H}_{2(n+p^i)-1}(\mathrm{K}(\mathbf{F}_p, 2n), \mathbf{F}_p)$ *une classe d'homologie dont la stabilisée est* $\tau_i \in \mathrm{H}_{2p^i-1}(\mathbf{F}^{\mathrm{st}}_p(\mathbf{F}_p)) = k_{2p^i-1}(\mathrm{A}_*)$, *et* x'_i *l'image de* x_i *par* ∂_n *dans* $\mathrm{H}_{2(n+p^i)-1}(\mathrm{X}, \mathbf{F}_p)$ (X *désignant à nouveau l'espace* (7.12)). *Alors :*

$$(\varepsilon_{pn})_*(-\beta\mathrm{Q}^{n+p^i}(x'_i)) \neq 0.$$

Démonstration. — On notera, pour tout $j \geq 0$, par P^j_* l'opération homologique dont la transposée est l'opération (cohomologique) de Steenrod P^j, et par β l'opération de Bockstein en homologie. Si $i_k \in \mathrm{H}_{2k}(\mathrm{K}_k) \approx \mathbf{F}_p$ désigne, avec la notation (7.13), la classe canonique associée à l'élément $1 \in \mathbf{F}_p$, et i'_k est son image par ∂_k dans $\mathrm{H}_{2k}(\mathrm{X})$, il suffit de démontrer la formule :

$$(\varepsilon_{pn})_*(\mathrm{P}_*\mathrm{P}^p_* \ldots \mathrm{P}^{p^i}_*\beta\mathrm{Q}^{n+p^i}x'_i) = i_{pn} \tag{7.17}$$

puisque les opérations P^i_* sont naturelles et commutent notamment avec $(\varepsilon_{pn})_*$. On examine le cas où $i = 0$ séparément ; il faut alors démontrer que :

$$(\varepsilon_{pn})_*(\mathrm{P}_*\beta\mathrm{Q}^{n+1}x'_0) = i_{pn}. \tag{7.18}$$

Or il résulte des relations de Nishida ([50], [46], théorème (9.4)) que :

$$\mathrm{P}_*\beta\mathrm{Q}^{n+1}(x'_0) = \mathrm{Q}^n\mathrm{P}^0_*\beta(x'_0) = \mathrm{Q}^n\beta(x'_0)$$

puisque P^0_* est l'application identique. Or $\beta(\tau_0)=1$ par définition de $\tau_0 \in A_*$, d'où :

$$Q^n\beta(x'_0)=Q^n i'_n=(i'_n)^p,$$

la dernière égalité résultant des propriétés usuelles des opérations de Dyer-Lashof puisque $\deg i'_n=2n$. Enfin, la commutativité du diagramme (7.14) implique que $(\varepsilon_{pn})_*(i'_n)^p=i_{pn}$, d'où la formule (7.18).

La démonstration de la formule (7.17) pour $i>0$ se fait de la manière suivante : les relations de Nishida impliquent que pour tout $s>0$:

(7.19) $$P^{p^s}_*(\beta Q^{n+p^s}(x'_s))=\beta Q^{n+p^{s-1}}(x'_{s-1})$$

puisque l'on a les relations $\beta\tau_k=P^i_*\tau_k=0$ lorsque $k>0$, $i\neq p^{k-1}$, alors que $P^{p^{k-1}}_*\tau_k=\tau_{k-1}$. La formule (7.17) se démontre par récurrence sur i en utilisant les formules (7.19) et (7.18). Ceci achève la démonstration de la proposition (7.7) et donc la démonstration de la formule (7.8), qui, avec (7.7), caractérise la différentielle d_{p-1}.

Remarque **(7.8)**. — On a vu que l'algèbre $\mathsf{F}^{\mathrm{st}}_p(\mathsf{F}_p)$ était « aussi commutative » que l'algèbre des chaînes sur un espace de lacets infini. La proposition précédente montre les limites de cette commutativité ; en effet, si l'on pouvait remplacer $\mathsf{F}^{\mathrm{st}}_p(\mathsf{F}_p)$ par une algèbre différentielle graduée *commutative* C_* qui lui soit quasi isomorphe en tant qu'algèbre, la différentielle d^{p-1} dans la suite spectrale (7.10) associée à C_* satisferait à la formule $d^{p-1}(\gamma_p(\bar\tau_{m-1}))=0$, ce que contredit (7.9). Pour une discussion de ce phénomène dans un tout autre langage, voir ([5], introduction et VI, 4).

Il est maintenant facile de calculer le terme E_p dans la suite spectrale (7.10) puisqu'on dispose des formules (7.7) et (7.8). Soit $Q_R(x_1, \ldots, x_n)$ l'algèbre de polynômes tronqués $R[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^p, \ldots, x_n^p)$, munie de la bigraduation définie en attribuant un bidegré $(1, n_i)$ au générateur x_i. On abrège Q_{F_p} en Q_p.

Proposition **(7.9)**. — $E_p\approx E_\infty\simeq Q_p(\tau^*_0, \tau^*_1, \ldots)$, *où* τ_j *est de bidegré* $(1, 2p^j-1)$.

Démonstration. — On montre tout d'abord que $E_p\simeq Q_p(\tau^*_0, \ldots)$, ce qui est conséquence immédiate du fait que (E_{p-1}, d_{p-1}) est le classique complexe de Koszul. La comultiplication sur E_p est de nouveau donnée par (7.5), et l'argument de primitivité employé dans la démonstration du lemme (7.2) montre directement que toutes les différentielles supérieures d_j $(j>p-1)$ sont nulles sur les générateurs τ^*_s de E_j.

Ceci termine notre calcul : par exemple, le terme E^∞ de la suite spectrale duale est l'algèbre

$$E^\infty\simeq Q_p(\bar\tau_0, \bar\tau_1, \ldots),$$

compte tenu de la formule (7.5) définissant la comultiplication dans E_∞. De même, l'injectivité du morphisme de suites spectrales $f^t : {}^tE^*_{**}\to {}^0E^*_{**}$ au niveau $E^2=E^{p-1}$ (voir la remarque (5.2) *b)*) permet de déduire de la proposition (7.9) les propriétés correspondantes de la suite spectrale ${}^tE^*_{**}$. On trouve :

(7.20) $${}^tE^p\approx{}^tE^\infty\simeq Q_p(\bar\tau_t, \bar\tau_{t+1}, \ldots)$$

$\bar{\tau}_t$ ayant le même bidegré que ci-dessus, et donc :

(7.21) $${}^t\mathrm{E}_\infty \simeq \mathrm{Q}_p(\tau_t^*, \tau_{t+1}^*, \ldots).$$

Il reste à rassembler ces informations. Puisque :

$$\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})_{pt} \simeq {}^t\mathrm{E}_\infty \simeq \mathrm{Q}_\mathrm{R}(\tau_t^*, \tau_{t+1}^*, \ldots),$$

on a démontré l'analogue de la proposition (5.3) :

Proposition **(7.10)**. — *Soit $\mathcal{O}$ un objet satisfaisant aux hypothèses* A1 *et* A2, *sur un anneau de base* R *de caractéristique première impaire. Alors, on a un isomorphisme de* R*-modules gradués :*

$$\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \simeq \bigoplus_{t \geq 0} \mathrm{Q}_\mathrm{R}(\tau_t^*, \tau_{t+1}^*, \ldots),$$

les générateurs τ_s^* des termes de droite étant gradués par le degré total $\deg(\tau_s^*) = 2p^s$.

L'action de $\mathrm{End}(\mathcal{O})$ s'explicite comme dans le cas de caractéristique 2 : si l'on note $\tau_{s,j}^*$ (pour $s \geq j \geq 0$) le terme τ_s^* dans la $(j+1)$-ième composante $\mathrm{Q}_\mathrm{R}(\tau_j^*, \tau_{j+1}^*, \ldots)$ de $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$, l'action de $\mathrm{F} \in \mathrm{End}(\mathcal{O})$ est caractérisée par les formules :

(7.22) $$\tau_{s,0}^* \mathrm{F}^r = \mathrm{F}^r \tau_{s,0}^* = \tau_{s,r}^* \quad \text{pour} \quad r \leq s$$

(7.23) $$\tau_{s,0}^* \mathrm{F}^r = \mathrm{F}^r \tau_{s,0}^* = 0 \quad \text{pour} \quad r > s.$$

Ainsi, pour tout $j > 0$, $\mathrm{Ext}^{2j}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ est un $(\mathrm{H}, \mathrm{H}^0)$-bimodule monogène engendré par un élément $\rho_j = \tau_{0,0}^{*\alpha_1}, \ldots, \tau_{m,0}^{*\alpha_{m+1}}$ de degré $2j$, les α_i étant les entiers qui interviennent dans le développement p-adique de j :

$$j = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i+1} p^i, \qquad 0 \leq \alpha_k < p.$$

Les relations (7.22)-(7.23) entraînent les relations :

$$\mathrm{F}^{v_p(j)+1} \rho_j = \rho_j \mathrm{F}^{v_p(j)+1} = 0$$

et $\mathrm{F}^t \rho_j = \rho_j \mathrm{F}^t \neq 0$ pour $t < v_p(j) + 1$, d'où le théorème (1.3).

Remarque **(7.11)**. — *a)* Une fois la proposition (7.9) démontrée, il n'y a plus lieu de distinguer le cas où la caractéristique est paire des autres, ce qui explique que l'énoncé du théorème (1.3) englobe ces deux cas. Comme on l'a vu, il n'en est malheureusement pas de même de la démonstration.

b) On peut donner un énoncé plus compact du théorème (1.3), du moins lorsque la base R est le corps fini $\mathbf{F}_p$: $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ est isomorphe (en tant que $\mathrm{End}(\mathcal{O}) = \mathbf{F}_p[\mathrm{F}]$-module gradué) au $\mathbf{F}_p[\mathrm{F}]$-module gradué sous-jacent à l'algèbre graduée commutative $\mathrm{Sym}(\mathrm{F}) \otimes_{\mathbf{F}_p} \Gamma(\mathrm{Q})/\mathrm{I}$, où F est de degré 0, Q de degré 2 et I l'idéal engendré par les éléments $\mathrm{F}^{j+1}\gamma_{pj}(\mathrm{Q})$ pour tout $j \geq 0$. C'est une simple traduction du théorème (1.3), lorsque l'on note $\gamma_{pj}(\mathrm{Q})$ l'élément $\tau_{j,0}^*$.

Ceci justifie la conjecture suivante, lorsque la base est le corps $\mathbf{F}_p$:

Conjecture **(7.12)**. — $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$, *muni de sa structure d'algèbre graduée définie par le produit de Yoneda, est isomorphe, en tant qu'algèbre graduée, à l'algèbre* $\mathrm{Sym}(\mathrm{F}) \otimes \Gamma(\mathrm{Q})/\mathrm{I}$.

Remarque **(7.13)**. — Si, comme on vient de le voir, on ne sait pas calculer la structure multiplicative de $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$, il n'en est pas de même de la structure comultiplicative induite par la loi d'anneau de $\mathcal{O}$: la construction de la comultiplication sur la suite spectrale fondamentale montre que cette comultiplication :

$$\nu : \mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}, \mathcal{O}) \simeq \mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})\otimes\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$$

est donnée sur chacun des générateurs de la composante $Q_R(\tau_i^*, \tau_{i+1}^*, \ldots)$ de $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ par la formule (7.5).

Dans ce travail, on s'est borné à étudier les extensions de G_a dans la catégorie des faisceaux de $\mathbf{F}_p$-vectoriels. Indiquons brièvement quelle est la situation lorsque l'on se place dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens. Il y a dans ce cas deux manières de procéder. La première consiste à aborder la question de front et à refaire tous les calculs précédents en remplaçant $\mathbf{F}_p$ par $\mathbf{Z}$. Il faut notamment remplacer l'algèbre $A_* \simeq H_*(\mathbf{F}_p^{st}(\mathbf{F}_p))$ par l'algèbre $H_*(\mathbf{Z}^{st}(\mathbf{Z}))$. Or, si cette algèbre (l'algèbre d'homologie entière du spectre d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z})$) est connue (voir [16]), on n'en possède pas de description élémentaire analogue à celle donnée par Milnor pour A_*, bien que ce soit une sous-algèbre de celle-ci. Le calcul du terme E^1 (et *a fortiori* E^i) de la suite spectrale est donc plus délicat.

L'autre manière de procéder est plus élémentaire. Elle consiste à considérer la suite exacte suivante, qui relie les extensions de faisceaux de $\mathbf{F}_p$-vectoriels aux extensions de faisceaux abéliens sous-jacentes :

$$\begin{aligned} \ldots \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{i-1}(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^{i-1}(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{i-2}(G_a, G_a) \\ \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{i}(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^{i}(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{i-1}(G_a, G_a) \to \ldots \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Ext}_\Lambda^i(G_a, G_a)=0$ pour i impair, ceci se réduit à une série de suites exactes à quatre termes (pour tout $j>0$) :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^{2j-1}(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{2j-2}(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{2j}(G_a, G_a) \\ \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^{2j}(G_a, G_a) \to 0. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer la flèche centrale $\mathrm{Ext}_\Lambda^{2j-2}(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{2j}(G_a, G_a)$, qui est une sorte de Bockstein. Il semble que ce soit la multiplication par l'élément Q de degré 2, dans l'algèbre $\mathrm{Ext}_\Lambda^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. Ceci permettrait de conclure, si l'on savait démontrer la conjecture (7.12). Quoi qu'il en soit, ces deux approches fournissent des résultats très partiels en bas degrés, qui concordent avec les résultats déjà connus (voir [11], proposition 2). On est amené à formuler la conjecture suivante qui, à la différence de la conjecture (7.12), n'est même pas connue lorsque l'on oublie les structures multiplicatives (on suppose de nouveau que la base est le corps fini $\mathbf{F}_p$).

Conjecture **(7.14)**. — *Sous les hypothèses du théorème* (1.3) *sur* $\mathcal{O}$, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ *est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à :*

$$\mathrm{Sym}(F)\otimes\Lambda(\tau_0, \xi_1)\otimes\Gamma(Q)/J$$

J étant l'idéal engendré par les éléments

$$F\xi_1,\ \tau_0\xi_1,\ F^{j+2}\gamma_{pj}(Q),\ F^{i+1}\tau_0\gamma_{pi}(Q)$$

(*pour tous* $i, j \geq 0$). *Les degrés des générateurs sont donnés par les formules suivantes* : $\deg(F)=0$, $\deg(\tau_0)=1$, $\deg(\xi_1)=2p-1$, $\deg(Q)=2p$.

Appendice : spectres et stabilisation

La question de la construction des foncteurs stabilisés $F^{st}(\ )$ d'un foncteur F, satisfaisant aux propriétés d'associativité énoncées dans la propriété P2 du chapitre II est liée à la question de la construction, dans la catégorie des spectres (au sens des topologues), d'un smash-produit qui soit associatif. On sait que c'est là l'un des points les plus délicats de la théorie des spectres, et qu'il a été examiné par divers auteurs (voir notamment [4], [67], [1], III, [4], [32]). La construction d'Illusie employée ici, qui s'applique pour l'instant aux seuls spectres d'Eilenberg-Mac Lane, a le défaut de faire intervenir des objets n-simpliciaux et de définir $F^{st}(\ )$ au moyen d'un très gros diagramme. Ces défauts sont rachetés par le caractère simplicial de la construction très bien adaptée au cadre des topos. L'aspect fonctoriel et la rigidité de la construction font que les énoncés d'associativité qui nous concernent découlent formellement des propriétés correspondantes des objets d'Eilenberg-Mac Lane mentionnées dans la proposition (2.18). La seule autre définition de type simplicial d'un spectre est due à Kan ([35], [66]) et le smash-produit (dont on trouvera la définition, fort délicate, dans [36]) ne possède pas, semble-t-il, de bonnes propriétés d'associativité.

Voici une esquisse de la construction d'Illusie, qui peut servir de guide pour la lecture de [34], VI, § 11. On commence par associer à un A-module P, au moyen du théorème de Dold-Puppe (lemme (2.15)), le A-module simplicial $K(P, \langle n \rangle)$ dont le normalisé est le n-complexe $P[1, \dots, 1]$, concentré en multi-degré $(1, \dots, 1)$. Remarquons que pour deux A-modules P et Q, et deux entiers $p, q \geq 0$, on a un isomorphisme de modules $(p+q)$-simpliciaux :

(8.1) $$K(P, \langle p \rangle) \underline{\otimes} K(Q, \langle q \rangle) \xrightarrow{\sim} K(P \otimes Q, \langle p+q \rangle)$$

($\underline{\otimes}$ désignant comme toujours le produit tensoriel externe). En particulier, ceci permet de définir un morphisme de suspension $(n+1)$-simplicial en utilisant (8.1) pour $n=1$ et le morphisme canonique $A \otimes P \xrightarrow{\sim} P$:

$$\begin{aligned} S^1 \underline{\wedge} K(P, \langle n \rangle) &\xrightarrow{\mathscr{H} \wedge 1} K(A, \langle 1 \rangle) \underline{\wedge} K(P, \langle n \rangle) \\ &\to K(A, \langle 1 \rangle) \underline{\otimes} K(P, \langle n \rangle) \to K(P, \langle n+1 \rangle) \end{aligned}$$

(où $\underline{\wedge}$ est le smash-produit externe), d'où par adjonction une application de « degré 1 » : $K(P, \langle n \rangle) \to K(P, \langle n+1 \rangle)$ qui identifie $K(P, \langle n \rangle)$ avec la partie de $K(P, \langle n+1 \rangle)$ dont le premier indice est 1. De même, une application similaire :

$$K(P, \langle n \rangle) \underline{\wedge} S^1 \to K(P, \langle n+1 \rangle)$$

permet d'identifier $K(P, \langle n \rangle)$ à la partie de $K(P, \langle n+1 \rangle)$ dont le dernier indice est 1.

Ces deux applications de suspension sont homotopes, et la question qui se pose dans toute définition du smash-produit de deux spectres est de savoir comment les relier. La solution adoptée par Illusie consiste à observer que, dans le cas des objets d'Eilenberg-Mac Lane qui nous intéresse, il existe en fait $n+1$ applications de suspension (de degré $+1$) :

$$d^j : K(P, \langle n \rangle) \to K(P, \langle n+1 \rangle)$$

obtenues en identifiant $K(P, \langle n \rangle)$ à la partie de $K(P, \langle n+1 \rangle)$ dont le j-ième indice est 1. Si l'on applique le foncteur F que l'on souhaite stabiliser, on obtient $n+1$ flèches $FK(P, \langle n \rangle) \to FK(P, \langle n+1 \rangle)$. Il est maintenant commode de translater chacun des objets n-simpliciaux $FK(P, \langle n \rangle)$ par $\langle -n \rangle = [-1, \ldots, -1]$, ce qui est possible, puisqu'on sait le faire dans la catégorie des n-complexes et que l'on dispose du théorème de Dold-Puppe déjà cité. On obtient ainsi un diagramme indexé par la catégorie I des ensembles finis (avec les applications croissantes *injectives* pour morphismes) :

$$FK(P, \langle 0 \rangle)\langle 0 \rangle \rightrightarrows FK(P, \langle 1 \rangle)\langle -1 \rangle \overset{\rightarrow}{\rightrightarrows} \ldots FK(P, \langle n \rangle)\langle -n \rangle \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\vdots}}$$

Le n-ième terme $G(n) = FK(P, \langle n \rangle)\langle -n \rangle$ du diagramme est un objet n-simplicial et la i-ème flèche $G(n) \to G(n+1)$ envoie $G(n)_{j_1, \ldots, j_n}$ dans $G(n+1)_{j_1, \ldots, j_{i-1}, 0, j_i, \ldots, j_n}$. Elle se prolonge en un morphisme d'objets $(n+1)$-simpliciaux $G'(n) \to G(n+1)$, $G'(n)$ désignant l'objet $(n+1)$-simplicial constant le long de son i-ème indice obtenu à partir de $G(n)$. Par application du foncteur $(n+1)$-diagonale, on obtient finalement un morphisme d'ensembles simpliciaux $\Delta FK(P, \langle n \rangle)\langle -n \rangle \to \Delta FK(P, \langle n+1 \rangle)\langle -n-1 \rangle$; en rassemblant toutes ces flèches on construit ainsi un système inductif FK(P) d'ensembles simpliciaux indexé par I :

$$\Delta FK(P, \langle 0 \rangle)\langle 0 \rangle \rightrightarrows \Delta FK(P, \langle 1 \rangle)\langle -1 \rangle \ldots \Delta FK(P, \langle n \rangle)\langle -n \rangle \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\vdots}}$$

C'est ce diagramme qui, dans la théorie d'Illusie, remplace le diagramme naïf :

$$FK(P, 0) \xrightarrow{S} FK(P, 1) \xrightarrow{S} \ldots \xrightarrow{S} FK(P, n)$$

(S désignant la flèche de suspension de degré $+1$, qui n'est d'ailleurs définie que sur les complexes associés aux $FK(P, n)$).

On pourrait maintenant passer à la limite et définir en première approximation $F^{st}(P) = \varinjlim_{I} FK(P)$, ce qui serait adéquat pour les applications qu'on a en vue. En fait Illusie préfère tout d'abord remplacer $\varinjlim_{I} FK(P)$ par sa résolution standard (définie par exemple en [28]). C'est un module simplicial dans la catégorie des modules simpliciaux, autrement dit un module bisimplicial. Illusie réserve la notation $F^{st}(P)$ à l'objet diagonal associé et nous nous conformerons à cet usage.

Il reste à vérifier que l'homologie de $F^{st}(P)$ est bien le foncteur dérivé stable de F en P. Le point de départ est l'observation que chacun des $FK(P, \langle n \rangle)$ a le type d'homotopie de $FK(P, n)$. Ainsi l'homologie du complexe associé à chacun de ces termes coïncide bien, à translation par n près, pour P projectif, avec le foncteur dérivé gauche $L_i F(P, n)$

de Dold-Puppe. Quant aux morphismes de transition, ils sont tous homotopes entre eux, et ils coïncident au niveau de l'homologie avec l'homomorphisme de suspension :

$$S : L_{n+i}F(P, n) \to L_{n+i+1}F(P, n+1).$$

Le système inductif obtenu à partir de FK(P) par passage à l'homologie est donc essentiellement constant de valeur :

$$L_i^{st}F(P) = L_{n+i}F(P, n) \qquad (i<n).$$

On démontre alors la proposition suivante, mentionnée dans l'énoncé P1 du chapitre **II**.

Proposition **(8.1)** ([34], notamment VI, proposition (4.6.12)). — *Soit un foncteur* F : (A-mod) → (B-mod).

1) *Pour tout* A-*module* P (*et plus généralement pour tout* A-*module simplicial* P), *il existe un quasi-isomorphisme canonique de* B-*modules simpliciaux* :

$$\rho(F, P) : F^{st}(P) \to L \varinjlim_{I} FK(P).$$

2) *L'application canonique* $L \varinjlim_{I} FK(P) \to \varinjlim_{I} FK(P)$ *est également un quasi-isomorphisme.*

3) *Pour tout n, l'application* $FK(P, \langle n \rangle)\langle -n \rangle \to \varinjlim_{I} FK(P)$ *est un n-quasi-isomorphisme. Autrement dit* :

$$H_i(\varinjlim_{I} FK(P)) \simeq H_{n+i} FK(P, n)$$

pour tout $i<n$.

En fait 1) résulte de la définition de $F^{st}(P)$. D'autre part, par abus de langage, on a noté dans le texte par $\rho(F, P)$ l'application composée des quasi-isomorphismes mentionnés en 1) et 2).

Mentionnons enfin que le point non formel dans la démonstration est 3), qui est essentiellement l'énoncé de la commutation de l'homologie au passage à la limite inductive. Ceci n'est pas immédiat, puisque la catégorie d'indices I n'est pas filtrante, et nécessite une démonstration assez délicate.

Pour ce qui est de la démonstration de la propriété d'associativité P2 du chapitre II, on renvoie à [34]; bornons-nous à remarquer à ce propos que la propriété d'associativité résulte de manière purement formelle de la proposition (2.18) et du fait que l'on n'a pas fait de choix arbitraire de la suspension $FK(P, \langle n \rangle) \to FK(P, \langle n+1 \rangle)$, mais au contraire inclus les $n+1$ candidats naturels dans la définition de $F^{st}(P)$. Attirons enfin l'attention du lecteur sur l'analogie suivante ; Illusie construit à partir des familles de flèches induites sur les chaînes par les accouplements du cup-produit :

$$R[\mu] : R^+K(R, i) \otimes R^+K(R, j) \to R^+K(R, i+j)$$

une structure d'anneau simplicial $R^{st}(R) \otimes R^{st}(R) \to R^{st}(R)$ sur $R^{st}(R)$ (et par le même procédé une structure de $R^{st}(R)$-module sur $R^{st}(P)$, pour tout R-module P).

D'autre part, on a affirmé au cours de la démonstration de la proposition (6.13) qu'on pouvait associer aux flèches :

(8.2) $$R^+[K(R, i)] \otimes R^+[K(P, j)] \to R^{+2}K(P, i+j)$$

définies en (6.7), une application stabilisée :

$$R^{st}(R) \otimes R^{st}(P) \to (R^2)^{st}(P).$$

Les deux constructions se font par le même procédé, au sujet duquel il convient d'apporter quelques précisions, inspirées par ce que l'on connaît des spectres dans les diverses situations topologiques, et qui ne figurent pas dans [34].

On travaille dans un topos fixé. Soient $S^{\langle 0 \rangle}$ l'ensemble à deux éléments de T, pointé par l'un d'entre eux, et $S^{\langle 1 \rangle}$ la 1-sphère simpliciale pointée de T, engendrée par un 1-simplexe non dégénéré. On définit la n-sphère n-simpliciale en posant :

$$S^{\langle n \rangle} = S^{\langle 1 \rangle} \underline{\wedge} \ldots \underline{\wedge} S^{\langle 1 \rangle}$$

et l'on a un isomorphisme $R^+[S^{\langle n \rangle}] \simeq K(R, \langle n \rangle)$ de R-modules n-simpliciaux, et donc un morphisme de Hurewicz $\mathscr{H} : S^{\langle n \rangle} \to K(R, \langle n \rangle)$. Les $S^{\langle n \rangle}$, pour n variable, forment un diagramme S indexé par la catégorie I, lorsque l'on définit la j-ième flèche :

$$d^j : S^{\langle n \rangle} \to S^{\langle n+1 \rangle}$$

par : $$d^j(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}) = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_{j-1}}, e, X_{i_j}, \ldots, X_{i_n}).$$

On remarquera que d^j envoie un élément de multidegré $(i_1, \ldots, i_n)$ sur un élément de multidegré $(i_1, \ldots, i_{j-1}, 1, i_j, \ldots, i_n)$. Appelons diagramme spectral un objet de ce type, et diagramme bispectral un objet du même type indexé par la catégorie $I \times I$, le terme $X_{i,j}$ indexé par (i, j) étant un ensemble $(i+j)$-simplicial. Le smash-produit externe $\mathbf{X} \underline{\wedge} \mathbf{Y}$ de deux diagrammes spectraux est de manière naturelle un diagramme bispectral de terme général $X_i \underline{\wedge} Y_j$. On appellera accouplement des diagrammes spectraux $\mathbf{X} \underline{\wedge} \mathbf{Y}$ dans $\mathbf{Z}$ un morphisme de diagrammes $\mathbf{X} \underline{\wedge} \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ compatible avec le foncteur somme $+ : I \times I \to I$.

Exemples **(8.2)**. — Pour toute paire de R-modules P et Q, la flèche composée de la projection canonique $K(P, \langle p \rangle) \underline{\wedge} K(Q, \langle q \rangle) \to K(P, \langle p \rangle) \otimes K(Q, \langle q \rangle)$ et de l'application (8.1) définit un accouplement du cup-produit :

$$\nu_{P,Q} : \mathbf{K}(P) \underline{\wedge} \mathbf{K}(Q) \to \mathbf{K}(P \otimes Q),$$

$\mathbf{K}(P)$ désignant le diagramme spectral d'Eilenberg-Mac Lane, de terme général $K(P, \langle n \rangle)$. Par composition avec le morphisme de Hurewicz, cette flèche permet d'associer à tout R-module P un accouplement de suspension :

$$\sigma : \mathbf{S} \underline{\wedge} \mathbf{K}(P) \xrightarrow{\mathscr{H} \wedge 1} \mathbf{K}(R) \underline{\wedge} \mathbf{K}(P) \xrightarrow{\nu_{R,P}} \mathbf{K}(P).$$

Enfin, les variantes multisimpliciales des flèches (6.13) vont permettre de définir de la même façon un accouplement $\varphi_P : \mathbf{K}(R) \wedge \mathbf{K}(P) \to R\mathbf{K}(P)$; c'est le composé :

$$\mathbf{K}(R)\underline{\wedge}\mathbf{K}(P) \xrightarrow{\sim} R^+[S]\underline{\wedge}\mathbf{K}(P) \xrightarrow{1\wedge\mathscr{H}} R^+[\mathbf{S}]\underline{\wedge}R^+\mathbf{K}(P)$$
$$\longrightarrow R^+[\mathbf{S}]\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \longrightarrow R^+[\mathbf{S}\underline{\wedge}\mathbf{K}(P)] \xrightarrow{R^+[\sigma]} R^+[\mathbf{K}(P)].$$

Toutes ces flèches sont des morphismes de diagrammes bispectraux, sauf la dernière qui est un accouplement de diagrammes spectraux. La flèche composée en est également un.

Considérons maintenant des diagrammes spectraux (resp. bispectraux) en R-modules du topos T (plutôt que les diagrammes en ensembles que l'on vient d'examiner). On définira un accouplement de diagrammes spectraux en R-modules $\mathbf{A}\otimes_R\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ en remplaçant dans la définition d'un accouplement le produit ensembliste externe pointé par le produit tensoriel externe. Par exemple, un accouplement $\alpha:\mathbf{X}\underline{\wedge}\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}$ de diagrammes spectraux induit par passage aux chaînes un accouplement des diagrammes de R-modules associés :

$$R[\mathbf{X}]\underline{\otimes}R[\mathbf{Y}] \xrightarrow{\sim} R[\mathbf{X}\underline{\wedge}\mathbf{Y}] \xrightarrow{R[\alpha]} R[\mathbf{Z}].$$

Les accouplements $\nu_{R,P}$ et Φ_P induisent notamment des accouplements :

$$R^+(\nu_{R,P}) : R^+\mathbf{K}(R)\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \to R^+\mathbf{K}(P)$$

et : $$R^+[\Phi_P] : R^+\mathbf{K}(R)\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \to (R^+)^2\mathbf{K}(P).$$

Il résulte du lemme (6.4) que des diagrammes suivants sont commutatifs (Φ et Ψ désignant les foncteurs (6.1) et (6.2)).

(8.3)
$$\begin{tikzcd} R^+\mathbf{K}(R)\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \arrow[r, "R^+[\Phi_P]"] \arrow[dr, "R^+[\nu_{R,P}]"'] & (R^+)^2\mathbf{K}(P) \arrow[d, "R^+[\Phi(\mathbf{K}(P))]"] \\ & R^+\mathbf{K}(P) \end{tikzcd}$$

(8.4)
$$\begin{tikzcd} & R^+\mathbf{K}(R)\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \arrow[rr, "R^+[\Phi_P]"] \arrow[dl, "\Phi\mathbf{K}(R)\otimes 1"'] & & (R^+)^2\mathbf{K}(P) \arrow[d, "\Phi(R^+[\mathbf{K}(P)])"] \\ \mathbf{K}(R)\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \arrow[rr, "\sim"] & & R^+[\mathbf{S}]\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \arrow[r, "R^+[\sigma]"] & R^+\mathbf{K}(P) \end{tikzcd}$$

(8.5)
$$\begin{tikzcd} R^+[\mathbf{S}]\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \arrow[r, "R^+[\sigma]"] \arrow[d, "R^+[\mathscr{H}]\underline{\otimes}1"'] & R^+\mathbf{K}(P) \arrow[d, "R^+\Psi(\mathbf{K}(P))"] \\ R^+[\mathbf{K}(R)]\underline{\otimes}R^+\mathbf{K}(P) \arrow[r, "R^+[\Phi_P]"] & (R^+)^2\mathbf{K}(P) \end{tikzcd}$$

La méthode de stabilisation des foncteurs définie par Illusie peut maintenant être résumée en une phrase. C'est une machine qui permet d'associer (par le procédé de passage à la limite décrit au début de cet appendice), à un diagramme spectral de R-modules A (resp. à un accouplement de diagrammes spectraux de R-modules $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\to\mathbf{C}$) un R-module simplicial A^{st} (resp. un morphisme de R-modules simpliciaux $A^{st}\otimes_R B^{st}\to C^{st}$), d'une manière qui préserve l'associativité des accouplements. En particulier, pour $F : (S\text{-mod})\to(R\text{-mod})$ et P un S-module, on pose $F^{st}(P)=[F\mathbf{K}(P)]^{st}$. Les accouplements associatifs $R^+[\nu_{P,Q}]$ (resp. $R^+[\Phi_p]$) induisent donc bien des morphismes $R^{st}(P)\otimes R^{st}(Q)\to R^{st}(P\otimes Q)$ (resp. $R^{st}(R)\otimes R^{st}(P)\to (R^2)^{st}(P)$) possédant les propriétés d'associativité requises. De plus les diagrammes (8.3)-(8.5) induisent des diagrammes commutatifs :

(8.6)
$$\begin{tikzcd} R^{st}(R)\otimes R^{st}(P) \arrow[r] \arrow[dr, "R^+[\nu]"'] & (R^2)^{st}(P) \arrow[d, "R^+[\Phi]"] \\ & (R)^{st}(P) \end{tikzcd}$$

(8.7)
$$\begin{tikzcd} (R)^{st}(R)\otimes_R R^{st}(P) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi\otimes 1"'] & (R^2)^{st}(P) \arrow[d, "\Phi[R^+[\ ]]"] \\ R\otimes_R R^{st}(P) \arrow[r, "\approx"] & R^{st}(P) \end{tikzcd}$$

(8.8)
$$\begin{tikzcd} R\otimes_R R^{st}(P) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\mathscr{H}\otimes 1"'] & R^{st}(P) \arrow[d, "R^+[\Psi]"] \\ R^{st}(R)\otimes R^{st}(P) \arrow[r, "R^+[\varphi]"] & (R^2)^{st}(P) \end{tikzcd}$$

dans lequel on s'est servi de la remarque (2.24 *b)*) pour identifier $id^{st}(R)$ avec le R-module simplicial constant R. Ces trois diagrammes sont ceux auxquels il est fait allusion à la fin de démonstration de la proposition (6.13).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, *Chicago Lectures in Mathematics*, Chicago-London, The University of Chicago Press (1974).

[2] D. W. Anderson, *Simplicial* K*-theory and generalised homology theories I, II*, à paraître.

[3] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), *Lecture Notes in Mathematics*, **269**, **270**, **305**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1972-1973).

[4] J. BOARDMAN, *Stable homotopy theory*. Notes multigraphiées de l'Université de Warwick (à partir de 1965).

[5] J. BOARDMAN et R. VOGT, Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, **347**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1973).

[6] A. K. BOUSFIELD, *Homogeneous functors and their derived functors*, notes multigraphiées, M.I.T.

[7] A. K. BOUSFIELD, *Operations on derived functors of non-additive functors*, notes multigraphiées, M.I.T.

[8] G. BREDON, *Sheaf theory*, New York, McGraw-Hill (1967).

[9] L. BREEN, Extensions of abelian sheaves and Eilenberg-Mac Lane algebras, *Invent. Math.*, **9** (1969), 15-44.

[10] L. BREEN, On a non trivial higher extension of representable abelian sheaves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 1249-1253.

[11] L. BREEN, Un théorème d'annulation pour certains des Ext^i de faisceaux abéliens, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **8** (1975), 339-352.

[12] K. S. BROWN, Abstract homotopy theory and generalised sheaf cohomology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **186** (1974), 419-458.

[13] H. CARTAN, *Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie* (Séminaire Cartan 1954-1955), New York-Amsterdam, W. A. Benjamin (1967).

[14] A. CLARK, Homotopy commutativity and the Moore spectral sequence, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 65-74.

[15] J. M. COHEN, Stable homotopy, *Lecture Notes in Mathematics*, **165**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1970).

[16] J. M. COHEN, The Hurewicz homomorphism on MU, *Invent. Math.*, **10** (1970), 177-186.

[17] P. DELIGNE, Théorie de Hodge III, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **44** (1974), 5-77.

[18] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, *Groupes algébriques* (t. 1), Amsterdam, North-Holland Publishing Co. (1970).

[19] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK, Schémas en groupes (SGA 3) I, *Lecture Notes in Mathematics*, **151**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1970).

[20] A. DOLD, Über die Steenrodschen Kohomologieoperationen, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 258-294.

[21] A. DOLD et D. PUPPE, Homologie nicht-additiver Functoren, Anwendungen, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 201-312.

[22] E. DYER et R. LASHOF, Homology of iterated loop spaces, *Am. J. Math.*, **84** (1962), 35-88.

[23] G. EFROYMSON, A study of $\mathrm{H}^3_{\mathrm{sym}}(\mathrm{A}, \mathrm{M})$, *J. of Algebra*, **14** (1970), 24-34.

[24] S. EILENBERG et S. MAC LANE, Homology theory for multiplicative systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 294-330.

[25] S. EILENBERG et S. MAC LANE, On the groups $\mathrm{H}(\Pi, n)$ I, II, *Ann. of Math.*, **58**, 55-106 et **60** (1954), 49-139.

[26] S. EILENBERG et S. MAC LANE, On the homology theory of abelian groups, *Canadian J. Math.*, **7** (1955), 43-53.

[27] D. B. A. EPSTEIN, Steenrod operations in homological algebra, *Invent. Math.*, **1** (1966), 152-208.

[28] P. GABRIEL et M. ZISMAN, *Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete*, New Series, Vol. 35, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1967).

[29] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux. Actualités scientifiques et industrielles*, **1252**, Paris, Hermann (1964).

[30] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, Éléments de géométrie algébrique (EGA III), Étude cohomologique des faisceaux cohérents (première partie), *Publ. Math. I.H.E.S.*, **11** (1961).

[31] A. GROTHENDIECK, Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) I, *Lecture Notes in Mathematics*, **288**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1972).

[32] H. HASTINGS, A smash product for spectra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 946-951.

[33] R. HEATON, Polynomial 3-cocycles over fields of characteristic p, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 269-275.

[34] L. ILLUSIE, Complexe cotangent et déformations I, II, *Lecture Notes in Mathematics*, **239**, **283**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1972).

[35] D. KAN, Semisimplicial spectra, *Illinois J. Math.*, **7** (1963), 463-478.

[36] D. KAN et G. W. WHITEHEAD, The reduced join of two spectra, *Topology*, **3**, supplement 2 (1965), 239-261.

[37] S. KOCHMAN, Symmetric Massey nroducts and a Hirsch formula in homology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **163** (1972), 245-260.

[38] D. KRAINES, The $\mathscr{A}(p)$ cohomology of some k-stage Postnikov systems, *Comment. Math. Helv.*, **48** (1973), 56-71.

[39] K. LAMOTKE, *Semisimpliziale algebraische Topologie. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Band 147, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1968).

[40] M. LAZARD, Lois de groupe et analyseurs, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **72** (1955), 299-400.

[41] J. Lubin et J. Tate, Formal moduli for one-parameter formal Lie groups, *Bull. Soc. Math. France*, **94** (1966), 49-59.
[42] S. Mac Lane, The homology products in $K(\Pi, n)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 642-651.
[43] S. Mac Lane, Homologie des anneaux et des modules, *C.B.R.M. Louvain* (1956), 55-80.
[44] S. Mac Lane, *Homology. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Band 114, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1963).
[45] J. P. May, The cohomology of augmented algebras and generalised Massey products for DGA algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122** (1966), 334-340.
[46] J. P. May, A general algebraic approach to Steenrod operations. Paru dans : The Steenrod Algebra and its applications, *Lecture Notes in Mathematics*, **168**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1970).
[47] R. Milgram, Steenrod squares and higher Massey products, *Bol. Soc. Math. Mexicana*, **13** (1968), 32-57.
[48] J. Milne, Duality in the flat cohomology of a surface, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **9** (1976), 171-202.
[49] J. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, *Ann. of Math.*, **67** (1958), 150-171.
[50] G. Nishida, Cohomology operations in iterated loop spaces, *Proc. Japan Acad.*, **44** (1968), 104-109.
[51] F. Oort, Commutative group schemes, *Lecture Notes in Mathematics*, **15**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1966).
[52] S. Priddy, Mod p right derived functor algebras of the symmetric algebra functor, *J. Pure and Applied Algebra*, **3** (1973), 337-356.
[53] D. Quillen, Homotopical algebra, *Lecture Notes in Mathematics*, **43**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1967).
[54] D. Quillen, *On the homology theory of commutative rings*, notes multigraphiées, M.I.T.
[55] D. Quillen, On the (co-)homology of commutative rings. Paru dans : Applications of Categorical algebra (*Proc. Symp. Pure Math.*, XVII), 65-87; Providence, Amer. Math. Soc. (1970).
[56] M. Raynaud, Modules projectifs universels, *Invent. Math.*, **6** (1968), 1-26.
[57] N. Roby, Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **80** (1963), 213-348.
[58] M. Rothenberg et N. Steenrod, The cohomology of classifying spaces of H-spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 872-875.
[59] G. Segal, Classifying spaces and spectral sequences, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **34** (1968), 105-112.
[60] G. Segal, The multiplicative group of classical cohomology, *Quarterly J. Math.*, **26** (1975), 289-293.
[61] J.-P. Serre, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-Mac Lane, *Comment. Math. Helv.*, **27** (1953), 198-232.
[62] J.-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, *Actualités scientifiques et industrielles*, **1264**, Paris, Hermann (1959).
[63] Hong Xuan Sinh, *Gr-catégories*, thèse, Université Paris VII (1975).
[64] J. Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 293-312.
[65] N. Steenrod et D. B. A. Epstein, Cohomology operations, *Annals of Mathematics Studies*, **50**, Princeton, Princeton University Press (1962).
[66] M. Tierney, Categorical constructions in stable homotopy, *Lecture Notes in Mathematics*, **87**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1969).
[67] R. Vogt, Boardman's stable homotopy category, *Aarhus Universitet Lecture Notes*, **21**, notes multigraphiées (1971).
[68] G. W. Whitehead, Generalized homology theories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102** (1962), 227-283.

Université de Rennes,
Département de Mathématiques et Informatique,
Rennes Beaulieu
35042 Rennes Cedex

Manuscrit reçu le 30 août 1977.