[3] W. Marek and A. Mostowski, *On the Models of ZF Set Theory Extendable to the Models of KM Class Theory*, Springer Lecture Notes, 499, Proc. of the Kiel Conf. 1974.
[4] — and P. Zbierski, On higher order set theories, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), pp. 97–103.
[5] A. Mostowski, *Formal System of Analysis based on an Infinitistic Rule of Proof* in: *Infinitistic Methods*, pp. 141–166, Warszawa 1961.
[6] — and Y. Suzuki, *On ω-models which are not β-models*, Fund. Math. 65 (1969), pp. 83–93.
[7] Ch. Pinter, to appear in Zeitschrift für Mathematische Logik.
[8] L. W. Szczerba, *Interpretability of Elementary Theories* in: *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*, Ed. Butts, Hintikka, pp. 129–145.
[9] — and A. M. Setti, to appear.
[10] Z. Vetulani, *Hierarchies for the minimal β-models of the higher order arithmetics*, preprint.
[11] P. Zbierski, *Models for higher order arithmetics*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), pp. 557–562.
[12] — *Axiomatizability of second order arithmetic with ω-rule*, Fund. Math. 100 (1978), pp. 51–57.

Accepté par la Rédaction le 29. 1. 1979

Extensions normales de demi-groupes inverses

par

Mario Petrich (Montpellier)

Abstract. The concept of a normal extension of an inverse semigroup is formulated in analogy to Schreier group extensions, and a general extension problem is posed. As a means of a study of these extensions the normal hull is introduced. Certain properties of this hull concerning congruences are established. The problem posed is then solved in two special cases. The paper is concluded by the construction of the normal hull of the Reilly semigroup and of its centralizer of idempotents.

1. Introduction et sommaire. Les demi-groupes inverse représentent un des domaines de recherche les plus fructueux dans la théorie des demi-groupes. La grande variété des résultats concernant la structure des demi-groupes inverses fait qu'il est nécessaire d'avoir une théorie systématique qui couvrirait le plus grand nombre possible de résultats déjà existants. Une approche susceptible d'être utile dans cette direction est basée sur la notion d'extension normale d'un demi-groupe inverse. Cela donne un autre point de vue concernant les congruences sur les demi-groupes inverses, et représente une généralisation de la théorie de Schreier des extensions des groupes.

Nous rappelons quelques définitions et un résultat concernant les congruences sur un demi-groupe inverse dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, nous introduisons la notion d'extension normale d'un demi-groupe inverse par un autre et formulons un problème général. Le paragraphe 4 contient la construction de l'enveloppe normale d'un demi-groupe inverse. Les résultats principaux se trouvent dans le paragraphe 5: le premier concerne une propriété intéressante des congruences sur l'enveloppe normale, le deuxième et le troisième donnent des constructions des extensions normales dans deux cas particuliers. Le paragraphe 6 contient des constructions de l'enveloppe normale d'un demi-groupe de Reilly et du centralisateur de ses idempotents.

2. Rappel. Soit S un demi-groupe. Si $a, b \in S$ sont tels que $a = aba$ et $b = bab$, alors b est un *inverse* de a. Un *demi-groupe inverse* est un demi-groupe dont tout élément possède un seul inverse (l'inverse de a sera noté a^{-1}). Le demi-treillis des idempotents de S sera noté E_S.

Une relation d'équivalence ϱ sur S régulière à droite et à gauche est une *congruence*; on définit le *demi-groupe quotient* S/ϱ de façon naturelle.

L'approche courante dans l'étude des congruences ϱ sur un demi-groupe inverse S est de considérer les classes de ϱ contenant les idempotents de S. Un point de vue différent a été récemment adopté par Scheiblich [12]. Il s'agit d'associer à chaque congruence ϱ sur un demi-groupe inverse S l'ensemble $\ker\varrho = \bigcup_{e\in E_S} e\varrho$ et la relation $\operatorname{tr}\varrho = \varrho|_{E_S}$. Nous appelons $\ker\varrho$ le *noyau* et $\operatorname{tr}\varrho$ la *trace* de ϱ. Scheiblich [12] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une paire (K, ξ) définisse une congruence ϱ sur S telle que $K = \ker\varrho$ et $\xi = \operatorname{tr}\varrho$. Nous donnons ci-dessous une autre variante de ses axiomes.

Soit S un demi-groupe inverse. Un sous-demi-groupe inverse K de S *plein* (c'est-à-dire $E_S \subseteq K$) et *auto-conjugué* (c'est-à-dire $s^{-1}Ks \subseteq K$ pour tous $s \in S$) est dit un *sous-demi-groupe normal* de S. Une congruence ξ sur E_S est *normale* si pour tous $e, f \in E_S$, $s \in S$, la relation $e\xi f$ implique $s^{-1}es\xi s^{-1}fs$.

La paire (K, ξ) est une *paire en congruence* de S si K est un sous-demi-groupe normal S, ξ est une congruence normale sur E_S et les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $a \in S$, $e \in E_S$, $ae \in K$, $e\xi a^{-1}a \Rightarrow a \in K$,

(ii) $a \in K$, $e \in E \Rightarrow a^{-1}ea\xi a^{-1}ae$.

Dans un tel cas nous définissons une relation $\varkappa_{(K,\xi)}$ sur S:

$$a\varkappa_{(K,\xi)}b \Leftrightarrow a^{-1}a\xi b^{-1}b, \quad ab^{-1} \in K.$$

Nous avons démontré dans [10] le résultat suivant.

THÉORÈME. *Si (K, ξ) est une paire en congruence de S, alors $\varkappa_{(K,\xi)}$ est l'unique congruence $\varkappa$ sur S telle que $\ker\varkappa = K$ et $\operatorname{tr}\varkappa = \xi$. Réciproquement, si $\varkappa$ est une congruence sur S, alors $(\ker\varkappa, \operatorname{tr}\varkappa)$ est une paire en congruence et $\varkappa_{(\ker\xi, \operatorname{tr}\varkappa)} = \varkappa$.*

Cela donne une bijection entre l'ensemble de toutes les paires en congruence et l'ensemble des congruences sur S.

3. Extensions normales. Nous donnons ici la définition d'une extension normale et posons le problème correspondant.

DÉFINITION 1. Soit K et Q deux demi-groupes inverses et soit ξ une congruence sur le demi-treillis E_K. Un demi-groupe inverse S est une *extension normale de K par Q avec la trace ξ* s'il existe une congruence ϱ sur S telle que les conditions suivantes soient satisfaites:

(i) il existe un isomorphisme φ de K sur $\ker\varrho$ tel que pour tous $e, f \in E_K$, on a

$$e\xi f \Leftrightarrow e\varphi \operatorname{tr}\varrho f\varphi,$$

(ii) $S/\varrho \cong Q$.

L'objet (K, ξ, Q) est un *triple d'extension*. Le triple (φ, S, ϱ) est une *solution du problème d'extension* pour le triple (K, ξ, Q).

On peut souvent identifier $\ker\varrho$ avec K, et dans ce cas on a

$$K = \ker\varrho, \quad \xi = \operatorname{tr}\varrho, \quad S/\varrho \cong Q.$$

et on peut parler du couple (S, ϱ) comme une solution du problème d'extension. Il y a des conditions nécessaires évidentes pour qu'un tel couple existe (par exemple $E_K/\xi \cong E_Q$).

DÉFINITION 2. Soit (K, ξ, Q) un triple d'extension. Les solutions (φ, S, ϱ) et (φ', S', ϱ') du problème d'extension pour (K, ξ, Q) sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme ψ de S sur S' tel que pour tous $a, b \in S$, on a

$$a\varrho b \Leftrightarrow a\psi\varrho' b\psi \tag{1}$$

et $\varphi\psi = \varphi'$.

Une classe $\mathscr{C}$ de solutions pour le triple (K, ξ, Q) est dite *complète* si toute solution du problème d'extension pour (K, ξ, Q) est équivalente à une solution dans $\mathscr{C}$; si, en plus, aucune paire de solutions distinctes dans $\mathscr{C}$ n'est équivalente, $\mathscr{C}$ est dit *irréductible*.

Si on fait l'identification comme ci-dessus, on a: (S, ϱ) est équivalent à (S', ϱ') si et seulement s'il existe un isomorphisme ψ de S sur S' satisfaisant à la condition (1). On peut à présent énoncer le problème suivant.

PROBLÈME. Pour un triple d'extension (K, ξ, Q), trouver une classe complète de solutions du problème d'extension et donner un critère d'équivalence pour ces solutions.

Des solutions pour des divers cas particuliers de ce problème ont été donné par Chiriaïev [1], Coudron [2], D'Alarcao [3], Green [4], McAlister [5] et O'Carroll [8]. Soit (K, ξ, Q) un triple d'extension. Il est facile de voir qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution du problème d'extension est que ξ doit être normale dans K. Dans ce cas, la relation η définie sur K par

$$a\eta b \Leftrightarrow aa^{-1}\xi bb^{-1}$$

est une congruence qui est l'extension unique de ξ en une congruence en demi-treillis de K. Réciproquement, si η est une congruence en demi-treillis sur K, la restriction $\eta|_{E_K}$ est une congruence normale sur E_K. Il en résulte qu'on pourrait se donner un triple (K, η, Q) où η est une congruence en demi-treillis sur K.

4. L'enveloppe normale. La construction ci-dessous joue un rôle important dans une solution (au moins dans les cas particuliers) du problème d'extension.

Notation. Soit S un demi-groupe inverse. Désignons par $\Phi(S)$ l'ensemble de tous les isomorphismes entre les sous-demi-groupes de S de la forme eSe pour $e \in E_S$, avec la multiplication des transformations partielles sur S (écrites à droite).

On voit sans peine que $\Phi(S)$ est fermé pour cette multiplication. Il forme donc un demi-groupe, et de plus un demi-groupe inverse. Dans le cas d'un demi-treillis E, $\Phi(E)$ coïncide avec le T_E de Munn [7].

DÉFINITION 3. Pour un demi-groupe inverse S, $\Phi(S)$ est *l'enveloppe normale de S*.

Le noyau d'un homomorphisme φ d'un demi-groupe inverse S est, par définition, le noyau de la congruence sur S induite par φ; de plus, on dit que φ *sépare les idempotents* si pour tous $e, f \in E_S$, $e\varphi = f\varphi$ entraîne $e = f$.

PROPOSITION 1. *Soit K un sous-demi-groupe normal d'un demi-groupe inverse S. Définissons une fonction $\theta = \theta(S:K)$ sur S par θ: $s \to \theta^s$ où θ^s est la fonction définie sur sKs^{-1} par θ^s: $k \to s^{-1}ks$. Alors θ est un homomorphisme de S dans $\Phi(K)$ séparant les idempotents et dont le noyau est donné par*

$$\ker\theta(S:K) = \{s \in S \mid ss^{-1}ks = sks^{-1}s \text{ pour tout } k \in K\}. \tag{1}$$

Démonstration. Soit $s \in S$. Notons d'abord que $sKs^{-1} = ss^{-1}Kss^{-1}$ et que θ^s applique sKs^{-1} sur $s^{-1}Ks = s^{-1}sKs^{-1}s$. De plus, pour $k, k' \in sKs^{-1}$, on a

$$(k\theta^s)(k'\theta^s) = (s^{-1}ks)(s^{-1}k's) = s^{-1}k(ss^{-1})k's = s^{-1}kk's = (kk')\theta^s.$$

Il est évident que θ^s est une injection. Par conséquent $\theta^s \in \Phi(K)$.

Pour tous $s, t \in S$, on a

$$s(s^{-1}Ks \cap tKt^{-1})s^{-1} = sKs^{-1} \cap (st)K(st)^{-1} = (st)K(st)^{-1}$$

ce qui montre que les domaines de $\theta^s\theta^t$ et de θ^{st} sont égaux.

On montre de même que les images correspondantes sont aussi égales. Enfin, pour tout $k \in (st)K(st)^{-1}$, on obtient

$$k\theta^s\theta^t = t^{-1}(s^{-1}ks)t = (st)^{-1}k(st) = k\theta^{st}$$

ce qui montre que $\theta^s\theta^t = \theta^{st}$.

Si $e, f \in E_S$ sont tels que $\theta^e = \theta^f$, on a $eKe = fKf$ ce qui entraîne $e = f$ puisque K est plein dans S. Il s'ensuit que θ sépare les idempotents.

Pour tous $s \in S$ et $e \in E_S$, on obtient

$$\begin{aligned} \theta^s = \theta^e &\Leftrightarrow sKs^{-1} = eKe \text{ et } s^{-1}ks = eke \text{ pour tout } k \in eKe \\ &\Leftrightarrow ss^{-1} = e \text{ et } s^{-1}ks = k \text{ pour tout } k \in eKe \\ &\Leftrightarrow ss^{-1} = e = s^{-1}s \text{ et } s^{-1}ks = eke \text{ pour tout } k \in K. \end{aligned}$$

Supposons que $ss^{-1}ks = sks^{-1}s$ pour tout $k \in K$. Pour $k = ss^{-1}$, on obtient $s \in s^2S$, et de façon symétrique, $s \in Ss^2$. Il en résulte que s appartient à un sous-groupe de S, donc $ss^{-1} = s^{-1}s = e$ pour certain $e \in E_S$. D'après l'hypothèse on a pour tout $k \in K$,

$$s^{-1}ks = s^{-1}(ss^{-1}ks) = s^{-1}(sks^{-1}s) = eke$$

ce qui implique $\theta^s = \theta^e$. Il en résulte que $s \in \ker\theta$. Réciproquement, si $s \in \ker\theta$, on a $ss^{-1} = s^{-1}s = e$ et pour tout $k \in K$,

$$s(s^{-1}ks) = s(eke) = (se)ke = sks^{-1}s.$$

DÉFINITION 3. Soit S un demi-groupe inverse. Alors $M(S) = \ker\theta(S:S)$ est le *métacentre* de S; on dit que $M(S)$ est *idempotent* si $M(S) = E_S$. Le sous-demi-groupe de $\Phi(S)$ donné par

$$\Theta(S) = \{\theta^s \mid s \in S\}$$

est la *partie interne* de $\Phi(S)$ (ici $\theta = \theta(S:S)$).

Le métacentre apparaît dans un travail de Melnik [6] sous le nom de quasi-centre; il introduit aussi les fonctions θ^s. Dans un demi-treillis de groupes S, le méta-centre coïncide avec le centre de S. Ce n'est pas le cas en général. Par exemple, soit $S = \mathscr{M}^0(I, G, I; \Delta)$ un demi-groupe de Brandt. On calcule facilement que

$$M(S) = \{(i, g, i) \mid g \in Z(G)\} \cup 0 \quad \text{et} \quad Z(S) = 0$$

si I a au moins deux éléments, où $Z(T)$ est le centre d'un demi-groupe T. Il est aussi facile de voir que

$$\Phi(S) \cong \mathscr{M}^0(I, \mathscr{A}(G), I; \Delta)$$

où $\mathscr{A}(G)$ est le groupe d'automorphismes de G.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 1. *Soit S un demi-groupe inverse. Pour tout $s \in S$ et $\varphi \in \Phi(S)$, on a $\varphi^{-1}\theta^s\varphi = \theta^{(ese)\varphi}$ où $\theta = \theta(S:S)$ et le domaine de φ est eSe, $e \in E_S$.*

Démonstration. Si x est dans le domaine de $\varphi^{-1}\theta^s\varphi$, on obtient

$$\begin{aligned} x(ese)\varphi[(ese)\varphi]^{-1} &= [(x\varphi^{-1})e(ses^{-1})e]\varphi \\ &= [(x\varphi^{-1})e(ses^{-1})]\varphi \\ &= [(ss^{-1})(x\varphi^{-1})s(es^{-1})]\varphi \\ &= \{s[s^{-1}(x\varphi^{-1})s]es^{-1}\}\varphi \\ &= [ss^{-1}(x\varphi^{-1})ss^{-1}]\varphi \\ &= x\varphi^{-1}\varphi = x \end{aligned}$$

et de façon symétrique $x = (ese)\varphi[(ese)\varphi]^{-1}x$ ce qui prouve que x est dans le domaine de $\theta^{(ese)\varphi}$. Réciproquement, soit x dans le domaine de $\theta^{(ese)\varphi}$. Il en résulte

$$\begin{aligned} x(e\varphi) &= x(ese)\varphi[(ese)\varphi]^{-1}(e\varphi) = x(ese)\varphi[(es^{-1}e)e]\varphi \\ &= x(ese)\varphi[(ese)\varphi]^{-1} = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\varphi^{-1} &= \{x(ese)\varphi[(ese)\varphi]^{-1}\}\varphi^{-1} = (x\varphi^{-1})eses^{-1}e \\ &= (x\varphi^{-1})eses^{-1}e(ss^{-1}) = (x\varphi^{-1})ss^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^{-1}(x\varphi^{-1})s &= s^{-1}(x\varphi^{-1})ese(s^{-1}es) = s^{-1}(x\varphi^{-1})ese(s^{-1}es)e \\ &= s^{-1}(x\varphi^{-1})se. \end{aligned}$$

On montre de façon analogue que

$$x = (e\varphi)x, \quad x\varphi^{-1} = ss^{-1}(x\varphi^{-1}), \quad s^{-1}(x\varphi^{-1})s = es^{-1}(x\varphi^{-1})s$$

ce qui entraîne que x est dans le domaine de $\varphi^{-1}\theta^s\varphi$. Par conséquent les deux domaines sont égaux.

Pour tout x dans le domaine de $\theta^{(ese)\varphi}$, on a

$$\begin{aligned} x\varphi^{-1}\theta^{s}\varphi &= [s^{-1}(x\varphi^{-1})s]\varphi = \{e[s^{-1}e(x\varphi^{-1})es]e\}\varphi \\ &= [(ese)^{-1}(x\varphi^{-1})(ese)]\varphi = [(ese)\varphi^{-1}x[(ese)\varphi] \\ &= x\theta^{(ese)\varphi} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

5. Le cas de métacentre idempotent. Le premier résultat de ce paragraphe concerne les congruences sur des extensions normales d'un type différent. Voici les définitions dont nous avons besoin.

DÉFINITION 4. Un demi-groupe inverse S est une *extension normale* d'un demi-groupe K si K est un sous-demi-groupe normal de S. Si de plus, la seule congruence sur S dont la restriction à K est la congruence identique est la congruence identique sur S, on dit que S est une *extension normale essentielle* de K. Les extensions normales de K sont ordonnées par la relation d'inclusion.

Nous commençons par un résultat auxiliaire.

PROPOSITION 2. *Soit K un sous-demi-groupe normal d'un demi-groupe inverse S. Alors $\theta(S:K)$ est injective si et seulement si le métacentre de K est idempotent et S est une extension normale essentielle de K.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $\theta(S:K)$ soit injective. Puisque $\theta(K:K) = \theta(S:K)|_K$, il en résulte que $\theta(K:K)$ est injective, donc le métacentre de K est idempotent. Soit ϱ une congruence sur S dont la restriction à K est la congruence identique. Soit $a\varrho b$ pour $a, b \in S$. On a $a^{-1}\varrho b^{-1}$, d'où $a^{-1}ka\varrho b^{-1}kb$ pour tout $k \in K$. Comme $a^{-1}ka$, $b^{-1}kb \in K$, l'hypothèse donne que $a^{-1}ka = b^{-1}kb$. De façon analogue, on a aussi $aka^{-1} = bkb^{-1}$ ce qui entraîne $aKa^{-1} = bKb^{-1}$. Il en résulte que $\theta^a = \theta^b$ et l'hypothèse implique $a = b$. Par conséquent ϱ est la congruence identique et S est une extension normale essentielle de K.

Réciproquement, supposons que le métacentre de K est idempotent et que S soit une extension normale essentielle de K. Soit ϱ la congruence sur S induite par $\theta(S:K)$. L'hypothèse $M(K) = E_K$ implique que la restriction de ϱ à K est la congruence identique. Comme S est une extension normale essentielle de K, cela entraîne que ϱ est la congruence identique. Par conséquent $\theta(S:K)$ est injective.

Le premier résultat principal de la présente note est le suivant.

THÉORÈME 1. *Soit S un demi-groupe inverse à métacentre idempotent. Alors $\Phi(S)$ est une extension normale essentielle maximale de $\Theta(S)$. Tout sous-demi-groupe inverse de $\Phi(S)$ contenant $\Theta(S)$ est une extension normale essentielle de $\Theta(S)$. Toute extension normale essentielle de S est isomorphe à un sous-demi-groupe de $\Phi(S)$ contenant $\Theta(S)$.*

Démonstration. D'après le lemme 1, $\Phi(S)$ est une extension normale de $\Theta(S)$ (sans l'hypothèse sur le métacentre). Soit ϱ une congruence sur $\Phi(S)$ dont la restriction à $\Theta(S)$ est la congruence identique. Soient $\varphi, \psi \in \Phi(S)$ tels que $\varphi\varrho\psi$. Comme dans la démonstration de la proposition 2, nous obtenons

$$\varphi^{-1}\theta^{s}\varphi = \psi^{-1}\theta^{s}\psi, \quad \varphi\theta^{s}\varphi^{-1} = \psi\theta^{s}\psi^{-1}$$

pour tout $s \in S$. Le lemme 1 implique

$$\theta^{(ese)\varphi} = \theta^{(fsf)\psi}, \quad \theta^{(e'se')\varphi^{-1}} = \theta^{(f'sf')\psi^{-1}}$$

où $\varphi: eSe \to e'Se'$, $\psi: fSf \to f'Sf'$ et $e, e', f, f' \in E_S$. Par hypothèse le métacentre de S est idempotent et ceci entraîne

$$(ese)\varphi = (fsf)\psi, \quad (e'se')\varphi^{-1} = (f'sf')\psi^{-1} \tag{2}$$

pour tout $s \in S$. Si $x \in eSe$, on a $x\varphi \in e'Se'$ et la relation (2) donne

$$x = (x\varphi)\varphi^{-1} = [f'(x\varphi)f']\psi^{-1} = f\{[f'(x\varphi)f']\psi^{-1}\}f = fxf$$

c'est-à-dire $x \in fSf$. Par ailleurs $eSe \subseteq fSf$, et par symétrie nous déduisons que $eSe = fSf$. La première partie de la relation (2) entraîne que $\varphi = \psi$. Par conséquent $\Phi(S)$ est une extension normale essentielle de $\Theta(S)$.

Soit T une extension normale essentielle de $\Theta(S)$ contenant $\Phi(S)$. Comme par hypothèse le métacentre de S est idempotent, $\theta(S:S)$ est un isomorphisme de S sur $\Theta(S)$. Par conséquent le métacentre de $\Theta(S)$ est aussi idempotent.

Soit $t \in T$. Alors $\psi^t \in \Phi(\Theta(S))$ où $\psi = \theta(T:\Theta(S))$. Grâce à l'isomorphisme $\theta = \theta(S:S)$: $S \to \theta(S)$, ψ^t induit un élément $\varphi^t \in \Phi(S)$ où le domaine de φ^t est

$$\{s \in S \mid \theta^s = tt^{-1}\theta^s tt^{-1}\}$$

et φ^t: $s \to s'$ si ψ^t: $\theta^s \to a^{-1}\theta^s a = \theta^{s'}$. Il en résulte que $\psi^{\varphi^t} = \psi^t$ où $\varphi^t, t \in T$. D'après la proposition 2, ψ est injective ce qui implique $\varphi^t = t$. Cela signifie que $t \in \Phi(S)$, donc $T = \Phi(S)$ et $\Phi(S)$ est bien une extension normale essentielle maximale de $\Theta(S)$.

Si P est un sous-demi-groupe de $\Phi(S)$ contenant $\Theta(S)$, on démontre que P est une extension normale essentielle de $\Theta(S)$ par la même méthode utilisée précédemment pour $\Phi(S)$.

Si R est une extension normale essentielle de S, les propositions 1 et 2 donnent immédiatement que $\theta(R:S)$ est un isomorphisme de R sur un sous-demi-groupe de $\Phi(S)$ contenant $\Theta(S)$.

Les propositions 1 et 2 et le théorème 1 montrent qu'il y a une analogie très forte entre les extensions normales des demi-groupes inverses et les extensions idéales des demi-groupes quelconques. Dans cette analogie, on a

extension normale — extension idéale,
essentielle — dense,
l'enveloppe normale — l'enveloppe de translations,
métacentre idempotent — faiblement réductif.

On peut pousser cette analogie plus loin en introduisant les notions dans les extensions normales analogues à celles de la théorie des extensions idéales. On démontre des résultats pour les extensions normales tout à fait analogues à ceux de la théorie des extensions idéales. En s'inspirant de cette théorie, nous proposons la

CONJECTURE. Si un demi-groupe inverse S a une extension normale essentielle maximale, alors le métacentre de S est idempotent.

Pour la théorie des extensions idéales, consulter Petrich [9].

Nous caractérisons maintenant d'une façon assez explicite une solution complète du problème d'extension pour le triple (K, ξ, Q) ou K est à métacentre idempotent.

THÉORÈME 2. *Soit (K, ξ, Q) un triple d'extension et supposons que K est à métacentre idempotent. Soit ψ un homomorphisme de K sur E_Q dont la congruence induite restreinte à E_K coïncide avec ξ. Définissons une application φ sur K par*

$$\varphi\colon\ k \to (\theta^k, k\psi)$$

où $\theta = \theta(K:K)$. Pour tout sous-demi-groupe inverse S de $\Phi(K)\times Q$ tel que

$$S \cap (\Phi(K)\times E_Q) = K\varphi \tag{3}$$

et la projection $S \to Q$ est surjective, soit ϱ la congruence induite par cette projection. Alors la collection de tous les triples (φ, S, ϱ) ainsi obtenus est une solution complète du problème d'extension pour le triple (K, ξ, Q).

Démonstration. Adoptons la notation de la première partie de l'énoncé du théorème. Remarquons d'abord que $S/\varrho \cong Q$. Comme $M(K) = E_K$, il s'ensuit que φ est injective.

Soit $k \in K$. Il existe $e \in E_K$ tel que $k\psi = e\psi$ ce qui entraîne que $k\varphi\,\varrho\, e\varphi$; c'est-à-dire $k\varphi \in \ker\varrho$. Réciproquement, soit $(\alpha, q) \in \ker\varrho$. Comme $\Theta(K)$ est plein dans $\Phi(K)$, le demi-groupe $\Theta(K)\times E_Q$ est plein dans $\Phi(K)\times E_Q$, et la condition (3) implique que $K\varphi$ est plein dans S. Par conséquent il existe $e \in E_K$ tel que $(\alpha, q)\,\varrho\,(\theta^e, e\psi)$. Cela entraîne que $q = e\psi$ d'où $(\alpha, q) \in S \cap (\Phi(K)\times E_Q)$, et la relation (3) donne $(\alpha, q) \in K\varphi$. Il en résulte que $K\varphi = \ker\varrho$.

Pour tout $e, f \in E_K$, on a

$$e\varphi\,\varrho\, f\varphi \Leftrightarrow (\theta^e, \psi)\,\varrho\,(\theta^f, f\psi) \Leftrightarrow e\psi = f\psi \Leftrightarrow e\,\xi\, f\,.$$

Par conséquent (φ, S, ϱ) est une solution pour le triple (K, ξ, Q).

Pour la réciproque, il suffit de considérer une solution du problème d'extension de la forme (S, ϱ). On a alors $K = \ker\varrho$, $\xi = \operatorname{tr}\varrho$; soit τ un homomorphisme de S sur Q induisant ϱ et posons $\psi = \tau|_K$. Définissons une application χ sur S par

$$\chi\colon\ s \to (\theta^s, s\tau)$$

où $\theta = \theta(S:K)$. Désignons par $\bar\theta$ la congruence induite sur S par θ. Nous déduisons

$$\operatorname{tr}(\bar\theta \cap \varrho) = \operatorname{tr}\bar\theta \cap \operatorname{tr}\varrho \subseteq \operatorname{tr}\bar\theta = \text{égalité sur } E_S$$

parce que K est un sous-demi-groupe plein de S et $\bar\theta|_K$ est la congruence identique sur K à cause de l'hypothèse que $M(K) = E_K$. De plus,

$$\ker(\bar\theta \cap \varrho) = \ker\bar\theta \cap \ker\varrho = \ker\bar\theta \cap K = E_K$$

parce que $\bar\theta|_K$ est la congruence identique sur K. Par conséquent, χ est une injection et donc un isomorphisme sur $S\chi$. Il est évident que la projection de $S\chi$ dans Q est surjective.

Soit $(\alpha, q) \in S\chi \cap (\Phi(K) \cap E_Q)$. Puisque $(\alpha, q) \in S\chi$, nous avons $(\alpha, q) = (\theta^a, a\tau)$ pour un certain $a \in S$. De plus, $(\alpha, q) \in \Phi(K)\times E_Q$ entraîne que $a\tau \in E_Q$. D'après la définition de τ, il s'ensuit que $a \in \ker\varrho = K$, donc $(\alpha, q) = (\theta^a, a\psi)$ où $a \in K$. En posant $\varphi = \chi|_K$, nous obtenons $(\alpha, q) \in K\varphi$. Réciproquement, soit $k \in K$. On a

$$k\varphi = (\theta^k, k\psi) \in S\chi \cap (\Phi(K)\times E_Q)$$

parce que $k\psi = k\tau$, τ induit ϱ et $K = \ker\varrho$. Cela vérifie la relation (3).

Désignons par π la congruence sur $S\chi$ induite par la projection de $S\chi$ sur Q. Pour tous $a, b \in S$, on a

$$\begin{aligned} a\chi\pi b\chi &\Leftrightarrow (\theta^a, a\tau)\,\pi\,(\theta^b, b\tau) \\ &\Leftrightarrow a\tau = f\tau \Leftrightarrow a\,\varrho\, b\,. \end{aligned}$$

En particulier, on obtient $\ker\pi = K\varphi$. Par conséquent le triple $(\varphi, S\chi, \pi)$ est une solution du problème d'extension équivalente à (S, ϱ).

COROLLAIRE. *Soit (K, ξ, Q) comme dans le théorème 2. Toute extension normale de K par Q avec la trace ξ est produit sous-direct d'une extension normale essentielle de K et de Q.*

Démonstration. Cela découle sans peine des théorèmes 2 et 1.

Notons que l'homomorphisme ψ dans l'énoncé du théorème 2 existe d'après la remarque à la fin du paragraphe 3.

Nous pouvons améliorer la description des demi-groupes S dans le théorème 2 en imposant une restriction sur Q. Afin de faire celà, nous rappelons la notion suivante.

Un demi-groupe inverse S est dit *fondamental* d'après Munn [7] (ou c'est un *anti-groupe* d'après Wagner [13]) si $\theta(S:E_S)$ est une injection, ce qui équivaut à la condition que la congruence identique sur S est la seule congruence sur S contenue dans la relation $\mathscr{H}$ de Green.

Avec cette définition, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 3. *Soit (K, ξ, Q) un triple d'extension et supposons que K est à métacentre idempotent et que Q soit un anti-groupe. Soit S un sous-demi-groupe inverse de $\Phi(K)$ contenant $\Theta(K)$ et soit ζ un homomorphisme de S sur Q. Notons par ϱ la congruence sur S induite par ζ et posons $\theta = \theta(K:K)$. Supposons que $\ker\varrho = \Theta(K)$ et*

$$e\,\xi\, f \Leftrightarrow \theta^e\,\varrho\,\theta^f$$

pour tous $e, f \in E_K$.

Alors la collection de tous tels triples (θ, S, ϱ) est une solution complète irréductible du problème d'extension pour le triple (K, ξ, Q).

Démonstration. Si (θ, S, ϱ) est comme dans l'énoncé du théorème, il est clair que c'est une extension normale de K par Q avec la trace ξ.

Réciproquement, soit (φ, S, ϱ) une solution pour le triple (K, ξ, Q) construite dans le théorème 2. Soient (σ, q), $(\sigma, r) \in S$ et $k \in K$. On obtient

$$(\sigma, q)^{-1}(\theta^k, k\psi)(\sigma, q) = (\sigma^{-1}\theta^k\sigma, q^{-1}(k\psi)q) \in S \cap (\Phi(K)\times E_Q) = K\varphi$$

ce qui implique, d'après le lemme 1,

$$\left(\theta^{(eke)\sigma}, q^{-1}(k\psi)q\right) = (eke)\sigma\varphi = \left(\theta^{(eke)\sigma}, (eke)\sigma\psi\right)$$

où le domaine de σ est eKe, $e \in E_K$ et $\theta = \theta(K:K)$. Par ailleurs, on a $q^{-1}(k\psi)q = (eke)\sigma\psi$. On démontre par la même méthode que $r^{-1}(k\psi)r = (eke)\sigma\psi$, ce qui entraîne $q^{-1}(k\psi)q = r^{-1}(k\psi)r$. Comme k parcourt K, $k\psi$ parcourt E_Q. Il en résulte que $\theta^q = \theta^r$ où $\theta = \theta(Q:E_Q)$. Puisque Q est un anti-groupe, la fonction θ est injective, ce qui donne $q = r$. Par conséquent, la projection π: $S \to \Phi(K)$ est un isomorphisme de S sur sa projection P dans $\Phi(K)$. Cela permet de définir une fonction ζ sur P de la façon suivante:

$$\zeta\colon \sigma \to q \quad \text{si} \quad (\sigma, q) \in S\,.$$

Il est immédiat que ζ est un homomorphisme de P sur Q. Soit λ la congruence sur P induite par ζ. Ainsi nous avons obtenu le triple (θ, P, λ) où $\theta = \theta(K:K)$.

Pour tout $\sigma \in P$, on a

$$\begin{aligned}\sigma \in \ker\lambda &\Leftrightarrow \sigma\zeta \in E_Q \Leftrightarrow (\sigma, \sigma\zeta) \in S \cap \left(\Phi(K) \times E_Q\right)\\ &\Leftrightarrow (\sigma, \sigma\zeta) \in K\varphi \Leftrightarrow \sigma \in \Theta(K)\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\ker\lambda = \Theta(K)$.

Si $e \in E_K$, on a $(\theta^e, e\psi)$, $(\theta^e, \theta^e\zeta) \in S$ ce qui donne $e\psi = \theta^e\zeta$ d'après ce que nous avons vu ci-dessus. Pour tous $e, f \in E_K$, on obtient

$$\begin{aligned}e\xi f &\Leftrightarrow e\varphi\,\varrho\, f\varphi \Leftrightarrow (\theta^e, e\psi)\,\varrho\,(\theta^f, f\psi)\\ &\Leftrightarrow e\psi = f\psi \Leftrightarrow \theta^e\zeta = \theta^f\zeta \Leftrightarrow \theta^e\lambda\theta^f\,.\end{aligned}$$

Nous avons démontré que le triple (θ, P, λ) satisfait aux conditions indiquées dans l'énoncé du présent théorème. De plus, π est un isomorphisme de S sur P; pour tous $\sigma, \sigma' \in P$, on a

$$(\sigma, \sigma\zeta)\,\varrho\,(\sigma', \sigma'\zeta) \Leftrightarrow \sigma\zeta = \sigma'\zeta \Leftrightarrow \sigma\lambda\sigma'\,;$$

et pour tout $k \in K$, $k\varphi\pi = \theta^k$. Par conséquent, les deux extensions (φ, S, ϱ) et (θ, P, λ) sont équivalents. Cela démontre que les triples (θ, S, ϱ) du présent théorème représentent une solution complète pour le triple (K, ξ, Q).

Soient (θ, S, ϱ) et (θ, S', ϱ') deux solutions équivalentes pour le triple (K, ξ, Q) indiqué dans le présent théorème, et soit χ l'isomorphisme correspondant. Par hypothèse $\theta\chi = \theta$ et

$$\sigma\varrho\tau \Leftrightarrow \sigma\chi\varrho'\tau\chi \tag{1}$$

pour tous $\sigma, \tau \in S$. Soient $\sigma \in S$ et $k \in K$. Soit eKe le domaine de $\sigma^{-1}\chi$ où $e \in E_K$, et soit k dans le domaine de σ^{-1}. En utilisant le lemme 1, on obtient

$$\theta^{k\sigma^{-1}} = \theta^{k\sigma^{-1}}\chi = (\sigma\theta^k\sigma^{-1})\chi = (\sigma\chi)(\theta^k\chi)(\sigma\chi)^{-1} = (\sigma\chi)\theta^k(\sigma\chi)^{-1} = \theta^{(eke)(\sigma\chi)^{-1}}$$

ce qui implique $k\sigma^{-1} = (eke)(\sigma\chi)^{-1}$. Comme k parcourt le domaine de σ^{-1}, $k\sigma^{-1}$ parcourt le domaine de σ, ce qui entraîne que le domaine de σ est contenu dans le domaine de $\sigma\chi$. Par symétrie, on obtient que les domaines de σ et $\sigma\chi$ sont égaux. Si k est dans le domaine de σ, le même procédé montre que $k\sigma = k(\sigma\chi)$, donc $\sigma = \sigma\chi$. Il en résulte que χ est l'application identique ce qui donne $S = S'$ et $\varrho = \varrho'$ d'après la relation (1). Par conséquent, l'ensemble de tous les triples (θ, S, ϱ) est bien irréductible.

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses du théorème* 3, *pour toute solution* (φ, S, ϱ) *du problème d'extension pour le triple* (K, ξ, Q), *si* $K \subseteq S$, *alors* S *est une extension normale essentielle de* K.

Démonstration. Ceci découle directement du théorème 3 et de la proposition 2.

6. L'enveloppe normale de deux demi-groupes concrets. Nous construisons ici une copie isomorphe de l'enveloppe normale du demi-groupe $\mathscr{B}(G, \alpha)$ de Reilly [11] et ensuite l'enveloppe normale du centralisateur des idempotents du demi-groupe $\mathscr{B}(G, \alpha)$.

Rappelons la définition de $S = \mathscr{B}(G, \alpha)$. On se donne un groupe G et un endomorphisme α de G. Posons $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Alors $S = N \times G \times N$ avec la multiplication

$$(m, g, n)(p, h, g) = \left(m+p-r, (g\alpha^{p-r})(h\alpha^{n-r}), n+q-r\right)$$

où α^0 est l'application identique sur G et $r = \min\{n, p\}$, est un demi-groupe de Reilly, noté $S = \mathscr{B}(G, \alpha)$. Le théorème de Reilly affirme que, à un isomorphisme près, les demi-groupes $\mathscr{B}(G, \alpha)$ sont précisémment les demi-groupes bisimples avec les idempotents $\{e_0 > e_1 > \ldots\}$ (une chaîne dénombrable). Notons par $\mathscr{A}(G)$ le groupe d'automorphismes de G, et par ε_z: $g \to z^{-1}gz$ l'automorphisme intérieur de G induit par $z \in G$.

THÉORÈME 4. *Soit* $S = \mathscr{B}(G, \alpha)$ *un demi-groupe de Reilly. Posons*

$$H = \{(\omega, z) \in \mathscr{A}(G) \times G \mid \alpha\omega\varepsilon_z = \omega\alpha\}$$

avec la multiplication

$$(\omega, z)(\omega', z') = \left(\alpha\omega', (z\omega')z'\right).$$

Définissons sur H *une application* β *par*

$$\beta\colon (\omega, z) \to (\omega\varepsilon_z, z\alpha)\,.$$

Alors H *est un groupe,* β *est un endomorphisme de* H *et*

$$\Phi(\mathscr{B}(G, \alpha)) \cong \mathscr{B}(H, \beta)\,.$$

Démonstration. Soit H comme dans l'énoncé du théorème. Nous vérifions d'abord que H est un groupe. Pour (ω, u), $(\sigma, v) \in H$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha(\omega\sigma)\varepsilon_{(u\sigma)v} &= (\alpha\omega\varepsilon_u)\varepsilon_{u^{-1}}\sigma\varepsilon_{u\sigma}\varepsilon_v\\ &= (\omega\alpha)\varepsilon_{u^{-1}}\sigma(\sigma^{-1}\varepsilon_u\sigma)\varepsilon_v\\ &= \omega(\alpha\sigma\varepsilon_v) = (\omega\alpha)\alpha\end{aligned}$$

ce qui montre que $(\omega, u)(\sigma, v) \in H$. Notons que (ι, e) est l'élément neutre de H, où ι est l'automorphisme identique de G et e est l'élément neutre de G. Si $(\omega, z) \in H$, on a

$$\omega^{-1}\alpha = \omega^{-1}(\alpha\omega\varepsilon_z)\varepsilon_{z^{-1}}\omega^{-1} = \omega^{-1}(\omega\alpha)\varepsilon_{z^{-1}}\omega^{-1}$$
$$= \alpha\omega^{-1}(\omega\varepsilon_{z^{-1}}\omega^{-1}) = \alpha\omega^{-1}\varepsilon_{z^{-1}\omega^{-1}}$$

ce qui entraîne que $(\omega, z)^{-1} = (\omega^{-1}, z^{-1}\omega^{-1}) \in H$. Par conséquent H est un groupe.

Soit β l'application définie dans l'énoncé du théorème. Soient (ω, z), $(\omega', z') \in H$. Notons d'abord que

$$(\alpha\omega\varepsilon_z)\varepsilon_{z\alpha} = \omega\alpha\varepsilon_{z\alpha} = (\omega\varepsilon_z)\alpha$$

d'où $(\omega\varepsilon_z, z\alpha) \in H$ et β applique H dans lui-même. De plus,

$$\begin{aligned}(\omega, z)\beta\cdot(\omega', z')\beta &= (\omega\varepsilon_z, z\alpha)(\omega'\varepsilon_{z'}, z'\alpha)\\ &= \big(\omega\varepsilon_z'\omega'\varepsilon_{z'}, (z\alpha\omega'\varepsilon_{z'})(z'\alpha)\big)\\ &= \big(\omega\omega'\varepsilon_{z\alpha}\varepsilon_{z'}, (z\omega'\alpha)(z'\alpha)\big)\\ &= \big(\omega\omega'\varepsilon_{(z\alpha)z'}, [(z\omega')z']\alpha\big)\\ &= \big(\omega\omega', (z\omega')z'\big)\beta\\ &= [(\omega, z)(\omega', z')]\beta\end{aligned}$$

et β est bien un endomorphisme de H.

Nous pouvons donc construire le demi-groupe $T = \mathscr{B}(H, \beta)$ de Reilly. Il reste à démontrer que $\Phi(S) \cong T$.

Soit $\varphi \in \Phi(S)$. Alors φ est un isomorphisme de fSf sur $f'Sf'$ pour certains $f, f' \in E_S$. En notant $f = (m, e, m)$ et $f' = (n, e, n)$, nous obtenons que

$$E = \{(m+i, g, m+j) |\ i, j \geqslant 0, g \in G\},$$
$$F = \{(n+i, g, n+j) |\ i, j \geqslant 0, g \in G\}$$

sont, respectivement, le domaine et l'image de φ. Il est clair qu'on peut représenter E et F comme des demi-groupes de Reilly, isomorphes à S. D'après les isomorphismes de E et F, calculés dans [11], en posant, pour tout $g \in G$,

$$(m, g, m)\varphi = (n, g\omega, n), \qquad (m, e, m+1)\varphi = (n, z, n+1),$$

il en résulte que ω est un automorphisme de G tel que $\alpha\omega\varepsilon_z = \omega\alpha$. De plus, la fonction φ est donnée par les paramètres m, ω, z, n de la façon suivante:

(1) $$\varphi\colon (m+i, g, m+j) \to (n+i, z_i^{-1}(g\omega)z_j, n+j)$$

où $z_0 = e$ et

$$z_p = z(z\alpha)(z\alpha^2)\ldots(z\alpha^{p-1}) \quad \text{si} \quad p > 0.$$

Avec les notations introduites, nous définissons la fonction χ sur $\Phi(S)$ par

$$\chi\colon \varphi \to (m, (\omega, z), n).$$

Si de plus $\chi\colon \psi \to (p, (\sigma, v), q)$, un simple calcul montre qu'avec $r = \min\{n, p\}$, on obtient pour le domaine et l'image de $\varphi\psi$, respectivement,

$$\{(m+p-r+i, g, m+p-r+j) |\ i, j \geqslant 0, g \in G\},$$
$$\{(n+q-r+i, g, n+q-r+j) |\ i, j \geqslant 0, g \in G\};$$

de plus

(2) $$\begin{aligned}&(m+p-r+i, g, m+p-r+j)\varphi\psi\\ &= (n+p-r+i, z_{p-r+i}^{-1}(g\omega)z_{p-r+j}, n+p-r+j)\psi\\ &= (n+q-r+i, v_{n-r+i}^{-1}(z_{p-r+i}^{-1}\sigma)(g\omega\sigma)(z_{p-r+j}\sigma)v_{n-r+j}, n+q-r+j)\\ &= (n+q-r+i, [(z_{p-r+i}\sigma)v_{n-r+i}]^{-1}(g\omega\sigma)[(z_{p-r+j}\sigma)v_{n-r+j}], n+q-r+j).\end{aligned}$$

En comparaison avec (1), on en déduit

(3) $$\chi\colon \varphi\psi \to (m+p-r, (\theta, u), n+q-r)$$

pour certains θ et u. En posant $i = j = 0$ dans la relation (2), on obtient

(4) $$g^\theta = [(z_{p-r}\sigma)v_{n-r}]^{-1}(g\omega\sigma)[(z_{p-r}\sigma)v_{n-r}]$$

pour tout $g \in G$, et avec $i = 0$, $g = e$ et $j = 1$ dans (2),

(5) $$u = [(z_{p-r}\sigma)v_{n-r}]^{-1}(z_{p-r+1}\sigma)v_{n-r+1}.$$

Il résulte de (4) que

$$\theta = \omega\sigma\varepsilon_{(z_{p-r}\sigma)v_{n-r}}$$

et de (5),

$$\begin{aligned}u &= v_{n-r}^{-1}(z_{p-r}\sigma)^{-1}(z_{p-r+1}\sigma)v_{n-r+1}\\ &= v_{n-r}^{-1}(z_{p-r}^{-1}z_{p-r+1})\sigma v_{n-r+1}\\ &= v_{n-r}^{-1}(z\alpha^{p-r}\sigma)v_{n-r+1}\\ &= [v_{n-r}^{-1}(z\alpha^{p-r}\sigma)v_{n-r}](v\alpha^{n-r})\\ &= (z\alpha^{p-r}\sigma\varepsilon_{v_{n-r}})(v\alpha^{n-r}).\end{aligned}$$

On déduit de (3), (4) et (6) que

(7) $$\chi\colon \varphi\psi \to \big(m+p-r, (\omega\sigma\varepsilon_{(z_{p-r}\sigma)v_{n-r}}, (z\alpha^{p-r}\sigma\varepsilon_{v_{n-r}})(v\alpha^{n-r})), n+q-r\big).$$

Un argument simple par récurrence montre que

(8) $$(\omega, z)\beta^k = (\omega\varepsilon_{z_k}, z\alpha^k)$$

pour tout $k \geqslant 0$. En utilisant (8), nous calculons

$$\begin{aligned}(\varphi\chi)(\psi\chi) &= \big(m, (\omega, z), n\big)\big(p, (\sigma, v), q\big)\\ &= \big(m+p-r, (\omega, z)\beta^{p-r}(\sigma, v)\beta^{n-r}, n+q-r\big)\\ &= \big(m+p-r, (\omega\varepsilon_{z_{p-r}}, z\alpha^{p-r})(\sigma\varepsilon_{v_{n-r}}, v\alpha^{n-r}), n+q-r\big)\end{aligned}$$

$$= \big(m+p-r, (\omega\varepsilon_{z_{p-r}}\sigma\varepsilon_{v_{n-r}}, (z\alpha^{p-r}\sigma\varepsilon_{v_{n-r}})(v\alpha^{n-r})), n+q-r\big)$$
$$= \big(m+p-r, (\omega\sigma\varepsilon_{(z_{p-r}\sigma)v_{n-r}}, (z\alpha^{p-r}\sigma\varepsilon_{v_{n-r}})(v\alpha^{n-r})), n+q-r\big)$$

ce qui entraîne, d'après la relation (7), que χ est un homomorphisme.

L'injectivité de χ résulte du fait que les paramètres m, z, ω, n déterminent φ de façon unique par la formule (1). Réciproquement, soit $(\omega, z) \in \mathscr{A}(G)\times G$ tel que $\alpha\omega\varepsilon_z = \omega\alpha$. Une vérification directe montre que la fonction φ définie par la formule (1) est un élément de $\Phi(S)$ tel que $\varphi\chi = (\omega, z)$; nous omettons les détails. Cela implique que χ applique $\Phi(S)$ sur $\mathscr{B}(H, \beta)$.

COROLLAIRE. *Avec les notations du théorème 4, les assertions suivantes sont vraies:*

(i) $\chi\colon \theta^{(m,g,n)} \to \big(m, (\varepsilon_g, g^{-1}(g\alpha)), n\big)$ *pour tout* $(m, g, n) \in S$.

(ii) *Posons* $K = \{(\varepsilon_g, g^{-1}(g\alpha))|\ g\in G\}$ *et* $\gamma = \beta|_K$. *Alors* K *est un sous-groupe de* H, γ *est un endomorphisme de* K *et* $\Theta\big(\mathscr{B}(G,\alpha)\big) \cong \mathscr{B}(K,\gamma)$.

(iii) $M\big(\mathscr{B}(G,\alpha)\big) = \{(m, g, m)|\ g\alpha = g \in Z(G),\ m \geqslant 0\}$.

Démonstration. (i) Pour tout $(m, g, n) \in S$, on calcule facilement le domaine et l'image de $\theta^{(m,g,n)}$ comme suit:

$$\{(m+i, h, m+j)|\ i, j \geqslant 0,\ h\in G\},$$
$$\{(n+i, h, n+j)|\ i, j \geqslant 0,\ h\in G\},$$

respectivement, et pour tout $h \in G$,

$$(m, g, n)^{-1}(m, h, m)(m, g, n) = (n, h\varepsilon_g, n),$$
$$(m, g, n)^{-1}(m, e, m+1)(m, g, n) = (n, g^{-1}(g\alpha), n+1)$$

ce qui implique la partie (i) en vue du théorème 4.

(ii) Ceci découle de la partie (i) sans peine.

(iii) Ceci découle de la partie (i) car

$$(\varepsilon_g, g^{-1}(g\alpha))\chi = (\varepsilon_e, e) \Leftrightarrow g\alpha = g \in Z(G).$$

Ile est bien connu que le centralisateur des idempotents du demi-groupe $S = \mathscr{B}(G, \alpha)$ de Reilly est de la forme

$$\{(m, g, m)|\ m \geqslant 0, g \in G\}.$$

On calcule la multiplication de ce demi-groupe comme suit:

$$(m, g, m)(n, h, n) = \big(\max\{m, n\}, (g\alpha^{n-\min\{m,n\}})(h\alpha^{m-\min\{m,n\}}), \max\{m, n\}\big).$$

On peut construire un tel demi-groupe de la façon suivante.

Soit G un groupe, α un endomorphisme de G et $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Pour chaque $n \in N$, posons $G_n = G\times n$ avec la multiplication $(g, n)(h, n) = (gh, n)$, et sur G_n, définissons une fonction α_n par

$$\alpha_n\colon (g, n) \to (g\alpha, n_n+1).$$

Il est évident que α_n est un homomorphisme de G_n dans G_{n+1}, et que le système $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ permet de construire un demi-groupe $T = [N; G_n, \alpha_n]$, où

(i) N est muni de l'opération $(m, n) \to \max\{m, n\}$,

(ii) T est le demi-treillis de groupes G_n déterminé par N et les α_n.

Il est aussi clair que T est isomorphe au centralisateur des idempotents de $\mathscr{B}(G, \alpha)$. Nous allons construire l'enveloppe normale de T. Désignons par $\mathscr{A}(G)^N$ le produit de N-exemplaires de $\mathscr{A}(G)$.

THÉORÈME 5. *Soit* $T = [N; G_n, \varphi_n]$ *le demi-groupe construit ci-dessus. Posons*

$$M = \{(\varphi_i) \in \mathscr{A}(G)^N|\ \varphi_n\alpha = \alpha\varphi_{n+1} \text{ pour tout } n \in N\}$$

avec la multiplication du produit direct $\mathscr{A}(G)^N$, *et définissons sur* M *une application* δ *par*

$$\delta\colon (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) \to (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots).$$

Alors M *est un groupe,* δ *est un endomorphisme de* M *et*

$$\Phi(T) \cong \mathscr{B}(M, \delta).$$

Démonstration. On vérifie sans peine que M est un sous-groupe de $\mathscr{A}(G)^N$ et que δ est un endomorphisme de M.

Soit $\varphi \in \Phi(T)$ avec pour domaine $\bigcup_{i\geqslant m} G_i$ et pour image $\bigcup_{i\geqslant n} G_i$. Posons $\bar\varphi_i = \varphi|G_{m+i}$ pour tout $i \in N$. Nous déduisons, de résultats connus sur les isomorphismes de tels demi-groupes, que $\bar\varphi_i$ est un isomorphisme de G_{m+i} sur G_{n+i} et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_{m+i} \arrow[r, "\bar\varphi_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & G_{n+i} \arrow[d, "\alpha_{i+1}"] \\ G_{m+i+1} \arrow[r, "\bar\varphi_{i+1}"'] & G_{n+i+1} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Pour tout $i \in N$, définissons une fonction φ_i sur G par la formule

$$(g, m+i)\bar\varphi_i = (g\varphi_i, n+1).$$

Alors $\varphi_i \in \mathscr{A}(G)$ et la commutativité du diagramme ci-dessus donne

$$\begin{aligned}(g\varphi_i\alpha, n+i+1) &= (g\varphi_i, n+i)\alpha_i = (g, m+i)\bar\varphi_i\alpha_i \\ &= (g, m+i)\alpha_i\bar\varphi_{i+1} = (g\alpha, m+i+1)\bar\varphi_{i+1} \\ &= (g\alpha\varphi_{i+1}, n+i+1)\end{aligned}$$

pour tout $g \in G$, ce qui entraîne $\varphi_i\alpha = \alpha\varphi_{i+1}$ pour tout $i \in N$.

Avec cette notation, nous pouvons donc définir une fonction π sur $\Phi(T)$ par

$$\pi\colon\ \varphi \to (m, (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots), n) = (m, (\varphi_i), n).$$

Il est clair que π applique $\Phi(T)$ dans $\mathscr{B}(M, \delta)$. Avec les notations évidentes et $r = \min\{n, p\}$, on obtient

$$\begin{aligned}(\varphi\pi)(\psi\pi) &= (m, (\varphi_i), n)(p, (\psi_i), q)\\ &= (m+p-r, (\varphi_i)\delta^{p-r}(\psi_i)\delta^{n-r}, n+q-r)\\ &= (m+p-r, (\varphi_{p-r}, \varphi_{p-r+1}, \ldots)(\psi_{n-r}, \psi_{n-r+1}, \ldots), n+q-r)\\ &= (m+p-r, (\varphi_{p-r+i}\psi_{n-r+i}), n+q-r).\end{aligned}$$

De plus, le domaine et l'image de $\varphi\psi$ sont

$$\bigcup_{i \geqslant m+p-r} G_i \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \geqslant n+q-r} G_i,$$

respectivement, et

$$\begin{aligned}(g, m+p-r+i)\varphi\psi &= (g\varphi_{p-r+i}, n+p-r+i)\psi\\ &= (g\varphi_{p-r+i}\psi_{n-r+i}, n+q-r+i)\end{aligned}$$

ce qui entraîne que π est un homomorphisme.

Soit maintenant $(m, (\varphi_i), n) \in \mathscr{B}(M, \delta)$. Définissons une fonction φ sur $\bigcup_{i \geqslant m} G_i$ par

$$(g, m+i)\varphi = (g\varphi_i, n+i).$$

On vérifie sans peine que φ est un isomorphisme de $\bigcup_{i \geqslant m} G_i$ sur $\bigcup_{i \geqslant n} G_i$ en utilisant l'hypothèse suivante: $\varphi_i\alpha = \alpha\varphi_{i+1}$, pour tout $i \in N$. Par conséquent: $\varphi \in \Phi(T)$ et évidemment $\varphi\pi = (m, (\varphi_i), n)$; ceci prouve que π est surjective.

De l'unicité de la représentation de φ, on en déduit que π est injective. Par conséquent, π est bien un isomorphisme de $\Phi(T)$ sur $\mathscr{B}(M, \delta)$.

Corollaire. *Avec les notations du théorème 5, les assertions suivantes sont vraies.*

(i) $\pi\colon\ \theta^{(g,n)} \to (n, (\varepsilon_g, \varepsilon_{g\alpha}, \ldots), n) = (n, (\varepsilon_{g\alpha^i}), n)$.

(ii) *Notons par $\mathscr{I}(G)$ le groupe des automorphismes intérieurs de G. Pour chaque $n \in N$, posons $H_n = \mathscr{I}(G) \times n$ avec la multiplication $(\varepsilon_g, n)(\varepsilon_h, n) = (\varepsilon_{gh}, n)$, et définissons une fonction β_n sur H_n par*

$$(\varepsilon_g, n)\beta_n = (\varepsilon_{g\alpha}, n+1).$$

Alors $\Theta(T)$ est isomorphe au demi-groupe $P = [N; H_n, \beta_n]$ qui est un demi-treillis N de groupes H_n déterminé par les homomorphismes β_n.

(iii) $M(T) = \{(g, n) \in T \mid g\alpha^i \in Z(G)$ *pour tout* $i \in N\}$.

Démonstration. (i) Pour tout $(g, n) \in T$, le domaine de $\theta^{(g,n)}$ est $\bigcup_{i \geqslant n} G_i$, et pour tout $h \in G$, $i \in N$,

$$\begin{aligned}(h, n+i)\theta^{(g,n)} &= (g, n)^{-1}(h, n+i)(g, n)\\ &= [(g^{-1}, n)\alpha_n\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+i-1}](h, n+i)[(g, n)\alpha_n\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+i-1}]\\ &= (g^{-1}\alpha^i, n+i)(h, n+i)(g\alpha^i, n+i)\\ &= ((g^{-1}\alpha^i)h(g\alpha^i), n+i)\\ &= (h\varepsilon_{g\alpha^i}, n+i)\end{aligned}$$

ce qui démontre la partie (i).

(ii) On vérifie sans difficultés que la fonction σ définie sur $\Theta(T)$ par

$$\sigma\colon\ (n, (\varepsilon_g, \varepsilon_{g\alpha}, \ldots), n) \to (\varepsilon_g, n)$$

est un isomorphisme de $\Theta(T)$ sur P.

(iii) Cela découle directement de la partie (i).

Bibliographie

[1] V. M. Chirlaïev, *Sur une extension dans la classe de demi-groupes inverses* (en russe), Vestnik Belorousk. Univ. ser. 1, n° 1, 1971, pp. 15–23.

[2] A. Coudron, *Sur les extensions de demi-groupes réciproques*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 37 (1968), pp. 409–419.

[3] H. D'Alarco, *Idempotent-separating extensions of inverse semigroups*, J. Austral. Math. Soc. 9 (1969), pp. 211–217.

[4] D. G. Green, *Extensions of a semilattice by an inverse semigroup*, Bull. Austral. Math. Soc. 9 (1973), pp. 21–31.

[5] D. B. Mc Alister, *Groups, semilattices and inverse semigroups. II*, Trans. Amer. Math. Soc. 196 (1974), pp. 351–370.

[6] I. I. Melnik, *Sur la théorie des groupes généralisés* (en russe), dans Théorie des demi-groupes et ses applications 2, Izdat. Saratov. Univ. (1971), pp. 51–59.

[7] W. D. Munn, *Fundamental inverse semigroups*, Quart. J. Math. Oxford 21 (2) (1970), pp. 157–170.

[8] L. O'Carroll, *Inverse semigroups as extensions of semillatices*, Glasgow Math. J. 16 (1975), pp. 12–21.

[9] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merrill, Columbus, 1973.

[10] — *Congruences on inverse semigroups*, J. Algebra 55 (1978), pp. 231–256.

[11] N. R. Reilly, *Bisimple ω-semigroups*, Proc. Glasgow Math. Assoc. 7 (1966), pp. 160–167.

[12] H. E. Scheiblich, *Kernels of inverse semigroup homomorphisms*, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), pp. 289–292.

[13] V. V. Wagner, *Une contribution à la théorie des anti-groupes* (en russe), Izv. Vysch. Utchebn. Zav., Matem. 107 (4) (1971), pp. 3–15.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
France

Accepté par la Rédaction le 11. 2. 1979