

# 超立方体系统中基于安全通路向量的容错路由\*

王雷, 林亚平<sup>+</sup>, 陈治平, 文学

(湖南大学 计算机与通信学院, 湖南 长沙 410082)

## Fault-Tolerant Routing Based on Safety Path Vectors in Hypercube System

WANG Lei, LIN Ya-Ping<sup>+</sup>, CHEN Zhi-Ping, WEN Xue

(College of Computer and Communication, Hu'nan University, Changsha 410082, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-731-8821932, E-mail: yplin@hnu.net.cn, <http://www.hnu.net.cn>

Received 2002-11-17; Accepted 2003-07-07

**Wang L, Lin YP, Chen ZP, Wen X. Fault-Tolerant routing based on safety path vectors in hypercube system. *Journal of Software*, 2004,15(5):783~790.**

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/783.htm>

**Abstract:** Hypercube multicomputers system has good performances in parallel and distributed computation. With the increasing size of a multicomputers network system, the fault possibility of computers and their links increases. As a result, it becomes very important to seek for better fault-tolerant routing strategies for realizing more effective fault-tolerant routing when lots of faults occur in the multicomputers system. Many significant researches have been done on the fault-tolerant routing design for the hypercube multicomputers system. An innovative fault-tolerant routing algorithm is proposed, in which each node uses a safety path vector (SPV) to record the optimal paths to the other nodes. The safety path vector is an approximate measure of the number and distribution of the faults in the neighborhood and can be setup or updated through the  $n-1$  rounds of information exchanges among neighboring nodes by consuming only  $n$  bits storage space. Compared with previous fault-tolerant routing algorithms such as the safety vectors (SVs), extended safety vectors (ESVs), optimal path matrices (OPMs) and extended optimal path matrices (EOPMs), SPVs have stronger ability in tracing optimal paths with equal or less storage cost. Analysis and simulation are given to show the merit of the SPVs.

**Key words:** fault-tolerant routing; safety vector; safety path vector; hypercube; multicomputer system

**摘要:**  $n$  维超立方体结构的多处理机系统在并行与分布式处理中具有良好的性能。随着多处理机系统规模的增大, 系统出现链路及节点故障的概率也随之增大, 因此设计容错性更强的路由算法对  $n$  维超立方体结构的多处理机系统具有重要意义。针对系统中存在链路故障的情况, 提出了用于记录最优通路的安全通路向量(safety path vectors, 简称 SPVs)概念, 并给出了建立 SPVs 及其容错路由算法。其中 SPVs 的赋值可以通过  $n-1$  轮邻节点之间的信息交换来完成, 且算法中各节点的存储开销仅为  $n$  bits, 因此, SPVs 是安全向量(SVs)与扩展安全向量(ESVs)的一种扩展, 具

\* Supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province of China under Grant No.01JJY1007 (湖南省自然科学基金)

**作者简介:** 王雷(1973—), 男, 湖南长沙人, 博士生, 主要研究领域为计算机网络, 机器学习; 林亚平(1955—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机网络, 机器学习; 陈治平(1971—), 男, 博士, 讲师, 主要研究领域为机器学习; 文学(1978—), 男, 硕士生, 主要研究领域为计算机网络。

有比 SVs 和 ESVs 更好的记录最优通路的能力.另外,与基于最优通路矩阵(optimal path matrices,简称 OPMs)及扩展最优通路矩阵(extended optimal path matrices,简称 EOPMs)的容错路由算法相比,SPVs 呈指数级地降低了算法的存储开销,且能够记录 OPMs 和 EOPMs 所不能记录到的最优通路信息.理论分析和仿真实验验证了 SPVs 的上述性能.

关键词: 容错路由;安全向量;安全通路向量;超立方体;多处理机系统

中图法分类号: TP393 文献标识码: A

超立方体网络是多处理机系统中常见的一种互连结构,随着系统规模的增大,系统中出现处理机故障或处理机之间的链路故障的可能性也随之增加,因此如何建立可靠的多处理机系统,尤其是如何建立可靠的通信子系统,越来越受到人们的关注.针对超立方体系统的容错路由设计,人们从各个方面展开了大量的研究.文献[1]基于超立方体网络良好的容错性能给出了一种基于超立方体结构的点对点网络及其上的有效路由算法.文献[2]证明了超立方体结构比环结构在并行与分布式处理中具有更优的性能.文献[3]研究了超立方体网络的容错性,给出了一个容错超立方体网络中无错子立方体个数的上限.文献[4~6]利用概率的方法对超立方体网络的容错性进行了研究.文献[7,8]提出了非安全向量的概念及其容错路由算法.文献[9]针对超立方体网络中的路由容错问题提出了安全向量(safety vectors,简称 SVs)的概念和基于安全向量的容错路由算法,这样定义的 SVs 具有一个良好的特性,即  $SV_A[k]=1$  时说明节点  $A$  和所有与它距离为  $k$  的节点之间均具有  $k$  距离最优通路;缺点是所能记录到的最优通路信息十分有限.文献[10]在文献[9]的基础上修改了 SVs 的定义,改进了距离为 2 时的最优通路的计算方法,提出了扩展安全向量(extended safety vectors,简称 ESVs)的概念和基于扩展安全向量的容错路由算法;但由于 ESVs 只在距离为 2 时对 SVs 作了改进,因此当  $k$  大于等于 3 时 ESVs 所能记录到的最优通路信息仍与 SVs 同样有限.文献[11]在文献[10]的基础上,改用矩阵来表示各邻节点的每条链路是否存在链路故障,重新设计了对最优通路的计算方法,提出了最优通路矩阵(optimal path matrices,简称 OPMs)的概念和基于最优通路矩阵的容错路由算法,OPMs 虽然能记录比 SVs 和 ESVs 更多的最优通路信息,但 SVs 和 ESVs 的存储开销仅为  $n$  bits,而 OPMs 的存储开销为  $n^2$  bits,因此 OPMs 的存储开销要远远高于 SVs 和 ESVs 的存储开销.文献[12]在文献[11]的基础上修改了 OPMs 的定义,改进了距离为 2 时的最优通路的计算方法,提出了扩展最优通路矩阵(extended optimal path matrices,简称 EOPMs)的概念和基于扩展最优通路矩阵的容错路由算法;但该算法的存储开销同样为  $n^2$  bits,指数级高于 SVs 和 ESVs 的存储开销.

针对  $n$  维超立方体结构的多处理机系统中存在链路故障的情况,本文提出了用于最优通路记录的安全通路向量(safety path matrices,简称 SPVs)的概念,并给出了一个建立 SPVs 的算法和一个基于 SPVs 的容错路由算法.其中 SPVs 具有如下良好特性:(1) 若某节点  $A$  的  $SPV_A[k]=1(1 \leq k \leq n)$ ,即  $SPV_A$  的第  $k$  位等于 1,则表示该节点  $A$  和所有与它距离为  $k$  的节点之间一定存在距离为  $k$  的最优通路;(2) SPVs 的赋值可以通过  $n-1$  轮邻节点之间的信息交换完成;(3)  $n$  维超立方体结构中各节点的存储开销为  $n$  bits.基于 SPVs 的容错路由算法具有如下特性:(1) 源节点在  $O(n)$  的时间内可以判定出和目标节点之间是否存在最优通路;(2) 若它们之间存在最优通路,则源节点将把消息传递到合适的邻节点,使消息继续沿最优通路进行传递;(3) 若它们之间不存在最优通路,则源节点将把消息传递到合适的邻节点,使其沿次最优通路进行传递.与前述算法 SVs 和 ESVs 相比,SPVs 与 SVs 和 ESVs 的存储开销同为  $n$  bits,但能记录更多的最优通路信息,因此是安全向量(SVs)、扩展安全向量(ESVs)的一种扩展.与算法 OPMs 和 EOPMs 相比,SPVs 的存储开销呈指数级地低于 OPMs 和 EOPMs 的存储开销,而且 SPVs 能记录到 OPMs 和 EOPMs 所无法记录到的最优通路信息.

## 1 安全通路向量

### 1.1 预备知识

定义 1(距离). 对于  $n$  维超立方体  $Q_n$  中的节点  $A(w_{n-1} \dots w_1 w_0), B(w'_{n-1} \dots w'_1 w'_0)$ ,其中  $w_j, w'_j \in \{0, 1\}$ ,  $j \in [0, n-1]$ ;定义  $A, B$  之间的互异位的个数,即  $A, B$  之间的 Hamming 距离为  $A, B$  之间的距离;若  $A, B$  之间的距离为  $k$ ,则称  $A, B$  具有  $k$  距离.

**定义 2**( $k$  距离最优通路). 对于  $n$  维超立方体  $Q_n$  中的节点  $A, B$ , 若它们之间的距离为  $k$ , 且  $A, B$  之间存在一条距离为  $k$  的通路, 则称  $A, B$  之间存在  $k$  距离最优通路, 或简称为  $A, B$  之间存在最优通路.

**定义 3**(二进制字符串的操作符约定). 操作符  $\&$  表示二进制字符串的交, 操作符  $\sim$  表示二进制字符串的补,  $2^i$  表示第  $i$  位为 1 其余  $n-1$  位全部为 0 的二进制字符串.

为了描述方便, 用  $sour, dest, cur$  分别表示信息的源节点、目的节点和当前节点; 用  $REL(A, B)$  表示两个节点  $A, B$  的相对地址,  $REL_j(A, B)$  表示  $REL(A, B)$  的第  $j$  位;  $nei(A, i)$  表示节点  $A$  的第  $i$  个邻节点; 用  $Dist(A, B)$  表示节点  $A$  和节点  $B$  之间的距离.

## 1.2 安全通路向量的定义

**定义 4**(安全通路向量). 对于  $n$  维超立方体  $Q_n$  中的节点  $A$ , 它的安全通路向量为一个  $n$  元向量, 记为  $SPV_A$ , 其中  $SPV_A[k](1 \leq k \leq n)$  的值按如下规则计算:

$$SPV_A[k] = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sum_{j=0}^{n-1} M_A^k[j] > n-k \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

其中  $M_A^k$  为节点  $A$  经过  $k-1$  轮邻节点间的信息交换后得到的  $n$  元链路状态向量, 其各项的值按如下规则计算:

$$M_A^1[j] = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 的第 } j \text{ 条链路畅通} \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

$$M_A^2[j] = \begin{cases} 1, & \text{若 } \forall B \in \{P \mid Dist(A, P) = 2 \& \& REL_j(A, P) = 1\}, \text{ 有 } A, B \text{ 之间存在最优通路} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}.$$

当  $k \geq 3$  时,  $M_A^k$  各项的值由  $A$  的邻节点的  $M^{k-1}$  的值计算得出, 方法如下:

$$M_A^k = [a_{n-1}, \dots, a_1, a_0],$$

其中  $a_i(0 \leq i \leq n-1)$  按如下规则赋值:

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } \lambda^i = 1 \\ 1, & \text{若 } \lambda^i = 0, \text{ 但 } \sum_{j=0}^{n-1} b_j^i > n-k \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

其中, 条件因子  $\lambda^i$  按如下规则赋值:

$$(1) \text{ 当 } A \text{ 的第 } i \text{ 条链路畅通时: } \lambda^i = \begin{cases} 1, & \text{若 } M_{nei(A, i)}^{k-1} \text{ 中除第 } i \text{ 项外至少有 } n-k+1 \text{ 项等于 } 1 \\ 0, & \text{否则} \end{cases};$$

(2) 当  $A$  的第  $i$  条链路有故障时:  $\lambda^i = 0$ .

条件因子  $b_j^i$  按如下规则赋值:

$$(1) \text{ 当 } A \text{ 的第 } j \text{ 条链路畅通时: } b_j^i = \begin{cases} 1, & \text{若 } M_{nei(A, j)}^{k-1} \text{ 的每一项都等于 } 1 \\ M_{nei(A, j)}^{k-1} \& (\sim 2^j) \text{ 的第 } i \text{ 项}, & \text{否则} \end{cases};$$

(2) 当  $A$  的第  $j$  条链路有故障时:  $b_j^i = 0, 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$ .

后面将证明按如上方法定义的  $SPVs$  同样具有  $SVs$  的特性, 且比  $SVs, ESVs$  能记录到更多的最优通路信息.

## 1.3 $SPVs$ 与 $SVs, ESVs, OPMs, EOPMs$ 数据对比示例

表 1 列出了如图 1 所示的一个有故障的四维超立方体中节点 1000, 0110, 1110, 1100, 0000 的  $SVs, ESVs, SPVs, OPMs$  和  $EOPMs$  对比数据.

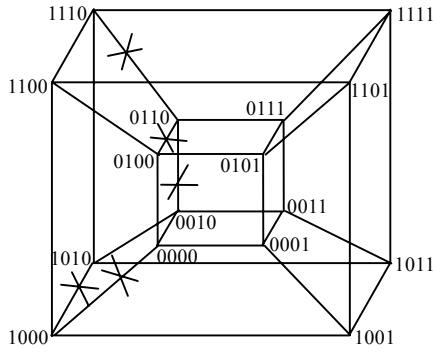


Fig.1 A 4-D hypercube with fault links

图 1 一个有链路故障的三维超立方体

**Table 1** Comparative data of part of nodes in Fig.1 among SVs, ESVs, SPVs, OPMs and EOPMs  
**表 1** 图 1 部分节点的 SVs,ESVs,SPVs,OPMs 和 EOPMs 数据比较

	Node 1000	Node 0110	Node 1110	Node 1100	Node 0000
SVs	(0001)	(0001)	(0001)	(1001)	(0001)
ESVs	(0001)	(0001)	(0101)	(1011)	(0011)
SPVs	(0001)	(0101)	(0111)	(1011)	(0011)
OPMs	[0101]	[0001]	[0111]	[1111]	[0111]
	0000	0000	1001	0101	1001
	0001	0000	1111	1111	1111
	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]
EOPMs	[0101]	[0001]	[0111]	[1111]	[0111]
	0101	0001	1111	0101	1001
	0001	0000	1111	1111	1111
	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]

由表 1 的数据可以看出,在节点 1110 处,按照  $SV_{1110}=(0001),ESV_{1110}=(0101)$  的定义,它们均未能反映节点 1110 和与其 Hamming 距离为 3 的节点 0000,0011,1001,0101 之间最优通路的存在.而按照  $SPV_{1110}=(0111)$  的定义,它表示节点 1110 和与其 Hamming 距离为 3 的所有节点 0000,0011,1001,0101 之间存在最优通路,这与节点 1110 和所有与其 Hamming 距离为 3 的节点 0000,0011,1001,0101 之间实际上存在最优通路的事实相符.

而在节点 0110 处,按照  $OPM_{0110}[3]=(0000),EOPM_{0110}[3]=(0000)$  的定义,它们均未能反映节点 0110 和与其 Hamming 距离为 3 的节点 1000,1011,1101,0001 之间最优通路的存在.而按照  $SPV_{0110}=(0101)$  的定义,它表示节点 0110 和与其 Hamming 距离为 3 的节点 1011,1101,0001 之间存在最优通路,这与节点 0110 和与其 Hamming 距离为 3 的节点 1011,1101,0001 之间实际上存在最优通路的事实相符,这说明  $SPV_{0110}$  记录了 OPMs 和 EOPMs 无法记录到的最优通路信息.

**1.4 安全通路向量的赋值算法**

依据 SPVs 的定义 4 给出建立安全通路向量的描述算法如下:

Algorithm SPVFilling()

- {Collect link fault information to construct  $M^1$ ;
- Determine  $SPV[1]$  with  $M^1$  according to definition 4;
- Send  $M^1$  via non-faulty link;
- Receive all neighbors'  $M^1$  and Calculate  $M^2$  with all neighbors'  $M^1$  according to definition 4;
- Determine  $SPV[2]$  with  $M^2$  according to definition 4;
- Send  $M^2$  via non-faulty link;
- For ( $k=3;k \leq n;k++$ )

```

{Receive all neighbors'  $M^{k-1}$ ;
 Calculate  $M^k$  with all neighbors'  $M^{k-1}$ 
   according to definition 4;
 Determine  $SPV[k]$  with  $M^k$  according to definition 4;
 If ( $k!=n$ ) send  $M^k$  out via non-faulty links;}}
```

显然,SPVs赋值算法中的每个节点计算自身的 $SPVs[k]$ 时只需要用到自己邻节点的 $M^{k-1}$ 的信息,因此,SPVs的赋值可以通过 $n-1$ 轮邻节点之间的信息交换来完成;又因为SPVs为 $n$ 元向量,且其各元素只取值0,1,故各节点的存储开销为 $n$  bits.

## 2 路由算法与性能分析

### 2.1 路由算法

安全通路向量记录了系统中的最优通路信息,下一步我们建立起一个基于安全通路向量(SPVs)的容错路由算法,并利用它来帮助我们将信息尽量沿最优通路传递.算法具体描述如下:

Algorithm SPV\_Route

```

{If ( $cur=dest$ ) send to node and return (SUCCESS);
 For ( $link=0;link<n;link++$ ) //找最优通路
  {If ( $link \in \{j \mid REL_j(cur,dest)=1\} \&\& SPV_{nei(A,link)}[Dist(cur,dest)-1]=1$ )
   {Send message with this link;
   Return (SUCCESS);}}
 For ( $link=0;link<n;link++$ ) //找次最优通路
  {If ( $link \in \{j \mid REL_j(cur,dest)=0\} \&\& SPV_{nei(A,link)}[Dist(cur,dest)+1]=1$ )
   {Send message with this link;
   Return (SUCCESS);}}
 Return (FALSE);}
```

基于以上描述,易知算法具有如下特性:

- (1) 能在 $O(n)$ 的时间内判定出源节点和目标节点之间是否存在最优通路;
- (2) 若它们之间存在最优通路,则会把消息传递到合适的邻节点,使消息继续沿最优通路(长度为 $Dist(sour, dest)$ )传递;
- (3) 若它们之间不存在最优通路,则会把消息传递到合适的邻节点,使其沿次最优通路(长度为 $Dist(sour, dest)+2$ )传递.

### 2.2 性能分析与比较

**引理 1.** 对任意 $1 \leq k \leq n, 0 \leq i \leq n-1, M_A^k[i]=1 \Rightarrow$ 所有与 $A$ 距离为 $k$ 且第 $i$ 位与 $A$ 的第 $i$ 位互异的节点和 $A$ 之间一定存在 $k$ 距离最优通路.

证明:下面对 $k$ 用归纳法证明引理的结论成立.为了方便描述,我们用 $\Psi(A, j, \{a_s, \dots, a_i\}, \{a_p, \dots, a_q\})$ 表示所有与 $A$ 距离为 $j$ 且第 $a_s, \dots, a_i$ 位与其互异但第 $a_p, \dots, a_q$ 位与其相同的节点所构成的集合.

- 1)  $k=1, 2$ 时,依据定义4易知引理的结论成立.
- 2) 假设 $k=m$ 时,引理的结论成立.
- 3) 对 $k=m+1$ :

(1) 若 $\lambda^i=0$ ,则由定义4可知, $M_A^{m+1}[i]=1 \Rightarrow$ 要么 $A$ 的第 $i$ 个邻节点的 $M_{nei(A,i)}^m$ 的各项全部为1,要么除 $A$ 的第 $i$ 个邻节点外,至少存在 $A$ 的 $n-m$ 个邻节点 $j_0, \dots, j_{n-m-1}$ 满足 $M_{nei(A,j_t)}^m[i]=1 (t \in [0, n-m-1])$ ;

- a) 若 $A$ 的第 $i$ 个邻节点的 $M_{nei(A,i)}^m$ 的各项全部为1,则由 $nei(A,i)$ 与 $A$ 仅有第 $i$ 位不同易知, $\Psi(A, m+1, \{i\}, \{\})$

中任意节点与  $nei(A,i)$  的距离均为  $m \Rightarrow A$  和所有与其距离为  $m+1$  且第  $i$  位与其互异的节点之间一定存在  $m+1$  距离最优通路。

b) 若除  $A$  的第  $i$  个邻节点以外,至少存在  $A$  的  $n-m$  个邻节点  $j_0, \dots, j_{n-m-1}$  满足  $M_{nei(A,j_t)}^m [i]=1 (t \in [0, n-m-1])$ , 则  $\Rightarrow nei(A,j_t)$  和  $\Psi(nei(A,j_t), m, \{i\}, \{\})$  中任意节点间一定存在  $m$  距离最优通路。又因为  $j_0, \dots, j_{n-m-1}$  均不同于  $i$ , 且显然  $\Psi(A, m+1, \{i, j_t\}, \{\}) \subseteq \Psi(nei(A, j_t), m, \{i\}, \{j_t\}) \subseteq \Psi(nei(A, j_t), m, \{i\}, \{\})$ ;

下证  $\Psi(A, m+1, \{i\}, \{\}) \subseteq \bigcup_{t=0}^{n-m-1} \Psi(A, m+1, \{i, j_t\}, \{\})$ 。否则,即存在某个节点  $B \in \Psi(A, m+1, \{i\}, \{j_0, \dots, j_{n-m-1}\}) \Rightarrow B$  与  $A$  至多只可能有  $m$  位不同; 又由  $B$  与  $A$  距离为  $m+1 \Rightarrow B$  与  $A$  至少有  $m+1$  个位不同, 矛盾。  $\Rightarrow A$  和所有与其距离为  $m+1$  且第  $i$  位与其互异的节点之间一定存在  $m+1$  距离最优通路。

(2) 若  $\lambda^i=1$ , 则由定义 4 可知,  $M_A^{m+1} [i]=1 \Rightarrow M_{nei(A,i)}^m$  中除第  $i$  项外至少有  $n-m$  项为 1 且  $A$  的第  $i$  条链路畅通, 不妨设这些等于 1 的项为  $l_t (t \in [1, s], s \geq n-m, t \neq i)$ ; 而对  $M_{nei(A,i)}^m [l_1]=1 \Rightarrow \Psi(nei(A,i), m, \{l_1\}, \{i\})$  中共有  $C_{n-2}^{m-1}$  个互异节点, 且显然  $\Psi(nei(A,i), m, \{l_1\}, \{i\}) \subseteq \Psi(A, m+1, \{i\}, \{\})$ ; 又对  $M_{nei(A,i)}^m [l_2]=1 \Rightarrow \Psi(nei(A,i), m, \{l_2\}, \{i, l_1\})$  中共有  $C_{n-3}^{m-1}$  个互异节点, 同理  $\Psi(nei(A,i), m, \{l_2\}, \{i, l_1\}) \subseteq \Psi(A, m+1, \{i\}, \{\})$ , 且易知  $\Psi(nei(A,i), m, \{l_2\}, \{i, l_1\}) \cap \Psi(nei(A,i), m, \{l_1\}, \{i\}) = \emptyset$  (空集); 依此类推, 对  $M_{nei(A,i)}^m [l_s]=1 \Rightarrow \Psi(nei(A,i), m, \{l_s\}, \{i, l_1, \dots, l_{s-1}\})$  中共有  $C_{n-s-1}^{m-1}$  个互异节点, 且  $\Psi(nei(A,i), m, \{l_s\}, \{i, l_1, \dots, l_{s-1}\}) \subseteq \Psi(A, m+1, \{i\}, \{\})$ ,  $\Psi(nei(A,i), m, \{l_s\}, \{i, l_1, \dots, l_{s-1}\}) \cap \left\{ \Psi(nei(A,i), m, \{l_1\}, \{i\}) \cup \bigcup_{t=2}^{s-1} \Psi(nei(A,i), m, \{l_t\}, \{i, l_1, \dots, l_{t-1}\}) \right\} = \emptyset \Rightarrow \lambda^i=1$  至少表示了  $C_{n-2}^{m-1} + C_{n-3}^{m-1} + \dots + C_{n-s-1}^{m-1} \geq C_{n-2}^{m-1} + C_{n-3}^{m-1} + \dots + C_{m-1}^{m-1} = C_{n-1}^m$  个(因为  $s \geq n-m$ ) 与  $A$  距离为  $m+1$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的两两不同的节点; 而与  $A$  距离为  $m+1$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位不同的节点数共有  $C_{n-1}^m$  个, 故  $A$  和所有与其距离为  $m+1$  且第  $i$  位与其第  $i$  位不同的节点之间均存在  $m+1$  距离最优通路。  $\square$

**定理 1.** 对任意  $1 \leq k \leq n, SPV_A[k]=1 \Rightarrow A$  和所有与其距离为  $k$  的节点之间一定存在  $k$  距离最优通路。

证明: 由定义 4 可知, 只需证明  $k > 2$  时, 若链路状态向量  $M_A^k$  中至少有  $n-k+1$  个 1,  $A$  和所有与其距离为  $k$  的节点之间一定存在  $k$  距离最优通路即可。

若  $M_A^k$  中至少有  $n-k+1$  个 1, 不妨设  $a_0, \dots, a_{n-k}$  为 1, 由引理 1 可知:  $a_j=1 (j \in [0, n-k]) \Rightarrow A$  和  $\Psi(A, k, \{j\}, \{\})$  中任意节点之间一定存在  $k$  距离最优通路。

下证  $\Psi(A, k, \{\}, \{\}) \subseteq \bigcup_{t=0}^{n-k} \Psi(A, k, \{j\}, \{\})$ : 若不然, 即存在某个与  $A$  距离为  $k$  的节点  $B \in \Psi(A, k, \{\}, \{0, \dots, n-k\}) \Rightarrow B$  与  $A$  至多只可能有  $k-1$  位不同, 又  $B$  与  $A$  距离为  $k \Rightarrow B$  与  $A$  至少有  $k$  个位不同, 矛盾。

故  $A$  和所有与其距离为  $k$  的节点之间一定存在  $k$  距离最优通路。  $\square$

令:  $OP\_PAIR_{SV}(Q_n) = \{(h, k) | \text{第 } h \text{ 个节点的 SV 的第 } k \text{ 位为 } 1\}$ ;

$OP\_PAIR_{ESV}(Q_n) = \{(h, k) | \text{第 } h \text{ 个节点的 ESV 的第 } k \text{ 位为 } 1\}$ ;

$OP\_PAIR_{SPV}(Q_n) = \{(h, k) | \text{第 } h \text{ 个节点的 SPV 的第 } k \text{ 位为 } 1\}$ ;

$I_n = (1, 1, \dots, 1). 0 \leq h < 2^n, 1 \leq k \leq n, 0 \leq i \leq n-1$ .

**定理 2.**  $OP\_PAIR_{SV}(Q_n) \subset OP\_PAIR_{ESV}(Q_n) \subset OP\_PAIR_{SPV}(Q_n)$ .

证明: 由于文献 [5] 中已经证明了  $OP\_PAIR_{SV}(Q_n) \subset OP\_PAIR_{ESV}(Q_n)$ , 故只需证明  $OP\_PAIR_{ESV}(Q_n) \subset OP\_PAIR_{SPV}(Q_n)$  即可。下面首先用归纳法证明对任意节点  $A, ESV_A[k]=1 \Rightarrow M_A^k$  的各项全为 1 ( $1 \leq k \leq n$ )。

1)  $k=1$  时, 由定义 4 易知,  $ESV_A[k]=1 \Rightarrow M_A^k = I_n$ .

2)  $k=2$  时,  $ESV_A[k]=1 \Rightarrow A$  与所有距离为 2 的节点之间均存在最优通路  $\Rightarrow$  对任意  $j \in [0, n-1], M_A^k [j]=1 \Rightarrow M_A^k = I_n$ .

3) 假设  $k=m$  时,  $ESV_A[m]=1 \Rightarrow M_A^m = I_n$ .

4)  $k=m+1$  时,  $ESV_A[m+1]=1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} ESV_{nei(A,j)}[m] > n-m-1 \Rightarrow$  在  $A$  的邻节点中至少有  $n-m$  个  $ESV[m]=1 \Rightarrow$  依据

归纳假设,  $M_{nei(A,0)}^m, \dots, M_{nei(A,n-1)}^m$  中至少有  $n-m$  个  $I_n \Rightarrow$  依据定义 4 有  $M_A^{m+1} = I_n$ .

又由  $M_A^k = I_n \Rightarrow M_A^k$  中至少有  $n-k+1$  个位为 1  $\Rightarrow SPV_A[k]=1 \Rightarrow OP\_PAIR_{ESV}(Q_n) \subset OP\_PAIR_{SPV}(Q_n)$ . 故定理的结论得证.  $\square$

为了具体比较算法的性能,我们参考文献[9]模拟了八维和十维超立方体中存在链路故障的情况下 SVs,ESVs,SPVs 沿最优通路传递消息的能力.对于任意给定的链路故障数,我们随机选择 100 种故障分布模式,并在任意源与目的节点之间进行一次消息传递.把所有在连通的节点间传递的消息作为 100%,分别统计用 SVs,ESVs,SPVs 沿最优通路传递的消息所占的比例.

**Table 2** Comparative simulation results of SVs, ESVs and SPVs in 8-D hypercube with fault links  
表 2 八维链路故障超立方体中 SVs,ESVs,SPVs 模拟结果比较

Total numbers of fault links	OP in SVs	OP in ESVs	OP in SPVs	OP exist
10	99.571 7	99.911 0	99.932 7	99.965 7
15	97.310 0	99.823 3	99.905 9	99.945 0
20	87.828 6	99.706 1	99.826 2	99.923 5
25	70.896 5	99.557 3	99.649 1	99.897 3
30	52.446 8	99.379 7	99.551 5	99.872 3

**Table 3** Comparative simulation results of SVs, ESVs and SPVs in 10-D hypercube with fault links  
表 3 十维链路故障超立方体中 SVs,ESVs,SPVs 模拟结果比较

Total numbers of fault links	OP in SVs	OP in ESVs	OP in SPVs	OP exist
15	99.977 4	99.993 6	99.994 0	99.996 9
30	99.555 0	99.979 9	99.988 7	99.993 8
40	97.250 6	99.967 6	99.976 8	99.991 4
50	86.461 4	99.950 9	99.965 4	99.988 4
60	62.394 6	99.932 6	99.950 9	99.986 1

在表 2 和表 3 中,OP Exist 表示源与目的节点之间实际存在最优通路的消息的比例;OP in SVs,ESVs,SPVs 分别表示用 SVs,ESVs,SPVs 方法可以沿最优通路传递消息的比例;因此,OP in SVs,ESVs,SPVs 分别反映了用 SVs,ESVs,SPVs 方法可以沿最优通路传递消息的能力.从表 2 和表 3 的实验数据可知,SPVs 记录最优通路要强于 SVs 和 ESVs.再由第 1.3 节的例子可知,SPVs 能记录 OPMs 和 EOPMs 所无法记录到的最优通路信息,OPMs 和 EOPMs 的存储开销均为  $n^2$  bits,而 SPVs 的存储开销仅为  $n$  bits,因此 SPVs 可以较多地节约存储开销.

以上从算法沿最优通路传递消息的能力对算法 SVs,ESVs,SPVs 进行了比较,下面我们再分别比较一下 3 种算法的时间复杂度.由第 1.4 节和第 2.1 节中给出的 SPVs 的赋值与路由算法及文献[9,10]可知,SVs,ESVs,SPVs 的路由算法一致,因此三者的路由时间复杂度是相同的;而对三者的赋值时间复杂度,由第 2.1 节 SPVs 的赋值算法可知,SPVs 中每个节点需要  $n-1$  轮邻节点之间的信息交换才能完成最终赋值,而在每一轮中,各节点需要计算来自其  $n$  个邻节点发送过来的  $n$  维链路状态向量,因此 SPVs 的赋值算法的总时间复杂度为  $O(n^3)$  bit;再由文献[9,10]易知,SVs,ESVs 中每个节点也分别需要  $n-1$  轮邻节点之间的信息交换才能完成最终赋值,而在每一轮中,各节点只需要计算来自其  $n$  个邻节点发送过来的  $n$  维链路状态向量中的某一位,因此时间复杂度也分别均为  $O(n^2)$  bit;故算法 SPVs 的总时间复杂度要高于算法 SVs,ESVs 的总时间复杂度.

### 3 结 语

随着多处理机系统规模的扩大,系统中出现处理机故障或处理机间链路故障的可能性也随之增加,因此,设计较好的容错路由策略,尽可能多地记录系统中存在的最优通路信息,使得当系统中存在故障的情况下实现更有效的容错路由,具有重要意义.本文研究  $n$  维超立方体结构的多处理机系统中存在链路故障情况下的容错路由问题,提出了安全通路向量(SPVs)的概念,并基于此概念,给出了建立 SPVs 及其容错路由算法.与已有的基于安全向量(SVs)和扩展安全向量(ESVs)概念的容错路由算法相比,基于 SPVs 的容错路由算法具有更好的性能,能记录更多的最优通路,从而使得系统在故障数量较多时仍能有效地把绝大多数源与目的节点之间有最优通路的信息沿最优通路安全、高效地进行传递.如何求解用安全向量或安全矩阵的形式来记录最优通路的上界,如何求解用非安全向量或非安全矩阵的形式来记录最优通路的上界,以及如何结合概率的方法来研究超立方体网络中的容错性问题,是我们下一步将要进行的工作.

**References:**

- [1] Schlosser M, Sintek M, Decker S, Nejd W. HyperCuP—Hypercubes, ontologies and efficient search on P2P networks. In: Koubarakis M, ed. *Int'l Workshop on Agents and Peer-to-Peer Computing (AP2PC)*. Bologna: Springer-Verlag, 2002. 112~124.
- [2] Sarbazi-Azad H, Ould-Khaoua M, Mackenzie L. Comparative analysis of adaptive wormhole routing in Tori and hypercubes in the presence of hotspot traffic. In: Bader DA, ed. *Int'l Parallel and Distributed Processing Symposium: IPDPS 2002 Workshops*. Fort Lauderdale: IEEE Computer Society, 2002. 259~267.
- [3] Sasama T. On fault-tolerance of hypercubes using subcubes. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 2002,9(2):151~161.
- [4] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Probability-Based fault-tolerant routing in hypercubes. In: Bode A, Ludwig T, Karl W, Wismüller R, eds. *European Conf. on Parallel Processing (EuroPar)*. Munich: Springer-Verlag, 2000. 935~938.
- [5] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Fault-Tolerant routing in hypercubes using probability vectors. *Parallel Computing*, 2001, 27(10):1381~1399.
- [6] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Probability-Based fault-tolerant routing in hypercubes. *The Computer Journal*, 2001,44(5): 368~373.
- [7] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Unsafety vectors: A new fault-tolerant routing for the binary  $n$ -cube. *Journal of Systems Architecture*, 2002,47(9):783~793.
- [8] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Unsafety vectors: A new fault-tolerant routing for  $k$ -ary  $n$ -cubes. *Microprocessors and Microsystems*, 2001,25(5):239~246.
- [9] Wu J. Adaptive fault-tolerant routing in cube-based multicomputers using safety vectors. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 1998,9(4):321~334.
- [10] Gao F, Li ZC, Min YH, Wu J. A fault-tolerant routing strategy based on extended safety vectors in hypercube multicomputers. *Chinese Journal of Computers*, 2000,23(3):248~254 (in Chinese with English abstract).
- [11] Gao F, Li ZC. Fault-Tolerant routing in hypercube multicomputers using optimal path matrices. *Chinese Journal of Computers*, 2000,23(3):242~247 (in Chinese with English abstract).
- [12] Tian SH. A fault-tolerant routing strategy based on extended optimal path matrices in hypercube multi-computers. *Chinese Journal of Computers*, 2002,25(1):87~92 (in Chinese with English abstract).

**附中文参考文献:**

- [10] 高峰,李忠诚,闵应骅,吴杰.超立方体多处理机系统中基于扩展安全向量的容错路由.计算机学报,2000,23(3):248~254.
- [11] 高峰,李忠诚.用最优通路矩阵实现超立方体多处理机系统的容错路由.计算机学报,2000,23(3):242~247.
- [12] 田绍槐.超立方体多处理机系统中基于扩展最优通路矩阵的容错路由.计算机学报,2002,25(1):87~92.