BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL FLIESS

Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 3-40
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__3_0>

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, p. 3-40.

FONCTIONNELLES CAUSALES NON LINÉAIRES ET INDÉTERMINÉES NON COMMUTATIVES

PAR

MICHEL FLIESS

RÉSUMÉ. — Les indéterminées non commutatives permettent de jeter les bases d'une théorie des fonctionnelles causales non linéaires.

ABSTRACT. — The foundations of a theory of non-linear causal functionals are laid down using non-commutative indeterminates.

TABLE DES MATIÈRES

Texte reçu le 6 juin 1979, révisé le 24 octobre 1980.

Michel FLIESS, Laboratoire des Signaux et Systèmes, C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/3 /$ 5.00

Introduction

Les fonctionnelles, c'est-à-dire les fonctions de fonctions, ont, dès leur origine (*cf.* VOLTERRA [51], VOLTERRA et PÉRÈS [52], LÉVY [37]), été considérées comme des fonctions d'une infinité de variables « ordinaires ».

Ce point de vue, certes indispensable, ne facilite pas toujours les choses : comment calculer avec une infinité de variables ?

En lieu et place, nous introduisons un nombre fini d'indéterminées non commutatives. Une fonctionnelle causale (ou non anticipative), fonction de n fonctions, est dite *analytique* si elle est donnée par une série formelle en $n+1$ indéterminées non commutatives ([1]) : une pour le temps, les n autres pour les n fonctions. Les règles de calcul sont simples : addition et *mélange* (ou *shuffle product*) correspondent à l'addition et au produit des fonctionnelles. Pour les équations différentielles forcées, les indéterminées non commutatives généralisent les séries de Lie de GRÖBNER [29] et le calcul symbolique, ou opérationnel, de Heaviside, cher aux ingénieurs. Enfin, toute fonctionnelle causale, continue dans une topologie usuelle, peut, sur un compact, être arbitrairement approchée par des fonctionnelles analytiques, de séries non commutatives rationnelles ou polynômiales.

Notre approche présente des liens évidents avec les travaux développés, depuis plus de 25 ans, par CHEN ([4]-[6], [8]) qui, à tout chemin, associe une série non commutative. Nous utilisons quelques-uns de ses résultats pour jeter les premières lueurs sur les fonctions généralisées dans un cadre non linéaire. Comme SUSSMANN [48] l'avait suggéré, on rencontre des phénomènes tout à fait nouveaux et inattendus, qui s'expliquent par crochets de Lie et n'ont pas d'analogue dans la théorie linéaire des distributions de L. SCHWARTZ.

L'origine de ce travail se trouve dans les problèmes posés par l'automatique non linéaire. Il faut cependant noter une rencontre entre notre combinatoire non commutative et certains développements de la mécanique statistique ou quantique. L'intégrale itérée de CHEN, ici employée, s'apparente aux *intégrales chronologiques* (ou *time-ordered integrals*) usuelles depuis DYSON [11]. Quant au mélange, il est très proche des méthodes formelles proposées, il y a longtemps, par FEYNMAN [12]. Ce rapport entre mathématiques pour sciences de l'ingénieur et physique n'est pas nouveau; il était déjà présent dans un cours fameux de WIENER [53].

La plupart des résultats ont déjà été présentés, de façon souvent succincte ([15], [16], [19]-[25], [27]).

([1]) Les indéterminées non commutatives ont déjà été proposées pour définir des fonctions de plusieurs opérateurs ne commutant pas (*cf.* LAPPO-DANILEVSKY [35], TAYLOR [49]).

Chapitre I

Rappels sur les séries formelles non commutatives

1. Définitions et propriétés générales

(*a*) SÉRIES FORMELLES

Soit X^* le *monoïde libre* engendré par un ensemble fini, non vide X, l'*alphabet*. Un élément de X^* est appelé *mot*. L'élément neutre, ou *mot vide*, est noté 1. La *longueur* $|w|$ d'un mot w est le nombre de lettres dont il est composé : $|x_1 x_2 x_1^2|=4$. La longueur du mot vide est nulle. Pour tout $x \in X$, $|w|_x$ désigne le nombre d'occurrences de x dans w : $|x_1 x_2 x_1^2|_{x_1}=3$, $|x_1 x_2 x_1^2|_{x_2}=1$. Il est clair que :

$$|w|=\sum_{x \in X} |w|_x.$$

Soient A un anneau commutatif unitaire, $A\langle X\rangle$ et $A\langle\langle X\rangle\rangle$ les A-algèbres des *polynômes* et des *séries formelles*, à coefficients dans A, en les indéterminées (ou variables) associatives $x \in X$ (non commutatives si card $X \geqslant 2$). Un élément $s \in A\langle\langle X\rangle\rangle$ est noté :

$$s=\sum\{(s, w)\, w \mid w \in X^*\} \qquad \text{où} \quad (s, w) \in A.$$

Addition et produit (de Cauchy) sont définis par :

$$s_1+s_2=\sum\{[(s_1, w)+(s_2, w)]\, w \mid w \in X^*\},$$
$$s_1 s_2=\sum\{[\textstyle\sum_{v_1 v_2=w}(s_1, v_1)(s_2, v_2)]\, w \mid w \in X^*\}.$$

Dans le cas où X est réduit à la seule lettre x, on retrouve les algèbres commutatives usuelles $A[x]$ et $A[[x]]$ des polynômes et des séries en une indéterminée.

(*b*) RATIONALITÉ ET THÉORÈME DE KLEENE-SCHÜTZENBERGER

Une série $s \in A\langle\langle X\rangle\rangle$ est inversible ssi son terme constant $(s, 1)$ l'est dans A. Une sous-A-algèbre R de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite *rationnellement close* ssi l'inverse de toute série inversible de R appartient encore à R.

L'A-algèbre $A\langle(X)\rangle$ des séries *rationnelles* (*cf.* SCHÜTZENBERGER [44]) est la plus petite sous-A-algèbre rationnellement close de $A\langle\langle X\rangle\rangle$, qui contienne $A\langle X\rangle$.

Remarque. — Dans le cas d'une seule indéterminée x, toute série rationnelle est développement de Taylor à l'origine du quotient P/Q de deux polynômes $P, Q \in A[x]$, $Q(0)=1$.

$A^{M \times N}$ désigne l'ensemble des matrices à M lignes et N colonnes. Une *représentation* (matricielle) $\mu : X^* \to A^{N \times N}$ est un homorphisme du monoïde X^* dans le monoïde multiplicatif des matrices carrées d'ordre N.

THÉORÈME I.1 (dit de KLEENE-SCHÜTZENBERGER, *cf.* [44]). — *Une série $r \in A\langle\langle X \rangle\rangle$ est rationnelle si, et seulement si, il existe un entier $N \geq 1$, une représentation $\mu : X^* \to A^{N \times N}$, une matrice $p \in A^{N \times N}$, tels que :*

$$r = \sum \{(\mathrm{Tr}\, p\, \mu\, w)\, w \mid w \in X^*\} \tag{I.1}$$

[$\mathrm{Tr}\, p\, \mu\, w$ *désigne la trace de la matrice* $p\, \mu\, w$].

COROLLAIRE (*cf.* [18]). — *Une série $r \in A\langle\langle X \rangle\rangle$ est rationnelle si, et seulement si, il existe un entier $N \geq 1$, une représentation $\mu : X^* \to A^{N \times N}$, des matrices ligne $\lambda \in A^{1 \times N}$ et colonne $\gamma \in A^{N \times 1}$ tels que :*

$$r = \sum \{(\lambda \mu\, w\, \gamma)\, w \mid w \in X^*\}.$$

Remarque. — Dans le cas d'une seule indéterminée x, le théorème de KLEENE-SCHÜTZENBERGER est équivalent à la condition classique suivante : la série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ est rationnelle ssi les coefficients obéissent, à partir d'un certain rang, à une relation de récurrence linéaire, à coefficients constants.

2. Divers produits

(*a*) PRODUIT D'HADAMARD

Le *produit d'Hadamard* de deux séries $s_1, s_2 \in A\langle\langle X \rangle\rangle$ est la série $s_1 \odot s_2$ donnée par :

$$s_1 \odot s_2 = \sum \{(s_1, w)\,(s_2, w)\, w \mid w \in X^*\}.$$

Généralisant un résultat ancien d'ÉMILE BOREL, SCHÜTZENBERGER [45] a montré :

PROPOSITION I.2. — *Le produit d'Hadamard de deux séries rationnelles est une série rationnelle.*

Preuve. — Soient $r_i \in A\langle(X)\rangle$ $(i = 1, 2)$ données, comme en (I.1), par :

$$r_i = \sum \{(\mathrm{Tr}\, p_i\, \mu_i\, w)\, w \mid w \in X^*\}.$$

Soit $\mu = \mu_1 \otimes_A \mu_2$ le produit tensoriel des deux représentations :

$$\forall w \in X^*, \quad \mu\, w = \mu_1\, w \otimes_A \mu_2\, w.$$

Il est clair que :

$$r_1 \odot r_2 = \sum \{(\mathrm{Tr}(p_1 \otimes_A p_2)\, \mu w)\, w \mid w \in X^*\}. \quad \blacksquare$$

(*b*) MÉLANGE

On appelle (*produit de*) *mélange* (²) de deux mots w, $w' \in X^*$, le polynôme homogène $w \sqcup\!\sqcup\, w'$, de degré $|w|+|w'|$, défini par récurrence sur la longueur :

$$\text{(I.2)} \qquad \begin{cases} 1 \sqcup\!\sqcup\, 1 = 1; \quad \forall x \in X, \qquad 1 \sqcup\!\sqcup\, x = x \sqcup\!\sqcup\, 1 = x; \\ \forall x, x' \in X, \quad \forall v, v' \in X^*, \\ (xv) \sqcup\!\sqcup\, (x'v') = x[v \sqcup\!\sqcup\, (x'v')] + x'[(xv) \sqcup\!\sqcup\, v']. \end{cases}$$

La série $s_1 \sqcup\!\sqcup\, s_2$, mélange de $s_1, s_2 \in A\langle\langle X \rangle\rangle$, est donné par :

$$s_1 \sqcup\!\sqcup\, s_2 = \sum \{(s_1, v_1)(s_2, v_2)\, v_1 \sqcup\!\sqcup\, v_2 \mid v_1, v_2 \in X^*\}.$$

Avec addition et mélange, $A\langle\langle X \rangle\rangle$ est une A-algèbre commutative, intègre si A l'est, et unitaire.

On montre (*cf.* [17]) :

PROPOSITION I.3. — *Le mélange de deux séries rationnelles est une série rationnelle.*

Preuve. — Introduisons, en bijection avec X, le nouvel alphabet $\bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}$. Étant donnée r_1 (resp. r_2) $\in A\langle(x)\rangle$, substituons à tout $x \in X$ la série rationnelle :

$$x\{\sum \bar{w} \mid \bar{w} \in \bar{X}^*\} = x(1 - \textstyle\sum_{\bar{y} \in \bar{X}} \bar{y})^{-1}$$

$$(\text{resp. } \bar{x}\{\sum w \mid w \in X^*\} = \bar{x}(1 - \textstyle\sum_{y \in X} y)).$$

On obtient des séries $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in A\langle(X \cup \bar{X})\rangle$, dont on vérifie aisément la rationalité. Soit l'épimorphisme $\varphi : A\langle(X \cup \bar{X})\rangle \to A\langle(X)\rangle$ défini, pour tout $x \in X$, par $\varphi x = \varphi \bar{x} = x$. Il vient :

$$r_1 \sqcup\!\sqcup\, r_2 = \varphi(\bar{r}_1 \odot \bar{r}_2).$$

D'où, en vertu de la proposition I.2, le résultat cherché. $\blacksquare$

(²) On dit aussi *produit de Hurwitz* ou d'*intercalement*. En anglais, le terme consacré est *shuffle product*.

Remarque. — Soient $r_i \in A\langle(X)\rangle$ $(i=1, 2)$ données comme en (I.1). Définissons la représentation $\nu : X^* \rightarrow A^{N_1 N_2 \times N_1 N_2}$, où N_i est la dimension de μ_i, par :

$$\forall x \in X, \quad \nu x = \mu_1 x \otimes_A 1_{N_2} + 1_{N_1} \otimes_A \mu_2 x$$

(1_N est la matrice unité de $A^{N \times N}$).

Il vient :

$$r_1 \sqcup\!\sqcup\, r_2 = \sum \{ (\mathrm{Tr}(p_1 \otimes_A p_2)\, \nu w)\, w \mid w \in X^* \}.$$

3. Systèmes d'équations

(*a*) Rappels topologiques [3]

Soit $\mathscr{A}_d$ le A-module des polynômes homogènes de $A\langle X\rangle$ de degré d $(d=0, 1, 2, \ldots)$; $\mathscr{A}_0$ est isomorphe à A. L'A-algèbre $A\langle X\rangle$ est graduée :

$$A\langle X\rangle = \bigoplus_{d \geq 0} \mathscr{A}_d.$$

On munit l'A-algèbre $A\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries de la topologie produit des topologies discrètes pour les $\mathscr{A}_d$. Avec la topologie discrète pour A, $A\langle\langle X\rangle\rangle$ est une algèbre topologique, séparée et complète.

Soit (X) l'idéal bilatère de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ formé des séries de terme constant nul. La suite d'idéaux $(X)^k$ $(k=1, 2, \ldots)$ est un système fondamental de voisinage de 0. La topologie précédente est donc métrisable : la distance de deux séries s_1, s_2, telles que :

$$s_1 - s_2 \in (X)^k, \quad s_1 - s_2 \notin (X)^{k+1}$$

est $1/2^k$.

(*b*) Points fixes

Introduisons un nouvel alphabet $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$, disjoint de X. Soit le système d'équations, en les inconnues θ_k :

(I.3) $$\theta_k = p_k(\theta_1, \ldots, \theta_N) \qquad (k=1, \ldots, N),$$

[3] En toute rigueur, il aurait fallu placer ce paragraphe dès le début, ne serait-ce que pour la substitution utilisée dans la preuve de la proposition I.3.

où $p_k: A\langle\langle X\rangle\rangle\times\ldots\times A\langle\langle X\rangle\rangle\rightarrow A\langle\langle X\rangle\rangle$ est une contraction relativement à la topologie précédente. D'après le théorème classique du point fixe, il existe un et un seul N-uple $s_1, \ldots, s_N\in A\langle\langle X\rangle\rangle$ tel que :

$$s_k=p_k(s_1, \ldots, s_N).$$

Ce N-uple est dit *solution* de (I.3) et s'obtient par itérations.

Exemple. — Soient $X=\{x, \bar{x}\}$ et l'équation :

$$\theta=x\bar{x}+x\,\theta\,\bar{x}.$$

La solution est la série *algébrique* (*cf.* CHOMSKY et SCHÜTZENBERGER [9]) $\sum_{\alpha\geqslant 1} x^\alpha\bar{x}^\alpha$.

Chapitre II

Fonctionnelles causales analytiques

K désigne soit le corps des réels, soit celui des complexes.

1. Définition et premières propriétés

(*a*) INTÉGRALES ITÉRÉES

Soit l'alphabet $X=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Pour $T\in[0, \infty[$, considérons les fonctions continues par morceaux $u_1, \ldots, u_n : [0, T]\rightarrow K$. A tout mot non vide $x_{j_\nu}\ldots x_{j_0}\in X^*$, attachons l'*intégrale itérée* (*cf.* CHEN [4]-[6], [8]) $\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ définie par récurrence sur la longueur :

— $\xi_0(t)=t$, $\xi_i(t)=\int_0^t u_i(\tau)\,d\tau\,(i=1, \ldots, n)$;

— $\int_0^t d\xi_j=\xi_j(t)\,(j=0, 1, \ldots, n)$;

— l'intégrale $\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}}\ldots d\xi_{j_0}$ est définie pour tout $\tau\in[0, T]$; il vient :

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}=\int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau)\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}}\ldots d\xi_{j_0}$$

(l'intégrale de droite est de Stieltjes).

Exemple. — Au mot $x_0^{\alpha_k} x_{i_k} x_0^{\alpha_{k-1}} \ldots x_{i_1} x_0^{\alpha_0}$ $(1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n)$ correspond l'intégrale itérée :

$$\text{(II.1)} \quad \int_0^t \int_0^{\tau_k} \cdots \int_0^{\tau_2} \frac{(t-\tau_k)^{\alpha_k} u_{i_k}(\tau_k)(\tau_k-\tau_{k-1})^{\alpha_{k-1}} \ldots u_{i_1}(\tau_1)\, \tau_1^{\alpha_0}}{\alpha_k!\, \alpha_{k-1}! \ldots \alpha_0!} d\tau_k \ldots d\tau_1.$$

Cette formule généralise celle, classique, qui, dans notre écriture, associe au mot $x_0^\alpha x_1$ l'intégrale :

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!} u_1(\tau)\, d\tau.$$

Cette dernière expression est la primitive d'ordre α de u_1, qui s'annule, avec ses α premières dérivées, au point 0.

(*b*) SÉRIES GÉNÉRATRICES

Soit $g \in K\langle\langle X \rangle\rangle$. Supposons qu'on puisse lui associer des réels positifs T, M de sorte que la série numérique :

$$\text{(II.2)} \quad y(t) = (g, 1) + \textstyle\sum_{v \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_v = 0}^n (g, x_{j_v} \ldots x_{j_0}) \displaystyle\int_0^t d\xi_{j_v} \ldots d\xi_{j_0}$$

soit absolument convergente : $\xi_0(\tau) = \tau$, $\xi_i(\tau) = \int_0^\tau u_i(\sigma)\, d\sigma$ $(i=1, \ldots, n)$ avec u_i continue par morceaux, telle que $t \leqslant T$, $\max_{0 \leqslant \tau \leqslant T} |u_i(\tau)| \leqslant M$. g définit une fonctionnelle de domaine de convergence non vide, qui est *causale* (ou *non anticipative*) : $y(t)$ ne dépend que des valeurs antérieures des $u_i(\tau)$, c'est-à-dire pour $\tau \leqslant t$.

LEMME II.1. — *Pour T et M pris comme précédemment, deux séries g_1, $g_2 \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ définissent une même fonctionnelle si, et seulement si, elles sont égales.*

Preuve. — Il suffit de montrer que, si $g \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ induit la fonctionnelle nulle, alors $g = 0$. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont nulles, on obtient une fonction analytique du temps, d'où :

$$(g, 1) = (g, x_0) = \ldots = (g, x_0^v) = \ldots = 0.$$

Dérivant (II.2), il vient :

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \textstyle\sum_{i=1}^n (g, x_i)\, u_i(0).$$

Pour avoir zéro pour tout $u_i(0)$, il faut que $(g, x_1) = \ldots = (g, x_n) = 0$.

De même :

$$\left.\frac{d^2 y}{dt^2}\right|_{t=0} = \sum_{i_0, i_1=1}^{n} (g, x_{i_1} x_{i_0})\, u_{i_1}(0)\, u_{i_0}(0) + \sum_{i=1}^{n} [(g, x_0 x_i) + (g, x_i x_0)]\, u_i(0).$$

Pour avoir zéro, il faut que

$$(g, x_{i_1} x_{i_0}) = 0, \qquad (g, x_0 x_i) = -(g, x_i x_0).$$

Avec des $u_i(t)$ dérivables, la contribution pour la dérivée troisième des termes :

$$\sum_{i=1}^{n} (g, x_0 x_i) \int_0^t d\xi_0\, d\xi_i + (g, x_i x_0) \int_0^t d\xi_i\, d\xi_0$$

est :

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{6}(g, x_0 x_i) + \frac{1}{3}(g, x_i x_0)\right] \left.\frac{du_i}{dt}\right|_{t=0}.$$

Pour l'annuler, on doit avoir $(g, x_0 x_i) = -2\,(g, x_i x_0)$. Avec l'égalité précédente, il vient $(g, x_0 x_i) = (g, x_i x_0) = 0$.

Pour des longueurs supérieures, la généralisation est facile. ∎

Une fonctionnelle causale est dite *analytique* ([4]) si elle peut être définie, dans un domaine non vide autour de l'origine, comme précédemment, par une série non commutative, qui est alors unique. Ladite série est la *série génératrice* de la fonctionnelle. Par abus de langage, une fonctionnelle de série génératrice g sera parfois appelée fonctionnelle g.

Par analogie avec une terminologie usuelle en ingéniérie, on appelle $u_1, \ldots, u_n$ les *entrées* de la fonctionnelle.

Remarques. — (i) Au lieu d'entrées continues, on aurait pu les prendre Lebesgue-intégrables et essentiellement bornées, avec la topologie de la convergence uniforme à un ensemble de mesure nulle près. Soulignons,

---

([4]) En analyse fonctionnelle, le terme *analytique* a déjà été utilisé avec des sens variés (*cf.* VOLTERRA et PÉRÈS [52], p. 68-69, PELLEGRINO, in LÉVY [37], 4ᵉ partie, HILLE et PHILIPS [31], chap. III, § 3).

cependant, que, pour les fonctionnelles analytiques, les espaces fonctionnels habituels ne semblent guère convenir. C'est la représentation des entrées sous forme de *séries de* CHEN (*cf.* chap. IV) qui devrait fournir le bon choix.

(ii) Avec des fonctionnelles à valeurs dans un K-espace vectoriel de dimension finie, il aurait fallu prendre un vecteur de séries génératrices.

(iii) Il est aisé de définir notre développement fonctionnel, non plus à partir de zéro pour le temps et les entrées, mais à partir de $t^0, u_1^0, \ldots, u_n^0$. Il suffit, pour définir l'intégrale itérée $\int_{t_0}^{t} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}$, de poser :

$$\xi_0(t)=t-t^0, \qquad \xi_i(t)=\int_{t_0}^{t}(u_i(\tau)-u_i^0(\tau))\,d\tau.$$

(iv) La causalité est, dans le formalisme des fonctionnelles analytiques, obtenue en traitant le temps par une autre indéterminée non commutative x_0 (comparer avec SEGAL [47]).

(*c*) SÉRIES GÉNÉRATRICES RATIONNELLES

Une fonctionnelle causale, analytique est dite *rationnelle*, ou *polynômiale*, ssi sa série génératrice l'est.

PROPOSITION II.2. — *Une série génératrice rationnelle est absolument convergente pour tout choix du temps (fini) et des entrées continues par morceaux.*

Preuve. — Soit $g \in K\langle\langle X\rangle\rangle$. Le théorème I.1 implique l'existence d'une constante réelle positive M, telle que, pour tout $x_{j_\nu}\ldots x_{j_0} \in X^*$, on ait $|(g, x_{j_\nu}\ldots x_{j_0})| < M^{\nu+2}$. Or :

$$\left|\int_{0}^{t} d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}\right| \leqslant \frac{A_t^{\nu+1}\, t^{\nu+1}}{(\nu+1)\,!},$$

où

$$A_t=\sup(1, \max_{0\leqslant\tau\leqslant t,\, 1\leqslant i\leqslant n} |u_i(\tau)|).$$

D'où la convergence absolue de (II.2) pour tout $t \not\leqslant \infty$, et tout $u_i : [0, t] \to K$ continue par morceaux. ■

Considérons le système différentiel :

$$\text{(II.3)} \qquad \begin{cases} \dot q(t)(=dq/dt)=(A_0+\sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i)\,q(t), \\ y(t)=\lambda\, q(t). \end{cases}$$

Le vecteur d'état $q(t)$ appartient à un K-espace vectoriel Q de dimension finie ($q(0)$ est donné). Les applications $A_0, A_1, \ldots, A_n : Q \to Q$, $\lambda : Q \to K$ sont K-linéaires. Les entrées $u_1, \ldots, u_n : [0, T] \to K$ sont continues par morceaux. Pour tout $t \in [0, T]$, la formule de Peano-Baker permet d'écrire :

$$\text{(II.4)} \quad y(t) = \lambda \left[1 + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} A_{j_\nu} \ldots A_{j_0} \int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}\right] q(0),$$

où 1 est l'application identité. (II.3) détermine une fonctionnelle causale qui, en vertu de (II.4), est analytique de série génératrice :

$$\lambda \left[1 + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} A_{j_\nu} \ldots A_{j_0} x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}\right] q(0).$$

Le corollaire du théorème I.1 en prouve la rationalité et conduit à énoncer :

Proposition II.3. — *Une fonctionnelle causale analytique est rationnelle si, et seulement si, elle peut se mettre sous la forme* (II.3).

Remarques. — (i) (II.3) est classique en automatique, où il est connu sous le nom de système *régulier* ou *bilinéaire*.

(ii) La formule de Peano-Baker donne une première justification heuristique de notre approche par indéterminées non commutatives.

(*d*) Multiplication des fonctionnelles

Considérons le produit :

$$\left(\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^t d\xi_{k_\mu} \ldots d\xi_{k_0}\right)$$

de deux intégrales itérées. La formule d'intégration par parties permet de le réécrire ainsi :

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau)\left[\left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^\tau d\xi_{k_\mu} \ldots d\xi_{k_0}\right)\right] + \int_0^t d\xi_{k_\mu}(\tau)\left[\left(\int_0^\tau d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^\tau d\xi_{k_{\mu-1}} \ldots d\xi_{k_0}\right)\right].$$

La définition même du mélange par la formule (I.2) conduit à énoncer (*cf.* Ree [41]) :

PROPOSITION II.4. — *Le produit de deux fonctionnelles causales analytiques est une fonctionnelle de même nature, de série génératrice le mélange des deux séries génératrices.*

Remarque. — Le lecteur vérifiera que le domaine de convergence du mélange de deux séries est non vide s'il en est de même des séries originales.

En vertu de la proposition I.3, il vient :

COROLLAIRE. — *Le produit de deux fonctionnelles causales analytiques rationnelles (resp. polynômiales) est une fonctionnelle de même nature.*

2. Approximation des fonctionnelles causales

Soient $\mathscr{I}$ un compact de $[0, \infty[$, $\mathscr{C}$ un compact de $C^0(\mathscr{I})^n$ (5). Une fonctionnelle causale $\mathscr{I} \times \mathscr{C} \to K$ est dite continue ssi c'est une application continue au sens usuel. Il est clair que toute fonctionnelle analytique, de domaine de convergence contenant $\mathscr{I} \times \mathscr{C}$, est continue.

THÉORÈME II.5 (6). — *Soit une fonctionnelle causale continue $\mathscr{I} \times \mathscr{C} \to K$, où $\mathscr{I}$ est un compact de $[0, \infty[$, $\mathscr{C}$ un compact de $C^0(\mathscr{I})^n$. Dans la topologie de la convergence uniforme, elle peut être arbitrairement approchée par une fonctionnelle causale analytique, que l'on peut choisir rationnelle ou polynômiale.*

Preuve. — Pour appliquer le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass à l'algèbre des fonctionnelles polynômiales, il suffit, en vertu du dernier corollaire, de vérifier la propriété de séparabilité suivante : Étant donné deux $(n+1)$-uples distincts $(t, u_1, \ldots, u_n)$, $(t', u'_1, \ldots, u'_n)$ de $\mathscr{I} \times \mathscr{C}$, il existe une fonctionnelle polynômiale p telle que $p(t, u_1, \ldots, u_n) \neq p(t', u'_1, \ldots, u'_n)$:

— si $t \neq t'$, il suffit de prendre la fonctionnelle de monôme générateur x_0;

— si $t = t'$, supposons $u_1 \neq u'_1$. La fonctionnelle causale de monôme générateur $x_0^k x_1$, appliquée à $v = u_1 - u'_1$, prend la valeur (*cf.* chap. II, § 1 *a*) $\int_0^t ((t-\tau)^k/k\,!)v(\tau)\,d\tau$. Si l'on avait zéro pour tout k, v serait nulle. D'où contradiction. ■

(5) $C^0(\mathscr{I})$ désigne l'espace des fonctions continues $\mathscr{I} \to K$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

(6) Résultat dû à l'auteur ([19], [20]). SUSSMANN [48] a, indépendamment, obtenu dans une autre topologie où les entrées doivent intervenir de manière affine, un énoncé voisin, donné dans le cadre des systèmes réguliers. Mentionnons aussi un résultat plus faible, dû à KRENER [32].

Remarques. — (i) Pour des topologies plus générales, renvoyons au point (i) des remarques du paragraphe 1 *b* de ce chapitre.

(ii) Avec la convergence précédente, il n'est guère possible de généraliser le théorème à un intervalle de temps infini (*cf.* Brockett [3]).

(iii) Bien des fonctionnelles élémentaires ne sont cependant pas analytiques, ne serait-ce que l'identité $u_1(t) \to u_1(t)$. Pour le prouver, raisonnons par l'absurde. Soit $\mathfrak{i}$ la série génératrice de l'identité. Nécessairement, $x_0 \mathfrak{i} = x_1$. Donc, $\mathfrak{i}$ n'appartient pas à $K\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$ (7).

3. Séries de Volterra

(*a*) Historique et définition

Pour généraliser le développement de Taylor ordinaire, Volterra [51] a proposé, pour une fonctionnelle de $u_1 : [0, 1] \to K$, le développement suivant :

$$\text{(II.5)} \quad k_0 + \int_0^1 k_1(\sigma_1) u_1(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^1 \int_0^1 k_2(\sigma_2, \sigma_1) u_1(\sigma_2) u_1(\sigma_1) d\sigma_2 d\sigma_1 + \ldots$$

$k_0 \in K$, $k_1 : [0, 1] \to K$, $k_2 : [0, 1]^2 \to K$, ... sont les noyaux, qui sont choisis, ainsi que u_1, de manière à assurer l'existance des intégrales et la convergence de (II.5). En 1909, Fréchet (*cf.* Volterra et Pérès [52], p. 61, Lévy [37], p. 79) a montré que, relativement à diverses topologies usuelles, toute fonctionnelle continue de $u_1 : [0, 1] \to R$ peut, sur un compact donné, être arbitrairement approchée par une fonctionnelle régulière, c'est-à-dire de forme (II.5), ayant au plus un nombre fini de noyaux non nuls.

Les bornes d'intégration dans (II.5) étant fixes, il n'y a pas d'évolution temporelle. Tant en automatique et électronique (*cf.* Barrett [1] et Schetzen [43]), qu'en mécanique des milieux continus (*cf.* Findley, Lai et Onaran [13]), l'expression (II.5) a été modifiée pour devenir dynamique :

$$\text{(II.6)} \quad y(t) = h_0(t) + \int_0^t h_1(t, \tau_1) u_1(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t h_2(t, \tau_2, \tau_1) u_1(\tau_2) u_1(\tau_1) d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

(7) Démonstration due à Jacques Sakarovitch (communication personnelle).

(II.6) est appelé *série de* Volterra ([8]). Le théorème de FRÉCHET peut être généralisé de manière à obtenir un énoncé analogue à celui du théorème II.5.

En (II.5) et (II.6), les noyaux sont uniques (à un ensemble de mesure nulle près) si l'on impose l'une des deux conditions classiques :

– symétrie : pour tout s, les noyaux $k_s(\tau_s, \ldots, \tau_1)$, $h_s(t, \tau_s, \ldots, \tau_1)$ sont symétriques s'ils sont de fonctions symétriques de $\tau_s, \ldots, \tau_1$;

– triangulation : les noyaux $k_s(\tau_s, \ldots, \tau_1)$ et $h_s(t, \tau_s, \ldots, \tau_1)$ sont triangulaires ssi, en (II.5) et (II.6), les termes d'ordre s peuvent être écrits sous forme :

$$\int_0^1 \int_0^{\tau_s} \ldots \int_0^{\tau_2} k_s(\tau_s, \ldots, \tau_1) u_1(\tau_s) \ldots u_1(\tau_1) \, d\tau_s \ldots d\tau_1 \qquad (1 \geqslant \tau_s \geqslant \ldots \geqslant \tau_2 \geqslant \tau_1 \geqslant 0),$$

$$\int_0^t \int_0^{\tau_s} \ldots \int_0^{\tau_2} h_s(t, \tau_s, \ldots, \tau_1) u_1(\tau_s) \ldots u_1(\tau_1) \, d\tau_s \ldots d\tau_1 \qquad (t \geqslant \tau_s \geqslant \ldots \geqslant \tau_2 \geqslant \tau_1 \geqslant 0).$$

Remarque. – La généralisation de (II.5) et (II.6) aux entrées vectorielles est immédiate.

(*b*) LIEN AVEC LES SÉRIES NON COMMUTATIVES

THÉORÈME II.6. – *La série de Volterra, sous forme triangulaire :*

$$h_0(t) + \sum_{s \geqslant 1} \int_0^t \int_0^{\tau_s} \ldots \int_0^{\tau_2} h_s(t, \tau_s, \ldots, \tau_1) u_1(\tau_s) \ldots u_1(\tau_1) \, d\tau_s \ldots d\tau_1 \qquad (t \geqslant \tau_s \geqslant \ldots \geqslant \tau_2 \geqslant \tau_1 \geqslant 0)$$

définit une fonctionnelle causale analytique si, et seulement si, pour tout $s \geqslant 0$, $h_s(t, \tau_s, \ldots, \tau_1)$ *est, au voisinage de l'origine, une fonction analytique des variables* $t, \tau_s, \ldots, \tau_1$, *de sorte que les rayons de convergence de* $h_0, h_1, h_2, \ldots$ *soient bornés inférieurement par une quantité strictement positive.*

([8]) La littérature sur les séries de Volterra est immense, bien plus développée en automatique et électronique qu'en mécanique. On a cherché aussi à utiliser dans d'autres domaines, comme la biologie, ces séries pour des modélisations non linéaires.

Preuve. — Développons $h_s(t, \tau_s, \ldots, \tau_1)$ en fonction des variables $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \ldots, t-\tau_s$:

$$h_s(t, \tau_s, \ldots, \tau_1)=\sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_s \geq 0} h_{s, \alpha_0, \ldots, \alpha_s} \times \frac{(t-\tau_s)^{\alpha_s} \ldots (\tau_2-\tau_1)^{\alpha_1} \tau_1^{\alpha_0}}{\alpha_s ! \ldots \alpha_1 ! \alpha_0 !}.$$

La formule (II.1) permet de se ramener à la série non commutative :

$$\sum_{s, \alpha_0, \ldots, \alpha_s \geq 0} h_{s, \alpha_0, \ldots, \alpha_s} x_0^{\alpha_s} x_1 \ldots x_0^{\alpha_1} x_1 x_0^{\alpha_0}. \quad \blacksquare$$

Ainsi, séries de Volterra et fonctionnelles causales analytiques constituent des objets mathématiques voisins.

4. Quelques fonctionnelles causales analytiques particulières

(*a*) FONCTIONNELLES STATIONNAIRES

Une fonctionnelle causale $\mathscr{F}(t, u_1, \ldots, u_n)$ est dite *stationnaire* si elle est invariante par translation temporelle. En d'autres termes, si, pour tout $t_0>0$, on pose :

$$u_i^{(t_0)}(\tau)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \tau < t_0, \\ u_i(\tau-t_0) & \text{si } \tau \geq t_0 \quad (i=1, \ldots, n) \end{cases}$$

il vient $\mathscr{F}(t_0+t, u_i^{(t_0)})=\mathscr{F}(t, u_i)$.

La formule (II.1) conduit à énoncer :

PROPOSITION II.7. — *Une fonctionnelle causale analytique est stationnaire si, et seulement si, tout mot non vide du support* [9] *est de la forme* wx_i ($w \in X^*$, $i=1, \ldots, n$).

(*b*) FONCTIONNELLES LINÉAIRES

Une fonctionnelle causale $\mathscr{F}(t, u_1, \ldots, u_n)$ est dite linéaire ssi, pour deux n-uples d'entrées $(u_1^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)})$ $(k=1, 2)$, il vient, pour tout t :

$$\mathscr{F}(t, \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} u_i^{(1)}+\alpha_i^{(2)} u_i^{(2)})=\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} \mathscr{F}(t, u_i^{(1)})+\alpha_i^{(2)} \mathscr{F}(t, u_i^{(2)}) \quad (\alpha_i \in K).$$

De même qu'au paragraphe précédent, la formule (II.1) conduit à écrire :

[9] Le *support* de $s \in K\langle\langle X \rangle\rangle$, noté supp s, est l'ensemble des mots de coefficient non nul : $w \in \operatorname{supp} s \Leftrightarrow (s, w) \neq 0$.

PROPOSITION II.8. — *Une fonctionnelle causale analytique est linéaire si, et seulement si, tout mot du support de la série génératrice est de la forme* $x_0^l x_i x_0^l (k, l \in \mathbb{N};\ i=1, \ldots, n)$.

Une série génératrice s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu, \nu \geq 0} a_{i, \nu, \mu} x_0^{\nu} x_i x_0^{\mu}.$$

Remarque. — Si $\mathcal{F}(t, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)} u_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} u_i^{(2)})$ est une forme quadratique en les variables $\alpha_i^{(k)}$, $\mathcal{F}$ est dite *quadratique*. Dans ce cas tout mot du support de la série génératrice est de la forme $x_0^l x_{i'} x_0^k x_i x_0^h$ $(h, k, l \in \mathbb{N};\ i, i'=1, \ldots, n)$. Il est immédiat de passer aux ordres supérieurs.

(*c*) FONCTIONS DE TRANSFERT ET SÉRIES GÉNÉRATRICES

D'après les propositions II.7 et II.8, la série génératrice d'une fonctionnelle causale analytique, linéaire et stationnaire, est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu \geq 0} a_{i, \nu} x_0^{\nu} x_i.$$

Avec la convolution, la fonctionnelle s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^t h_i(t-\tau) u_i(\tau) d\tau.$$

Un calcul immédiat montre que la transformée de Laplace $\int_0^{\infty} e^{-p\tau} h_i(\tau) d\tau$ de h_i est $\sum_{\nu \geq 0} a_{i, \nu}/p^{\nu+1}$.

A un changement élémentaire de variables près, la série génératrice redonne, dans le cas linéaire et stationnaire, les fonctions de transfert. Il y a là une première indication, qui sera renforcée au chapitre III, § 2 *d*, et dans des travaux ultérieurs, du fait que les indéterminées non commutatives fournissent une généralisation non linéaire des transformations de Laplace et de Fourier.

(*d*) SÉRIES GÉNÉRATRICES ÉCHANGEABLES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

Une série $s \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ est dite *échangeable* (*cf.* [18]) ssi deux mots ne différant que par l'ordre des lettres, ont même coefficient. On peut aussi écrire :

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad |w|_{x_j} = |w'|_{x_j} \quad \Rightarrow \quad (s, w) = (s, w').$$

Proposition II.9. — *Une fonctionnelle causale analytique est fonction analytique de t, $\xi_i(t)=\int_0^t u_i(\tau)\,d\tau\,(i=1, \ldots, n)$ si, et seulement si, sa série génératrice est échangeable.*

Preuve. — (i) La condition est suffisante. En effet, si $\mathfrak{S}_{\nu+1}$ désigne le groupe symétrique sur $\{0, 1, \ldots, \nu\}$, il vient :

$$\sum\nolimits_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\nu+1}} \int_0^t d\xi_{j_{\sigma\nu}} \ldots d\xi_{j_{\sigma 0}} = \xi_{j_\nu}(t) \ldots \xi_{j_0}(t).$$

(ii) Nécessité. Un calcul élémentaire montre que les coefficients $(g, x_{j'}\,x_j)$ et $(g, x_j x_{j'})(j\neq j')$ sont, respectivement, égaux aux dérivées $(\partial/\partial\xi_j)$, $(\partial/\xi_{j'})$ et $(\partial/\partial\xi_{j'})(\partial/\partial\xi_j)$, prises en $\xi_j=\xi_{j'}=0$. Ces dérivées étant égales, il en va de même des coefficients. La généralisation à une longueur quelconque est facile. ■

Remarque. — Une série échangeable est un objet « faussement » non commutatif puisque l'ordre des indéterminées n'importe pas. Retrouver alors les fonctions analytiques ordinaires, confirme le fait que les fonctionnelles analytiques en sont une généralisation.

Chapitre III

Équations différentielles non linéaires en régime forcé

1. Séries de Lie non commutatives

(*a*) Définition et propriété fondamentale

Soient $n+1$ champs de vecteurs formels, c'est-à-dire des opérateurs différentiels linéaires, du premier ordre :

$$A_j=\sum\nolimits_{k=1}^N \theta_j^k(q^1, \ldots, q^N)\frac{\partial}{\partial q^k} \qquad (j=0, 1, \ldots, n).$$

Les θ_j^k sont des séries formelles en les indéterminées commutatives $q^1, \ldots, q^N$, donc des éléments de la K-algèbre $K[[q^1, \ldots, q^N]]$ des séries formelles commutatives. Pour tout $h\in K[[q^1, \ldots, q^N]]$, on généralise la théorie de Gröbner [29] en construisant la *série de Lie* ([10]) (non commutative)

([10]) Le terme « série de Lie » est emprunté à Gröbner [29]. Il peut prêter à confusion, car une série de Lie n'est pas un élément de Lie comme l'est, par exemple, d'après la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, Log $e^{x_1}e^{x_2}$.

$\Lambda h \in K[[q^1, \ldots, q^N]] \langle\langle X \rangle\rangle$ en les indéterminées associatives $x \in X$ et à coefficients dans $K[[q^1, \ldots, q^N]]$:

$$\text{(III.1)} \qquad \Lambda h = h + \textstyle\sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} (A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} h) x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}.$$

Il faut faire attention à l'ordre inverse des suites $x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}$ et $A_{j_0} \ldots A_{j_\nu}$.

PROPOSITION III.1 ([11]). — *L'application :*

$$\Lambda : K[[q^1, \ldots, q^N]] \to K[[q^1, \ldots, q^N]] \langle\langle X \rangle\rangle$$

est un morphisme de K-algèbres commutatives à condition de prendre le mélange comme produit de $K[[q^1, \ldots, q^N]] \langle\langle X \rangle\rangle$.

Preuve. — Pour $h_1, h_2 \in K[[q^1, \ldots, q^N]]$, il s'agit de prouver :

$$\Lambda(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 \Lambda h_1 + \alpha_2 \Lambda h_2 \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in K),$$
$$\Lambda(h_1 h_2) = \Lambda h_1 \sqcup\!\sqcup \Lambda h_2.$$

Seule la dernière identité mérite démonstration, semblable, d'ailleurs, à celle de GRÖBNER [29], p. 16-17, et de la proposition II.4. Il vient :

$$A_{j_\nu} \ldots A_{j_0}(h_1 h_2) = A_{j_0} \ldots A_{j_{\nu-1}}(h_1 A_{j_\nu} h_2 + h_2 A_{j_\nu} h_1).$$

Cette formule traduit la récurrence (I.2) définissant le mélange. ■

(*b*) MAJORATION DES COEFFICIENTS

Les séries θ_j^k, $h \in K[[q^1, \ldots, q^N]]$ ne sont plus formelles, mais absolument convergentes pour $|q^k| \leq \rho$ $(k = 1, \ldots, N)$ où elles sont majorées : $|\theta_j^k| \leq M$, $|h| \leq M'$.

D'après une formule classique de Cauchy, les coefficients de $(q^1)^{i_1} \ldots (q^N)^{i_N}$ dans ces séries sont majorés, en module, par $M/\rho^{i_1 + \cdots + i_N}$ ou $M'/\rho^{i_1 + \cdots + i_N}$. En utilisant, comme GRÖBNER [29], chap. I, les fonctions majorantes $M/(1 - y/\rho)^N$ et $M'/(1 - y/\rho)^N$, on montre que $|A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} h|$ est, pour $|q^k| < y$ où $0 \leq y < \rho$, majoré en module par :

$$\frac{M'(\nu+1)!}{(1 - y/\rho)^N} \binom{-N}{N+1 \atop \nu+1} \left[\frac{-(N+1)M}{\rho(1 - y/\rho)^{N+1}} \right]^{\nu+1}.$$

([11]) Ce résultat et sa démonstration peuvent passer pour une extension non commutative du *calcul ombral* popularisé par G.-C. ROTA et son école (*cf.* [42]).

2. Équations différentielles

(*a*) FORMULE FONDAMENTALE

Soit le système différentiel :

$$\text{(III.2)}\qquad \begin{cases} q^{\cdot}(t)(=dq/dt)=A_0(q)+\sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i(q), \\ y(t)=h(q). \end{cases}$$

L'état q appartient à une variété réelle analytique Q de dimension finie ($q(0)$ est donné). Les champs de vecteurs $A_0, A_1, \ldots, A_n$ et la fonction $h: Q\to\mathbb{R}$ sont analytiques, définis dans un voisinage de $q(0)$. Les entrées $u_1, \ldots, u_n: [0, T]\to\mathbb{R}$ sont continues par morceaux.

La formule qui va suivre généralise les travaux de GRÖBNER [29], chap. II, sur les équations différentielles en régime libre (*voir* aussi CHEN [7]).

THÉORÈME III.2. — *La sortie $y(t)$ du système différentiel* (III.2) *est une fonctionnelle causale analytique des entrées $u_1, \ldots, u_n$, de série génératrice*

$$\text{(III.3)}\qquad h|_0+\sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^{n} A_{j_0}\ldots A_{j_\nu}h|_0\, x_{j_\nu}\ldots x_{j_0}.$$

(*la barre $|_0$ indique l'évaluation en $q(0)$*).

Preuve. — Posons :

$$\text{(III.4)}\qquad q^k(t)=q^k(0)+\sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^{n} A_{j_0}\ldots A_{j_\nu}q^k|_0\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}\qquad (k=1, \ldots, N),$$

$$y(t)=h|_0+\sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^{n} A_{j_0}\ldots A_{j_\nu}h|_0\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}.$$

La majoration précédente permet de choisir t et u_i de façon à assurer la convergence absolue de ces séries. En vertu des propositions II.4 et III.1, on a $y(t)=h(q^1, \ldots, q^N)$.

Il reste à montrer que $q^1, \ldots, q^N$ vérifient les équations différentielles désirées. Pour ce, écrivons les champs de vecteurs en coordonnées locales :

$$A_j(q^1, \ldots, q^N)=\sum_{k=0}^{N}\theta_j^k(q^1, \ldots, q^N)\frac{\partial}{\partial q^k}\qquad (j=0, 1, \ldots, n),$$

et différentions les deux membres de (III.4) :

$$dq^k = \left[\theta_0^k|_0 + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^n \right.$$

$$\left. \cdot A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} \theta_0^k|_0 \int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0} \right] dt$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[\theta_i^k|_0 + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^n \right.$$

$$\left. \cdot A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} \theta_i^k|_0 \int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0} \right] u_i \, dt.$$

D'après les propositions II.4 et III.1, le premier crochet [ ] vaut $\theta_0^k(q^1, \ldots, q^N)$ et le second $\theta_i^k(q^1, \ldots, q^N)$, ce qui achève la démonstration. ■

Comme GRÖBNER [29], chap. I, on montre, en application du paragraphe précédent, qu'il y a convergence absolue de la série génératrice (III.3) pour :

$$t < T = \frac{\rho}{(N+1)M},$$

et

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} |u_i(\tau)| \leq 1.$$

Remarque. — Une limitation provient du premier degré des entrées en (III.2). Si, par exemple, elles figurent à des puissances positives, on pourrait les supposer dérivables et prendre ces dérivées comme nouvelles entrées. Ainsi l'équation $\dot{y}(t) = (u_1(t))^2 y(t)$ est remplacée par le système :

$$\begin{cases} \dot{q}^0(t) = u_1(t), \\ \dot{q}^1(t) = (q^0(t))^2 q^1(t), \\ y(t) = q^1(t). \end{cases}$$

(*b*) EXEMPLES

(i) *Champs de vecteurs commutatifs*

Supposons en (III.2), les champs de vecteurs $A_0, A_1, \ldots, A_n$ commutatifs, c'est-à-dire les crochets de Lie $[A_j, A_{j'}]$ nuls. Alors, la série génératrice est échangeable (chap. II, § 4 *c*) et la sortie y s'écrit :

$$y(t) = \sum_{s_0, s_1, \ldots, s_n \geq 0} A_0^{s_0} A_1^{s_1} \ldots A_n^{s_n} h|_0 \frac{\xi_0(t)^{s_0} \xi_1(t)^{s_1} \ldots \xi_n(t)^{s_n}}{s_0!\, s_1! \ldots s_n!}.$$

Point n'est besoin ici d'indéterminées non commutatives et d'intégrales itérées (*cf.* GRÖBNER [29], chap. I, § 3, chap. II, § 6).

(*ii*) *Systèmes réguliers* (*ou bilinéaires*)

Au système régulier (II.3), sont associés les champs de vecteurs :

$$B_j(q)=(q^1, \ldots, q^N)\,{}^tA_j \begin{pmatrix} \partial/\partial q^1 \\ \vdots \\ \partial/\partial q^N \end{pmatrix} \quad (j=0, 1, \ldots, n)$$

(${}^tA$ est la matrice transposée de A), et la fonction :

$$b(q)=\lambda\, q=\textstyle\sum_{k=1}^{N} \lambda_k q^k.$$

Dans la série de Lie :

$$b\,|_0+\textstyle\sum_{\nu\geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu=0}^{n} B_{j_0}\ldots B_{j_\nu} b\,|_0\, x_{j_\nu}\ldots x_{j_0},$$

le coefficient de $x_{j_\nu}\ldots x_{j_0}$ est, comme on le vérifie, $\lambda A_{j_0}\ldots A_{j_\nu} q(0)$. Il y a concordance avec la proposition II.3 et le théorème de KLEENE-SCHÜTZENBERGER, dont le théorème III.2 peut paraître comme une généralisation infinitésimale.

(iii) *Équation de Duffing*

En mécanique non linéaire, on rencontre l'équation différentielle :

$$\ddot{y}+a\,\dot{y}+by+cy^3=u_1(t),$$

dite de Duffing. On lui associe le système différentiel du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{q}^1(t)=q^2, \\ \dot{q}^2(t)=-aq^2-bq^1-c(q^1)^3+u_1(t), \\ y(t)=q^1, \end{cases}$$

les champs de vecteurs :

$$A_0(q^1, q^2)=q^2\frac{\partial}{\partial q^1}-(aq^2+bq^1+c(q^1)^3)\frac{\partial}{\partial q^2},$$

$$A_1(q^1, q^2)=\frac{\partial}{\partial q^2},$$

et la série génératrice :

$$y(0)+\textstyle\sum_{\nu\geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu=0, 1} A_{j_0}\ldots A_{j_\nu} q^1\,|_0\, x_{j_\nu}\ldots x_{j_0}.$$

(*c*) VARIANTE NON AUTONOME

Considérons le système différentiel :

$$\text{(III.5)} \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = B_0(t, q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) B_i(t, q), \\ y(t) = b(t, q) \end{cases}$$

identique à (III.2), à ceci près que B_0, B_1, ..., B_n, b peuvent dépendre (analytiquement) du temps. En ajoutant une dimension q^0, on voit que (III.5) est *indiscernable* ([12]) de :

$$\begin{cases} \dot{q}^0(t) = 1, \\ \dot{q}(t) = B_0(q^0, q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) B_i(q^0, q), \\ y(t) = b(q^0, q), \end{cases}$$

où $q^0(t) = t$. D'où les champs de vecteurs :

$$A_0(t, q) = \frac{\partial}{\partial t} + B_0(t, q),$$

$$A_i(t, q) = B_i(t, q).$$

et la :

PROPOSITION III.3. — *La sortie $y(t)$ du système différentiel non autonome (III.5) est une fonctionnelle causale analytique des entrées u_1, ..., u_n, de série génératrice :*

$$b|_0 + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} b|_0 \, x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}.$$

(*d*) CAS DES SÉRIES DE VOLTERRA

Bien des auteurs, surtout en automatique (*cf.* FLAKE [14], BROCKETT [2], GILBERT [28], DWYER [10], LESIAK et KRENER [36], etc.), mais aussi en physique (UZES [50], LANGOUCHE, RŒKAERTS et TIRAPEGUI [34], etc.) ([13]), ont cherché à calculer la série de Volterra relative à la sortie de systèmes de la forme (III.2). Les théorèmes II.6 et III.2 permettent de donner une forme explicite aux noyaux de Volterra triangulaires.

([12]) Deux systèmes sont dits *indiscernables* ss'ils définissent des fonctionnelles égales.

([13]) Dans les deux cas, nous limitons la bibliographie à quelques articles récents.

Pour simplifier l'écriture, on se limite dans (III.2) à une entrée scalaire ($n=1$).

PROPOSITION III.4. — *La sortie* $y(t)$ *du système différentiel* (III.2) *peut se mettre sous forme de série de Volterra :*

$$y(t)=w_0(t)+\int_0^t w_1(t, \tau_1)\, u_1(\tau_1)\,d\tau_1+\dots$$
$$+\int_0^t\int_0^{\tau_s}\dots\int_0^{\tau_2} w_s(t, \tau_s, \dots, \tau_1)\, u_1(\tau_s)\dots u_1(\tau_1)\, d\tau_1\dots d\tau_s+\dots$$

à noyaux triangulaires ($t\geqslant\tau_s\geqslant\dots\geqslant\tau_1\geqslant 0$), *qui sont des fonctions analytiques données, dans un voisinage de l'origine, par :*

$$w_0(t)=\sum_{i\geqslant 0} A_0^i\, h\,|_0\, \frac{t^i}{i\,!}=e^{tA_0}\, h\,|_0,$$

$$w_1(t, \tau_1)=\sum_{i_1, i_2\geqslant 0} A_0^{i_1}\, A_1\, A_0^{i_2}\, h\,|_0\, \frac{(t-\tau_1)^{i_2}\,\tau_1^{i_1}}{i_2\,!\, i_1\,!}=e^{\tau_1 A_0}\, A_1\, e^{(t-\tau_1)A_0}\, h\,|_0,$$

. . . .

$$w_s(t, \tau_s, \dots, \tau_1)$$
$$=\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{s+1}\geqslant 0} A_0^{i_1}\, A_1\, A_0^{i_2}\dots A_1\, A_0^{i_{s+1}}\, h\,|_0\, \frac{(t-\tau_s)^{i_{s+1}}\dots(\tau_2-\tau_1)^{i_2}\,\tau_1^{i_1}}{i_{s+1}\,!\dots i_2\,!\, i_1\,!}$$
$$=e^{\tau_1 A_0}\, A_1\, e^{(\tau_2-\tau_1)A_0}\, A_1\dots A_1\, e^{(t-\tau_s)A_0}\, h\,|_0.$$

Remarque. — Ces formules généralisent, en un certain sens, celles données par GRÖBNER [29], chap. IV, § 14, lorsqu'il utilise les séries de Lie à des développements perturbatifs.

(e) CALCUL ALGORITHMIQUE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

La détermination pratique des développements fonctionnels et, en particulier, de la série génératrice, n'est pas une affaire simple. On propose ici un calcul récurrent des coefficients par une méthode de point fixe.

Passons aux coordonnées locales dans (III.2) :

$$A_j(q^1, \dots, q^N)=\sum_{k=1}^N \theta_j^k(q^1, \dots, q^N)\frac{\partial}{\partial q^k}.$$

Il vient :

$$\text{(III.6)}\quad q^k(t)=q^k(0)+\int_0^t \theta_0^k(q^1(\tau),\ \dots,\ q^N(\tau))\,d\tau$$
$$+\sum_{i=1}^n \int_0^t u_i(\tau)\,\theta_i^k(q^1(\tau),\ \dots,\ q^N(\tau))\,d\tau.$$

Par hypothèse, θ_j^k et h sont développables en séries de Taylor dans un voisinage de $(q^1(0),\ \dots,\ q^N(0))$. A une telle fonction :

$$a(q^1,\ \dots,\ q^N)=\sum_{s_1,\dots,s_N\geq 0} a_{s_1\dots s_N}(q^1-q^1(0))^{s_1}\dots(q^N-q^N(0))^{s_N},$$

associons :

$$\overset{\text{ш}}{a}(\mathrm{g}^1,\ \dots,\ \mathrm{g}^N)=\sum_{s_1,\dots,s_N\geq 0} a_{s_1\dots s_N}(\mathrm{g}^1-q^1(0))^{\text{ш} s_1}\dots(\mathrm{g}^N-q^N(0))^{\text{ш} s_N},$$

où $\mathrm{g}^1,\ \dots,\ \mathrm{g}^N\in K\langle\langle X\rangle\rangle$ sont des séries de termes constants $q^1(0),\ \dots,\ q^N(0)$. Le signe $\text{ш}\, s_k$ désigne le mélange à la puissance s_k. La signification même des lettres $x_0, x_1,\ \dots,\ x_n$ dans l'intégrale itérée conduit à réécrire (III.6) sous la forme :

$$\begin{cases} \mathrm{g}^k=q^k(0)+x_0\,\overset{\text{ш}}{\theta}{}_0^k(\mathrm{g}^1,\ \dots,\ \mathrm{g}^N)+\sum_{i=1}^n x_i\,\overset{\text{ш}}{\theta}{}_i^k(\mathrm{g}^1,\ \dots,\ \mathrm{g}^N), \\ \mathrm{g}=\overset{\text{ш}}{h}(\mathrm{g}^1,\ \dots,\ \mathrm{g}^N). \end{cases}$$

D'après le chapitre I, § 3*b*, il existe un et un seul $(N+1)$-uple solution $\mathrm{g}^1,\ \dots,\ \mathrm{g}^N,\ \mathrm{g}$ qui s'obtient par itérations. Celle-ci est la traduction, en un langage différent, de la méthode d'itérations bien connue de Picard pour les équations intégrales. On retrouve ainsi la première partie du théorème III.2, à savoir que la sortie est une fonctionnelle causale analytique.

Exemples. — (i) Au système régulier (II.3) correspond l'équation :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{g}^1 \\ \vdots \\ \mathrm{g}^N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q^1(0) \\ \vdots \\ q^N(0) \end{pmatrix}+(x_0A_0+x_1A_1+\dots+x_nA_n)\begin{pmatrix} \mathrm{g}^1 \\ \vdots \\ \mathrm{g}^N \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{g}=\lambda\begin{pmatrix} \mathrm{g}^1 \\ \vdots \\ \mathrm{g}^N \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{g}^1 \\ \vdots \\ \mathfrak{g}^N \end{pmatrix} = (1 - x_0 A_0 - x_1 A_1 - \ldots - x_n A_n)^{-1} \begin{pmatrix} q^1(0) \\ \vdots \\ q^N(0) \end{pmatrix},$$

et :

$$\mathfrak{g} = \lambda (1 - x_0 A_0 - x_1 A_1 - \ldots - x_n A_n)^{-1} \begin{pmatrix} q^1(0) \\ \vdots \\ q^N(0) \end{pmatrix},$$

qui est la série génératrice rationnelle attendue.

(ii) A l'équation de Duffing (*cf.* § II b) :

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy^3 = u_1(t)$$

correspond l'équation intégrale :

$$y(t) + a \int_0^t y(\tau)\, d\tau + b \int_0^t d\tau \int_0^\tau y(\sigma)\, d\sigma + c \int_0^t d\tau \int_0^\tau y^3(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_0^t d\tau \int_0^\tau u_1(\sigma)\, d\sigma + \alpha t + \beta,$$

où α et β sont deux constantes. On lui associe l'équation :

$$\mathfrak{g} + a x_0 \mathfrak{g} + b x_0^2 \mathfrak{g} + c x_0^2 \mathfrak{g}^{\sqcup\!\sqcup 3} = x_0 x_1 + \alpha x_0 + \beta.$$

Remarque. — Il existe d'assez nombreux travaux pour calculer les premiers termes de développements fonctionnels de la sortie y d'un système de type (III.2). Lorsqu'on s'intéresse seulement à la solution stationnaire, on trouve, dans la littérature des ingénieurs, des techniques de transformations de Laplace ou Fourier multidimensionnelles (*cf.* BARRETT [1], LUBBOCK et BANSAL [38], etc.). En physique, on utilise des méthodes du type diagramme de Feynman (*cf.* MORTON et CORRSIN [40], LANGOUCHE, RŒKAERTS et TIRAPEGUI [34], etc.). Dans les deux cas, il est possible de montrer que tout se ramène aux propriétés des séries non commutatives ([14]).

([14]) Diverses publications sur ce sujet sont actuellement en préparation. Pour un cas particulier, voir [33].

(*f*) LIENS AVEC LE CALCUL SYMBOLIQUE DE HEAVISIDE

Soit le système ([15]) :

$$\left\{\begin{aligned} \dot q(t) &= F\,q(t) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i(t)\,g_i, \\ y(t) &= H\,q(t) \end{aligned}\right.$$

où $q(t), g_1, \ldots, g_n$ appartiennent à un K-espace vectoriel de dimension finie $Q\,[q(0)=0]$; les applications $F: Q \to Q$, $H: Q \to K$ sont K-linéaires. Le calcul précédent donne pour série génératrice de la sortie $y(t)$:

$$g = H(1 - F x_0)^{-1} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} g_i x_i\right),$$

alors que la matrice de transfert est :

$$H(p-F)^{-1}\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi les conclusions du chapitre II, § 3 *c*. Il est clair que le calcul symbolique ici exposé, généralise au non linéaire celui classique depuis Heaviside.

Chapitre IV

Séries de Chen et entrées généralisées

1. Généralités

(*a*) RAPPELS SUR LES TRAVAUX DE K.-T. CHEN

Il ne s'agit que de rappeler, brièvement, quelques points ici utilisés des travaux entrepris par CHEN [4]-[6], [8].

Attachons à tout chemin de R^{n+1}, $\xi_j : [0, t] \to \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, où les ξ_j sont continues à variation bornée, la série non commutative de $R\langle\langle X \rangle\rangle$:

$$\text{(IV.1)} \qquad 1 + \textstyle\sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} x_{j_\nu} \ldots x_{j_0} \displaystyle\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0},$$

([15]) Il s'agit, en automatique, de ce qu'on appelle la représentation par espace d'état d'un système linéaire et stationnaire.

où :

$$\int_0^t d\xi_j = \xi_j(t) - \xi_j(0),$$

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_0}.$$

(IV.1) est appelée *série* (*exponentielle*) *de* CHEN du chemin.

PROPRIÉTÉ IV.1. — La série de CHEN caractérise le chemin à une translation près.

PROPRIÉTÉ IV.2. — La série de CHEN de deux chemins $\{\xi_j^{(k)} = [0, t_k] \to R\}$ $(k=1, 2)$ mis bout à bout, c'est-à-dire du chemin $\xi_j = [0, t_1 + t_2] \to R$, où :

$$\xi_j(\tau) = \begin{cases} \xi_j^{(1)}(\tau) & \text{si} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t_1, \\ \xi_j^{(2)}(\tau - t_1) - \xi_j^{(2)}(t_1) + \xi_j^{(1)}(t_1) & \text{si} \quad t_1 \leqslant \tau \leqslant t_1 + t_2 \end{cases}$$

est égal au produit des séries de Chen :

$$1 + \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^n x_{j_\nu} \ldots x_{j_0} \int_0^{t_1 + t_2} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}$$
$$= \Big(1 + \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^n x_{j_\nu} \ldots x_{j_0} \int_0^{t_2} d\xi_{j_\nu}^{(2)} \ldots d\xi_{j_0}^{(2)}\Big)$$
$$\times \Big(1 + \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^n x_{j_\nu} \ldots x_{j_0} \int_0^{t_1} d\xi_{j_\nu}^{(1)} \ldots d\xi_{j_0}^{(1)}\Big).$$

PROPRIÉTÉ IV.3. — Le logarithme d'une série de CHEN est un élément de Lie. Ce résultat, retrouvé par REE [41], est une généralisation de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

Exemple. — La série de CHEN du segment de droite $\xi_j(\tau) = \alpha_j \tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ est $\exp t (\sum_{j=0}^n \alpha_j x_j)$. Celle des chemins $\xi_j^{(k)}(\tau) = \alpha_j^{(k)} \tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t_k;\ k=1, 2)$, mis bout à bout, est :

$$\exp t_2 \Big(\sum_{j=0}^n \alpha_j^{(2)} x_j\Big) \exp t_1 \Big(\sum_{j=0}^n \alpha_j^{(1)} x_j\Big).$$

(*b*) LIENS AVEC LES FONCTIONNELLES CAUSALES ANALYTIQUES

Reprenons les notations des chapitres II et III. Attachons aux entrées continues par morceaux $u_i : [0, t] \to K$ $(i=1, \ldots, n)$, le chemin de K^{n+1} :

$$\xi_0(\tau) = \tau, \qquad \xi_i(\tau) = \int_0^\tau u_i(\sigma)\, d\sigma \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant t).$$

La série de CHEN de ce chemin :

$$1+\sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^{n} x_{j_\nu}\ldots x_{j_0}\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}$$

sera dite *série de* CHEN *des entrées* pendant l'intervalle de temps $[0, t]$.

Soit une fonctionnelle causale analytique de série génératrice $g\in K\langle\langle X\rangle\rangle$. Si t et les u_i appartiennent au domaine de définition, la formule (II.2) montre que la sortie, c'est-à-dire la valeur de la fonctionnelle, est donnée par dualité canonique ([16]) entre série génératrice et série de CHEN.

Aussi, allons-nous considérer les entrées également sous forme de séries non commutatives.

(*c*) ENTRÉES GÉNÉRALISÉES

Considérons les trois types de fonctionnelles causales analytiques suivants :

– Polynômial.

– De série génératrice g, à croissance des coefficients au plus exponentielle : il existe des constantes positives c_1, c_2 telles que, pour tout $w\in X^*$:

$$|g, w|<c_2 c_1^{|w|}.$$

Comme on le vérifie aisément à partir du théorème I.1, les séries rationnelles ont cette propriété.

– Le plus général.

Pour assurer la continuité de la dualité décrite au précédent paragraphe, définissons les topologies suivantes :

– La topologie $\mathscr{T}_P$ sur $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est définie par la famille de semi-normes $\|\ \|_w$ indexées par $w\in X^*$:

$$\|s\|_w=|(s, w)|.$$

– Pour $M=1, 2, \ldots$, soit $E\subset K\langle\langle X\rangle\rangle$ la K-algèbre des séries s telle que la somme :

$$\sum\{(s, w)M^{|w|}\,|\,w\in X^*\}$$

([16]) Soient $s, s'\in K\langle\langle X\rangle\rangle$ deux séries telles que la somme :

$$\sum\{(s, w)(s', w)\,|\,w\in X^*\}$$

soit absolument convergente. La dualité fait correspondre aux deux séries la somme en question.

soit absolument convergente. Les séries de CHEN du précédent paragraphe appartiennent à E. Munissons E de la topologie $\mathscr{T}_E$ définie par l'ensemble des normes $|||\ \ |||_M$ $(M=1, 2, \ldots)$:

$$|||s|||_M=\sum\{|(s, w)|M^{|w|}\,|\,w\in X^*\}.$$

— Relativement à la fonctionnelle analytique $\mathfrak{g}$, considérons l'ensemble $\mathscr{D}_\mathfrak{g}\subset K\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries s telles que la somme :

$$\sum\{(\mathfrak{g}, w)(s, w)\,|\,w\in X^*\}$$

soit absolument convergente. $\mathscr{D}_\mathfrak{g}$ est topologisé par la norme $|\ \ |_\mathfrak{g}$:

$$|s|_\mathfrak{g}=\sum\{|(\mathfrak{g}, w)(s, w)|\,|\,w\in X^*\}.$$

Soient $\overline{C}_P$ et $\overline{C}_E$ les complétés, par rapport aux topologies $\mathscr{T}_P$ et $\mathscr{T}_E$, de l'ensemble C des séries de CHEN du paragraphe précédent. On note $\overline{C}_\mathfrak{g}$ le complété, par rapport à $\mathscr{T}_\mathfrak{g}$, de $C\cap\mathscr{D}_\mathfrak{g}$. Comme en théorie des distributions (*cf.* SUSSMANN [48]), un élément de $\overline{C}_P\setminus C$, $\overline{C}_E\setminus C$, $\overline{C}_\mathfrak{g}\setminus C$ est appelée entrée (ou fonction) *généralisée*.

Remarque. — Une limite peut exister dans une topologie et non dans une autre.

2. Description d'exemples

(*a*) IMPULSION DE DIRAC

Soient les entrées $u_i^{(l)}(\tau)=\alpha_i l$ $(0\leqslant\tau\leqslant 1/l;\ \alpha_i\in K;\ i=1, \ldots, n)$. Il leur correspond la série de CHEN :

$$\exp\left(\frac{x_0}{l}+\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right).$$

Pour l infini, la limite dans les topologies $\mathscr{T}_P$ et $\mathscr{T}_E$ est :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right). \tag{IV.2}$$

Relativement à $\mathscr{T}_\mathfrak{g}$, la limite existe si la somme :

$$\sum_{\nu\geqslant 0}\sum_{i_0,\ldots,i_\nu=1}^n(\mathfrak{g}, x_{i_\nu}\ldots x_{i_0})\frac{\alpha_{i_\nu}\ldots\alpha_{i_0}}{(\nu+1)!}$$

est absolument convergente. Le coefficient de x_0 étant nul, (IV.2) n'appartient pas à C. Il s'agit d'une entrée généralisée, donnant un analogue de la « *fonction* » ou *impulsion de Dirac* à l'origine.

Si (IV.2) appartient à $\overline{C}_g$, la fonctionnelle causale analytique g « passe instantanément », avec cette entrée généralisée, de la valeur (g, 1) à :

$$(g, 1)+\sum_{\nu\geq 0}\sum_{i_0,\ldots,i_\nu=1}^{n}(g, x_{i_\nu}\ldots x_{i_0})\frac{\alpha_{i_\nu}\ldots\alpha_{i_0}}{(\nu+1)!}.$$

Avec le système (II.3) (*cf.* SUSSMANN [48]), on passe de $\lambda q(0)$ à :

$$\lambda \exp(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A_i)q(0).$$

Si :

$$g=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu\geq 0}a_{i,\nu}x_0^\nu x_i$$

est une fonctionnelle linéaire stationnaire (*cf.* chap. II, § 3 *c*), on passe de 0 à $\sum_{i=1}^{n}a_{i,0}\alpha_i$, résultat que l'on obtiendrait en théorie des distributions.

Une impulsion identique à (IV.1), mais située à l'instant t, est déterminée par la série de CHEN :

$$\exp(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\exp tx_0.$$

La série de CHEN :

$$\exp(t-t_k)x_0\exp(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(k)}x_i)\ldots\exp t_1 x\exp(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(1)}x_i)$$

donne, à l'instant t, une entrée formée d'un train d'impulsions de Dirac ([17]).

(*b*) PUISSANCES D'UNE IMPULSION DE DIRAC : UN EXEMPLE DE RENORMALISATION

On sait (*cf.* SCHWARTZ [46]) qu'il est en général impossible de multiplier les distributions et, en particulier, que les puissances $\delta^2, \delta^3, \ldots$ de l'impulsion de Dirac ne sont pas des distributions. De même ici, on ne pourra représenter le carré d'une impulsion de Dirac par une série de CHEN. Il n'empêche qu'il est possible de proposer ce que l'on appelle en physique une *renormalisation* (*cf.* GÜTTINGER [30]), basée sur des considérations combinatoires naturelles.

([17]) *Voir* [26] pour les liens avec les processus stochastiques ponctuels.

Parallèlement au précédent paragraphe, considérons l'entrée $u_i^{(l)}=\alpha_i l^2$ ($0\leqslant\tau\leqslant 1/l$; $i=1, \ldots, n$). La série de CHEN associée est :

$$\gamma_l=\exp\left(\frac{x_0}{l}+\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i l x_i\right).$$

Faisons croître indéfiniment l. Pour la limite du coefficient du mot $w\in X^*$, plusieurs cas se présentent :

— $|w|_{x_1}+\ldots+|w|_{x_n}\lneqq|w|_{x_0}$. Alors :

$$\lim_{l\to\infty}(\gamma_l, w)=0;$$

— $|w|_{x_1}+\ldots+|w|_{x_n}\gneqq|w|_{x_0}$. Alors :

$$\lim_{l\to\infty}(\gamma_l, w)=\infty;$$

— $|w|_{x_1}+\ldots+|w|_{x_n}=|w|_{x_0}$. Alors :

$$\lim_{l\to\infty}(\gamma_l, w)=\frac{\alpha_1^{|w|_{x_1}}\ldots\alpha^{|w|_{x_n}}}{|w|!}.$$

Soit une fonctionnelle causale analytique $\mathfrak{g}$ telle que :

— $\forall w\in X^*$, $(g, w)\neq 0$ $|w|_{x_1}+\ldots+|w|_{x_n}\leqslant|w|_{x_0}$;

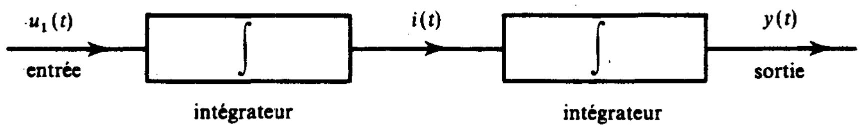
— la somme :

$$\sum\left\{(\mathfrak{g}, w)\frac{\alpha_1^{|w|_{x_1}}\ldots\alpha_n^{|w|_{x_n}}}{|w|!}\,\middle|\, w\in X^*\right\}$$

soit absolument convergente. Il est alors possible de donner, à l'instant 0, une valeur à $\mathfrak{g}$ pour le carré de l'impulsion de Dirac, à savoir :

$$(\mathfrak{g}, 1)+\sum\left\{(\mathfrak{g}, w)\frac{\alpha_1^{|w|_{x_1}}\ldots\alpha_n^{|w|_{x_n}}}{|w|!}\,\middle|\, w\in X^*\right\}.$$

Exemple. — La fonctionnelle linéaire $x_0 x_1$ correspond à ce que l'on appelle, en électronique, un double intégrateur représenté par le diagramme :



Le carré de l'impulsion de Dirac $\delta(0)$, défini par :

$$\lim_{l\to\infty}\exp\left(\frac{x_0}{l}+l x_1\right)$$

fait passer la sortie de 0 à 1/2. Or, le calcul après une seule intégration donnerait à $i(t)$ (voir *fig.*) une valeur infinie. Il y a bien renormalisation.

Remarque. — On pourrait de même calculer toute puissance de l'impulsion de Dirac.

(*c*) INTERACTION DES COMPOSANTES

Ce dernier paragraphe trouve son origine dans SUSSMANN [48]. Il est, à notre avis, d'une grande importance, car il exhibe des phénomènes non linéaires typiques, n'ayant aucun analogue linéaire, en particulier en théorie des distributions. L'explication physique intuitive est une interaction des composantes de l'entrée généralisée. D'un point de vue mathématique, apparaissent les propriétés combinatoires des algèbres de Lie libres, comme la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

(i) Soient les trois entrées généralisées de séries de CHEN $\exp(x_1+x_2)$, $\exp x_2 \exp x_1$, $\exp x_1 \exp x_2$. La première est une impulsion de Dirac au sens du paragraphe 1 *a*. La seconde consiste, pour autant que cela soit traduisible en langage ordinaire, en la « succession instantanée » d'impulsions de Dirac sur la première et seconde composante. Il y a inversion de l'ordre dans le troisième cas.

Une fonctionnelle causale analytique g passe de (g, 1) aux valeurs, en général distinctes :

– $$\sum\left\{\frac{(\mathrm{g}, w)}{|w|!}\,\middle|\, w \in \{x_1 x_2\}^*\right\};$$

– $$\sum\left\{\frac{(\mathrm{g}, w)}{|w|!}\,\middle|\, w \in \{x_2\}^* \{x_1\}^*\right\};$$

– $$\sum\left\{\frac{(\mathrm{g}, w)}{|w|!}\,\middle|\, w \in \{x_1\}^* \{x_2\}^*\right\}.$$

Avec le système (II.3) on passe de $\lambda q(0)$ à :

– $$\lambda \exp(A_1+A_2)\, q(0),$$

– $$\lambda \exp A_2 \exp A_1\, q(0),$$

– $$\lambda \exp A_1 \exp A_2\, q(0).$$

Ces différences sont expliquées par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Elles disparaissent dans le cas linéaire ou échangeable (*cf.* chap. II, § 3 *b* et *d*).

(ii) Cet exemple d'intégrales oscillantes est dû à MCSHANE [39], chap. VI, § 5 ([18]). La série de CHEN du chemin :

$$\left\{ \xi_0^{(l)}(\tau)=\tau,\ \xi_1^{(l)}(\tau)=\frac{\sin l^2\tau}{l},\ \xi_2^{(l)}(\tau)=\frac{\cos l^2\tau}{l} \,\middle|\, 0\leqslant\tau\leqslant t \right\}$$

a, pour l infini et relativement à $\mathcal{T}_P$ ou $\mathcal{T}_E$, la limite :

$$\exp t\left[x_0+\frac{x_1x_2-x_2x_1}{2}\right]. \tag{IV.3}$$

Ce chemin correspond aux entrées $u_1^{(l)}(\tau)=l\cos l^2\tau$, $u_2^{(l)}(\tau)=-l\sin l^2\tau$ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$. Pour ces entrées, la sortie (II.3) est, à l'instant t :

$$y(t)=\lambda\exp t\left[A_0+\frac{A_1A_2-A_2A_1}{2}\right]q(0).$$

En tant que distributions, les limites de $\xi_1^{(l)}$, $\xi_2^{(l)}$, $u_1^{(l)}$, $u_2^{(l)}$ sont nulles. Si, en (II.3), on ne laissait qu'une des deux entrées et on annulait l'autre, la sortie aurait pour valeur limite $y(t)=\lambda(\exp tA_0)q(0)$. La contribution limite d'une coordonnée seule est donc nulle. Le phénomène non linéaire consiste en l'interaction des deux composantes.

APPENDICE

Fonctions et fonctionnelles

La remarque (iv) du paragraphe 2 du chapitre II, montre que l'identité $u_1(t)\to u_1(t)$ n'est pas une fonctionnelle causale analytique. Il en va de même pour $f(u_1(t), \ldots, u_n(t))$, où f est une fonction analytique de n variables, au sens usuel. Même si le théorème II.5 d'approximation permet d'approcher ces fonctions, il y a là une lacune des indéterminées non commutatives. Pour employer une terminologie courante, il faudrait pouvoir représenter non seulement les systèmes *héréditaires* ([19]), mais aussi les *instantanés* ou *sans mémoire*.

([18]) Il sert à montrer la difficulté de généraliser au cas vectoriel le théorème d'approximation de WONG et ZAKAI sur les équations différentielles stochastiques (*voir* [26]).

([19]) Terme employé aussi par VOLTERRA [51].

Nous proposons un formalisme, englobant indéterminées commutatives ou non, permettant d'obtenir fonctions et fonctionnelles analytiques. $X=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ désignant l'alphabet usuel, posons :

$$X^0=\{x_1, \ldots, x_n\}=X\setminus x_0.$$

Soient $K[X^0]$ et $K[[X^0]]$ les K-algèbres des polynômes et des séries à coefficients dans K, en les indéterminées associatives et commutatives $x\in X^0$.

Comme pour $K\langle\langle X\rangle\rangle$, on peut graduer et donc donner une topologie à $K[[X^0]]$. $f\in K[[X^0]]$ et $g\in K\langle\langle X\rangle\rangle$ désignent respectivement une fonction et une fonctionnelle causale analytiques, au produit tensoriel $f\otimes_K g$, associons, s'il y a convergence, la fonctionnelle causale de valeur, à l'instant t :

$$[\textstyle\sum_{k_1,\ldots,k_n\geq 0} f_{k_1\ldots k_n} u_1^{k_1}(t)\ldots u_n^{k_n}(t)]\Big[(g, 1) + \sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^{n}(g, x_{j_\nu}\ldots x_{j_0})\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}\Big].$$

Ainsi, à tout élément du produit tensoriel complété $K[[X^0]]\widehat{\otimes}_K K\langle\langle X\rangle\rangle$, on peut, sous réserve de convergence, associer une fonctionnelle répondant au problème posé.

Remarque. — Pour les indéterminées commutatives, on utilise X^0 et non X, car x_0 dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$ suffit à assurer la présence du temps.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARRETT (J. F.). — The use of functionals in the analysis of non-linear physical systems, *J. Electronics Control*. vol. 15. 1963. p. 567-615.

[2] BROCKETT (R. W.). — Volterra series and geometric control theory. *Automatica*, vol. 12, 1976, p. 167-176.

[3] BROCKETT (R. W.). — Convergence of Volterra series on infinite intervals and bilinear approximations, in *Nonlinear Systems and Applications* (réd. V. LAKSHMIKANTHAM), p. 39-46, Academic Press, New York, 1977.

[4] CHEN (K.-T.). — Iterated integrals and exponential homomorphisms, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 4, 1954, p. 502-512.

[5] CHEN (K.-T.). — Integrations of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula, *Ann. of Math.*, vol. 65, 1957, p. 163-178.

[6] CHEN (K.-T.). — Integration of paths—a faithful representation of paths by non-commutative formal power series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 89, 1958, p. 395-407.

[7] CHEN (K.-T.). — Expansions of solutions of differential systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 13, 1963, p. 348-363.

[8] CHEN (K.-T.). — Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, 1977, p. 831-879.

[9] CHOMSKY (N.) et SCHÜTZENBERGER (M. P.). — The algebraic theory of context-free languages, in *Computer Programming and Formal Systems* (réd. P. BRAFFORT et D. HIRSCHBERG), p. 118-161, North-Holland, Amsterdam, 1963. Traduction française dans *Langages*, Larousse, Paris, n° 9, 1968, p. 77-118.

[10] DWYER (T. A.) III. — Analytic evolution equations in Banach spaces, in *Vector Space Measures and Applications* (réd. R. M. ARON et S. DINEEN), t. II, *Lect. Notes Math.*, n° 645, p. 48-61, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[11] DYSON (F. J.). — The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman, *Physical Rev.*, vol. 75, 1949, p. 486-502.

[12] FEYNMAN (R. P.). — An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, *Physical Rev.*, vol. 84, 1951, p. 108-128.

[13] FINDLEY (W. N.), LAI (J.-S.) et ONARAN (K.). — *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[14] FLAKE (R. H.). — Volterra series representation of time-varying nonlinear systems, *Proc. 2nd I.F.A.C. Congr.*, p. 91-99, Butterworths, Londres, et Oldenbourg, Munich, 1964.

[15] FLIESS (M.). — Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 277, série A, 1973, p. 923-926.

[16] FLIESS (M.). — Sur les systèmes dynamiques bilinéaires qui sont linéaires, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 278, série A, 1974, p. 1147-1149.

[17] FLIESS (M.). — Sur divers produits de séries formelles, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 102, 1974, p. 181-191.

[18] FLIESS (M.). — Matrices de Hankel, *J. Math. Pures Appl.*, t. 53, 1974, p. 197-222 (erratum, t. 54, 1975, p. 481).

[19] FLIESS (M.). — Séries de Volterra et séries formelles non commutatives, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 280, série A, 1975, p. 965-967.

[20] FLIESS (M.). — Un outil algébrique : les séries formelles non commutatives, in *Mathematical Systems Theory* (réd. G. MARCHESINI et S. K. MITTER), *Lect. Notes Econom. Math. Syst.*, n° 131, p. 122-148, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[21] FLIESS (M.). — Un calcul symbolique non commutatif pour les asservissements non linéaires et non stationnaires, in *Optimization Techniques* (réd. J. CÉA), part. 2, *Lect. Notes Comput. Sc.*, n° 41, p. 496-509, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[22] FLIESS (M.). — Mise en évidence d'effets non linéaires nouveaux grâce aux variables non commutatives, *J. Physique*, Coll. C. 5, suppl. n° 8, t. 39, 1978, p. 21-22.

[23] FLIESS (M.). — Développements fonctionnels en indéterminées non commutatives des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 287, série A, 1978, p. 1133-1135.

[24] FLIESS (M.). — A note on Volterra series expansions for nonlinear differential systems, *I.E.E.E. Trans. Automat. Control*, vol. 25, 1980, p. 116-117.

[25] FLIESS (M.). — Une approche algébrique du développement fonctionnel des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées, in *Analyse des Systèmes*, *Astérisque*, vol. 75-76, 1980, p. 95-103, Paris.

[26] FLIESS (M.). — Stabilité d'un type élémentaire d'équations différentielles stochastiques à bruits vectoriels, *Stochastics*, vol. 4, 1980, n° 3.

[27] FLIESS (M.) et JACOB (G.). — Topologies pour certaines fonctions de lignes non linéaires; application aux asservissements, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 282, série A, 1976, p. 321-324.

[28] GILBERT (E. G.). — Functional expansions for the response of nonlinear differential systems, *I.E.E.E. Trans. Automat. Control*, vol. 22, 1977, p. 909-921.

[29] GRÖBNER (W.). — *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen* (2ᵉ édition), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[30] GÜTTINGER (W.). — Product of improper operators and the renormalization problem of quantum field theory, *Progress Theoret. Physics*, vol. 13, 1955, p. 612-626.

[31] HILLE (E.) et PHILLIPS (R. S.). — *Functional analysis and semi-groups* (2ᵉ édition), American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957.

[32] KRENER (A. J.). — Local approximation of control systems, *J. Differential Equations*, vol. 19, 1975, p. 125-133.

[33] LAMNABHI-LAGARRIGUE (F.) et LAMNABHI (M.). — Détermination algébrique des noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires, *Ricerche di Automatica*, vol. 10, 1979, p. 17-26.

[34] LANGOUCHE (F.), ROEKAERTS (D.) et TIRAPEGUI (E.). — Functional integral methods for stochastic fields, *Physica*, vol. 95 A, 1979, p. 252-274.

[35] LAPPO-DANILEVSKY (J. A.). — *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, Réimpression : Chelsea, New York, 1953.

[36] LESIAK (C.) et KRENER (A. J.). — The existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems, *I.E.E.E. Trans. Automat. Control*, vol. 23, 1978, p. 1090-1095.

[37] LÉVY (P.). — *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[38] LUBBOCK (J. K.) et BANSAL (U. S.). — Multidimensional Laplace transforms for solutions of nonlinear equations, *Proc. I.E.E.*, vol. 116, 1969, p. 2075-2082.

[39] MCSHANE (E. J.). — *Stochastic calculus and stochastic models*, Academic Press, New York, 1974.

[40] MORTON (J. B.) et CORRSIN (S.). — Consolidated expansions for estimating the response of a randomly driven nonlinear oscillator, *J. Statistical Physics*, vol. 2, 1969, p. 153-194.

[41] REE (R.). — Lie elements and an algebra associated with shuffles, *Ann. of Math*, vol. 68, 1958, p. 210-220.

[42] ROMAN (S. M.) et ROTA (G.-C.). — The umbral calculus, *Advances Math.*, vol. 27, 1978, p. 95-188.

[43] SCHETZEN (M.). — *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*, Wiley, New York, 1980.

[44] SCHÜTZENBERGER (M. P.). — On the definition of a family of automata, *Information Control*, vol. 4, 1961, p. 245-270.

[45] SCHÜTZENBERGER (M. P.). — On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 13, 1962, p. 885-890.

[46] SCHWARTZ (L.). — Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 239, 1954, p. 847-848.

[47] SEGAL (I. E.). — *Mathematical cosmology and extragalactic astronomy*, Academic Press, New York, 1976.

[48] SUSSMANN (H. J.). — Semigroup representations, bilinear approximation of input-output maps, and generalized inputs, in *Mathematical Systems Theory* (réd. G. MARCHESINI et S. K. MITTER), Lect. Notes Econom. Math. Syst. n° 131, p. 172-191, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[49] TAYLOR (J. L.). – Functions of several non commuting variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 79, 1973, p. 1-34.

[50] UZES (C. A.). – Mechanical response and the initial value problem, *J. Math. Physics*, vol. 19, 1978, p. 2232-2238.

[51] VOLTERRA (V.). – *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

[52] VOLTERRA (V.) et PÉRÈS (J.). – *Théorie générale des fonctionnelles*, t. I, Gauthier-Villars, Paris, 1936.

[53] WIENER (N.). – *Nonlinear problems in random theory*, Wiley, New York, 1958.