

Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por Professores do Ensino Fundamental*

The Posing of Mathematical Problems Involving Multiplicative Structures by Elementary School Teachers

Alina Galvão Spinillo**

Sintria Labres Lautert***

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba****

Ernani Martins dos Santos*****

Juliana Ferreira Gomes da Silva*****

Resumo

O presente estudo investiga como professores do Ensino Fundamental concebem e formulam situações-problema inseridas no campo conceitual das estruturas multiplicativas. Trinta e nove professores do 1º ao 9º ano de escolas públicas foram solicitados a formular problemas matemáticos que pudessem ser resolvidos por meio de multiplicação e/ou de divisão. Os resultados mostram que os professores investigados compreendem o que uma situação multiplicativa significa e formulam problemas apropriadamente, sendo poucos os enunciados em que se omitem informações ou que apresentam imprecisões linguísticas. Verificou-se que a maioria dos problemas era de um mesmo tipo e envolviam apenas um passo para sua resolução. A pouca variabilidade foi observada em relação a todos os professores, independentemente do ano em que lecionavam. Concluiu-se que os professores têm dificuldade em formular problemas que envolvam diferentes relações no âmbito das estruturas multiplicativas, sendo necessário desenvolver no professor do Ensino Fundamental a habilidade de formular problemas.

* Os autores agradecem à CAPES o apoio recebido em forma de financiamento para a realização de um projeto mais amplo (processo número 15727) cujos dados originaram a presente pesquisa. Agradecimentos especiais são endereçados aos professores que gentilmente participaram deste estudo.

** Doutora em Psicologia do Desenvolvimento pela Universidade de Oxford, Inglaterra. Professora Titular da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco. Endereço para correspondência: CFCH - 8º andar, Av. Arquitetura, s/n, Cidade Universitária, Recife/PE, CEP 50740-55. E-mail: alinaspinillo@hotmail.com

*** Doutora em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professora Associada da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco. Endereço para correspondência: CFCH - 8º andar, Av. Arquitetura, s/n, Cidade Universitária, Recife/PE, CEP 50740-55. E-mail: sintrialautert@gmail.com

**** Doutora em Educação pela Universidade de Oxford, Inglaterra. Professora Associada da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco. Endereço para correspondência: Centro de Educação, 1º andar, Cidade Universitária, Recife/PE, CEP 50740-55. E-mail: resrborba@gmail.com

***** Doutor em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor Adjunto da Universidade de Pernambuco (UPE), Campus Mata Norte, Nazaré da Mata, Pernambuco. Endereço para correspondência: Departamento de Matemática, Rua Amaro Maltez, 201, Centro, Nazaré da Mata/PE, CEP: 55800-000. E-mail: ermasantos@gmail.com

***** Doutora em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professora Adjunta da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Maceió, Alagoas. Endereço para correspondência: Av. Lourival de Melo Mota, Tabuleiro do Martins, Maceió/AL, CEP: 57072-970. E-mail: julianafgs@yahoo.com.br

Palavras-chave: Formulação de Problemas Matemáticos. Estrutura Multiplicativa. Professores do Ensino Fundamental.

Abstract

This study investigates how elementary school teachers conceive and formulate problems within the conceptual field of multiplicative structures. Thirty-nine public school teachers (1st to 9th grade) were asked to formulate mathematical problems which resolution would involve multiplication and division. The results have shown that teachers understand what a multiplicative situation is and can formulate verbal problems appropriately. There were only a few cases where relevant information was omitted, or which contained language-related inaccuracies. It was also found that most of the problems were of the same type, and that their resolution required only one step. This lack of variety was observed among all teachers, regardless of the grade they taught. Thus, it has been concluded that teachers have difficulties in posing problems that make use of the various situations characteristic of the multiplicative structures field. It is, therefore, crucial to develop the elementary school teachers' ability to pose problems.

Keywords: Posing Mathematical Problems. Multiplicative Structure. Elementary School Teachers.

1 Introdução

Ensinar e aprender são instâncias conceitualmente distintas, porém indissociáveis no âmbito da prática de sala de aula, remetendo a uma reflexão acerca da necessidade de se criar ambientes propiciadores de aprendizagem e a desenvolver no professor competências e conhecimentos necessários ao exercício da atividade docente, tais como o domínio dos conceitos matemáticos a serem ensinados e as estratégias didáticas apropriadas. No que tange à Educação Matemática, a resolução de problemas surge como um recurso propiciador de aprendizagem, sendo isso reconhecido por estudiosos no campo da Educação e da Psicologia (FISHER, 1987; POLYA, 1995; VERGNAUD, 1990, 2003).

Charnay (2001) enfatiza a relevância da resolução de problemas ao discutir os modelos de ensino de Matemática e, assim como Chauvel e Lagoueyte (2010), analisa as diferentes facetas da relação do aluno e do professor com a situação-problema no contexto escolar.

Pais (2006) trata a resolução de problemas como uma estratégia de ensino que tanto interliga a Matemática a outras disciplinas, como favorece e amplia a formação de conceitos. Para ele, essa estratégia minimiza o risco da perda de significado dos conteúdos escolares por ser um instrumento de contextualização para o uso de operações, acrescentando ainda que os problemas atuam como um desafio diante do novo. Em termos de ganhos para os alunos, tanto Pais como Dante (2009) afirmam que trabalhar com a resolução de problemas contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático em relação ao uso de estratégias

apropriadas e de sua generalização a outras situações em que se reconhece a possibilidade de sua aplicação.

Seguindo esta linha de pensamento, Moreno (2006) afirma que a busca de soluções para os problemas e a reflexão sobre eles geram conhecimentos. Como os problemas apresentam um obstáculo a superar (ou algo a descobrir), o aluno é levado a tomar decisões, prever resultados e gerar novos recursos de resolução. A autora acrescenta que não se aprende apenas resolvendo problemas, mas também por meio de reflexão sobre eles e suas formas de resolução, considerando-os o eixo por meio do qual é possível, e desejável, trabalhar a Matemática em todos os segmentos escolares.

A proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, relativa ao Ensino Fundamental, considera a resolução de problemas tanto o eixo como o ponto de partida para a atividade didática. Tal perspectiva aplicada à sala de aula possibilita aos estudantes a mobilização de conhecimentos anteriores e o desenvolvimento da capacidade de gerenciar informações de modo que consigam “apreender conceitos, procedimentos e apresentar atitudes matemáticas” (BRASIL, 1997, p. 43).

Branca (1997) discute a resolução de problemas como: (i) uma meta, sendo o objetivo de ensinar Matemática em relação a qualquer conteúdo; (ii) um processo, voltando-se para os procedimentos e estratégias adotados pelos alunos; e (iii) uma habilidade básica a ser desenvolvida. Esta perspectiva é compartilhada por Onuchic e Allevato (2004) ao afirmarem que o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas, como aprende Matemática para resolver problemas, sejam eles neste ou em outros campos do conhecimento.

O que se nota é que a resolução de problemas pelos alunos tem um valor inquestionável no campo educacional, sendo isso também observado na Psicologia, em particular, na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1983, 1990). De acordo com esta teoria, problemas matemáticos são situações que tornam os conceitos significativos para o indivíduo, mobilizando um conjunto de operações e representações para sua resolução. Segundo o autor, as situações-problema variam em função da estrutura e características que apresentam, ainda que sejam resolvidas por meio de uma mesma operação, como é o caso de problemas de divisão que podem ser de quota ou de partição, ou problemas de multiplicação que podem ser de isomorfismo de medidas ou de produto de medidas. Na realidade, uma situação-problema pode envolver diferentes conceitos e um mesmo conceito pode estar imbricado em diferentes situações. Essa perspectiva ilustra a relação em rede estabelecida entre os conceitos, e entre eles e as situações.

Contudo, o valor didático dos problemas pode ser estendido para além de sua resolução e pensado em termos da sua formulação. Neste caso, há uma mudança de paradigma, pois o foco estaria agora voltado para a formulação de problemas pelos alunos, sendo esta perspectiva ainda pouco explorada, como comentam Dante (2009), Guimarães e Santos (2009) e Smole (2001).

2 Formulação de problemas

2.1 A formulação de problemas por alunos

Apesar de raras, algumas pesquisas procuram mapear as dificuldades e possibilidades das crianças ao formularem problemas matemáticos. Zunino (1995) solicitou que crianças do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental elaborassem problemas de adição e subtração. A maioria dos alunos do 1º ao 3º ano demonstrou surpresa diante desta solicitação, alguns deles, inclusive, sequer conseguiam criar um enunciado por desconhecer o que era um problema ou por afirmar que não sabiam inventar um problema. Dentre os problemas elaborados havia aqueles em que a resposta estava contida no próprio enunciado e a pergunta ausente; e ainda aqueles em que nem a pergunta e nem a resposta estavam presentes. Havia casos ainda em que o enunciado não correspondia efetivamente à operação que deveria ser empregada. Como lápis e papel haviam sido disponibilizados, muitas crianças formulavam enunciados que se constituíam não apenas por palavras, mas também por desenhos e outros grafismos.

As crianças do 4º e 5º ano, por sua vez, se surpreendiam menos diante da solicitação de elaborar um problema e formulavam enunciados que também continham a resposta ao problema. Porém, havia alunos do 5º ano que elaboravam enunciados bem construídos e de acordo com o modelo escolar. Ao final do estudo, Zunino (1995) ressalta que crianças podem se tornar boas formuladoras de problemas e que a escola deve assumir a responsabilidade de auxiliá-las a desenvolver essa habilidade que atua como um meio para a apropriação do conhecimento matemático.

De acordo com Chica (2001), formular problemas requer que o aluno organize o que sabe, de modo a elaborar um texto em forma de enunciado para comunicar o que deseja. Isso requer um controle sobre o texto e sobre as ideias matemáticas, sendo tal atividade um exemplo da aproximação entre Matemática e língua materna. A autora, enfatizando a relevância didática da formulação de problemas pelos alunos, apresenta e discute uma série de atividades realizadas em sala de aula por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental com

vistas a levá-los a refletir sobre o papel da pergunta no enunciado verbal dos problemas, a fornecer os dados necessários para que ela seja respondida e o problema solucionado. As atividades variavam desde as mais simples como elaborar uma pergunta a partir de uma sequência de gravuras ou de um enunciado verbal, completar o enunciado; até atividades mais complexas como formular o problema a partir de uma pergunta, de uma resposta ou de uma operação apresentada; e até mesmo atividades em que era necessário julgar se um dado problema verbal estava apropriado ou não, identificando e corrigindo a limitação identificada, reescrevendo o enunciado.

Sem dúvida, formular problemas é um desafio para o aluno, pois além da pouca familiaridade com esta atividade, tem que lidar com outras competências que vão além do conhecimento matemático, como, os aspectos linguísticos; especificamente, a produção de um texto que possui uma estrutura definida por meio da qual são apresentadas as informações matemáticas, suas relações e aquilo que é buscado. Itacarambi (2010) comenta que os problemas elaborados pelos alunos se tornam cada vez mais complexos na medida em que se familiarizam com a linguagem matemática e com a linguagem dos enunciados.

Na realidade, aquele que elabora o problema precisa realizar ações intelectuais importantes como antecipar resultados, procedimentos de resolução e, ainda, dominar os conceitos matemáticos envolvidos na situação. A ideia subjacente é que o nível de compreensão que o indivíduo apresenta sobre um dado conceito não só se manifesta quando ele resolve uma dada situação-problema, mas também quando formula um problema que envolve o conceito em questão. A formulação, portanto, requer identificar o que é relevante para a resolução daquela situação, considerar as relações entre os dados do enunciado, as relações entre esses e a pergunta e o modo de respondê-la (operações e estratégias a adotar).

Reconhecendo o valor didático da formulação de problemas, pesquisadores criaram programas de intervenção com vistas a desenvolver nos alunos a capacidade de elaborar problemas e resolvê-los. English (1997) elaborou um programa de intervenção baseado em uma dinâmica de colaboração entre alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Dentre outros aspectos, o programa envolvia o reconhecimento e o uso da estrutura de problemas de diferentes tipos. Inicialmente os alunos tendiam a criar problemas verbais tipicamente escolares, reproduzindo o modelo ao qual haviam sido expostos na sala de aula. Após a intervenção, eles passaram a elaborar problemas mais variados e mais sofisticados que requeriam, inclusive, o uso de raciocínio dedutivo para sua resolução.

Lowrie (2002) analisou os problemas que alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental elaboravam em sala de aula a partir de intervenções baseadas no modelo de

scaffolding, em que o professor interagiu com cada aluno de forma a orientá-lo na formulação e resolução de problemas, encorajando a verbalização e o monitoramento de suas formas de raciocinar. No início da intervenção, as crianças formulavam problemas cuja solução envolvia um ou dois passos e que se assemelhavam aos problemas verbais usualmente propostos em sala de aula, sendo este resultado semelhante àquele encontrado por English (1997).

Ao final da intervenção as crianças passaram a elaborar problemas mais sofisticados e que não se limitavam àqueles tipicamente escolares, sendo também capazes de identificar os componentes relevantes dos problemas e de sugerir as operações necessárias para resolvê-los. Isso foi particularmente observado entre as crianças do 3º ano. Verificou-se também que, quando os problemas formulados eram abertos a múltiplas formas de resolução e se afastavam dos problemas verbais tipicamente escolares, as crianças, sobretudo as do 1º ano, apresentavam certa dificuldade em identificar o modo de solucioná-los. A conclusão foi que dentro de um curto período de tempo é possível desenvolver nas crianças um conhecimento sobre a resolução e formulação de problemas matemáticos.

Esses estudos evidenciam que elaborar problemas requer uma mudança na maneira como se lida com a situação-problema: há um deslocamento do papel daquele que resolve para o papel daquele que formula o problema. Mas quem é que pode formular problemas? Apenas o aluno? Ou o professor também poderia realizar esta atividade? Na realidade, o valor didático da formulação de problemas pode ser ampliado, associado não apenas ao aluno, mas também ao professor. É possível supor que muito do que foi discutido acerca da elaboração de problemas pelos alunos possa ser aplicado ao professor, com as devidas adaptações.

2.2 A formulação de problemas por professores

Os saberes docentes são tratados por diversos autores que procuram elencar os conhecimentos relevantes para os professores que ensinam Matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; MELO, 2005; NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009; SHULMAN, 2005; TARDIF; LESSARD; LAHAYE, 2002). Dentre esses, ressalta-se o conhecimento didático acerca do conteúdo que é uma combinação do conhecimento que o professor possui do conteúdo a ensinar (no caso, os conceitos matemáticos) e o conhecimento acerca do modo como ensinar (princípios e estratégias didáticas), com vistas a tornar o conteúdo compreensível para o aluno.

Se a resolução de problemas é, como postulado, uma estratégia didática e se os problemas versam sobre conteúdos a serem ensinados, conclui-se que o conhecimento sobre a

resolução de problemas é um conhecimento didático do conteúdo. Assim, além de ser capaz de resolver os problemas que são apresentados aos alunos, o professor também precisa ser capaz de formular problemas. Isso requer uma reflexão sobre os conceitos neles envolvidos (suas propriedades, relações), sobre suas possíveis formas de resolução e de representação, identificando o que seria mais relevante. Segundo Vergnaud (1983), compreender um conceito envolve a capacidade de comunicá-lo e expressá-lo, sendo isso válido tanto para alunos como para professores. A capacidade de propor uma diversidade de situações em que os conceitos possam estar inseridos parece ser um indicador da compreensão que o indivíduo apresenta acerca do conceito imbricado em tais situações.

Portanto, a formulação de problemas é um dos conhecimentos importantes para o professor que ensina Matemática. Esta abordagem consiste em um campo de investigação ainda a ser explorado. Contudo, algumas pesquisas foram realizadas nesta perspectiva.

Leung e Silver (1997), a partir de um teste de formulação de problemas aritméticos (TAPP- *Test of Arithmetic Problem Posing*) examinaram a qualidade de problemas formulados por futuros professores de Ensino Fundamental. O teste consistia em quatro itens, com algumas informações básicas referentes a dois contextos verbais apresentados em duas versões: uma versão com informações numéricas e outra sem. Os problemas formulados foram analisados de acordo com duas dimensões: a qualidade e a complexidade. A qualidade referia-se ao fato do problema formulado ser matemático ou não, ao fato de ser um enunciado plausível ou incoerente, e ao fato de possuir ou não as informações necessárias e suficientes para sua resolução. A complexidade referia-se ao fato do problema formulado ser difícil ou fácil de ser resolvido, sendo isso definido em termos do número de passos requeridos para sua resolução (quantos mais passos para sua resolução, mais complexo era o problema).

Verificou-se que poucos foram aqueles que elaboraram problemas não matemáticos e que, de modo geral, os futuros professores formulavam problemas plausíveis que continham as informações necessárias e que eram considerados complexos por requererem múltiplos passos para sua resolução. Contudo, identificou-se uma média de um problema não matemático por participante e que quase 30% dos problemas não continham informações suficientes, concluindo-se que alguns dos futuros professores tinham dificuldades em formular problemas plausíveis e complexos.

Verificou-se também que os participantes eram mais bem-sucedidos em formular problemas com informações numéricas do que sem essas informações. Parece que os futuros professores apresentam mais facilidade em lidar com relações quantitativas do que qualitativas no enunciado. De modo geral, os futuros professores elaboravam

satisfatoriamente os problemas, e as limitações na formulação de problemas mais complexos decorriam, pelo menos em parte, da pouca familiaridade com esta atividade.

Esta limitação foi também documentada por Crespo (2003) ao investigar as estratégias adotadas por professores em um curso de preparação para a docência nos anos finais do Ensino Fundamental. Os futuros professores eram solicitados a analisar a formulação de problemas e sua aplicação nas salas de aula em que estagiavam. Inicialmente eles tendiam a elaborar problemas tradicionais em que a resolução pelo aluno era individual e que requeria uma mera computação numérica. Ao final do curso, propunham problemas mais complexos e desafiadores, que tinham soluções múltiplas e abertas. Após o curso, os problemas propostos, de acordo com as observações feitas, eram inseridos em uma dinâmica menos diretiva, pautada em situações colaborativas que permitiam a exploração e a discussão. Os resultados mostraram que as estratégias elementares e equivocadas inicialmente identificadas foram gradativamente substituídas por estratégias mais sofisticadas e apropriadas. A autora afirma que propor atividades é um dos desafios que o futuro professor se depara ao aprender a ensinar Matemática, enfatizando a necessidade de que este conteúdo faça parte da formação para a docência.

Cunha (2015) investigou o conhecimento de professores de Matemática do Ensino Médio a partir da elaboração de problemas de combinatória. Foi também investigado se, por meio de suas formulações, seria possível identificar os invariantes operatórios envolvidos na resolução dos diferentes tipos de problema que eram solicitados a elaborar (combinação, permutação, arranjo e produto cartesiano). Após formular os problemas, o professor era solicitado a identificar semelhanças e diferenças entre eles; e em outro momento, a elaborar problemas a partir dos invariantes relativos a cada tipo, identificando-os. Observou-se que alguns professores tinham dificuldades em diferenciar os problemas que elaboravam: propunham exercícios ao invés de problemas,¹ e que alguns dos problemas não eram de combinatória.

Dentre os problemas de combinatória elaborados, havia os que apresentavam equívocos, pois o entrevistado confundia problemas de arranjo com os de combinação, sendo a maior dificuldade identificada em relação aos problemas de produto cartesiano. Concluiu-se que os docentes tinham dificuldades para formular e diferenciar os diferentes tipos de problemas, indicando que possuem um conhecimento limitado quanto às propriedades que diferenciam os diferentes tipos de problemas combinatórios.

¹ Consultar Dante (2009) acerca da diferenciação entre problema matemático e exercício.

Souza (2015) investigou o conhecimento de professores do Ensino Fundamental acerca do campo conceitual multiplicativo a partir dos problemas de multiplicação e de divisão que elaboraram². Diversos parâmetros foram considerados na análise, gerando um amplo conjunto de resultados: a maioria dos problemas continha quantidades discretas, requeria o uso da multiplicação e aqueles que requeriam a divisão se caracterizavam por divisão por partição. Dentre os resultados obtidos, destaca-se que, independentemente do nível escolar em que atua e do tempo de experiência docente, os professores tendiam a formular problemas de um único tipo e possuíam uma concepção do campo multiplicativo restrita ao campo aditivo, elaborando problemas típicos de soluções por meio da adição repetida.

Enquanto Crespo (2003) ressaltou a formulação de problemas pelo professor como parte importante de sua formação, Cunha (2015) e Souza (2015) inseriram a formulação de problemas como um indicador do seu conhecimento sobre determinado conceito matemático. Esta abordagem se assemelha àquela adotada nesta investigação que pressupõe que a formulação de problemas revela as concepções daquele que formula o problema possui, se tornando um instrumento de avaliação tanto do conhecimento do aluno como do professor.

Em face do exposto, o presente estudo investigou a concepção de professores acerca de situações-problema relativas ao campo conceitual das estruturas multiplicativas por meio da formulação de problemas. A escolha dessas situações decorreu do fato de que ensinar os conceitos de multiplicação e divisão tem se mostrado um desafio para professores.

3 Método

3.1 Participantes

Trinta e nove professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental em escolas públicas da cidade do Recife foram divididos em três grupos³: Grupo 1: 13 professores que lecionam no 1º e 2º ano; Grupo 2: 15 professores que lecionam no 3º e 4º ano; e Grupo 3: 11 professores que lecionam do 5º ao 9º ano. A constituição desses grupos tomou por base a expectativa de que os professores do Grupo 1 lecionavam para crianças que ainda estavam sendo introduzidas às operações de multiplicação e de divisão; os professores do Grupo 2

² Os dados desta investigação também foram gerados de um projeto apoiado pela CAPES, Número 15727.

³ Os participantes desse estudo eram professores de escolas municipais em Recife que eram voluntários em uma investigação mais ampla no âmbito do Observatório da Educação - projeto número 15727, financiado pela CAPES.

lecionavam para crianças que, pelo ano de escolaridade frequentado, já dominavam tais operações e os do Grupo 3 lecionavam para alunos que além de dominarem essas operações as utilizavam na resolução de problemas pertencentes ao campo das estruturas multiplicativas como razão, fração, proporção e combinatória, como esperado nesses anos de escolaridade.

3.2 Procedimento e material

Todos os professores foram solicitados individualmente, em uma aplicação coletiva em uma sala de aula, a formular por escrito oito problemas de Matemática que pudessem ser resolvidos por meio da operação de multiplicação e/ou de divisão. Foi fornecida a seguinte instrução: “Elabore oito problemas distintos envolvendo multiplicação e/ou divisão, a seu critério”. Para cada professor foi disponibilizado lápis, borracha e uma folha de papel ofício em que era apresentada por escrito a mesma instrução oralmente fornecida. Abaixo dessa instrução havia um espaço em branco suficiente para a escrita dos oito problemas.

4 Análise dos dados e resultados

Como todos os participantes formularam os oito problemas solicitados, ao todo, 312 problemas foram analisados por meio de discussão entre os pesquisadores, até que o consenso fosse alcançado. Os aspectos considerados na análise foram: (i) se o que fora formulado era, de fato, um problema matemático ou um enunciado relativo a efetuar uma operação; (ii) se o que fora formulado requeria a multiplicação e/ou a divisão para sua resolução; (iii) se os problemas eram adequados ou inadequados; e (iv) o tipo de problema elaborado.

A partir de todo o corpus de problemas, examinou-se se o que fora elaborado era uma situação multiplicativa que requeria multiplicação e/ou divisão para sua resolução ou se era uma situação não multiplicativa, como exemplificado a seguir¹:

Exemplo 1 (situação multiplicativa): Ana foi a uma festa de aniversário e comeu 6 docinhos. Sua irmã comeu 3 vezes mais do que ela. Quantos docinhos comeu a irmã de Ana?

Exemplo 2 (situação multiplicativa): Lúcia tem um pacote com 20 biscoitos para dividir igualmente entre seus 4 filhos. Quantos biscoitos cada filho receberá?

Exemplo 3 (situação não multiplicativa): Maria tinha 4 lápis azuis, ganhou 2 vermelhos e 3 amarelos. Com quantos ela ficou? Ela ficou com mais ou menos?

⁴ Nos exemplos apresentados foi mantida a escrita literal dos participantes.

Exemplo 4 (situação não multiplicativa): Na caixa de gibis tem 31 gibis. A turma da tarde tem 18 alunos. Quantos gibis tem que ficar na caixa?

O Teste T não detectou diferenças significativas entre os grupos. Contudo, em cada um deles, o percentual de situações multiplicativas foi significativamente mais alto do que as situações não multiplicativas [Grupo 1 ($t= 6.786$; $p < .001$); Grupo 2 ($t= 11.602$; $p < .001$) e Grupo 3 ($t= 10.000$ $p < .001$)], como mostra a Tabela 1.

Tabela 1- Percentual de situações multiplicativas e não multiplicativas em cada grupo

	Situação multiplicativa	Situação não multiplicativa
Grupo 1 (n= 104)	89	11
Grupo 2 (n=120)	92	8
Grupo 3 (n= 88)	95	5

Fonte: Os autores

Considerando apenas as situações multiplicativas, analisou-se se essas eram um problema verbal ou um exercício para efetuar uma operação aritmética, como ilustrado nos exemplos que se seguem:

Exemplo 5 (problema verbal): Dona Teresa fez 3699 salgados e dividiu em 3 caixas para a entrega. Quantos salgados ele colocou em cada caixa?

Exemplo 6 (exercício para efetuar uma operação): Sabendo-se que uma dezena corresponde a 10 unidades, quantas unidades há em 4 dezenas?

Na Tabela 2 verifica-se que, em cada grupo, os problemas verbais foram significativamente mais frequentes que os exercícios para efetuar operações, sendo isso confirmado pelo Teste T [Grupo 1 ($t= 12.492$; $p < .001$); Grupo 2 ($t= 11.179$; $p < .001$) e Grupo 3 ($t= 14.907$ $p < .001$)]. Novamente, o padrão de resultados é o mesmo nos três grupos, visto que não se diferenciam quer em relação aos problemas verbais (percentuais altos) quer em relação aos exercícios (percentuais baixos).

Tabela 2 - Percentual de enunciados relativos a problemas e a exercícios para efetuar operações em cada grupo.

	Problema	Exercício
Grupo 1 (n=93)	96,8	3,2
Grupo 2 (n=110)	94,5	5,5
Grupo 3 (n=84)	97,6	2,4

Fonte: Os autores.

Os problemas que efetivamente se caracterizavam como verbais foram classificados em adequados e inadequados. Problemas adequados eram os que forneciam uma contextualização para as informações numéricas, explicitavam aquilo a ser descoberto (pergunta) e apresentavam uma linguagem sem ambiguidades. Exemplos:

Exemplo 7: Para cada Copa do Mundo de Futebol são selecionados 32 países, distribuídos em 8 grupos. Quantos países estão presentes em cada grupo?

Exemplo 8: Ana tem 14 anos e sua irmã tem o dobro de sua idade. Quantos anos a irmã de Ana tem?

Os problemas inadequados, por sua vez, se caracterizavam por enunciados que não continham as informações necessárias e suficientes para sua resolução, apresentando imprecisões linguísticas que impossibilitavam sua interpretação. Exemplos:

Exemplo 9: Se na Escola Futurarte 3 turmas do 1º ano estudam pela manhã e apenas uma turma estuda a tarde, quantos alunos do 1º ano estudam pela manhã na Escola Futurarte?

Exemplo 10: Vamos dividir os brinquedos. Temos 8 ursos, 5 bonecas e 5 carros. Se na sala tem 20 crianças, como todos podem brincar?

Exemplo 11: Sandra ganhou 28 pulseiras e resolveu usar cores diferentes por dia. Numa semana, quantas pulseiras por dia, de cores diferentes, ela usou?

Observou-se um percentual significativamente mais alto de problemas adequados do que inadequados em cada grupo (Tabela 3), como revelou o Teste T [Grupo 1 ($t= 6.559$; $p < .001$); Grupo 2 ($t= 16.396$; $p < .001$) e Grupo 3 ($t= 17.103$; $p < .001$)].

Tabela 3 – Percentual de problemas adequados e inadequados em cada grupo

	Problema adequado	Problema inadequado
Grupo 1 (n=90)	90	10
Grupo 2 (n=104)	96,2	3,8
Grupo 3 (n=82)	97,6	2,4

Fonte: Os autores.

Diferenças significativas entre os grupos não foram identificadas, uma vez que em todos eles os problemas eram, em sua maioria, adequados.

A partir de uma análise dos problemas adequados e inseridos no campo das estruturas multiplicativas, foram considerados dois aspectos: o tipo de problema e a operação necessária para sua resolução. No que tange ao tipo de problema, adotou-se a classificação proposta por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 522), a saber:

Exemplo 12 (proporção simples): A cada cinco bombons comprados, a loja Boa Compra dá três caramelos de brinde. Se Ana comprar 15 bombons, quantos caramelos ela ganhará?

Exemplo 13 (comparação multiplicativa): Comprei uma boneca por R\$21,00 e uma bola por R\$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?

Exemplo 14 (proporção múltipla): Uma pessoa deveria beber em média 5 litros de água em dois dias. Qual é o consumo mensal (30 dias) de 5 pessoas?

Exemplo 15 (produto de medidas): Qual a área de um terreno de formato retangular, sabendo que tem 15 metros de frente e 35 metros de comprimento?

Como ilustrado na Tabela 4, em cada grupo a maioria dos problemas era de proporção simples, enquanto que os demais tipos eram raros, sendo isso estatisticamente confirmado pelo Teste T (Grupo 1: $p < .002$; Grupo 2: $p < .001$; e Grupo 3: $p < .001$).

Tabela 4 - Percentual de tipos de problemas formulados em cada grupo de participantes

	Proporção simples	Proporção múltipla	Comparação multiplicativa	Produto de medidas
Grupo 1 (n=81)	80	0	20	0
Grupo 2 (n=100)	87	2	8	3
Grupo 3 (n=80)	82,5	0	7,5	10

Fonte: Os autores.

A principal diferença entre os grupos foi o fato de o Grupo 2 elaborar mais problemas de proporção múltipla que os demais ($p < .008$) e o Grupo 1 formular mais problemas de comparação multiplicativa que os outros dois grupos ($p < .026$). Verifica-se que os professores tendem, basicamente, a formular problemas de proporção simples, não havendo diferenças significativas entre os grupos. As possíveis razões para isso são discutidas adiante.

Além dos tipos de problemas, pareceu igualmente relevante saber qual a operação requerida para solucioná-los: se a divisão ou a multiplicação. Como mostra a Tabela 5⁴, há uma tendência pelo uso da multiplicação apenas entre os professores do Grupo 3.

Tabela 5 - Percentual de problemas que requeriam as operações de divisão e de multiplicação para sua resolução em cada grupo.

	Divisão	Multiplicação	Divisão e multiplicação
Grupo 1 (n= 81)	46	48	5
Grupo 2 (n= 100)	46	49	5
Grupo 3 (n= 80)	38	56	6

Fonte: Os autores.

Observa-se também que nos três grupos a maioria era problemas simples que envolviam apenas um passo para sua resolução, ou seja, o uso de uma ou de outra operação.

Foi conduzida uma análise referente à diversidade de tipos de problemas elaborados por um mesmo participante. Considerando tal variabilidade, três perfis de professor foram identificados:

Perfil 1 (sem variabilidade): professores cujos problemas eram todos de um mesmo tipo.

Perfil 2 (pouca variabilidade): professores que formulavam problemas de dois tipos.

Perfil 3 (muita variabilidade): professores que formulavam problemas de três tipos (máxima variação observada).

⁵ Os valores baixos em algumas células na Tabela 5, na Tabela 6 e na Tabela 7 inviabilizaram a aplicação de qualquer tratamento estatístico apropriado. Os dados são, então, discutidos em termos de tendências.

De acordo com a Tabela 6, os professores do Grupo 1 e do Grupo 2 se concentram entre o Perfil 1 e o Perfil 2; enquanto que os do Grupo 3 se concentram no Perfil 2. Raros são os entrevistados classificados no Perfil 3 (muita variabilidade).

Tabela 6 - Percentual de professores em cada perfil de variabilidade em cada grupo

	Perfil 1 (sem variabilidade)	Perfil 2 (pouca variabilidade)	Perfil 3 (muita variabilidade)
Grupo 1 (n= 13)	53,8	46,2	0
Grupo 2 (n=15)	46,7	46,7	6,7
Grupo 3 (n=11)	27,3	63,6	9,1

Fonte: Os autores.

Os dados na Tabela 7 permitem identificar a natureza das combinações feitas entre tipos de problemas elaborados pelos professores em cada perfil.

Tabela 7 - Percentual de professores em cada grupo em função do perfil de variabilidade e das combinações feitas entre os tipos de problema formulados

Problemas	Grupo 1 (n=13)	Grupo 2 (n=15)	Grupo 3 (n=11)
Perfil 1 (sem variabilidade)			
Proporção simples	53,8	46,7	27,3
Perfil 2 (pouca variabilidade)			
Proporção simples e comparação multiplicativa	46,2	26,6	36,4
Proporção simples e proporção múltipla	0	13,3	0
Proporção simples e produto de medidas	0	6,7	27,3
Perfil 3 (muita variabilidade)			
Proporção simples, comparação multiplicativa e produto de medidas	0	6,7	9

Fonte: Os autores.

Os professores do Perfil 1 (sem variabilidade) elaboram apenas problemas de proporção simples, sendo isso mais frequente no Grupo 1 (53,8%) e no Grupo 2 (46,7%) do que no Grupo 3 (27,3%). Os professores do Perfil 2 (pouca variabilidade) e do Perfil 3 (muita variabilidade) sistematicamente combinam problemas de proporção simples com problemas de outros tipos. A combinação entre problemas de proporção simples e problemas de comparação multiplicativa foi a mais frequente nos três grupos.

5 Conclusões e discussão

O objetivo do presente estudo foi investigar como professores do Ensino Fundamental concebem e formulam situações-problema inseridas no campo conceitual das estruturas multiplicativas. A partir dos dados obtidos, fica claro que os professores investigados

compreendem o que é uma situação multiplicativa e conseguem elaborar problemas verbais dentro deste campo conceitual de forma adequada, sendo raras aquelas situações que se caracterizavam como inadequadas por omissão de informações ou por imprecisão linguística. A dificuldade maior não reside na formulação de problemas verbais, mas em elaborar problemas que envolvam diferentes relações para um mesmo conceito, no âmbito das estruturas multiplicativas.

Embora a maioria das situações-problema fosse adequada, os problemas eram simples e pouco variados, requerendo apenas um passo para sua resolução: ou uma divisão ou uma multiplicação. Esperava-se que os professores dos anos mais avançados formulassem problemas mais complexos do que aqueles dos anos iniciais ou intermediários. Este dado está em acordo com pesquisas anteriores realizadas com professores e com futuros professores do Ensino Fundamental (CRESPO, 2003; LEUNG; SILVER, 1997).

Apesar de atuarem em anos escolares distintos, os professores apresentaram uma mesma perspectiva no que tange à formulação de problemas matemáticos. Ao que parece, o ano escolar em que atuam não é fator que influencie a maneira como concebem e formulam situações-problema. A única diferença entre eles foi quanto ao fato de que aqueles que ensinavam em anos mais avançados apresentavam alguma variabilidade nos tipos de problemas. Esta variabilidade, entretanto, era pouca, uma vez que apenas dois ou três tipos de problemas foram criados.

Na realidade, os problemas formulados abrangiam um número restrito de situações, concentrando-se, de maneira expressiva, em problemas de proporção simples. Esse resultado se confirmou com o perfil dos professores que apresentavam uma variabilidade mínima na formulação de problemas de diferentes tipos, sendo a proporção simples o problema prototípico que o professor tem em mente quando se refere a situações de natureza multiplicativa. Essa é uma concepção limitada dos conceitos inseridos no campo das estruturas multiplicativas, negligenciando outras propriedades que estariam envolvidas em outros tipos de problemas, como os de proporção múltipla e produto de medidas.

Na perspectiva de Vergnaud (1983, 1990, 2003), estes dados indicam uma concepção que se distancia da perspectiva teórica de que o domínio de conceitos matemáticos requer considerar que uma dada situação abarca diversos conceitos e que um mesmo conceito, por sua vez, está envolvido em diferentes situações. É possível que esta concepção um tanto restrita tenha origem em lacunas nos cursos de formação de professores e, também, na alta frequência com que este tipo de problema aparece nos livros didáticos e nas orientações curriculares dos Anos Iniciais, como mencionado por alguns autores (GITIRANA; CAMPOS;

MAGINA; SPINILLO, 2014; LAUTERT; BORBA; SPINILLO; SILVA, 2015; MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2014). Pelo exposto, os professores investigados possuem uma visão ainda limitada das situações-problema que podem ser elaboradas no campo das estruturas multiplicativas.

Seja pela pouca familiaridade com a atividade de elaborar problemas de maneira geral, seja pelo fato de terem dificuldades em formular problemas verbais complexos e diversificados, o que se observa é que é necessário desenvolver no professor a habilidade de formular problemas que sejam, efetivamente, mais desafiadores do ponto de vista do raciocínio e variados, de modo a ampliar sua percepção acerca de problemas que estão inseridos no campo das estruturas multiplicativas.

Para finalizar, alguns pontos merecem ser ressaltados. O primeiro ponto é que além de solucionados, os problemas podem ser formulados não só pelo aluno, como também pelo professor. De acordo com Kilpatrick (1987), a elaboração de problemas está associada à resolução de problemas. Ressalta-se, assim, a importância de adotar-se um paradigma mais amplo a respeito da relação entre resolução de problemas e Educação Matemática, incluindo o professor como formulador de problemas.

Considerar o professor um formulador de problemas leva a um segundo comentário que remete à sua relação com o livro didático, instrumento fundamental à prática docente. Os problemas formulados pelo professor não devem substituir aqueles propostos no livro didático. Formular problemas seria mais uma competência a ser desenvolvida pelo professor, uma vez que esta atividade pode contribuir para identificar nos livros didáticos os diferentes tipos de situações-problema propostas e criar situações que julgue apropriadas ou que estão ausentes ou pouco privilegiadas, inclusive contextualizando questões de interesse mais específico de seus alunos.

Silver (1994) comenta que a formulação de problemas tanto se refere à geração de novos problemas como à reformulação de problemas já existentes para atender determinadas demandas do professor. Neste sentido, a formulação de problemas pelo professor não seria algo que se oporia e este instrumento didático poderoso, mas seria uma forma de estreitar a parceria necessária, e desejável, entre docente e livro didático em todos os níveis de ensino, em particular nos Anos Iniciais.

Ressalta-se ainda que, assim como em estudos anteriores (GONZALES, 1994; LEUNG, 1994, 1996; SOUZA, 2015), professores necessitam de experiência adicional e instrução acerca da formulação de problemas matemáticos. Dentre os conhecimentos docentes, é necessário desenvolver habilidades relativas especificamente à formulação de

problemas que requerem a criação de um novo problema a partir de uma situação ou experiência (SILVER; MAMONA-DOWNS; LEUNG; KENNY, 1996). Ao formular problemas, o professor precisa tornar-se consciente: (i) das propriedades do conceito matemático envolvido; (ii) da natureza do contexto em que o problema será apresentado; (iii) de quem irá solucioná-lo; e (iv) dos possíveis procedimentos de resolução a serem adotados.

Pelo que se nota, uma série de conhecimentos estão envolvidos, os quais precisam ser considerados na formação do professor que ensina Matemática. Como afirmado por Leung e Silver (1997), quando uma compreensão mais ampla de problemas matemáticos for alcançada, será possível propor uma pedagogia de formulação de problemas no currículo de Matemática, tanto por parte do aluno, como por parte do professor.

Referências

- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Sage USA, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processos e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 5-12.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática)**. Brasília: MEC, 1997.
- CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática: reflexões pedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 36-47.
- CHAUVEL, D.; LAGOUEYTE, I. **Vinte e cinco situações-problema na educação infantil**. 1ª ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2010. 192 p.
- CHICA, C. Por que formular problemas? In: SMOLE, K.; DINIZ, M. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 151-173.
- CRESPO, S. Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Netherlands, v. 52, p. 243-270, 2003.
- CUNHA, M. J. G. **Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do ensino médio**. 2015. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.
- DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.
- ENGLISH, L. The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Netherlands, v. 34, p. 183-217, 1997.
- FISHER, R. **Problem solving in primary school**. 1ª ed. Oxford: Basil Blackwell, 1987. 264 p.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 1^a ed. São Paulo: Editora PROEM, 2014. 136 p.

GONZALES, N. A. 'Problem posing: A neglected component in mathematics courses for prospective elementary and middle school teachers'. **School Science and Mathematics**, Wiley & Sons, USA, v. 94, n. 2, p.78-84, 1994.

GUIMARÃES, G. L.; SANTOS, R. R. Criança elaborando problemas de estrutura multiplicativa. **Educação Matemática em revista**, São Paulo, ano 14, n. 26, mar. 2009. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/files/revista14_26.pdf. >. Acesso em: 10 de abr. 2015.

ITACARAMBI, R. R. **Resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental**. 1^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. 111 p.

KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from? In: SCHOENFELD, A. (Org.). **Cognitive science and mathematics education**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 123-147.

LAUTERT, S. L. et al. Noções introdutórias das estruturas multiplicativas em livros didáticos do ciclo de Alfabetização. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 4., 2015, Ilhéus. **Anais 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz, 2015. p. 1-12.

LEUNG, S. S. On analyzing problem-posing processes: a study of prospective elementary teachers differing in mathematics knowledge. In: PONTE, J. P.; MATOS, J. F. (Org.). INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 18., 1994, Lisboa. **Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Lisboa, Portugal: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1994. p. 168-175.

LEUNG, S. S. Problem posing as assessments: Reflections and re-constructions. **The Mathematics Educators**, USA, v. 1, n. 2, p.159-171, 1996.

LEUNG, S. S.; SILVER, E. A. The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. **Mathematics Education Research Journal**, Springer Netherlands, . 9, n. 1, p. 5-24, 1997.

LOWRIE, T. Young children posing problems: the influence of teacher intervention on the type of problems children pose. **Mathematics Education Research Journal**, Springer Netherlands, v. 14, n. 2, p. 87-98, 2002.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), Bauru, v. 20, p. 517-533, 2014.

MELO, G. F. A. Saberes docentes de professores de matemática em um contexto de inovação curricular. In: FIORENTINI, D; NACARATTO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento de professores que ensinam matemática**. São Paulo: Musa Editora, 2005. p. 33-48

MORENO, B. R. O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1^a. série. In: PANIZZA, M. (Org.). **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análise e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006. p.43-76.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. DA S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 160 p.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender matemática**. 1ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 152 p.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2a. ed. Rio de Janeiro: Interciências, 1995. 196 p.

SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. **Revista de currículo y formación del profesorado**, Granada, v. 9, n. 2, p. 1-30, 2005. Disponível em: <<http://www.ugr.es/local/recfpro/rev92art1.pdf>>. Acesso em: 03 de set. 2015.

SILVER, E. A. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, FLM Publishing Association, Canada, v. 4, n. 1, p. 19-28, 1994.

SILVER, E. A. ; MAMONA-DOWNS, J.; LEUNG, S.; KENNY, P. A. Posing mathematical problems in a complex environment: an exploratory study. **Journal for Research in Mathematics Education**, NCTM USA, v. 27, n. 3, p. 293-309, 1996.

SMOLE, K. C. S. Textos em matemática: por que não? In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p.151- 173.

SOUZA, E. R. R. **Estruturas multiplicativas**: Concepção de professor de ensino fundamental. 2015. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/0B-vmPHQB15bdSlpSQzIENGt4dkU/view>>. Acesso em: 10 de jan. 2016.

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores diante do saber: esboço de uma problemática do saber docente. In: TARDIF, M. (Org.). **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Editora Vozes, 2002. p.31-55.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. (Org.). **Por que ainda há quem não aprende?** A teoria. Petrópolis: Editora Vozes, 2003. p. 21-60.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, p. 133-171, 1990.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). **Acquisition of mathematics**: concepts and process. London: Academic Press, 1983. p.127-174.

ZUNINO, D. L. de. **A matemática na escola**: aqui e agora. 2ª. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 191 p.

Submetido em 25 de Abril de 2016.
Aprovado em 9 de Março de 2017.