Title	Fourier transforms on the motion groups
Author(s)	Kumahara, Keisaku
Citation	
Issue Date	
Text Version	ETD
URL	http://hdl.handle.net/11094/24600
DOI	
rights	
Note	

【22】

氏名・(本籍)	熊　原　啓　作（くま はら けい さく）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　3833　号
学位授与の日付	昭和52年3月18日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**運動群上のフーリェ変換**
論文審査委員	(主査) 教授 尾関　英樹
	(副査) 教授 村上　信吾　教授 竹之内　脩

論文内容の要旨

有限次元ベルトル空間Vに連結コンパクトリー群Kが線型群として作用しているとき，VとKとの半直積群Gを運動群という。Vの指標ξからのGへの誘導表現をU^{ξ}とする。G上の可積分関数fのフーリェ変換を$T_f(\xi)=\int_G f(g)U^{\xi}_g dg$によって定義する。Bを$L_2(K)$上の有界線型作用素のなすバナッハ空間とすれば，$T_f$はVの双対空間$\widehat{V}$上のB値関数である。本論文においては，G上の無限回微分可能かつ台がコンパクトな関数の全体$C_c^{\infty}(G)$およびG上の急減少関数の空間$\mathcal{S}(G)$（定義は後述）のフーリエ変換による像が決定される。

$\triangle$をKのカシミール作用素，RをKの右正則表現とし，$\widehat{V}^c$を$\widehat{V}$の複素化とする。$a>o$に対し$\Omega(a)=$
$=\{(x,k)\in G;\ x\in V,\ |x|\leqq a,\ k\in K\}$とおく，Nを非負整数全体とする。

定理. $\widehat{V}$上のB値関数Tが$\mathrm{supp}(f)\subset\Omega(a)$なる$f\in C_c^{\infty}(G)$のフーリエ変換であるための必要十分条件はTが次の条件(I)〜(III)をみたすことである：(I)Tは$\widehat{V}^c$上のB値整関数に拡張される，(II)V^c上の任意ののK不変多項式関数pおよび任意の$\ell,m\in N$に対して，$\|p(\zeta)\triangle^{\ell}T(\zeta)\triangle^m\|\leqq C_P^{l,m}\exp a|\mathrm{Im}\zeta|$,($\zeta\in V^c$), をみたす$C_P^{l,m}\geqq 0$が存在する，(III)任意の$k\in K$に対して$T(k\zeta)=R_k T(\zeta)R_h^{-1}$。

$\mathfrak{k}$をKのリー代数，$Y_1,\cdots,Y_{\delta}(\delta=\dim K)$を$\mathfrak{k}$の基底，$m\in N^{\delta}$に対し，$y(m)=Y_1^{m_1}\cdots Y_{\delta}^{m_{\delta}}$とおく。$\lambda,\mu$をそれぞれGの左および右正則表現の微分表現とする。

$S=S(G)$を$f\in C^{\infty}(G)$かつ任意の$\alpha\in N^n,\beta\in N,m,m'\in N^{\delta}$に対して，$\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m}(f)=\sup_{(x,k)\in G}|(1+|x|^2)^{\beta}(D_x^{\alpha}\lambda(y(m))\lambda(y(m'))f)(x,k)|<+\infty$となるfの全体とする。次に$\widehat{S}$を$\widehat{V}$上のB値$C^{\infty}$関数であって，任意の$\alpha\in N^n,\beta\in N,m,m'\in N^{\delta}$に対して$\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m'}(T)=\sup_{\xi\in\widehat{V}}\|(1+|\xi|^2)^{\beta}y(m)D_{\xi}^{\alpha}T(\xi)y(m')\|<+\infty$となり，$T(k\xi)=R_k T(\xi)R_k^{-1},(k\in K)$をみたすTの全体とする。Sおよび$\widehat{S}$はそれぞれセミノルム

$\{\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m}\}$ および $\{\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m'}\}$ によってフレッシェ空間となる。

定理　フーリェ変換 $f \to T_f$ はSと$\widehat{S}$との間の位相同型を与える。

Kが単位群のときは上記フーリェ変換はユークリッド空間の通常のフーリェ変換であり，第一の定理はペイリー・ウィーナーの定理の，第二の定理はシュヴァルツの定理の拡張となっている。G上の両側K不変関数に対するフーリェ変換はフーリェ・ベッセル変換を含む。

論文の審査結果の要旨

連結なコムパクトソー群Kの表現が有限次元ベクトル空間V上に与えられる，VとKの半直積群Gを得る。Gを運動群と呼ぶ。Vの指標ξからGのウニタリー表現U^{ξ}が誘導される。G上の可積分関数fのフーリェ変換が

$$T_f(\xi) = \int_G f(g)\, U^{\xi}(g)\, dg$$

により定義される。T_fはVの双対空間$\widehat{V}$より，$L^2(K)$上の有界作用素の作る空間への写像である。

本論文では，運動群G上の無限回微分可能でコムパクトな台をもつ関数全体$C_c^{\infty}(G)$，およびG上の急減少関数の空間S(G)の上述の意味のフーリェ変換による像の特徴づけ，決定を与えている。

$C_c^{\infty}(G)$の場合:$\widehat{V}$上のBに値をもつ関数Tがある$f \in C_c^{\infty}(G)$のフーリェ変換となるための条件は(1) Tは$\widehat{V}^c$の整関数に拡張され，(2)各$\zeta \in \widehat{V}^c$に対し，$T(\zeta)C^{\infty}(K) \subset C^{\infty}(K)$で，K上のラプラス作用素△と$\widehat{V}$上のK-不変多項式に対するある種の不等式条件をみたし，(3)RをKの右正則表現とするとき，$T(k\zeta) = R^k T(\zeta) R_k^{-1}\ (\zeta \in \widehat{V}^c)$，なる3条件であることが示されている。

S(G)の場合：S(G)の像$\widehat{S}$のみたすべき条件が示され，更に，Sのある標準的位相に関し，S(G)と$\widehat{S}$とが位相同型なることが示されている。

以上の結果はK＝{e}として，Payley-Wienerの定理，Schwartzの定理を含んでいる。

以上の様に，本論文はある種のリー群上のフーリェ変換の特徴づけを与えたもので，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。