

FRACTURA DEL HORMIGÓN EN RÉGIMEN ELÁSTICO Y LINEAL. UN EJEMPLO: LA PRESA DE FONTANA

(LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS OF CONCRETE.
AN EXAMPLE: FONTANA DAM)

Manuel Elices y Javier Llorca
Escuela de Ingenieros de Caminos
Universidad Politécnica de Madrid

Anthony R. Ingraffea
Departamento de Estructuras
Universidad de Cornell, Ithaca, N. Y.

450-18

RESUMEN

La Mecánica de la Fractura en régimen elástico y lineal es aplicable a grandes elementos de hormigón en masa porque la zona de fractura suele ser pequeña en comparación con las dimensiones del elemento estructural y es posible caracterizar, en estos casos, el estado tensional en el fondo de una fisura mediante el factor de intensidad de tensiones. El artículo consta de dos partes: En la primera se describen las técnicas de elementos finitos utilizadas para modelizar la propagación de una fisura y en la segunda parte se comenta la aplicación de las mismas a un caso real, el estudio de una fisura en una presa de gravedad.

SUMMARY

Linear Elastic Fracture Mechanics can be applied to plain concrete provided the fracture process zone be small compared with the size of the structural element. In this situation the stress state at the tip of the crack can be characterized by means of the stress intensity factor. The first part of the paper considers modeling crack extension in concrete by the finite element method. The second part deals with an example problem, the cracked Fontana Dam.

INTRODUCCION

Aunque la Mecánica de Fractura proporcionó desde sus comienzos el fundamento teórico necesario para estudiar la propagación de una grieta en un macizo de hormigón, ha sido recientemente cuando se ha dispuesto de programas que permiten analizar de un modo sencillo y eficaz la evolución de una fisura mediante el método de los elementos finitos y la teoría de Mecánica de Fractura elástica y lineal.

El motivo de este desfase han sido los problemas de cálculo que plantea la propagación de fisuras. Por un lado, al propagarse la fisura se produce un cambio en la topología de la malla de elementos finitos y en muchas ocasiones es necesario añadir nuevos elementos para seguir manteniendo la precisión en los cálculos. Este hecho obliga a disponer de subrutinas que automáticamente modifiquen la malla junto al borde de la fisura y minimicen el ancho de banda para que los tiempos de cálculos sean aceptables. Además, es necesario colocar junto al borde de la fisura elementos finitos especiales que permitan modelizar la singularidad de tensiones. La realización manual de cada una de estas operaciones en cada incremento de la longitud de la fisura hacían imposible este tipo de análisis. En

vista de ello, los primeros programas de propagación discreta de fisuras (Ngo y Scordelis, 1967; Mufti y otros, 1970) utilizaban criterios estrictamente tensionales, y no los basados en la Mecánica de Fractura, para indicar la dirección de propagación de la fisura y obligaban a que la fisura se propagase entre los bordes de los elementos. Estas aproximaciones presentaban serios inconvenientes y los resultados numéricos no estaban de acuerdo en muchos casos con la experimentación. Posiblemente estas dificultades indujeron la aparición de otros modelos como el de la fisura difusa, propuesto por Rashid en 1968. En opinión de los autores fueron las dificultades de cálculo y no el planteamiento físico del problema los que hicieron que se abandonara el modelo de propagación discreta de fisuras por otros modelos distintos (Sauoma, 1981).

Por otro lado, no se puede olvidar que la mayor parte del tiempo total empleado en un análisis por elementos finitos se consume en la entrada de datos y el análisis de los resultados. Este tiempo puede aumentar en el problema que nos ocupa en el que después de cada incremento en la longitud de la fisura es necesario examinar los resultados e introducir las modificaciones necesarias para no perder precisión. Estos dos aspectos del análisis —preproceso y posproceso— no sólo consumen la mayor

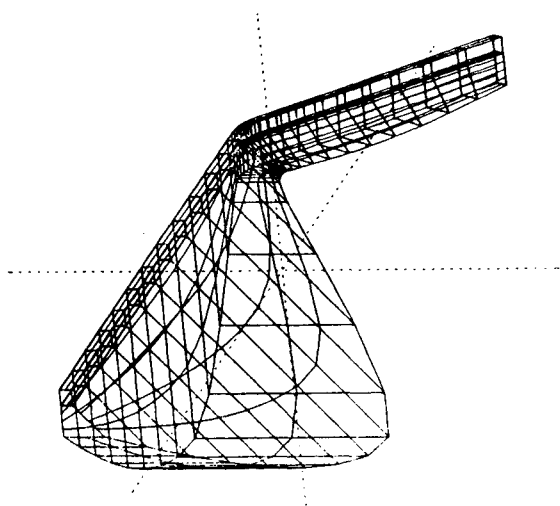


Fig. 1.—Presa de Fontana. Malla de elementos finitos tridimensionales.

parte del tiempo sino que, por su naturaleza, están sujetos al error humano. Para obviar estas dificultades se hace necesaria una mejor comunicación entre el hombre y la máquina, como la proporcionada por los programas interactivos gráficos que se han desarrollado en los últimos años (Tracy, 1977; Haber y otros, 1981; Perucchio e Ingrassia, 1983; Perucchio, Ingrassia y Abel, 1982). Un ejemplo de las posibilidades de estos programas queda reflejado en el estudio de la presa de Fontana en el que la malla se generó en unas pocas horas (Fig. 1). En la segunda parte de este artículo se comentarán los resultados obtenidos en este cálculo.

Todas estas técnicas numéricas y gráficas han sido implementadas en un código denominado «Finite Element Fracture Analysis Program» (FEFAP) para casos bidimensionales o asimétricos (Sauoma, 1981; Ingrassia y Sauoma, 1983). El programa se basa en una serie de algoritmos que rehacen y refinan automáticamente la malla en la proximidad de la fisura para permitir la propagación en la dirección indicada por la mecánica de fractura, pudiendo propagarse la fisura en cualquier dirección, sin que exista ninguna limitación. Después de cada incremento de la longitud de la fisura en el que se han creado nuevos nodos, todos los nodos se renumeran automáticamente para conseguir un ancho de banda mínimo (Gibbs y otros, 1976). Es cierto que el tamaño del problema aumenta con la propagación de la fisura en comparación con el modelo de la fisura difusa, pero es que así debe ser porque la complejidad del campo de deformaciones aumenta al propagarse la fisura y es necesario un mayor número de grados de libertad si se quiere mantener un nivel de precisión suficiente.

Junto a esto, las posibilidades gráficas del programa permiten observar en cualquier momento del proceso y en tiempo real los detalles de la nueva malla, la forma de la deformada, las tensiones principales,

las trayectorias previstas para la fisura, etc., y la información numérica necesaria para determinar la situación de la estructura analizada.

Como ejemplo, se comenta la aplicación de estas técnicas al estudio de la propagación de una fisura en una presa de gravedad. El estudio se hizo en 1980, cuando todavía no se habían desarrollado todas las subrutinas a las que hace referencia la primera parte del artículo, pero en esencia la forma de abordarlo fue la misma. El cálculo permitió confirmar las hipótesis sobre el origen de la fisura y estimar el alcance de las medidas adoptadas para la reparación.

FUNDAMENTO TEORICO

Como ya se ha señalado en otro artículo de esta revista (Elices, 1985), los principales problemas a resolver son el cálculo de los factores de intensidad de tensiones cuando la fisura se propaga, la determinación de la estabilidad y dirección de propagación y del incremento de longitud de la fisura.

1. Cálculo de los Factores de Intensidad de Tensiones

Entre los diversos métodos existentes para calcular los factores de intensidad de tensiones, el más común es el que utiliza los desplazamientos u y v (Fig. 2) en los nudos cercanos al borde de la fisura.

Los valores teóricos de estos desplazamientos en coordenadas polares referidas al borde de la fisura son (Elices, 1986):

$$u = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \\ + \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad (1)$$

$$v = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \\ + \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[-(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad (2)$$

donde:

u : desplazamiento paralelo al eje de la fisura.
 v : desplazamiento perpendicular al eje de la fisura.

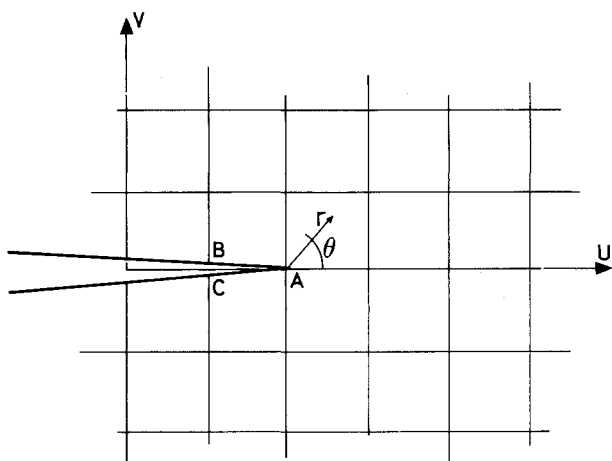


Fig. 2.—Coordenadas y notación en el fondo de una fisura.

ν : módulo de Poisson.

G : módulo de rigidez transversal.

κ : $(3 - 4\nu)$ para deformación plana.

κ : $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ para tensión plana.

Como puede verse en las ecuaciones anteriores, los valores de u y v están desacoplados para $\theta = \pm 180$. Entonces se obtiene:

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{G}{\kappa + 1} (v_B - v_C) \quad (3)$$

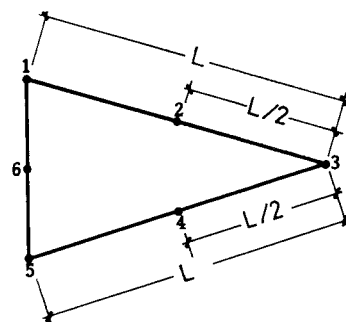
$$K_{II} = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{G}{\kappa + 1} (u_B - u_C) \quad (4)$$

Obviamente la precisión de este método para calcular K_I y K_{II} depende de cómo se modelice la singularidad de desplazamientos que existe en el borde de la fisura. Muchos autores han aplicado el método de los elementos finitos para ello. Los primeros trabajos empleaban la fuerza bruta. Se usaban triángulos de deformación constante en unión con mallas extremadamente finas junto a la fisura. El mayor problema para usar este tipo de elementos es que se aumenta mucho el número de grados de libertad, aún para geometrías simples.

El siguiente método, desarrollado para utilizar la técnica de los desplazamientos, fue usar elementos en los que la función de interpolación de los desplazamientos presentaba una singularidad $r^{1/2}$, semejante a la que se produce en el borde de la fisura (Barsoum, 1976; Freese y Tracey, 1976; Astiz, 1986). El que ha dado mejores resultados es el triángulo isoparamétrico de 6 nudos, en el que los nudos situados en el medio de los lados que confluyen en la fisura se colocan a un cuarto del borde de la fisura (Fig. 3).

La aplicación de estos elementos para calcular factores de intensidad de tensiones fue propuesta por Shih (Shih y otros, 1976) para problemas con sollicitación en modo I. Shih ya señaló que el uso de las expresiones (3) y (4) no explotaba completamente

ELEMENTO ISOPARAMETRICO TRIANGULAR



ELEMENTO ISOPARAMETRICO SINGULAR

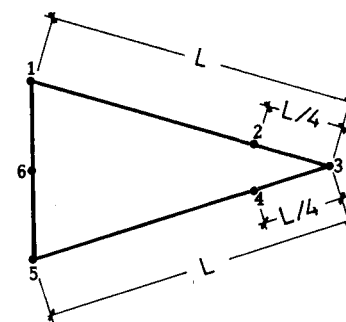


Fig. 3.—Triángulos isoparamétricos de seis nudos.

las posibilidades de precisión del nuevo elemento: se podía determinar mejor el factor de intensidad de tensiones igualando todo el coeficiente del término en $r^{1/2}$ del desarrollo en serie teórico con todo el coeficiente del término en $r^{1/2}$, obtenido del elemento singular. Esta técnica mejorada, y su generalización a problemas con sollicitación mixta en modos I y II, fue desarrollada por Ingraffea y otros (Ingraffea y Manu, 1978 y 1980).

Supongamos una fisura rodeada por elementos singulares como se indica en la figura 4. Los despla-

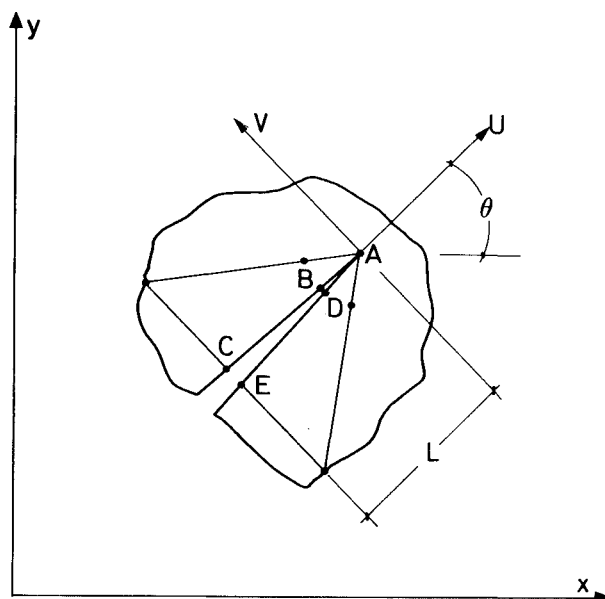


Fig. 4.—Elementos singulares que rodean el fondo de una fisura.

mientos de los labios de la fisura en función de los desplazamientos en el resto de los nudos son:

$$v = v_A + \frac{(-3v_A + 4v_B - v_C) \sqrt{r/L} + (2v_A - 4v_B + 2v_C) r/L}{r/L} \quad (5)$$

$$u = u_A + \frac{(-3u_A + 4u_B - u_C) \sqrt{r/L} + (2u_A - 4u_B + 2u_C) r/L}{r/L} \quad (6)$$

Expresiones similares se obtienen a lo largo de la línea ADE. Igualando los valores obtenidos analíticamente para $\theta = \pm 180^\circ$ [ecuaciones (1) y (2)], a los calculados [ecuaciones (5) y (6)] y obligando a que los coeficientes de la misma potencia de r sean iguales, se llega a las expresiones:

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{\kappa + 1} [4(v_B - v_D) + v_E - v_C] \quad (7)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{\kappa + 1} [4(u_B - u_D) + u_E - u_C] \quad (8)$$

La precisión de estas sencillas expresiones ha sido comprobada comparando con los resultados obtenidos por otros autores para diversas geometrías (Sauoma, 1981). Las conclusiones a que se llega es que la precisión depende de la relación L/a y del número de elementos singulares que rodean la fisura.

Con relación al parámetro L/a , se han comparado los resultados obtenidos con este método con los indicados en la norma ASTM-E399 para probetas de flexión en tres puntos (Ingraffea y Manu, 1978). Las diferencias eran de -8% para $L/a = 0,20$ a -1% para $L/a = 0,03$. En general, y para evitar mallas excesivamente finas, se puede señalar que el parámetro L/a debe estar comprendido entre:

$$0,05 < \frac{L}{a} < 0,15 \quad (9)$$

Aunque FEFAP no incluye esta condición, el usuario puede interactivamente modificar el tamaño de los elementos situados en el borde de la fisura variando la posición de algunos nudos.

Respecto a los elementos que rodean la fisura, los resultados indican que ningún elemento debe abarcar un ángulo mayor de 60° , siendo óptimo el valor de 45° . El algoritmo de FEFAP que rehace la malla en la zona próxima a la fisura tiene en cuenta esta restricción.

2. Determinación de la Estabilidad y Dirección de Propagación

Existen varias teorías para predecir el momento en que se producirá la propagación de la fisura y la di-

rección en que se hará para fisuras sometidas a estados biaxiales. Las principales teorías han sido expuestas en otro artículo de esta revista (Elices, 1985) y aquí nos limitaremos a dar las expresiones que se utilizan en el cálculo.

El criterio de la tensión circunferencial máxima señala que la propagación se producirá en la dirección θ_0 , que es la solución de la expresión:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (10)$$

y la inestabilidad se inicia cuando se cumple:

$$\cos \frac{\theta_0}{2} (K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0) = K_{Ic} \quad (11)$$

El criterio de la densidad de energía de deformación indica que la fractura comenzará cuando se alcance el valor crítico de este parámetro S_{cr} , que viene dado por la siguiente expresión:

$$S_{cr} = \frac{1}{\pi} (a_{11} K_I^2 + 2 a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2) \quad (12)$$

donde:

$$a_{11} = \frac{1}{16G} (1 + \cos \theta_0) (\kappa - \cos \theta_0) \quad (13)$$

$$a_{12} = \frac{\sin \theta_0}{16G} [2 \cos \theta_0 - (\kappa - 1)] \quad (14)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16G} [(\kappa + 1) (1 - \cos \theta_0) + (1 + \cos \theta_0) (3 \cos \theta_0 - 1)] \quad (15)$$

La dirección de propagación viene dada por el ángulo θ_0 , que se obtiene obligando a que S tenga un mínimo.

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} [a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2] \quad (16)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (17)$$

El valor de la densidad de energía de deformación crítica S_{cr} está relacionado con K_{Ic} . Para $K_{II} = 0$, las ecuaciones (16) y (17) predicen $\theta_0 = 0$. Entonces sustituyendo en la ecuación (12) se llega a:

$$S_{cr} = \frac{(\kappa - 1) K_{Ic}^2}{8 \pi G} \quad (18)$$

Es interesante señalar que la dirección de propagación que propone esta teoría no es independiente de las constantes elásticas del material, sino que depende del módulo de Poisson, a excepción del caso en que $K_{II} = 0$.

La tercera teoría utilizada es la de la tasa de liberación de energía G . Este parámetro está relacionado con los factores de intensidad de tensiones de acuerdo con la siguiente expresión:

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (19)$$

siendo:

$E' = E$ para deformación plana.

$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ para tensión plana.

Los valores del factor de intensidad de tensiones en una fisura que se propaga una longitud infinitesimal formando un ángulo con la dirección principal de la fisura (Hussain y otros, 1974), vienen dados por (Fig. 5):

$$K_I(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{1 + \theta/\pi}{1 - \theta/\pi} \right)^{-\theta/2\pi} \cdot \left[K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (20a)$$

$$K_{II}(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{1 + \theta/\pi}{1 - \theta/\pi} \right)^{-\theta/2\pi} \cdot \left[K_{II} \cos \theta - \frac{1}{2} K_I \sin \theta \right] \quad (20b)$$

donde K_I y K_{II} son los factores de intensidad de tensiones aplicados en el borde de la fisura principal.

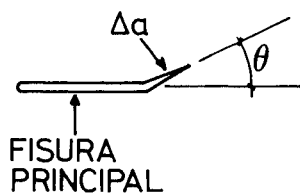


Fig. 5.—Fisura desviada. Notación.

La dirección de propagación de la fisura θ_0 se obtiene obligando a que $G(\theta)$ sea máximo, es decir:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{K_I^2(\theta) + K_{II}^2(\theta)}{E'} \right] \text{ y } \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} > 0 \quad (21)$$

La fisura comienza a propagarse cuando G alcanza un valor crítico G_{cr} que se obtiene del siguiente modo:

$$G_{cr} = \frac{K_I^2(\theta_0) + K_{II}^2(\theta_0)}{E'} \quad (22)$$

Como en el caso anterior, es fácil establecer una relación entre K_{Ic} y G_{cr} . En el caso de sollicitación en modo I exclusivamente, $K_{II} = 0$, y:

$$G_{cr} = \frac{K_I^2}{E'} \quad (23)$$

3. Incremento de la longitud de fisura

El tercer y último paso en el algoritmo de propagación de fisuras es la determinación de la variación de la carga requerida para propagar la fisura una longitud determinada. Alternativamente puede fijarse la variación de la carga y buscar el incremento de longitud de la fisura que se produce. El principio fundamental es que, una vez iniciada la fisura, continuará creciendo mientras disponga de energía suficiente o, de modo equivalente, mientras el parámetro que señala la inestabilidad de la fisura en cada teoría supere el valor crítico.

A la hora de generar el algoritmo que realice esta función, existen varias situaciones posibles que deben estudiarse independientemente. En todos los casos se supone que ya se conoce cuál es la dirección de propagación de la fisura, θ_0 , según lo indicado anteriormente.

— Caso 1: El factor de intensidad de tensiones aumenta monótonamente con la longitud de la fisura (Fig. 6a).

Para una carga P_i , si la fisura inicial fuera menor que a_i , no habría propagación. Para $a = a_i$, la fisura se propagaría hasta rotura puesto que al aumentar a aumenta el factor de intensidad de tensiones que será siempre superior al valor crítico. Para evitar esta inestabilidad, debe calcularse cuánto debe disminuir la carga para que la fisura se propague una longitud predeterminada Δa . Esta nueva situación se puede ver en la curva OA' .

Para calcular el nuevo valor de la carga P_{i+1} debe resolverse la ecuación:

$$K_{Ic} = \alpha_i P_i \sqrt{a_i} = \alpha_{i+1} P_{i+1} \sqrt{a_{i+1}} \quad (24)$$

donde:

α : Factor dependiente de la geometría y de la teoría utilizada.

Entonces:

$$P_{i+1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} P_i \sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}} \quad (25)$$

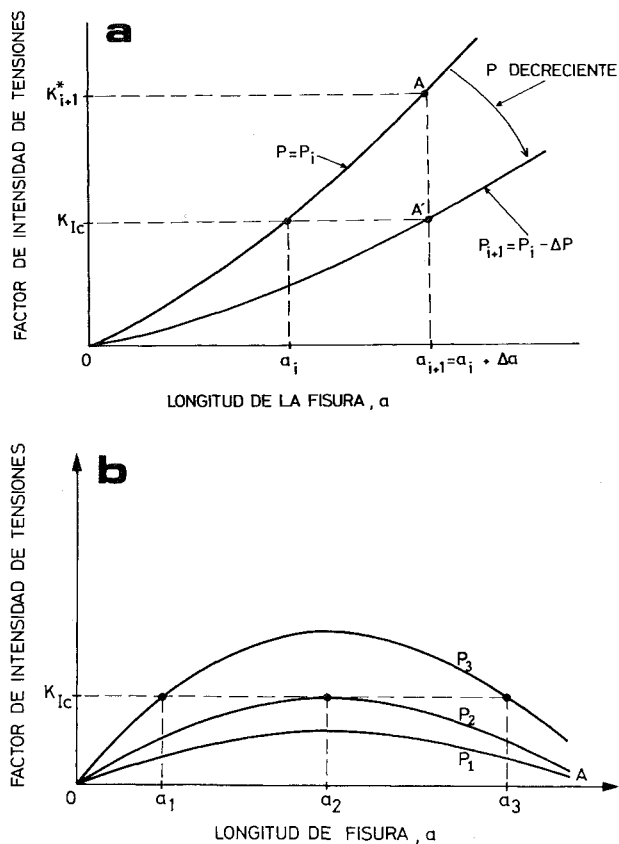


Fig. 6.—Variación del factor de intensidad de tensiones para el caso 1 (a) y para el caso 2 (b).

Esta ecuación sólo se puede usar directamente si el coeficiente α_{i+1} se conoce en el paso i . De no ser así, otra solución al problema es propagar la fisura, a , en la dirección θ_0 y calcular el valor del factor de intensidad de tensiones K_{i+1}^* para una carga P_i . El valor del nuevo nivel de carga será:

$$P_{i+1} = \left(\frac{K_{Ic}}{K_{i+1}^*} \right) P_i \quad (26)$$

- Caso 2: El factor de intensidad de tensiones crece hasta alcanzar un máximo y luego decrece al aumentar la longitud de la fisura (Fig. 6b).

Para un nivel de carga P_1 no existe propagación de la fisura. Para un nivel de carga P_2 , la propagación sólo es posible para a_2 , pero $\Delta a = 0$. Para un nivel de carga P_3 , la propagación se producirá para a_1 y será inestable en control de carga. Se ha de utilizar un método semejante al del caso 1 para propagar la fisura hasta una longitud a_2 .

Para fisuras mayores que a_2 , la propagación de la fisura es estable bajo control de carga y se necesita un incremento continuo de la carga para propagar la fisura. En este caso puede usarse la ecuación (26). La única diferencia es que el coeficiente (K_{Ic} / K_{i+1}^*) será siempre mayor que uno.

- Caso 3: El factor de intensidad de tensiones decrece hasta llegar a un mínimo y luego crece monótonamente con la longitud de fisura.

Esta situación puede estudiarse con los algoritmos descritos para los casos 1 y 2.

Aunque esta técnica es sólo exacta para el caso de sollicitación en modo I y propagación lineal de la fisura, los resultados obtenidos se aproximan bastante a la realidad si los valores de, a , elegidos en cada paso son suficientemente pequeños.

METODO DE CALCULO

FEFAP está preparado para analizar problemas planos (tensión plana, deformación plana o axilimétricos). El programa está dividido en cuatro bloques principales: proceso de los datos de entrada, análisis de la estructura, proceso de los resultados y algoritmos para iniciación y propagación de fisura. El programa está preparado para ejecutarse en un ordenador de 32 bits con memoria virtual.

Para facilitar la entrada de datos y el análisis de los resultados se hace uso de las nuevas técnicas de gráficos por ordenador. Los datos se suministran al ordenador mediante una tableta gráfica y un lápiz y aparecen dibujados inmediatamente en un terminal gráfico de alta resolución. Este terminal puede realizar instantáneamente primeros planos y rotaciones de las figuras para facilitar la comprensión de la malla. De esta manera se pueden detectar y corregir los errores en la entrada de los datos. El ordenador transforma los datos introducidos gráficamente en la información numérica necesaria para realizar el análisis por el método de los elementos finitos. Un cursor dibujado en el terminal representa en todo momento la posición del lápiz. Los datos geométricos y numéricos pueden introducirse en cualquier momento señalando con el lápiz en el lugar adecuado. Los comandos para la ejecución del programa pueden activarse señalando con el lápiz en unos menús predefinidos que aparecen en la pantalla. Estos menús constituyen también una ayuda que guía al usuario en todo el proceso (Harber y otros, 1981).

La descripción de un problema para ser analizado por el método de los elementos finitos puede separarse en dos bloques. Por un lado, la descripción geométrica y topológica de la estructura que lleva consigo establecer las coordenadas de los nudos, su numeración y las conexiones existentes entre ellos. Por otro lado, hay que asignar las propiedades de los materiales, las condiciones de contorno, cargas, etc. Debido a esto el programa para el proceso de los datos de entrada tiene una naturaleza modular. Una base de datos común contiene una descripción completa de la estructura en cada momento. Cada módulo del programa añade algún dato

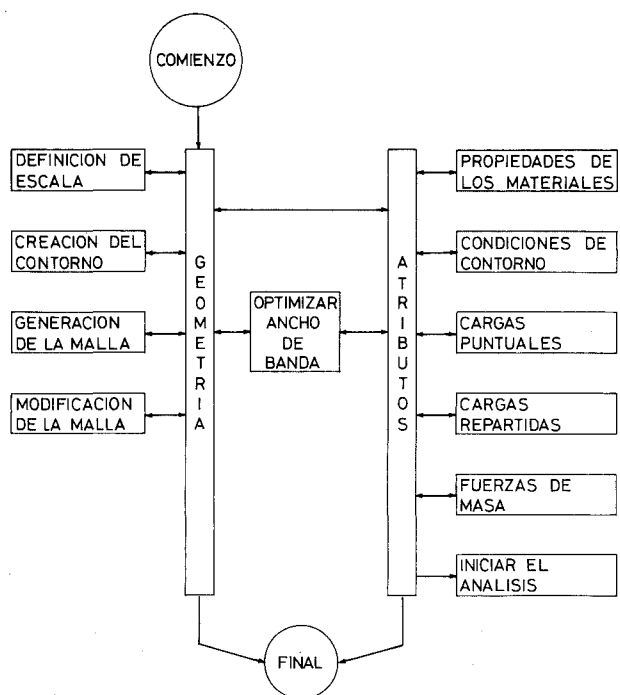


Fig. 7.—Diagrama de flujo del preproceso.

nuevo a esta base de datos o la modifica y las variaciones introducidas se reflejan inmediatamente en el terminal gráfico. El diagrama de flujo del preproceso está esquematizado en la figura 7.

Los módulos principales para la descripción geométrica de la estructura son:

- Definición de la escala y el tamaño de la zona de la pantalla en la que se va a definir la estructura.
- Descripción y generación de los contornos de las diversas regiones en las que se divide la estructura. Los contornos se almacenan en el ordenador en forma discreta. Los nudos que señalan la descripción discreta de cada curva se denominan «nudos de control». Los nudos de control pueden introducirse a través del teclado o bien gráficamente con el lápiz. También se pueden representar otras curvas directamente mediante funciones preprogramadas.
- Generación de las mallas de elementos finitos en cada una de las regiones. Para ello se define previamente el número de nudos existentes en cada una de las curvas de contorno (Figs. 8 y 9). Los nudos pueden colocarse equiespaciados dentro de cada curva o bien variando linealmente la distancia entre cada uno y el siguiente a lo largo de la curva. De este modo se puede hacer más fina la malla en la zona donde se desea tener una mayor precisión.

El análisis en detalle de la rutina que genera automáticamente la malla cae fuera del objetivo de este

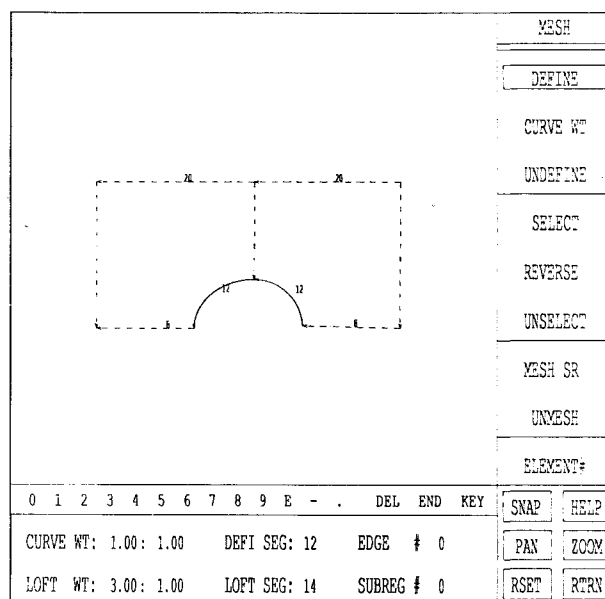


Fig. 8.—Generación de mallas. Selección de nudos en el contorno.

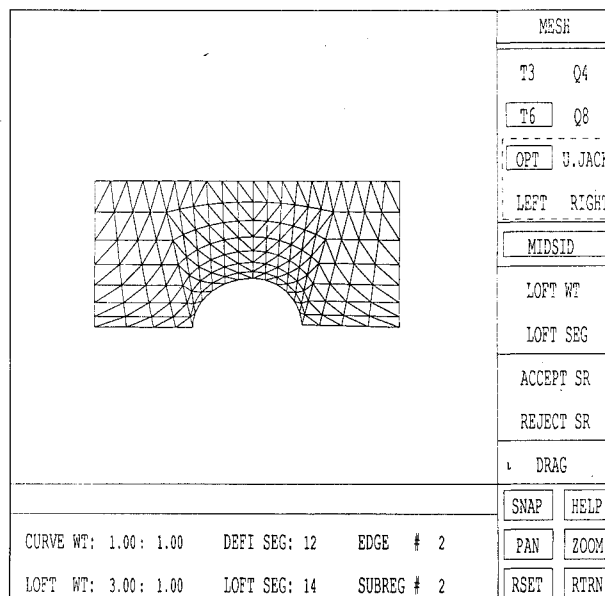


Fig. 9.—Malla generada.

artículo (Haber y otros, 1981; Gordon y Hall, 1973; Perucchio y otros, 1982). Esta rutina examina la forma de los elementos generados indicando si alguno de ellos debe cambiarse por tener ángulos excesivamente agudos u obtusos o poseer una relación alto/ancho demasiado pequeña o grande.

Una vez generada la malla, es necesario añadir el resto de la información necesaria para el análisis. Aunque algunos de estos atributos ha de introducirse numéricamente (p.e., las propiedades de los materiales), la unión de estos datos con los datos geométricos se puede realizar de un modo más sencillo mediante técnicas gráficas tales como señalar los nudos o los elementos, a los que se quiere

conferir una determinada propiedad, con el lápiz. Los módulos principales de esta segunda parte del preprocesador son:

- Asignar las propiedades de los materiales a cada uno de los elementos.
- Asignar las condiciones de contorno en desplazamientos de la estructura, bien en forma de restricciones nodales o con restricciones multipunto.
- Generar las cargas que van a actuar sobre la estructura. Las cargas pueden aplicarse sobre la estructura de tres modos diferentes. En el caso de cargas concentradas en los nudos se crea una lista de cargas, cada una de ellas definida por su valor en las direcciones X, Y y Z y luego se asignan a los nudos respectivos. Pueden asignarse también cargas distribuidas a lo largo de un contorno. En cada punto del contorno la carga debe estar determinada por su magnitud y dirección. Para facilitar la entrada de los datos se han desarrollado rutinas que interpolan los valores de las cargas en cualquier punto del contorno a partir de los valores en los extremos. La dirección de las cargas puede referirse a las coordenadas locales de un elemento o a las generales de la estructura. Finalmente pueden generarse fuerzas de masa estableciendo el valor de la aceleración en cada una de las direcciones del espacio.

El programa está preparado para admitir múltiples casos de carga en cada uno de los cuales puede haber todos los tipos de cargas señaladas anteriormente.

Una vez introducidos todos los datos necesarios se activa un programa de traducción que crea los archivos necesarios para el programa de elementos finitos. Después se minimiza el ancho de banda mediante la rutina desarrollada por Gibbs (Gibbs y otros, 1976). El análisis global se realiza ensamblando sólo los grados de libertad activos y la solución del sistema de ecuaciones se lleva a cabo usando un algoritmo basado en la descomposición de Cholesky (Bathe y Wilson, 1976; Chang, 1976).

Cuando se han obtenido los corrimientos en los nudos, se inicia el proceso de los resultados. El programa de posproceso tiene también naturaleza modular y calcula los siguientes resultados del análisis:

- Reacciones en los nudos ligados.
- Tensiones principales y en las direcciones del sistema de coordenadas cartesianas en los puntos de Gauss.
- Dibujo de la deformada de la estructura.
- Dibujo del contorno de la malla en el que se incluyen las tensiones principales (tensiones de tracción o de tracción y compresión).
- Si existen fisuras calcula los valores de K_I y K_{II} y el valor de la tasa de liberación de energía G .

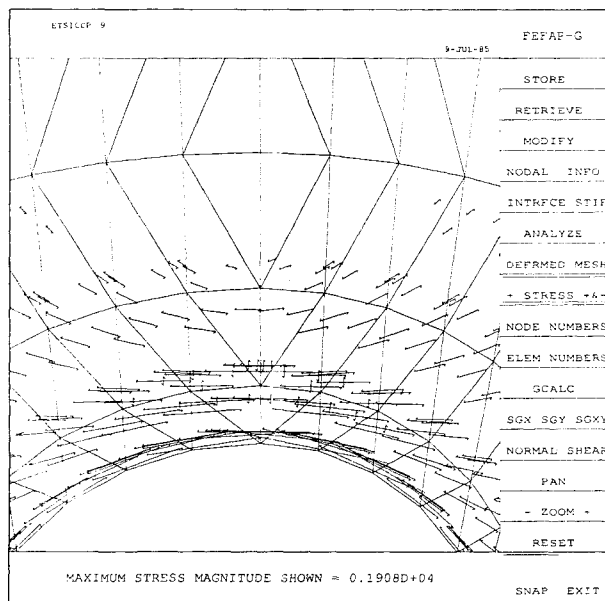


Fig. 10.—Dirección y magnitud de las tensiones máximas.

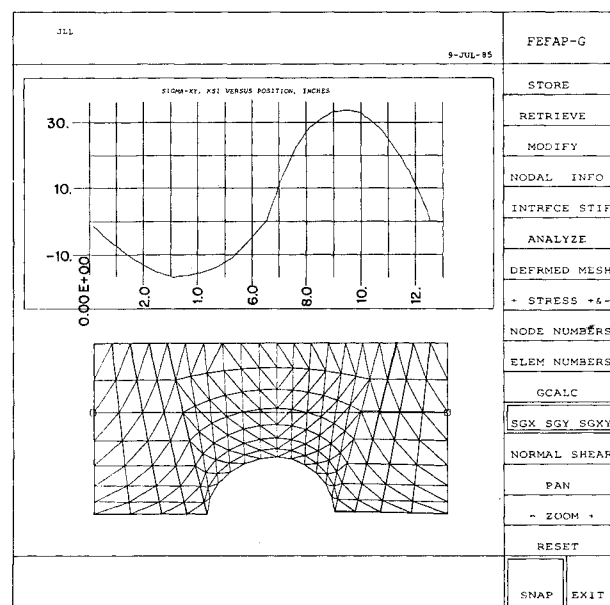


Fig. 11.—Variación del estuerzo cortante a lo largo de la estructura.

Todos estos valores pueden transportarse al terminal gráfico fácilmente, sin más que señalar con el lápiz el parámetro deseado del menú (Figs. 10 y 11).

Cuando se ha estudiado en detalle el comportamiento de la estructura, se puede proceder a un nuevo análisis variando la topología de la malla (iniciación de una fisura, propagación de una fisura ya existente) o bien variando cualquiera de los atributos que se asignan en el programa de entrada de datos (propiedades de los materiales, cargas, condiciones de contorno).

La estrategia general seguida para propagar la fisura a través de la malla de elementos finitos es la siguiente (Sauoma, 1981):

1. A partir de la dirección inicial del eje de la fisura y del ángulo θ_0 , se determina el ángulo para la propagación de la fisura en coordenadas globales.
2. Colocar los nudos de los elementos singulares en el medio de los lados, para eliminar la singularidad local.
3. Definir el nuevo extremo de la fisura cuyas coordenadas se calculan a partir del incremento de longitud y de la dirección de propagación.
4. Definir un nuevo nudo junto al antiguo borde de la fisura.
5. Determinar cuál de los elementos singulares que rodeaban el extremo de la antigua fisura va a ser cruzado por la nueva fisura.
6. Si el borde de la fisura cae dentro de ese elemento, propagar e ir al paso 8. En caso contrario extender la fisura a lo largo de todo el elemento.
7. Localizar el nuevo elemento cruzado por la fisura e ir al paso 6.
8. Definir los nuevos nudos en los que se evaluará el factor de intensidad de tensiones.
9. Ajustar la posición de los nudos en los elementos que sea necesario para crear los elementos singulares junto a la fisura.
10. Comprobar que el ángulo abarcado por cada uno de los elementos singulares que rodea la fisura es menor de 60° . En caso contrario, añadir

un nuevo elemento singular y volver a empezar este paso.

11. Mostrar la nueva malla para permitir realizar al usuario los ajustes que crea convenientes (Fig. 12).
12. Evaluar las matrices de rigidez de los elementos creados o modificados en el proceso.

Cuando lo que se desea es iniciar una fisura, el proceso que sigue el programa es el siguiente:

1. Mostrar en la pantalla la dirección de la nueva fisura (perpendicular a la tensión principal máxima en el punto elegido).
2. Generar dos nudos en el punto donde se va a iniciar la fisura (o solamente uno, en el caso de que la fisura se inicie en un nudo de la malla).

A partir de este punto el tratamiento del problema es el mismo que se usa para propagar una fisura.

El programa permite en cualquier paso del análisis variar el incremento de longitud de la fisura, la teoría por la que se calcula la dirección de propagación de la fisura y guardar un determinado análisis para seguir trabajando con él más adelante.

EJEMPLO: LA PRESA DE FONTANA

1. Descripción de la estructura

La presa de Fontana es una presa de gravedad de 720 m de longitud y 146 m de altura máxima, construida entre 1942 y 1944 en el río Little Tennessee, en Carolina del Norte, EE.UU. A finales de 1972, durante una inspección, se detectó una gran fisura longitudinal en una galería de servicio que motivó la puesta en marcha de un programa de investigación, por parte de los propietarios de la presa, destinado a describir las causas de la fisuración, valorar los daños y proponer medidas para remediar la situación. En este programa intervino la Universidad de Cornell y se tuvo, por primera vez, la oportunidad de aplicar las teorías de la Mecánica de la Fractura en régimen elástico y lineal a una gran estructura de hormigón.

Las primeras fisuras se descubrieron en las paredes de una galería de servicio y después de unos taladros exploratorios se sospechó que la grieta podría propagarse hasta el paramento de aguas abajo que estaba parcialmente cubierto por material de relleno, situación que se confirmó después de una excavación, como se indica en la figura 13. La trayectoria de las grietas que se dirigían hacia el paramento de aguas arriba no se pudo estimar, quedando dudas de si alcanzaba la cimentación o no.

Como consecuencia de la investigación realizada por los propietarios de la presa, se detectaron dos posibles causas del agrietamiento: dilatación térmica

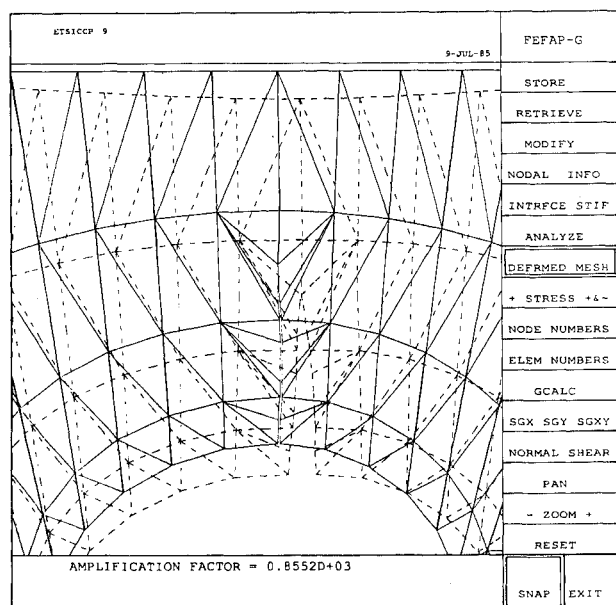


Fig. 12.—Malla fisurada y deformada de la estructura.

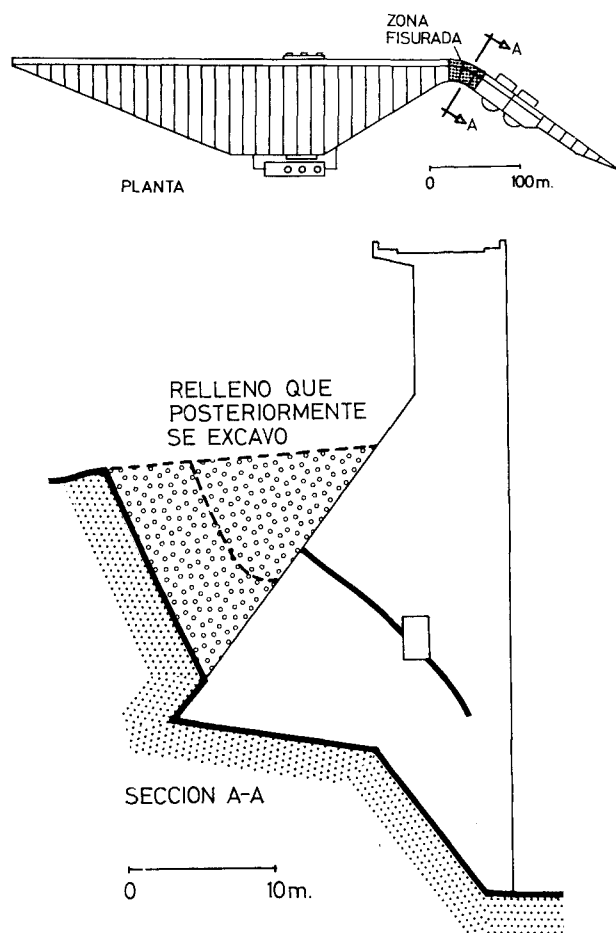


Fig. 13.—Planta y sección, por el codo, de la presa de Fontana.

ca y la presencia de un hormigón expansivo (Abraham y Sloan, 1978). La región donde aparecieron las fisuras se ha indicado en la figura 13, en la planta de la presa.

La orientación, con el paramento de aguas abajo hacia el sur, propicia una considerable absorción de calor durante los meses de verano y por dilatación se generan esfuerzos longitudinales en el codo de la presa que tienden a volcarla hacia aguas arriba. Este movimiento origina tracciones en el paramento de aguas abajo capaces de iniciar la rotura del hormigón. Para confirmar esta hipótesis, se instalaron extensómetros para medir el movimiento de la fisura y se comprobó al año siguiente, durante la primavera y el verano de 1973, que la fisura se abría al aumentar la temperatura del hormigón.

La otra causa del agrietamiento se atribuyó a la dilatación del hormigón por reacción química entre los álcalis del cemento y la sílice activa de los áridos (véase, por ejemplo EH.80, 7.3). Como consecuencia de esta reacción se forma un gel capaz de entumecerse y aumentar de volumen por absorción de agua. Si se impide esta expansión se pueden generar fuertes presiones internas capaces de dilatar el hormigón. Este comportamiento se observó en algunas probetas de hormigón extraídas de la pre-

sa, ensayadas a lo largo de dos años. Estimaciones del estado tensional en el paramento de aguas abajo, en la región donde aparecieron las fisuras, indicaron que se podrían haber alcanzado tracciones de 70 kg/cm^2 en la superficie y de 35 kg/cm^2 en el interior; debidas, posiblemente, a las dos causas mencionadas.

Para contrarrestar la fisuración se tomaron diversas medidas, unas de carácter temporal y otras con ánimo de que fueran definitivas. Entre las primeras, la inmediata fue disminuir la temperatura regando la zona afectada durante los meses calurosos. Las medidas realizadas durante este período indicaron que las tracciones se habían reducido a la mitad y el desplazamiento máximo de la coronación en dirección aguas arriba fue 6 mm menor que durante el verano anterior.

Otra medida, también de carácter temporal, consistió en «coser» la fisura mediante tendones postesados. En total se instalaron 25 tendones, cada uno de 90 alambres de 6 mm de diámetro. Los tendones se anclaron a distintas profundidades, para evitar una concentración de esfuerzos, y se tensaron con cuatro incrementos del 20 % de la carga de rotura. Después del primer escalón de carga se inyectó una lechada de cemento desde la galería con la esperanza de que rezumara por el paramento de aguas abajo, pero no se consiguió. Al terminar el postesado se hizo otra inyección a través de agujeros verticales que cortaban la fisura cerca del paramento de aguas abajo y también se intentó inyectar la fisura que se dirigía hacia la cimentación. Los cálculos realizados y las mediciones tomadas posteriormente confirmaron que, de no haber tomado otras medidas, los tendones se hubieran retesado con el tiempo —porque la sección seguiría basculando— y, posiblemente, habrían alcanzado la carga de rotura alrededor de 1980.

La medida más eficaz consistió en realizar un corte vertical, de 30 m de profundidad y unos 10 cm de anchura, para aliviar la zona fisurada del empuje horizontal. El corte se hizo en la unión entre el último monolito del tramo recto y el primero que inicia la curva, como se indica en la figura 13. Para evitar filtraciones se ideó un complejo sistema de uniones flexibles, descrito someramente en la referencia citada (Abraham y Sloan, 1978). Estas obras terminaron en 1976 y desde entonces la presa se ha instrumentado varias veces y está sometida a una cuidadosa vigilancia.

2. Justificación de las causas de la fisuración

El programa de la investigación tenía por objetivo determinar las causas del agrietamiento —en base a la información suministrada por los propietarios de la presa— y evaluar el comportamiento de la fisura en el futuro. Los datos suministrados fueron registros de temperatura y desplazamientos. Veremos, a continuación, que modelizando la presa con

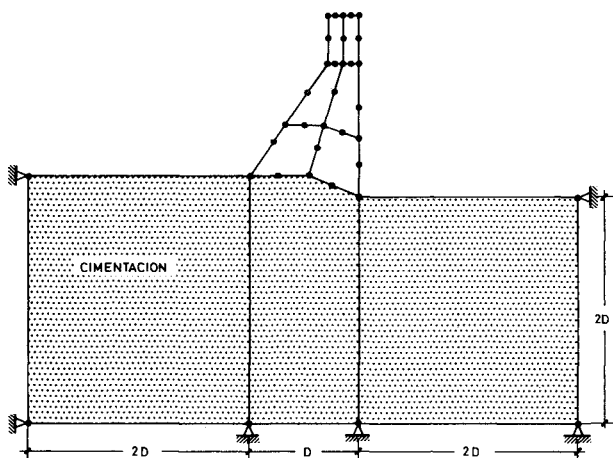


Fig. 14.—Sección de la malla de elementos finitos tridimensionales en la región del codo.

elementos finitos tridimensionales y utilizando una malla no muy fina, se obtuvieron resultados satisfactorios para los objetivos perseguidos.

Para el cálculo se utilizaron elementos isoparamétricos de 20 nudos para la presa y elementos más simples para la cimentación. En la figura 14 se muestra una sección de la malla en la región del codo. Se tuvieron en cuenta cuatro acciones distintas: el peso propio, el empuje hidrostático del agua para distintas cotas de embalse, la presión del relleno en el paramento de aguas abajo y los esfuerzos de origen térmico. Estos últimos se evaluaron a partir de los registros disponibles de temperaturas en los paramentos y en el interior de un bloque central de la presa.

Las isotermas en el resto —y en particular en la región fisurada del codo— se dedujeron por extrapolación. El hormigón se modelizó como un material elástico, lineal, isótropo y homogéneo, con una carga de rotura a compresión de 340 kg/cm^2 , un módulo de rotura de 30 kg/cm^2 y un módulo de elasticidad de 320.000 kg/cm^2 . La cimentación, de la

que se tuvo poca información, también se supuso elástica y lineal, con un módulo de elasticidad de 450.000 kg/cm^2 .

Los resultados del cálculo se muestran en la figura 15. En la figura de la izquierda se han representado los desplazamientos a lo largo de la coronación. Merecen destacarse dos resultados; los efectos térmicos son dominantes y tienden a volcar la presa hacia aguas arriba. En la figura de la derecha se han representado las tensiones transversales para puntos situados en la línea media del paramento de aguas abajo. Nuevamente se observa que la contribución dominante es la térmica, en comparación con la hidrostática o la del peso propio. De todos modos, este resultado no basta para justificar la fisuración puesto que las tensiones calculadas, alrededor de 14 kg/cm^2 , no son suficientes para iniciar la fisura si suponemos que el módulo de rotura es de 30 kg/cm^2 .

La pista para descubrir otra causa de la fisuración la proporcionó el registro de los desplazamientos de la coronación entre 1946 y 1970, indicado en la figura 16. Es un registro oscilante cuyo valor medio crece con el tiempo. Cuando se compara con los registros de la temperatura y del nivel del embalse es fácil encontrar la correlación que existe entre ellos. Por ejemplo, a finales de verano, cuando la temperatura es máxima y el nivel del agua es mínimo, el desplazamiento aguas arriba es máximo y a comienzos de primavera ocurre lo contrario. El dato curioso es que el valor medio de este desplazamiento va aumentando con el tiempo —alcanzando 6 cm en el año 1972— y este fenómeno no depende del nivel del embalse ni de los ciclos térmicos. Este desplazamiento podría explicarse por una dilatación del hormigón, además de la dilatación térmica, y, efectivamente, un estudio minucioso de las características del hormigón indicó que éste era expansivo, debido a la reacción entre los áridos y los álcalis del cemento, como se ha indicado antes.

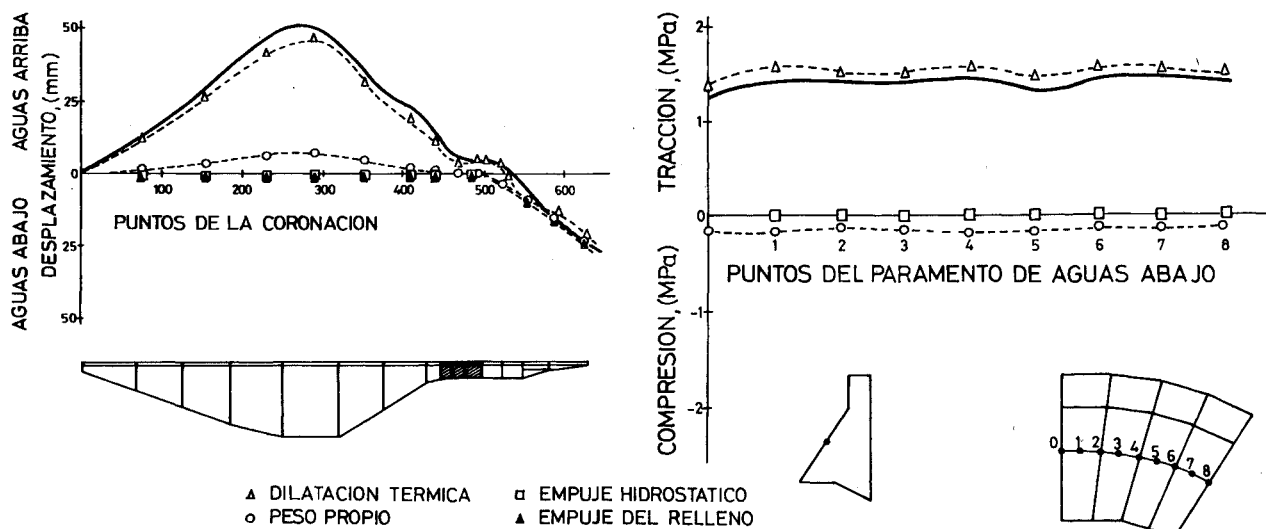


Fig. 15.—Resultados del cálculo tridimensional. Desplazamientos de la coronación y tensiones en el centro del paramento de aguas abajo.

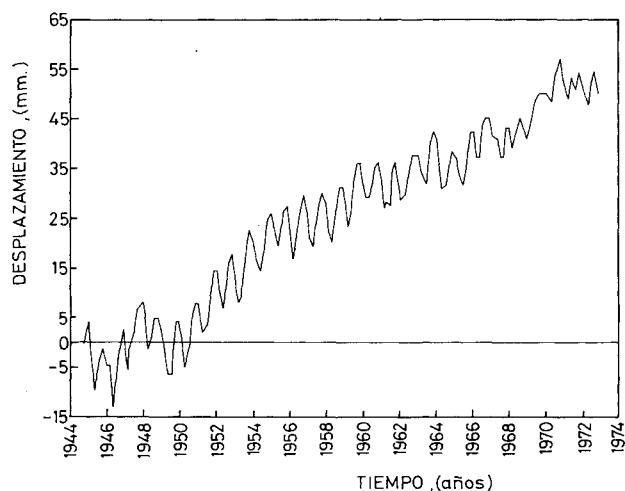


Fig. 16.—Registros de los desplazamientos de la coronación.

A partir de este dato, unos sencillos cálculos permiten estimar que el modelo y las hipótesis utilizadas proporcionan información capaz de predecir la fisuración de la presa. El cálculo del desplazamiento máximo en la coronación, debido a la temperatura y a la cota más baja del agua embalsada, es de 5 cm. En estas condiciones, la tensión en la línea media del paramento de aguas abajo en el codo, donde aparece la fisura, es de 14 kg/cm^2 . Si suponemos que los desplazamientos y la tensión mencionada son proporcionales, la verdadera tensión será la correspondiente al desplazamiento resultante del efecto térmico (5 cm) y de la expansión del hormigón (6 cm en 1972), es decir, a un desplazamiento de 11 cm aguas arriba y la tensión correspondiente será, aproximadamente, de 31 kg/cm^2 . Este valor coincide con la tensión de rotura medida en flexotracción, 30 kg/cm^2 , en probetas extraídas de la presa.

3. Análisis de la fisuración

En este último apartado se comenta cómo utilizando los métodos de la Mecánica de la Fractura es posible predecir la trayectoria de la fisura, que se ha propagado en un modo mixto, y estimar el alcance de las medidas correctivas —el postensado de la sección fisurada— en la estabilidad de la fisura.

El método utilizado en esta etapa fue similar al descrito al comienzo de este artículo, aunque menos automatizado; en cada paso el ángulo θ_0 se calculaba manualmente y también se hizo a mano la reordenación de la red después de cada avance de la fisura. Debido a las limitaciones de cálculo, y para conseguir una mayor precisión en la predicción de la propagación de la fisura, se optó por estudiar solamente una sección de la zona fisurada, cuya malla de elementos finitos se muestra en la figura 17.

Es claro que esta situación no representa el caso real, pero, con la limitación de los medios disponibles en aquel momento, la decisión adoptada fue una buena aproximación, como se indica a continuación.

Para este cálculo se tuvo en cuenta el peso propio y las acciones térmicas. La experiencia anterior demostró que podía prescindirse del empuje hidrostático, con el embalse al nivel más bajo, y del empuje del relleno de tierra porque ambas contribuciones eran pequeñas y, además, se compensaban. La influencia del resto de la presa se materializó utilizando los resultados del cálculo tridimensional, introduciendo como condiciones de contorno al problema bidimensional los desplazamientos anteriormente calculados y que, en cierto modo, reflejaron el empuje sobre la región fisurada al dilatarse la presa. La influencia del hormigón expansivo se incorporó por el mismo procedimiento de antes, multiplicando los resultados del cálculo numérico por un factor de corrección.

Una vez calculada la distribución de tensiones en la sección de la figura 17, sometida a las acciones

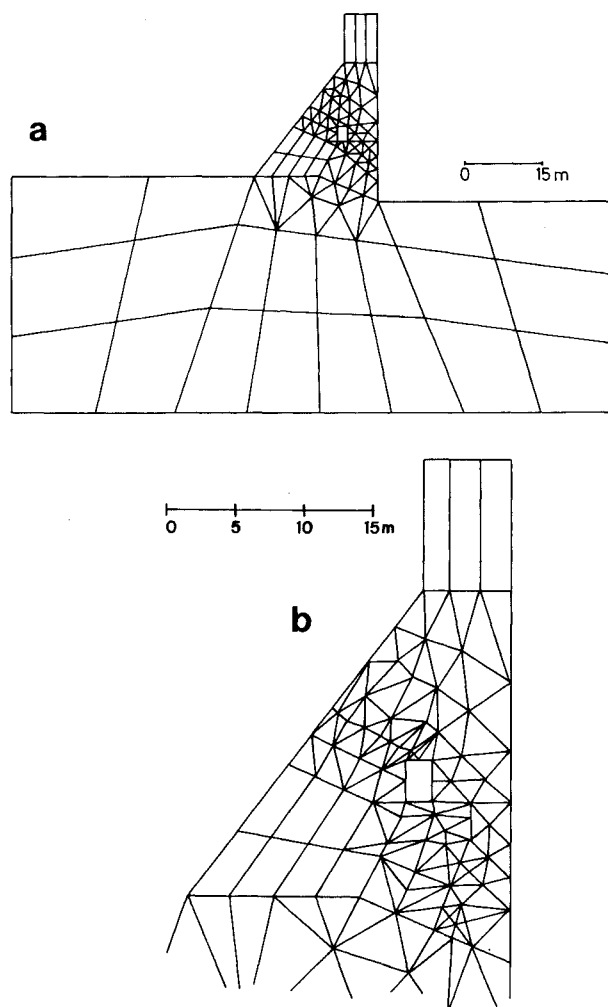


Fig. 17.—Malla de elementos finitos utilizada para estudiar la propagación de la fisura: a) Malla inicial, b) Malla final.

enumeradas y antes de estudiar la propagación de la fisura, fue preciso responder a dos preguntas:

¿Dónde se inició la fisuración? y ¿cuál era el valor de la tenacidad de fractura del hormigón? El cálculo de las tensiones no ayudó mucho a responder a la primera pregunta porque, si bien indicó que las máximas tracciones estaban situadas en la línea media del paramento de aguas abajo (por donde asomaba la fisura), también mostró tracciones similares en el interior de la galería de servicio en las dos posiciones donde se había observado la fisura. En estas circunstancias se supuso, de modo arbitrario, que la fisura se inició en la superficie de aguas abajo.

En cuanto al valor de K_{Ic} , al no disponer de resultados experimentales, se estimó de la siguiente forma. Bajo las acciones ya indicadas se calcularon los factores de intensidad de tensiones K_I y K_{II} para varias longitudes de una hipotética fisura inicial de 1, 1,4 y 2 m, los resultados se muestran en la figura 18, y se supuso que las únicas fisuras preexistentes a la iniciación de la grieta podían ser fisuras internas entre los áridos y el mortero, cuyo tamaño fuera el tamaño medio del árido: 10 cm. Entrando con este valor en la curva de la figura 18, se obtuvo un valor de K_{Ic} de 1,2 MPa m^{1/2}, que es un valor razonable para un hormigón de este tipo.

El siguiente paso fue estudiar la propagación de la grieta. En esencia se siguió el método descrito en la primera parte de este artículo. Al iniciar cada etapa

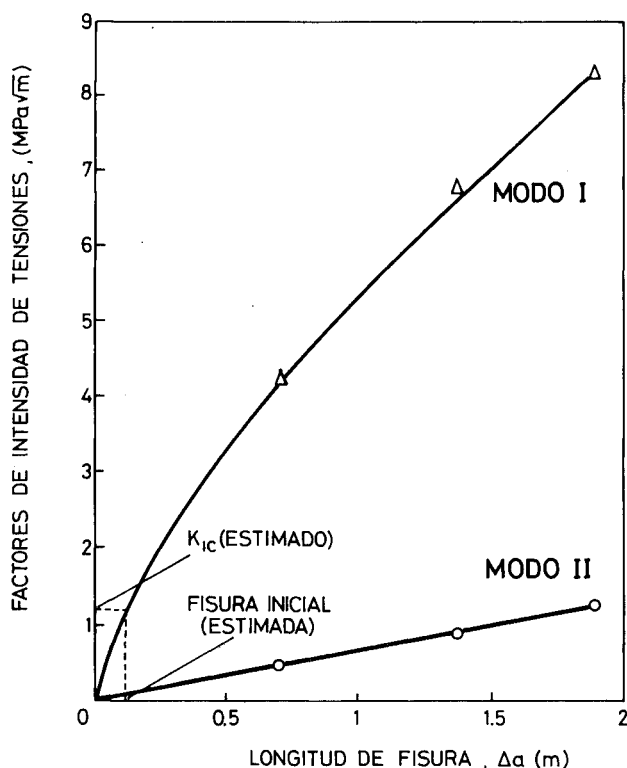


Fig. 18.—Estimación de la tenacidad de fractura del hormigón a partir de los factores de intensidad de tensiones y del tamaño estimado de la fisura inicial.

se calculó el ángulo θ_0 contrastando los tres criterios comentados; el de la máxima tasa de liberación de energía $G(\theta)_{\max}$, el de la mínima densidad de energía $S(\theta)_{\min}$ y el de la tensión circunferencial máxima $\sigma(\theta)_{\max}$. Los resultados para cada uno de los 15 pasos se indican en la siguiente tabla y es fácil comprobar que son, prácticamente, equivalentes.

Tabla 1

COMPARACION DE LAS PREDICCIONES DE θ_0

Incremento de la fisura Posición (Fig. 20)	Δa (cm)	Angulo θ_0 (en grados)		
		$G(\theta)_{\max}$	$S(\theta)_{\min}$	$\sigma(\theta)_{\max}$
1	99	-8	-8	-8
2	91	+9	+9	+9
3	91	-11	-11	-11
4	91	+12	+12	+12
5	91	-12	-12	-12
6	91	+20	+18	+20
7	91	-28	-25	-29
8	91	+2	+2	+2
9	97	+12	+12	+12
10	91	-28	-25	-32
11	91	+35	+29	+37
12	183	-18	-18	-18
13	152	+30	+24	+32
14	152	-30	-25	-31
15	152	+9	+9	+9

No obstante, por motivos económicos, la propagación se hizo utilizando sólo el criterio de $G(\theta)_{\max}$. En cada paso, una vez calculada la dirección θ_0 , se daba un incremento arbitrario a la fisura —indicado en la Tabla 1— y se reajustaba la malla, desplazando nodos y añadiendo otros cuando era preciso. Actualmente el programa FEFAP lo realiza de forma automática. La malla al final del último paso se muestra en la figura 17b.

Los valores de K_I y K_{II} , después de cada incremento de la fisura, se han representado en la figura 19, que merece algunos comentarios. En primer lugar, se detecta que todos los valores de K_I superan el valor estimado de K_{Ic} (1,2 MPa m^{1/2}) lo que indica que una vez iniciada la fisuración, ésta es inestable. Este resultado no parece muy realista ya que se sospecha que la fisura tardó algún tiempo en propagarse, posiblemente un estudio tridimensional más afinado proporcionaría una propagación estable. Otro resultado interesante son los valores tan altos de K_I en las últimas etapas de la propagación. Al repasar los cálculos los autores detectaron un error en las condiciones de contorno de la cimentación, que originaban fuertes tracciones favoreciendo la abertura de la fisura. Este error sólo afecta apreciablemente a las últimas etapas y como no se consideró necesario repetir los cálculos, tampoco se continuó el estudio de la propagación de la grieta en la cimentación. Por último, el carácter oscilante

de K_{II} indica la tendencia de la fisura a propagarse por encima o por debajo de la dirección anterior y es una consecuencia de simular la propagación en forma de una poligonal en vez de que se vaya curvando continuamente. También es debido a errores de cálculo, que son más acusados cuanto mayores son los incrementos. De todos modos, teniendo en cuenta las aproximaciones utilizadas, los resultados fueron satisfactorios si se compara la trayectoria prevista numéricamente con los datos de los sondeos (Fig. 20).

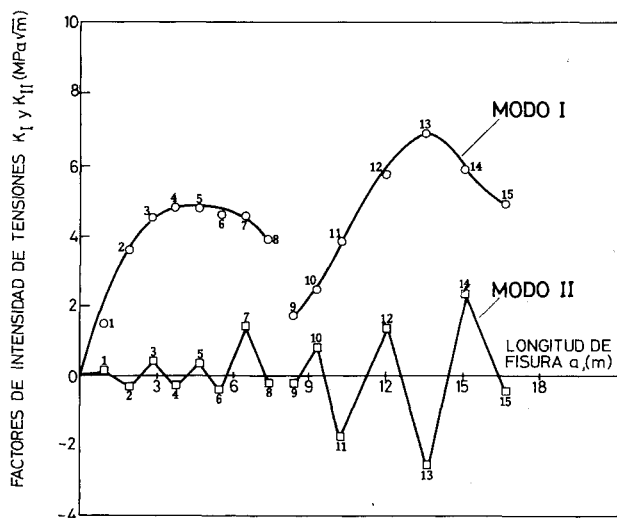


Fig. 19.—Valores de los factores de intensidad de tensiones, después de cada incremento de la fisura.

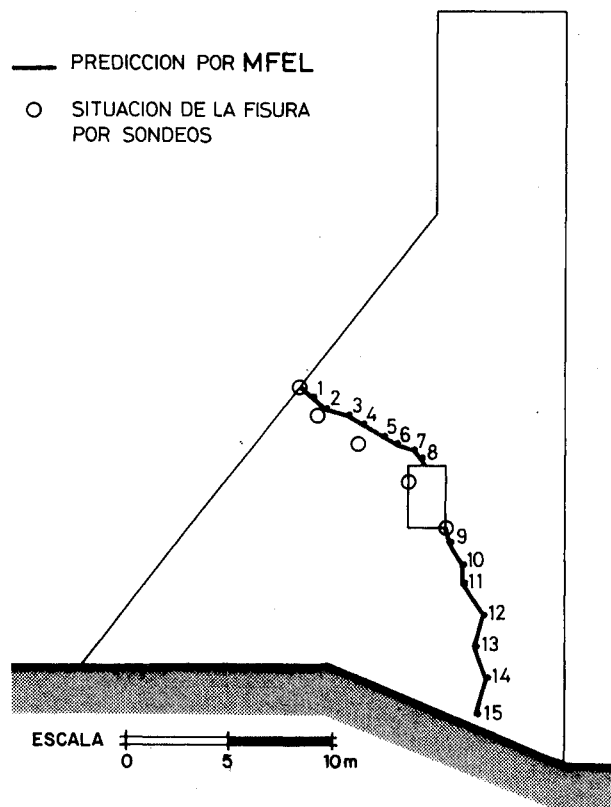


Fig. 20.—Propagación de la fisura, comparación entre las predicciones teóricas y los sondeos.

Las técnicas de la Mecánica de la Fractura también se utilizaron para estimar la eficacia y los riesgos de una de las medidas tomadas para estabilizar la fisuración, el postensado de los bloques fisurados. El estudio aportó información sobre los aspectos que suelen presentarse en estas situaciones: ¿Cómo influye el postensado en una posterior propagación de la fisura? y, ¿hasta qué valor se podría aumentar la presión de la inyección de lechada sin que la fisura se volviera inestable? Con estos objetivos se calcularon los factores de intensidad de tensiones teniendo en cuenta los esfuerzos del postensado, que se modelizaron como cargas nodales en los puntos de anclaje y, en otro cálculo, suponiendo una presión uniforme en el interior de la grieta igual a la de la inyección (1,4 atm). Los resultados se indican en la siguiente tabla:

Tabla 2
VALORES DE K_I Y K_{II} , PARA DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

Tipo de carga	A	B	C
K_I (MPa m ^{1/2})	4,93	4,92	4,93
K_{II} (MPa m ^{1/2})	-0,40	-0,39	-0,37

A.—Peso propio y efectos térmicos.

B.—Peso propio, efectos térmicos y postensado.

C.—Peso propio, efectos térmicos y presión de la inyección.

Para las tres hipótesis de carga los factores de intensidad de tensiones son iguales. Por intuición se podría pensar que la acción del postensado disminuiría K_I y que la presión de la inyección lo tendría que aumentar. No obstante, el cálculo predice que el factor de intensidad de tensiones es poco sensible a estas sollicitaciones. Estos resultados están de acuerdo con las medidas realizadas durante el postensado y la inyección, en las que no se observaron

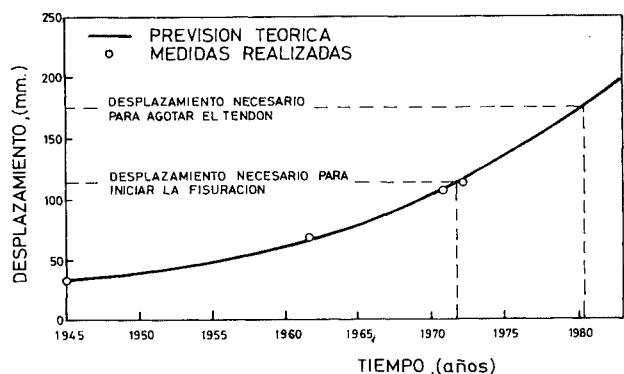


Fig. 21.—Evolución del desplazamiento máximo de la coronación.

movimientos en la coronación ni en la abertura de los labios de la fisura. Los esfuerzos provocados por la dilatación del hormigón (dilatación térmica e hinchamiento) eran muy superiores a los introducidos por el postensado.

Si se supone que el hormigón iba a continuar dilatando, según la tendencia esbozada en la figura 16, el elemento fisurado seguiría girando hacia aguas arriba y la fisura abriéndose cada vez más, reteando los tendones y pudiendo llegar a romperlos.

Si en una primera aproximación se supone una relación lineal entre el desplazamiento indicado en la figura 16 y las tensiones del elemento considerado, se obtiene la figura 21, donde se ha representado la evolución del desplazamiento —el de las tensiones sería similar— en función del tiempo. En estas circunstancias podía estimarse que, alrededor de 1980, el giro de la sección provocaría el agotamiento de los tendones. Afortunadamente, la decisión de dar un corte transversal para evitar la transmisión de los esfuerzos del resto de la presa a la sección fisurada impidió que ocurriera este accidente.

REFERENCIAS

- ABRAHAM, T. J., y SLOAN, R. C. (1978): «TVA cuts deep slot in dam, ends cracking problem». *J. Civil Engineering ASCE*, enero, pp. 67-70.
- ASTIZ, M. A. (1986): «An incompatible singular elastic element for two and three dimensional crack problems». Accepted for publication. *Int. Journal of Fracture*.
- BARSOU, R. S. (1976): «On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics». *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 1: 25-37.
- BATHE, K. J., y WILSON, E. L. (1976): «Numerical methods in finite element analysis». *Prentice-Hall Inc.*, Englewood Cliffs.
- CHANG, S. C. (1976): «Arch dam stress analysis using finite element method». *National Taiwan University*, Taipei.
- CHAPPELL, J. F., e INGRAFFEA, A. R. (1981): «A fracture mechanics investigation of the cracking of Fontana dam». *Cornell University Report 81.7*.
- EH.80: «Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado». *Comisión Permanente del Hormigón*. MOPU.
- ELICES, M. (1985): «Fractura del Hormigón: Métodos de cálculo numérico». En este n.º de *Informes de la Construcción*.
- ELICES, M. (1986): «Curso de mecánica de la fractura aplicada a sólidos elásticos bidimensionales». *Departamento de Física y Física de Materiales*, Universidad Politécnica de Madrid.
- FREESE, C. E., y TRACEY, D. M. (1976): «The natural isoparametric triangle versus collapsed cuadrilateral for elastic crack analysis». *Int. Journal of Fracture*, Vol. 12, p. 767.
- GIBBS, N. E.; POOLE, W. J., y STOCKMEYER, P. K. (1976): «An algorithm for reducing bandwidth and profile of a sparse matrix». *STAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 13, pp. 236-250.
- GORDON, W. J., y HALL, C. A. (1973): «Construction of curvilinear co-ordinate system and applications to mesh generation». *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 461-477.
- HABER, R.; SHEPARD, M. S.; ABEL, J. F.; GALLAGHER, R. H., y GREENBERG, D. P. (1981): «A general two-dimensional, graphical finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mappings». *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 1015-1044.
- HUSSAIN, M. A.; PU, S. L., y UNDERWOOD, J. H. (1974): «Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II». *Fracture Analysis*, ASTM STP 560, pp. 2-28.
- INGRAFFEA, A. R., y MANU, C. (1978): «Stress intensity factor computations in three dimensions with quarter-point crack tip elements». *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 6: 235-248.
- INGRAFFEA, A. R., y MANU, C. (1980): «Stress intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements». *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 10: 1427-1445.
- INGRAFFEA, A. R., y SAUOMA, V. (1985): «Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete». *Fracture Mechanics of Concrete* (Sih, DiTommaso, Eds.), Martinus Nijhoff Publishers.
- MUFTI, A. A.; MIRZA, M. G.; McCUTCHEON, J. D., y HOUDE, J. (1970): «A study of the behaviour of reinforced concrete elements». *Structural Concrete Series*, Núm. 70-5. McGill University.
- NGO, D., y SCORDELIS, A. C. (1967): «Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams». *Journal of the American Concrete Institute*. Vol. 64, 14: 152-153.
- PERUCCHIO, R.; INGRAFFEA, A. R., y ABEL, J. F. (1982): «Interactive computer graphic preprocessing for three-dimensional finite element analysis». *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 6: 909-926.
- PERUCCHIO, R., e INGRAFFEA, A. R. (1983): «Interactive computer graphic preprocessing for three-dimensional boundary-integral element analysis». *Computers and Structures*, Vol. 16: 1-4: 153-166.
- RASHID, Y. R. (1968): «Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels». *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, 4: 334-344.
- SAUOMA, V. (1981): «Interactive Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. A Fracture Mechanics Approach». *Ph. D. Dissertation*. School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University.
- SHIH, C. F.; DE LORENZI, H. G., y GERMAN, M. D. (1976): «Crack extension modelling with singular quadratic isoparametric elements». *Int. Journal of Fracture*, Vol. 12, pp. 647-651.
- TRACY, F. T. (1977): «Graphical Pre. and Post-Processor for Two Dimensional Finite Method Programs». *SIGGRAPH'77*, Vol. II, 2: 8-12.

