

균일 현의 초기조건에 의한 진동 현상

김영중¹·이현업^{2,†}
한국기계연구원 시스템다이내믹스연구실¹
충남대학교 선박해양공학과²

Free Vibration Characteristics of a Uniform String Due to Initial Conditions

Young-Joong Kim¹·Hyun-Yup Lee^{2,†}
Korea Institute of Machinery & Materials, System Dynamics Research Lab.¹
Chungnam National University, Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering²

Abstract

Free vibrations of strings due to initial conditions have been analyzed by the conventional mode summation method, and the nondimensionalized displacements and velocities have been derived in the form of infinite series. The results show wave propagating phenomena and confirmed by experiments using the high speed camera. Other physical characteristics have been discussed and examined with help of waveform solutions.

Keywords : Uniform string(균일 현), Vibration(진동), Initial conditions(초기조건), High speed camera(고속 카메라), Mode summation method(모드합성법), Waveform solution(진행파 해), Vibration characteristics(진동특성)

1. 서론

균일 현의 진동은 고전적인 문제로 오래전부터 다루어져 왔으며 이론 또한 잘 정립되어 있다(Rayleigh, 1894, 1945). 유한 길이의 현에 대해서는 진행파(propagating wave) 형태의 해를 가정하여 해석할 수도 있지만(Achenbach, 1984), 일반적으로 변수가 분리된 해 형태로 해석한다.

유한한 길이를 갖는 균일 현의 초기조건에 의한 진동은 일반적으로 운동방정식을 변수분리하여 진동모드와 고유진동수를 구하고 일반해를 이들 진동 모드의 무한 급수로 표현한 후, 초기 조건을 만족시키는 절차에 따라 설명되어져 왔다. 그러나 무한급수로 표현되는 해를 수치적으로 구하여, 진동현상을 가시적으로 보여주고 그 물리적 특성을 검토한 적은 없다.

본 연구에서는 이 무한급수를 수치적으로 구하여 현의 응답을 가시적으로 나타내었으며, 그 결과 전형적인 진행파 현상을 볼 수 있었다. 또한 초기변위에 의한 현의 진동을 고속카메라로 촬영하여 이러한 현상을 확인하였다. 또한 진행파 형태의 해(waveform solution)와의 비교를 통하여 초기조건에 의한 현의 진동에 대한 물리적 현상을 검토하였다.

2. 변수분리법에 의한 해석

현이 Fig. 1과 같이 $x = pl$ ($0 < p < 1$)에서 y_0 만큼 당겼

다가 놓았을 때의 응답은 다음과 같은 과정으로 구한다.

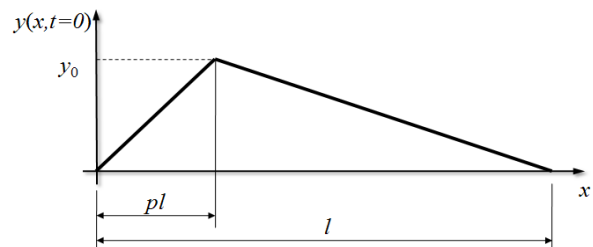


Fig. 1 Initial condition of a uniform string

단위 길이 당 질량이 ρ 인 균일 현이 일정한 장력 T 를 받을 때, 진동 변위를 y 라고 하면 운동방정식은 다음과 같이 유도된다(Thomson, 1981).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

여기서 $c = \sqrt{T/\rho}$ 이고 이는 현을 따라 진행되는 파동의 전파속도로 정의된다. 이 y 에 관한 편미분 방정식은 y 가 시간(t)의 함수와 위치(x)의 함수의 곱으로 표현된다는 변수분리법을 적용하면 다음과 같은 일반해를 구할 수 있다.

$$y(x, t) = \left(A \sin \frac{\omega x}{c} + B \cos \frac{\omega x}{c} \right) \left(C \sin \omega t + D \cos \omega t \right) \quad (2)$$

여기서, 상수 A, B, C, D 와 진동수 ω 는 경계조건과 초기 조건에 따라 결정된다. 가장 일반적인 형태의 현으로서 길이 ℓ 의 양단이 고정된 경우의 경계조건은 $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$ 이므로 이를 식(2)에 대입하면 $B = 0$ 가 되고 $\sin(\omega\ell/c) = 0$ 를 만족하는 고유진동수를 구할 수 있다. 이들을 이용하여 다음과 같은 자유진동의 일반해를 구할 수 있다.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (3)$$

여기서 ω_n 은 식(4)와 같이 결정되는 n 차 고유진동수이고, 기본 진동수 ω_1 의 정수배이다.

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell} = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Fig.1의 초기조건은 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$y(x,t=0) = \begin{cases} \frac{y_0}{p\ell}x, & 0 \leq x \leq p\ell \\ -\frac{y_0}{(1-p)\ell}x + \frac{y_0}{1-p}, & p\ell \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (5)$$

$$\dot{y}(x,t=0) = 0 \quad (6)$$

상기의 초기조건을 식(3)에 대입하고, 각 식에 $\sin(n\pi x/\ell)$ 을 곱한 후 적분하면, 계수 C_n 과 D_n 은 다음과 같이 결정된다.

$$C_n = 0 \quad (7)$$

$$D_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell y(x,t=0) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (8)$$

$$= \frac{2y_0 \sin n\pi p}{p(1-p)(n\pi)^2}$$

따라서, Fig. 1과 같은 초기변위에 의한 현의 진동응답은 다음과 같이 표현된다.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y_0 \sin n\pi p}{p(1-p)(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \omega_n t \quad (9)$$

이제 다음과 같은 무차원 변수를 이용하면 진동 변위와 진동 속도에 대해 무차원화 할 수 있다.

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \tau = \frac{t}{T_1}, \quad (10)$$

$$d(\xi,\tau) = \frac{y(x,t)}{y_0}, \quad v(\xi,\tau) = \frac{\dot{y}(x,t)}{y_0/T_1}$$

여기서, $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ 이고, 무차원 변위 d 와 무차원 속도 v 는 다음과 같다.

$$d(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n\pi p)}{p(1-p)(n\pi)^2} \sin(n\pi\xi) \cos(2n\pi\tau) \quad (11)$$

$$v(\xi,\tau) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(n\pi p)}{p(1-p)n\pi} \sin(n\pi\xi) \sin(2n\pi\tau) \quad (12)$$

Fig.2의 (a)와 (b)는 각각 $p = 0.5$ 와 $p = 0.2$ 인 경우에 대하여 상기 식(11)을 100개의 모드에 대해 합성한 결과로, 시간에 따른 변위 형태의 변화를 한 주기를 20등분한 시간 간격($\tau = 0, 0.05, \dots, 0.95, 1.00$)으로 나타내었다. 이 결과는 Rayleigh가 Helmholtz와 Young의 연구 결과라고 밝힌 바와 같이 파동의 진행 및 중첩 현상을 보여주고 있다 (Rayleigh, 1894, 1945).

3. 실험

Table 1 Characteristics of the string experimented

Item		Dimension
Diameter	D	5×10^{-4} m
Length	ℓ	0.6 m
Tension	T	8.9 N
Mass per unit length	ρ	1.54×10^{-3} kg/m
1st Natural frequency	f_1	63.3 Hz

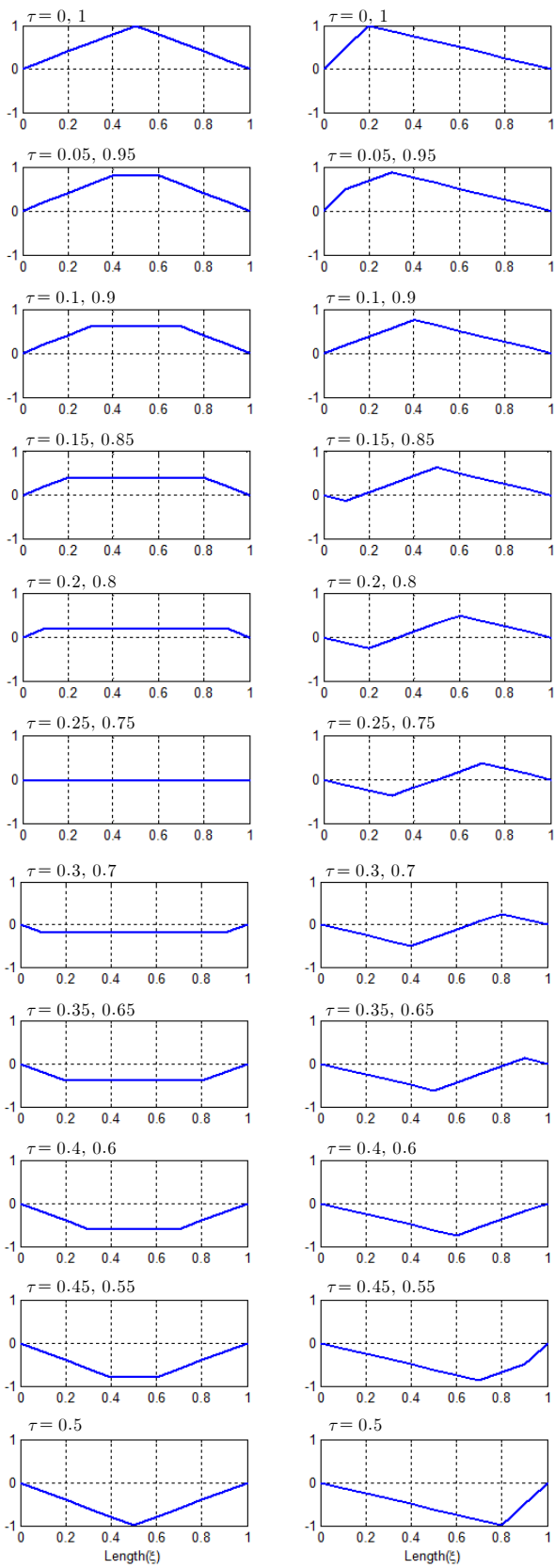
Table 1과 같은 현의 한 끝에 추를 달아 장력을 일정하게 유지하고 수치해석의 예와 같이 중앙점과 왼쪽에서 길이의 20% 지점을 당겼다가 순간적으로 놓아 초기조건을 구현하도록 하였다. 이 현의 최저차 고유진동수는 63.3 Hz로 산정되었다.

현의 중앙점과 20% 지점을 당기고 있다가 순간적으로 놓을 때의 거동을 고속 카메라로 찍은 후 정지 상태부터 9개의 프레임을 Fig. 3에 보았다. 카메라의 속도는 초당 1,000 프레임이므로 9개의 프레임은 8 ms의 시간이며, 63.3 Hz에 대한 1주기가 15.8 ms임을 감안하면 8 ms는 거의 반주기에 해당한다.

Fig. 3을 보면 수치해석 결과에서 설명한 바와 같은 현상을 확인할 수 있다. 각 위치에서의 변위의 변화를 보면 Fig.2와 같이 초기 변형 상태를 유지하다가, 파동이 진행되어 도달하게 되면 일정한 속도로 이동하다가 정지하며, 다시 일정한 속도로 상승하여 초기상태로 돌아가는 진동을 반복하는 현상을 보인다.

4. 고찰

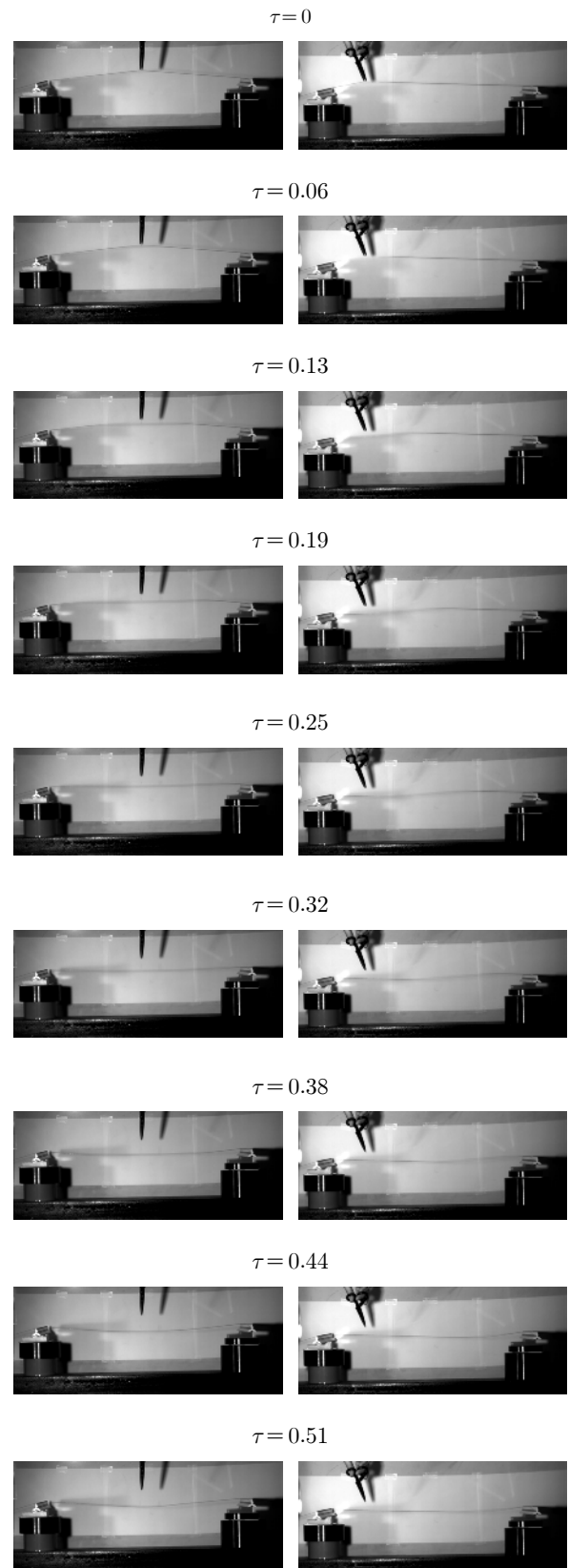
4.1 진행파 형태의 해



(a) $p=0.5$

(b) $p=0.2$

Fig. 2 Displacements of the string obtained by the mode summation method



(a) $p=0.5$

(b) $p=0.2$

Fig. 3 Displacements of the string captured by a high speed camera

식 (5)로 주어진 초기변위는 식 (13)과 같이 좌우로 진행하는 두 개의 파로 나누어져 전파속도 c 로 전파되어 나간다. $x = 0$ 와 $x = \ell$ 의 경계점에서는 변위가 0인 조건을 만족시키면서 반사되어 진행된다.

$$y(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct) \quad (13)$$

초기조건이 현의 중앙점에 가해지는 경우($p = 0.5$), Δx 만 큼 진행하였을 때를 도식적으로 나타내면 Fig. 4와 같으며 Fig. 2 (a)와 같은 결과임을 볼 수 있다.

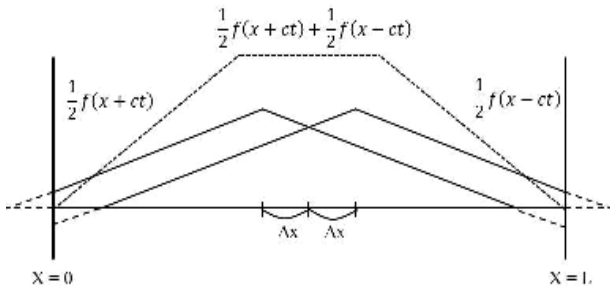
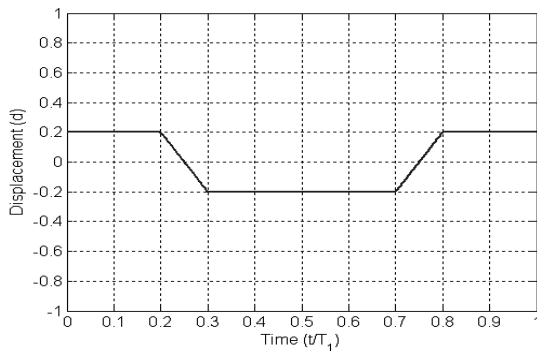
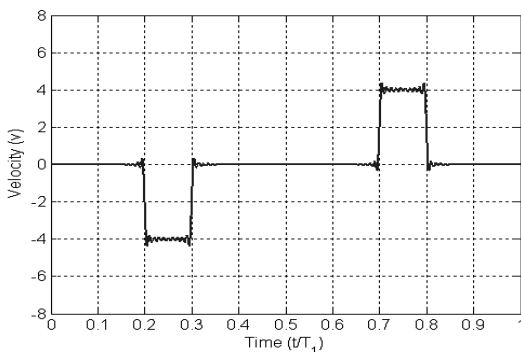


Fig. 4 Schematic diagram for waveform solutions



(a) Displacement



(b) Velocity

Fig. 5 Displacement and velocity at $\xi = 0.1$ ($p = 0.5$)

4.2 진동 시작 시각 및 하강속도

Fig. 4에서 보듯이 초기조건이 가해지는 점으로부터 Δx 만 큼 떨어진 곳에서는 $\Delta t (= \frac{\Delta x}{c})$ 이후부터 진동하기 시작한다.

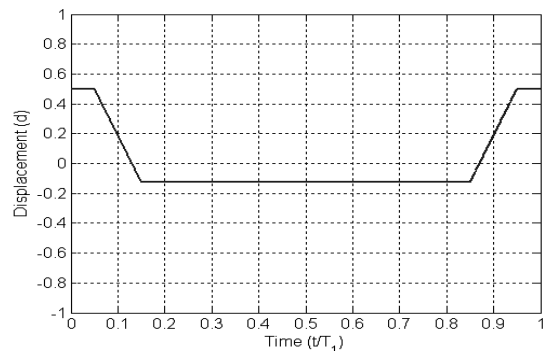
따라서 진동이 시작되는 무차원 시각은 다음과 같이 결정된다.

$$\tau_{\text{start}}(\xi, p) = \frac{\Delta t}{T_1} = \frac{|p - \xi| \ell \omega_1}{c \cdot 2\pi} = \frac{|p - \xi|}{2} \quad (14)$$

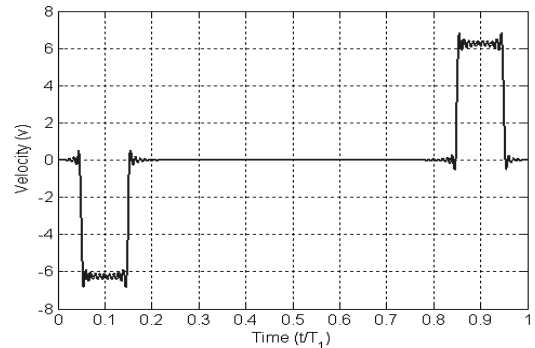
$\xi \leq p$ 일 경우, 초기변위는 식(5)와 같이 $\frac{\xi}{p} y_0$ 이다. 또한

4.1절의 진행파 형태로 분석하여 보면 $-\frac{p}{1-p} \frac{\xi}{p} y_0$ 까지 하강 하는데, 이는 Fig. 2(b)를 분석하여 보아도 알 수 있다.

운동하는 시간은 좌방향으로 진행하는 파의 정점이 ξ 에 도달 해서부터 좌단에 반사되어 다시 ξ 에 도달할 때까지 이므로 $2\xi\ell/c$ 이다. 따라서, 하강속도는 다음과 같이 결정된다.



(a) Displacement



(b) Velocity

Fig. 6 Displacement and velocity at $\xi = 0.1$ ($p = 0.2$)

$$v = \frac{\Delta x}{2\xi\ell/c} \frac{1}{y_0/T_1} \quad (15)$$

$$= \frac{\xi}{p} y_0 \left(1 + \frac{p}{1-p}\right) \frac{c}{2\xi\ell} \frac{T_1}{y_0} = \frac{1}{p(1-p)}$$

$\xi > p$ 인 경우에도 $(1-p)$ 보다 큰 경우와 작은 경우로 나누어 진행파 형태로 분석하여 보면 모두 식(15)와 같은 결과를 얻게 된다.

초기조건이 현의 중앙점에 가해지는 경우($p = 0.5$), $\xi = 0.1$ 에서의 시간에 따른 변위와 속도의 변화를 Fig. 5에 나타내었으며, $p = 0.2$ 의 경우에 대해서는 Fig. 6에 나타내었다. 종축은 각각 무차원 변위($\frac{y(x, t)}{y_0}$) 또는 무차원 속도($\frac{\dot{y}(x, t)}{y_0/T_1}$)이며, 횡

축은 1주기에 해당하는 무차원 시간(t/T_1)이다.

Fig. 5($p = 0.5$)와 Fig. 6($p = 0.2$)에서 보면, $\xi = 0.1$ 이 움직이기 시작하는 무차원 시간은 각각 $\tau = 0.2$ 와 $\tau = 0.05$ 로 식(14)과 일치한다. 또한 무차원 속도도 각각 4와 6.25로 식(15)와 일치한다.

그러나 Fig. 5와 Fig. 6에서 보이는 속도의 변화는 속도가 0에서 식(14)로 주어진 값에 이르는 순간 또는 다시 0으로 변하는 순간에 주기적으로 변동하는 결과를 볼 수 있으며 이는 잘 알려진 깁스(Gibb's) 현상(Oppenheim, et al., 1983)이다. 수치 해석은 한정된 값의 급수 계산 결과를 얻게 되므로 이와 같은 결과를 보이게 되나 수학적으로 엄밀한 결과는 식(15)로 주어진다.

Fig. 5와 Fig. 6에서 보면 움직이기 시작할 때부터 일정한 속도를 갖게 된다. 이는 그 순간 가속도가 무한대가 됨을 의미한다. 그 순간 가속도가 무한대가 되는 곳은 한 점이므로 물리적으로 가능하다.

4.3 에너지 보존 법칙의 적용

최대 탄성에너지는 속도가 0인 $t = 0$ 일 때인데, 이때 장력에 의한 탄성에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

초기 조건에서 ($t = 0$, 주기 τ) Fig. 7과 같이 현의 좌우에 작용하는 힘은 변형이 매우 작을 경우 ($\theta \ll 1$) $F = 2(T \sin \theta) = 2T\theta$ 와 같이 구해진다. 그리고 역시 $\tan \theta = y_0/(\ell/2)$ 로부터 $\theta = y_0/(\ell/2)$ 로 가정할 수 있으므로 힘과 탄성에너지는 다음과 같이 구해진다.

$$F = 2T \frac{y_0}{\ell/2} \tag{16}$$

$$U = \frac{1}{2} F y_0 = \frac{2T y_0^2}{\ell} \tag{17}$$

초기 조건에서 속도는 없으므로 운동에너지 $T = 0$ 이고, 탄성에너지가 전체 에너지가 된다.

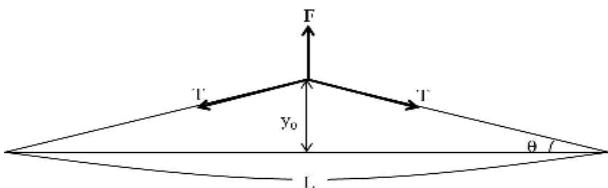


Fig. 7 Free body diagram of a string with the initial condition at the center

한편, 최대 운동에너지는 변위가 0인 1/4 주기가 경과한 후 ($t = T_1/4$)일 때인데, 이 때의 운동에너지는 다음과 같이 구할 수 있다. 즉, $y(x, t = T_1/4) = 0$ 이므로 탄성에너지 $U = 0$ 이고, 식 (15)에 의해 $v = 4$ 이므로 속도는 모든 점에서 다음 값을 갖는다.

$$\dot{y} = \frac{y_0}{T_1} v = 4y_0 \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2y_0}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{18}$$

전체 질량이 $\rho \ell$ 로 정의되므로 운동에너지는 위의 속도를 적용하면 다음과 같이 표현되며, 이것이 전체 에너지가 된다.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{2T}{\ell} y_0^2 \tag{19}$$

즉, 에너지 보존 법칙이 적용되고 있음을 확인할 수 있다. 임의의 시간($t = t$)에서는 운동 구간에 비례하여 에너지의 변환이 이루어지고 있다고 볼 수 있다.

5. 결론

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 초기조건에 의한 현의 진동에 대하여, 변위와 속도를 고유 모드의 무한급수 형태로 구하여 가시적으로 나타내었다.
- 2) 파동의 진행과 중첩 현상을 확인하였고, 고속 카메라를 사용한 실험으로 검증하였다.
- 3) 모드합성법에 의한 엄밀해는 초기 조건에 따른 파형을 유지하며 이동하는 진행파를 가정한 결과로도 설명할 수 있다는 사실을 확인하였다.
- 4) 진행파 형태의 해(waveform solution)와의 비교를 통하여 초기조건에 의한 현의 진동에 대한 물리적 현상을 검토하였다.

후기

본 논문은 기발표된 논문을 보완한 결과임을 밝힌다. (Kim & Lee, 2011)

참고 문헌

Achenbach, J.D., 1984. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Publishing Company.

Kim, Y.J. & Lee, H.Y., 2011. A Discussion on the Vibration Characteristics of Uniform String. *Proceedings of Spring Conference of Society of Naval Architecture and Marine Engineering of Korea*, Busan, Korea, 2-3 June 2011.

Oppenheim, V.A. Willsky, A.S. & Young, I.T., 1983. *Signals and systems*, New Jersey: Prentice-Hall.

Rayleigh, J.W.S., 1894. *The theory of sound*, London: Macmillan Company.

Rayleigh, J.W.S., 1945. *The theory of sound*. 2nd Ed Vol1. Dover Publications: New York.

Thomson, W.T., 1981. *Theory of vibration with applications*, New Jersey: Prentice-Hall.

