論文

DOI:10.5139/JKSAS.2010.39.2.97

균일 열부가 하중을 받는 사각판의 자유 진동특성 연구 Part Ⅰ. 이론 및 유한요소 해석

전병희*, 강휘원*, 이영신**

Free Vibration Characteristics of the Rectangular Plates under Uniform Thermal Loading Part Ⅰ. Analytic and FEM analysis

Byoung-Hee Jeon*, Hui-Won Kang* and Young-Shin Lee**

ABSTRACT

This paper was conducted on analytical solution using superposition and FEM analysis in the free vibration analysis of rectangular plates under uniform thermal loadings. Materials of three rectangular plates were aluminum, steel and stainless-steel respectively. Applied temperature conditions were from room temperature to 300 ℃ and boundary condition was free-free condition. Fully symmetric mode(FSM), fully antisymmetric mode(FASM) and symmetric-antisymmetric mode(SAM) were analyzed.

초 록

본 논문에서는 균일 열부가 하중을 받는 사각판의 자유 진동특성을 중첩법에 의한 수치해석과 유한요소 해석을 통하여 연구하였다. 사각판의 재질은 알루미늄, 강재 및 스테인레스강 이다. 부가한 온도 조건은 상온에서부터 300 ℃까지 부가하였고, 경계조건은 자유-자유 조건이다. 완전 대칭 모드, 완전 역대칭 모드 및 대칭-역대칭 모드에 대한 해석이 수행되었다.

Key Words : Uniform Thermal Loading(열부가 하중), Fully Symmetric Mode(FSM, 완전대칭모드), Fully Antisymmetric Mode(FASM, 완전 역대칭모드), Symmetric-Antisymmetric Mode(SAM, 대칭-역대칭모드)

Ⅰ. 서 론

터빈, 원자로, 초고속 비행체 및 우주 분야 등에 적용되는 구조물 중에는 온도 변화에 의한 열적 하중 하에서 구조적 기능을 수행해야 되는 구조 요소들이 있다. 이러한 구조 요소들은 온도 변화에 의한 열 변형 및 열 변형에 의한 진동문제를 수반하게 된다. 특히 구조물의 진동 특성 규명은 운영 중 다양한 동적하중 및 열 하중에 의해 발생 가능한 공진(resonance) 현상 때문에 구조물 파손 등의 안전성을 평가하기 위해 반드시 수행되어야 한다[1].

역사적으로 열 진동에 대한 기본적인 연구는 1950년대부터 시작되었다. 1957년 Boley는 관성력을 포함한 열 응답 해석을 처음으로 제시하였고 열 진동 거동에 대한 기본적인 개념을 설립하였다[2-3]. 1960년대와 1970년대는 열 플러터

† 2010년 11월 23일 접수 ~ 2011년 1월 12일 심사완료
* 정회원, 국방과학연구소
** 정회원, 충남대학교 기계설계공학과
교신저자, E-mail : leeys@cnu.ac.kr
대전광역시 유성구 궁동 220

(thermal flutter)의 발견으로 열 진동에 관한 연구가 계속되었다. 열 플러터 현상은 구조물에 발생되는 온도 구배로 인해 발생하는 열 진동현상과 구조물의 변형이 상호 연관되어 구조물의 불안정한 동적응답 상태를 말한다. 이러한 진동 현상이 발생한 대표적인 예가 Hubble Space Telescope(HST)와 OGO-Ⅳ위성(지구 물리학 관측위성)의 태양 전지판이다. 최근까지도 우주비행체의 붐(boom)에 대해서 열에 의한 대 변형 및 열 진동 해석 및 시험이 꾸준히 수행되고 있다 [4-6].

Ganesan[7]은 마주보는 두변이 단순지지 경계조건인 사각판에 열부가 하중이 작용할 때의 고유진동 특성을 유한 차분법을 이용하여 연구하였다. Locke[8]는 자유단 조건을 갖는 이방성 평판의 자유진동 해석을 수치해석 기법으로 연구하였다. 고려된 수치해석 기법은 Ritz 방법을 사용하였다. Avsec와 Oblack[9]은 열 환경이 빔 진동에 미치는 영향에 대해 재료 물성치를 온도의 함수로 고려하여 수학적인 모델을 개발하였다. Mead[10]는 자유-자유 경계조건을 갖는 평판에서 중심축을 기준으로 온도분포가 비-균일일 때 온도 차이로 인해 생성된 내평면 응력을 받는 Kirchhoff 사각판의 모드형상과 고유진동수를 연구하였다. 윤일성[11]은 열하중 변화에 의해 발생하는 복합재료 유연 구조물의 진동해석을 수치해석기법을 통하여 열 진동 특성을 연구하였다. 공창덕[12]은 유연 우주구조물이 급격한 열적 환경에 의해 발생되는 진동해석을 유연 구조물을 단순화하여 수치 해석과 실험을 통해 규명하였다.

이상의 연구동향에서 살펴본 바와 같이 사각판의 열 진동에 대한 진동특성 연구는 많은 연구자들에 의해 수행되어 왔고, 현재도 계속 수행되고 있는 분야이다. 본 연구는 균일 열부가 하중을 받는 사각판의 자유 진동특성을 수치해석 및 유한요소 해석을 통하여 제시하였다.

Ⅱ. 고유진동 이론해석

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 재원이 $2a\times 2b$ 인 사각판에 대해 고유진동 해석을 수행하였다. 본 연구에 적용된 경계조건은 4변이 자유-자유 조건, 즉 완전 자유 경계조건이다. 완전 자유 사각판의 고유진동 해석은 이전의 많은 연구가 진행되었는데 본 연구에서도 중첩법을 적용하여 해석하였다. Fig. 1에 보듯이 1/4 사각판에 대해서 완전 대칭 모드(fully symmetric mode : FSM), 완전

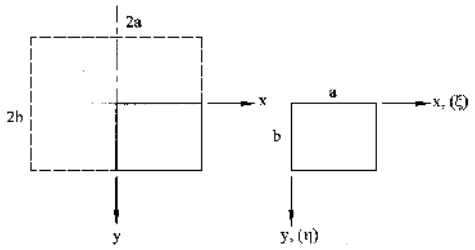


Fig. 1. View of the completely free rectangular plate of dimensions $2a\times 2b$. The quarter segment of plate used in the analysis

비대칭 모드(fully antisymmetric mode : FASM) 및 대칭-비대칭 모드(symmetric-antisymmetric mode : SAM)에 대해서 각각 고유진동 해석을 수행하였다.

정하중을 받는 사각판의 순수 굽힘에 대한 지배 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial y^4} -\frac{w^2\rho}{D}W(x,y)=0 \tag{1}$$

여기서 W는 횡방향 변위를 나타낸다. 여기에 Gorman[13]이 사용한 무차원 좌표 $\xi=x/a$ 와 $\eta=y/b$ 을 식(1)에 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 W(\xi,\eta)}{\partial\eta^4}+2\phi^2\frac{\partial^4 W(\xi,\eta)}{\partial\eta^2\partial\xi^2}+\phi^4\frac{\partial^4 W(\xi,\eta)}{\partial\xi^4} -\phi^4\lambda^4 W(\xi,\eta)=0 \tag{2}$$

여기서 $\lambda^2= wa^2\sqrt{\rho/D}$ 이고, ϕ 는 판의 종횡비(aspect ratio) b/a 이다.

ξ 축과 η 축 끝단에 수직으로 작용하는 굽힘 모멘트는 다음과 같다.

$$\frac{b^2M(\xi)}{aD}= -[\frac{\partial^2 W(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}+\nu\phi^2\frac{\partial^2 W(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}] \tag{3}$$

$$\frac{aM(\eta)}{D}= -[\frac{\partial^2 W(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\nu}{\phi^2}\frac{\partial^2 W(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}] \tag{4}$$

2.1 완전 대칭 모드 (FSM)

완전 자유 사각판의 완전 대칭 모드를 구하기 위하여 Fig. 2와 같이 빌딩 블록(building block)을 사용하였다. 1/4 사각판의 원점은 원래 사각판의 중심을 취하였고, 굽힘 모멘트는 $\xi=1$ 과 $\eta=1$ 끝단에 부가하였다.

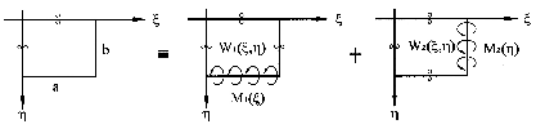


Fig. 2. Schematic view of building blocks used in analyzing the free vibration fully symmetric modes of the completely free plate

Fig. 2와 같은 블록의 해는 다음과 같이 Lévy-type으로 표현할 수 있다.

$$W(\xi,\eta) = W_1(\xi,\eta) + W_2(\xi,\eta) \tag{5}$$

여기서 $W_1(\xi,\eta)$ 과 $W_2(\xi,\eta)$는 다음과 같다.

$$W_1(\xi,\eta) = \sum_{m=0,1}^{\infty} Y_m(\eta)\cos m\pi\xi \tag{6}$$

$$W_2(\xi,\eta) = \sum_{n=0,1}^{\infty} Y_n(\eta)\cos n\pi\eta \tag{7}$$

먼저 $W_1(\xi,\eta)$을 구하기 위해 식(6)을 식(2)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2Y_m(\eta)}{d\eta^4} + 2\phi^2(m\pi)^2\frac{d^2Y_m(\eta)}{d\eta^2} + \phi^4\{(m\pi)^4-\lambda^4\}Y_m(\eta) = 0 \tag{8}$$

식 (8)의 고유치(eigenvalue : λ^2)는 다음과 같은 일반해를 갖는다.

$\lambda^2 > (m\pi)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = A_m\cosh\beta_m\eta + B_m\sinh\beta_m\eta + C_m\sin\gamma_m\eta + D_m\cos\gamma_m\eta \tag{9}$$

$\lambda^2 < (m\pi)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = A_m\cosh\beta_m\eta + B_m\sinh\beta_m\eta + C_m\sinh\gamma_m\eta + D_m\cosh\gamma_m\eta \tag{10}$$

여기서

$\beta_m = \phi\sqrt{\lambda^2+(m\pi)^2}$,

$\gamma_m = \phi\sqrt{\lambda^2-(m\pi)^2}$ or $\gamma_m = \phi\sqrt{(m\pi)^2-\lambda^2}$

식 (9)와 식(10)의 A_m, B_m, C_m과 D_m은 상수이다. 여기서 ξ 축에 대하여 대칭이므로 대칭 항만 남고 두 개의 계수는 없어진다. 다른 두 개의 계수들은 $\eta=1$ 인 끝단을 따라 변위와 모멘트 평형이 0가 되는 조건에 의해서 구해진다.

첫 번째 블록의 일반해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$\lambda^2 > (m\pi)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = E_m(\theta_{m11}\cosh\beta_m\eta + \theta_{m13}\cos\gamma_m\eta) \tag{11}$$

여기서

$$\theta_{m11} = 1/(\beta_m - ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sinh\beta_m$$
$$\theta_{m13} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_m - ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sin\gamma_m$$
$$ZZ_1 = -\beta_m\{\beta_m^2 - \nu^*\phi^2(m\pi)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_m\{\gamma_m^2 + \nu^*\phi^2(m\pi)^2\}$$

$\lambda^2 < (m\pi)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = E_m(\theta_{m22}\cosh\beta_m\eta + \theta_{m23}\cosh\gamma_m\eta) \tag{12}$$

여기서

$$\theta_{m22} = 1/(\beta_m - ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sinh\beta_m$$
$$\theta_{m23} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_m + ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sinh\gamma_m$$
$$ZZ_1 = -\beta_m\{\beta_m^2 - \nu^*\phi^2(m\pi)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_m\{\gamma_m^2 - \nu^*\phi^2(m\pi)^2\}$$

첫 번째 블록의 해를 구하기 위해 식(6), 식(11)과 식(12)를 식(3)과 식(4)에 대입하고 $\eta=1$ 끝단을 따라 작용하는 굽힘 모멘트 조건을 적용하고 푸리에 급수를 푸리에 확장으로 정리하면 m,n에 대한 행렬을 얻을 수 있다.

위와 같은 과정을 $W_2(\xi,\eta)$에 대하여 $Y_n(\eta)$을 구하면 다음과 같다.

$\phi^2\lambda^2 > (n\pi)^2$ 인 경우

$$Y_n(\xi) = E_n(\theta_{n11}\cosh\beta_n\xi + \theta_{n13}\cos\gamma_n\xi) \tag{13}$$

여기서

$$\theta_{n11} = 1/(\beta_n - ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\sinh\beta_n$$
$$\theta_{n13} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_n - ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\sin\gamma_n$$
$$ZZ_1 = -\beta_n\{\beta_n^2 - \nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_n\{\gamma_n^2 + \nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}\ ,\ \nu^* = 2-\nu$$

$\phi^2\lambda^2 < (n\pi)^2$ 인 경우

$$Y_n(\xi) = E_n(\theta_{n22}\cosh\beta_n\xi + \theta_{n23}\cosh\gamma_n\xi) \tag{14}$$

여기서

$$\theta_{n22} = 1/(\beta_n - ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\sinh\beta_n$$
$$\theta_{n23} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_n + ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\sinh\gamma_n$$
$$ZZ_1 = -\beta_n\{\beta_n^2 - \nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_n\{\gamma_n^2 - \nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}$$
$$\beta_n = 1/\phi\sqrt{\phi^2\lambda^2+(n\pi)^2}$$

$$\gamma_n = 1/\phi\sqrt{\phi^2\lambda^2-(n\pi)^2} \quad \text{or}$$
$$\gamma_n = 1/\phi\sqrt{(n\pi)^2-\phi^2\lambda^2}$$

앞서 수행된 첫 번째 블록의 경우와 마찬가지로 두 번째 블록의 해를 구하기 위해 식(7), 식(13)과 식(14)를 식(3)과 식(4)에 대입하고 $\xi=1$ 끝단을 따라 작용하는 굽힘 모멘트 조건을 적용하고 푸리에 급수를 푸리에 확장으로 정리하면 다음과 같이 m,n에 대한 행렬을 얻을 수 있다.

2.2 완전 비대칭 모드 (FASM)

완전자유 사각판의 완전 비대칭 모드는 Fig. 3과 같이 $W_1(\xi,\eta)$과 $W_2(\xi,\eta)$에 대하여 각각 고유진동해석을 수행하였다.

우선 $W_1(\xi,\eta)$ 과 $W_2(\xi,\eta)$는 다음과 같다.

$$W_1(\xi,\eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m(\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{2} \qquad (15)$$

$$W_2(\xi,\eta) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} Y_n(\eta)\sin\frac{n\pi\xi}{2} \qquad (16)$$

이들 변위 함수 $Y_m(\eta)$, $Y_n(\xi)$는 λ^2가 $(m\pi/2)^2$ 또는 $(n\pi/2)^2$보다 크거나 작을 경우에 대하여 식(9)와 식(10)과 같이 나타낼 수 있다. 그러나 식(9)와 식(10)의 대칭 항들이 $\eta=0$ 와 $\xi=0$ 을 따라 단순지지조건이기 때문에 소거될 수 있다. 또한 $\eta=1$ 에 대해 회전 평형과 수직력이 0라는 경계조건을 적용하면 변위함수 $Y_m(\eta)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$\lambda^2 > (m\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = E_m(\theta_{m11}\sinh\beta_m\eta + \theta_{m13}\sin\gamma_m\eta) \quad (17)$$

여기서

$$\theta_{m11} = 1/(\beta_m + ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\cosh\beta_m$$
$$\theta_{m13} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_m + ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\cos\gamma_m$$
$$ZZ_1 = \beta_m\{\beta_m^2 - \nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_m\{\gamma_m^2 + \nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}$$

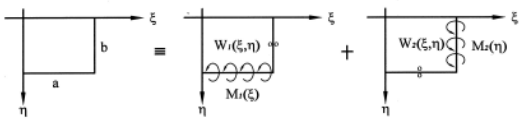


Fig. 3. Schematic view of building blocks used in analyzing the free vibration fully antisymmetric modes of the completely free plate

$\lambda^2 < (m\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = E_m(\theta_{m22}\sinh\beta_m\eta + \theta_{m23}\sinh\gamma_m\eta) \quad (18)$$

여기서

$$\theta_{m22} = 1/(\beta_m + ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\cosh\beta_m$$
$$\theta_{m23} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_m + ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\cosh\gamma_m$$
$$ZZ_1 = -\beta_m\{\beta_m^2 - \nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_m\{\gamma_m^2 - \nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}$$
$$\beta_m = \phi\sqrt{\lambda^2+(m\pi/2)^2}$$
$$\gamma_m^2 = \phi\sqrt{\lambda^2-(m\pi/2)^2} \quad \text{or}$$
$$\gamma_m^2 = \phi\sqrt{(m\pi/2)^2-\lambda^2}$$

$\phi^2\lambda^2 > (n\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_n(\xi) = E_n(\theta_{n11}\sinh\beta_n\xi + \theta_{n13}\sin\gamma_n\xi) \quad (19)$$

여기서

$$\theta_{n11} = 1/(\beta_n + ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cosh\beta_n$$
$$\theta_{n13} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_n + ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cosh\gamma_n$$
$$ZZ_1 = \beta_n\{\beta_n^2 - \nu^*/\phi^2(n\pi/2)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_n\{\gamma_n^2 + \nu^*/\phi^2(n\pi/2)^2\}$$

$\phi^2\lambda^2 < (n\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_n(\xi) = E_n(\theta_{n22}\sinh\beta_n\xi + \theta_{n23}\sinh\gamma_n\xi) \quad (20)$$

여기서

$$\theta_{n22} = 1/(\beta_n + ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cosh\beta_n$$
$$\theta_{n23} = ZZ_1/ZZ_2(\beta_n + ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cosh\gamma_n$$
$$ZZ_1 = -\beta_n\{\beta_n^2 - \nu^*/\phi^2(n\pi/2)^2\}$$
$$ZZ_2 = \gamma_n\{\gamma_n^2 - \nu^*/\phi^2(n\pi/2)^2\}$$
$$\beta_n = 1/\phi\sqrt{\phi^2\lambda^2+(n\pi/2)^2}$$
$$\gamma_n = 1/\phi\sqrt{\phi^2\lambda^2-(n\pi/2)^2} \quad \text{or}$$
$$\gamma_n = 1/\phi\sqrt{(n\pi/2)^2-\phi^2\lambda^2}$$

2.3 대칭-비대칭 모드 (SAM)

완전 자유 사각판의 대칭-비대칭 모드를 해석하기 위하여 Fig. 4와 같이 빌딩블록을 사용하였다. 이들 빌딩 블록들은 $\eta=0$ 에서 전단슬립조건이 생기며 $\xi=0$ 을 따라 단순지지 조건을 갖는다. $\xi=1$ 과 $\eta=1$ 에서 전단 슬립 조건을 가지며 굽힘 모멘트 $M_1(\xi)$ 와 $M_2(\eta)$가 작용한다.

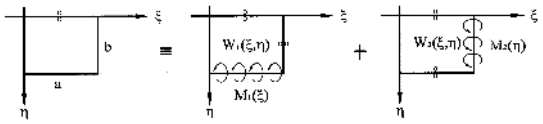


Fig. 4. Schematic view of building blocks used in analyzing the free vibration fully symmetric-antisymmetric modes of the completely free plate

Fig. 4의 첫 번째와 두 번째 빌딩 블록들은 다음과 같은 Lévy 해를 갖는다.

$$W_1(\xi,\eta)=\sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m(\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{2} \qquad (21)$$

$$W_2(\xi,\eta)=\sum_{n=0,1,2}^{\infty} Y_n(\xi)\cos n\pi\eta \qquad (22)$$

대칭-비대칭 모드에 대한 첫 번째 블록의 단 $\eta=0$와 $\eta=1$에서의 경계조건이 완전 대칭 모드의 경계조건과 같으므로 해석함수 $Y_m(\eta)$는 식(11), 식(12)와 같이 표현할 수 있다. 그러나 β_m과 γ_m의 $m\pi$을 $m\pi/2$로 바꾸고 식(6)의 삼각함수는 $\sin(m\pi\xi/2)$로 바꾸어서 쓰면 다음과 같다.

$\lambda^2>(m\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = E_m(\theta_{m11}\cosh\beta_m\eta+\theta_{m13}\cos\gamma_m\eta) \qquad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned}\theta_{m11} &= 1/(\beta_m-ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sinh\beta_m\\ \theta_{m13} &= ZZ_1/ZZ_2(\beta_m-ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sin\gamma_m\\ ZZ_1 &= -\beta_m\{\beta_m^2-\nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}\\ ZZ_2 &= \gamma_m\{\gamma_m^2+\nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}\end{aligned}$$

$\lambda^2<(m\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_m(\eta) = E_m(\theta_{m22}\cosh\beta_m\eta+\theta_{m23}\cosh\gamma_m\eta) \qquad (24)$$

여기서

$$\begin{aligned}\theta_{m22} &= 1/(\beta_m-ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sinh\beta_m\\ \theta_{m23} &= ZZ_1/ZZ_2(\beta_m+ZZ_1\gamma_m/ZZ_2)\sinh\gamma_m\\ ZZ_1 &= -\beta_m\{\beta_m^2-\nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}\\ ZZ_2 &= \gamma_m\{\gamma_m^2-\nu^*\phi^2(m\pi/2)^2\}\\ \beta_m &= \phi\sqrt{\lambda^2+(m\pi/2)^2}\\ \gamma_m^2 &= \phi\sqrt{\lambda^2-(m\pi/2)^2}\ \text{or}\ \gamma_m^2=\phi\sqrt{(m\pi/2)^2-\lambda^2}\end{aligned}$$

두 번째 빌딩 블록의 해는 이전의 모드해석에서 $\xi=0$ 와 $\xi=1$ 에서의 경계조건들이 완전 비대칭 모드의 경계조건과 일치한다. 그러나 식(22)의 함수 $Y_n(\xi)$은 식(19)와 식(20)과 같은 형태이나 β_n 과 γ_n 의 $n\pi/2$ 을 $n\pi$로 바꾸어야 한다.

$\phi^2\lambda^2>(n\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_n(\xi) = E_n(\theta_{n11}\sinh\beta_n\xi+\theta_{n13}\sin\gamma_n\xi) \qquad (25)$$

여기서

$$\begin{aligned}\theta_{n11} &= 1/(\beta_n+ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cosh\beta_n\\ \theta_{n13} &= ZZ_1/ZZ_2(\beta_n+ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cos\gamma_n\\ ZZ_1 &= \beta_n\{\beta_n^2-\nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}\\ ZZ_2 &= \gamma_n\{\gamma_n^2+\nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}\end{aligned}$$

$\phi^2\lambda^2<(n\pi/2)^2$ 인 경우

$$Y_n(\xi) = E_n(\theta_{n22}\sinh\beta_n\xi+\theta_{n23}\sinh\gamma_n\xi) \qquad (26)$$

여기서

$$\begin{aligned}\theta_{n22} &= 1/(\beta_n+ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cosh\beta_n\\ \theta_{n23} &= ZZ_1/ZZ_2(\beta_n+ZZ_1\gamma_n/ZZ_2)\cosh\gamma_n\\ ZZ_1 &= -\beta_n\{\beta_n^2-\nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}\\ ZZ_2 &= \gamma_n\{\gamma_n^2-\nu^*/\phi^2(n\pi)^2\}\\ \beta_n &= 1/\phi\sqrt{\phi^2\lambda^2+(n\pi)^2}\\ \gamma_n &= 1/\phi\sqrt{\phi^2\lambda^2-(n\pi)^2}\quad \text{or}\\ \gamma_n &= 1/\phi\sqrt{(n\pi)^2-\phi^2\lambda^2}\end{aligned}$$

$\xi=1$ 과 $\eta=1$ 에 작용하는 각각의 빌딩 블록 모멘트 합은 $\xi=1$ 과 $\eta=1$ 에 작용되는 총 모멘트가 0이 되어야 하는 경계조건을 만족해야 한다. 경계조건과 푸리에 확장을 적용하여 m,n에 대한 행렬을 구할 수 있다.

완전 대칭 모드, 완전 비대칭 모드 및 대칭 비대칭 모드에 대해 유도된 수식을 MATLAB 언어로 프로그램 하였다. MATLAB 프로그램은 초기 고유치(trial eigenvalue)를 입력하고 입력된 고유치를 가지고 행렬의 행렬식(determinant)이 0가 될 때까지 고유치를 바꾸어 가면서 계산을 수행한다. 프로그램에서 사용된 k는 반복계산 회수와 행렬의 크기를 의미한다. 만약 k가 2이면 2번 반복 계산과 4 x 4 행렬이 만들어지고 k가 10이면 10번의 반복 계산과 20 x 20 행렬이 만들어진다.

Table 1은 완전 대칭 모드에 대해 k 값에 따른 고유치의 수렴성을 검토하기 위하여 k에 대

Table 1. Convergence eigenvalues for the fully symmetric mode vibration of the completely free rectangular plate ($\phi = 1, \nu = 0.333$)

Mode / k	1	2	3	4	5
2	4.822	6.128	16.587	29.418	30.796
3	4.818	6.105	16.587	29.287	30.665
4	4.819	6.097	16.544	29.298	30.676
5	4.819	6.093	16.526	29.290	30.616
6	4.819	6.090	16.514	29.290	30.596
7	4.819	6.087	16.504	29.291	30.596
8	4.819	6.085	16.504	29.291	30.596
9	4.819	6.085	16.504	29.291	30.596
10	4.819	6.085	16.504	29.291	30.596

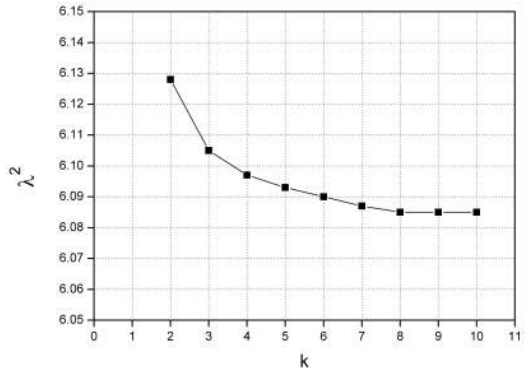


Fig. 5. Plot of eigenvalues convergence for second fully symmetric modes of a rectangular plate ($\phi = 1, \nu = 0.333$)

해 계산된 고유치를 나타내었다. 그리고 Fig. 5는 완전 대칭 모드의 2번째 모드에 대한 고유치의 수렴성을 그림으로 도시한 것이다.

Table 1과 Fig. 5에서 보듯이 k값이 8이상이면 고유치의 변화가 없는 것으로 나타났기 때문에 향후 계산에서 k = 8로 정하고 각각의 모드에 대해서 계산과정을 수행하였다.

III. 고유진동 유한요소 해석

이론 해석에 의한 수치해석 결과의 타당성을 검토하기 위하여 균일 열부가 하중에 대한 사각판의 고유진동 거동에 대한 유한요소 해석을 수행하였다.

유한요소 해석은 상용 유한요소 전산 프로그램인 ABAQUS(version 6.8-2)[14]를 이용하여 수행

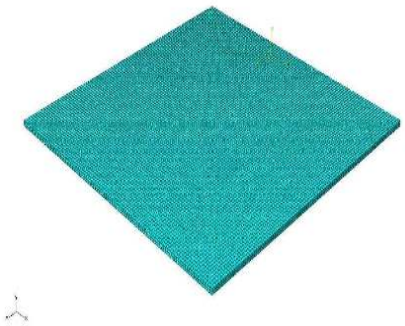


Fig. 6. Finite model of the rectangular plate

Table 2. Thermal properties of the rectangular plates [16]

Material	Young's Modulus (GPa) Temp. (℃)	E	Thermal Conductivity (W/m ℃)	Specific Heat (J/kg ℃)	Density (kg/m³)	Poisson's ratio
AL (6061-T6)	25.0	68.9	2163.4	1256.0	2712.5	0.33
	93.3	68.2				
	148.8	66.2				
	204.4	62.1				
	260.0	55.8				
	315.2	48.3				
Steel (SM45C)	25	213.7	311.7	460.5	8054.8	0.287
	93.3	209.4				
	204.4	203.0				
	315.5	193.4				
	426.6	177.4				
	460	170.9				
	537.7	149.6				
SUS (STS304)	25	199.9	195.2	502.4	8027.1	0.27
	93.3	195.9				
	204.4	187.9				
	315.5	179.9				
	426.6	171.6				
	537.7	163.9				
	648.8	155.9				

하였는데, 이 프로그램은 고유치(eigenvalue)를 Lanczos법으로 해를 구한다[15]. 유한 요소 모델은 열 해석을 위해 3D 요소(C3D20)를 사용하여 모델링(modeling)하였고 경계조건은 자유-자유 조건을 고려하였다.

일반적으로 유한요소 해석을 통한 고유진동수는 오름차순으로 결과(고유진동수, 모드 형상)가 출력된다. 이 때 고유진동수에 해당하는 진동모드는 모드 형상을 통하여 확인하였다.

유한요소 모델은 Fig. 6과 같이 요소의 크기를 길이방향으로 1 mm 간격으로 분할하여 모델의 총 요소 수는 20,000 개이고 총 절점수는 111,605 개다. 해석 조건은 상온에서부터 300 ℃까지 50 ℃간격으로 해석하였고, 본 연구에서 고려된 재료에 대한 물성치는 Table 2에 정리하였으며, 해석에 적용된 물성치는 온도에 따른 탄성계수만 고려

Table 3. Natural frequencies of FEM analysis for the rectangular plates

Unit : Hz

Material \ Mode / Temp.(℃)	1	2	3	4
Al 25	642.03	943.68	1195.5	1666.5
100	637.27	936.68	1186.7	1654.2
150	627.53	922.36	1168.5	1628.9
200	609.18	895.39	1134.4	1581.3
250	584.31	858.84	1088.1	1516.7
300	544.49	800.31	1013.9	1413.3
Steel 25	666.24	973.97	1194.1	1715.9
100	658.94	963.3	1181.0	1697.1
150	654.38	956.63	1172.8	1685.3
200	649.78	949.91	1164.6	1673.5
250	643.04	940.05	1152.5	1656.1
300	633.81	926.55	1136	1632.4
SUS 25	649.3	947.55	1147	1667.1
100	636.05	928.21	1123.6	1633.1
150	630.06	919.46	1113	1617.7
200	629.52	918.68	1112	1616.3
250	624.01	910.63	1102.3	1602.1
300	617.89	901.71	1091.5	1586.4

하였다.

유한요소 해석 결과 첫 번째에서 네 번째까지의 고유진동수를 Table 3에 나타내었다. 표에서 알 수 있듯이 알루미늄, 강재 및 스테인레스강 사각판의 최저 차 고유진동수는 각각 642.03 Hz, 666.24 Hz 및 649.3 Hz이다. 모든 사각판에 대해 온도가 상승할수록 고유진동수는 감소하였다. 최저 차 고유진동수를 비교해보면 알루미늄 사각판의 경우 약 100 Hz 가 감소하였고, 강재와 스테인레스강 사각판은 약 32 Hz의 고유진동수가 감소하였다.

Ⅳ. 이론해석과 유한요소해석 결과비교

본 연구에서 도출한 이론해석 결과의 타당성을 검증하기 위하여 기존의 참고문헌과 비교하였다. Fig. 7은 $\phi=1.0$, $\nu=0.333$ 일 때 계산된 고유치를 Gorman[13]의 고유치와 비교한 결과를 나타내었다. 그림에서 보듯이 거의 대부분 잘 일치하고 있음을 알 수 있었으며 가장 큰 차이는 Goramn[13]의 고유치를 기준으로 볼 때 완전 비대칭 모드(FASM)의 두 번째 모드에서 최대 6.4% 이다. Fig. 8은 $\phi=1.0$, $\nu=0.3$ 일 때 계산된 고유치를 중첩법으로 구한 Gorman[13]의 고유치와 Ritz법으로 구한 Leissa[17]의 고유치를 비교하여

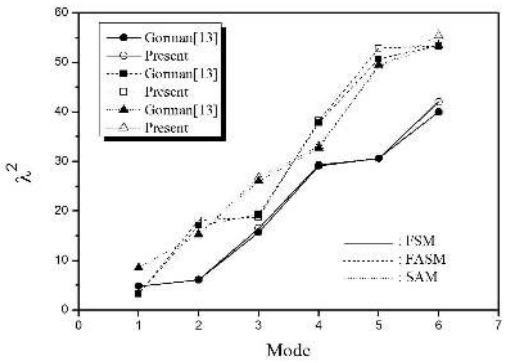


Fig. 7. Comparison eigenvalues for completely free the rectangular plate ($\phi = 1.0$, $\nu = 0.333$)

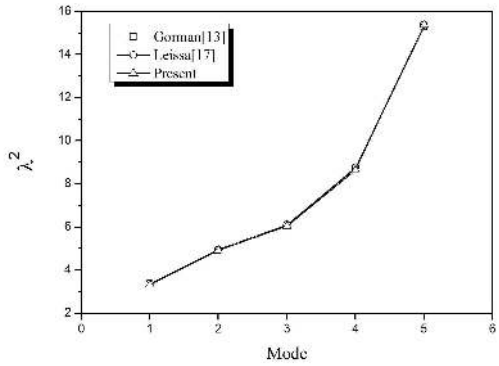


Fig. 8. Comparison first five eigenvalues of analytic for completely free the rectangular plate ($\phi = 1.0$, $\nu = 0.3$)

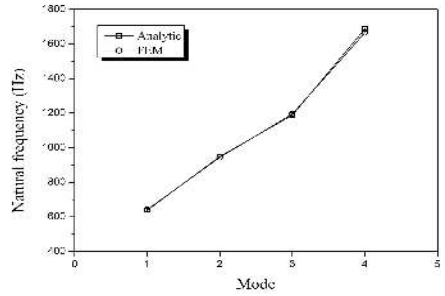
나타내었다. 그림에서 보듯이 거의 모든 모드에서 현재 계산된 고유치와 참고문헌의 고유치가 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다. 이와 같이 이론 해석의 타당성을 기존의 참고문헌과 비교하여 검증하였고 검증된 이론해석을 바탕으로 본 논문에 사용된 시편에 적용하여 계산된 고유치를 Table 4에 나타내었다.

상온에서 사각판의 고유진동 특성에 대하여 중첩법을 이용한 이론해석과 유한요소 해석 결과를 최저차부터 오름차순으로 비교하여 Fig. 9에 나타내었다. 그림에서 보듯이 이론해석 결과와 유한요소 해석 결과가 잘 일치함을 보이고 있다. 가장 큰 차이는 스테인레스강 사각판의 5차 모드에서 약 5% 정도이다. 나머지 알루미늄 및 강재 사각판은 약 3% 이내의 차이를 보이고 있다.

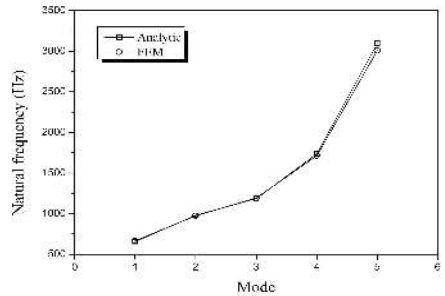
균일 열부가 하중이 100 ℃에서 300 ℃까지 50 ℃씩 증가하면서 사각판의 고유진동 특성에 대하여 이론 해석과 유한요소 해석 결과를 최저차부터

Table 4. Eigenvalues of analytic solutions for completely free rectangular plates of various materials ($\phi = 1.0$, $\lambda^2 = wa^2\sqrt{\rho/D}$)

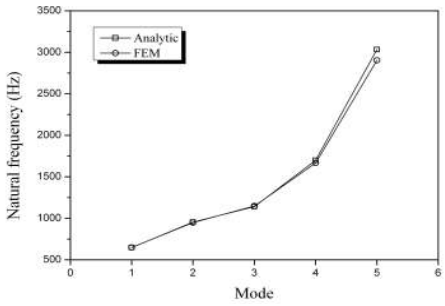
Mode	AL $\nu = 0.33$	Steel $\nu = 0.287$	SUS $\nu = 0.27$	Mode shape
1	3.251	3.322	3.392	FSAM
2	4.830	4.954	5.001	FSM
3	6.059	6.001	5.993	
4	8.597	8.786	8.915	SAM
5	15.35	15.65	15.92	



(a) Aluminum

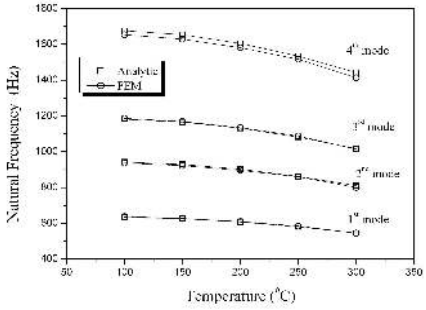


(b) Steel

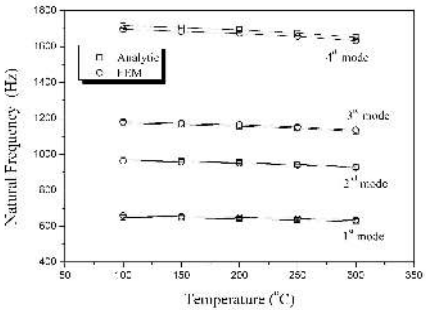


(c) SUS

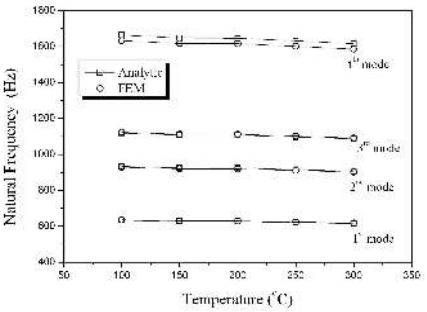
Fig. 9. Comparison natural frequencies of completely free the rectangular plates at room temperature (25 ℃)



(a) Aluminum



(b) Steel



(c) SUS

Fig. 10. Comparison of natural frequencies of rectangular plate for uniform temperature conditions

오름차순으로 Fig. 10에 나타내었다. 그림에서 보듯이 1차에서 3차 모드까지의 결과들이 거의 일치하고 있음을 알 수 있으며 4차 모드의 경우 약 10% 정도 차이를 보이고 있다. 또한 온도가 증가할수록 즉 균일 열부가 하중이 증가할수록 고유진동수가 감소하는 경향은 모든 재료의 사각판에서 나타났다. 상온을 기준으로 300 ℃일 때의 고유진동수 감소율을 살펴보면 알루미늄 사각판의 경우 약 14% 정도 감소하였고, 강재 및 스테인레스강 사각판의 경우 약 5 %정도 감소하였다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 균일 열부가 하중을 받는 알루미늄, 강재 및 스테인레스강 사각판의 자유 진동특성을 규명하기 위하여 중첩법을 이용한 이론해석과 유한요소 해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

(1) 중첩법을 이용한 이론해석 결과를 기존의 참고문헌들과 비교하고 유한요소 해석을 통하여 이론해석의 타당성을 검증하였다.

(2) 균일 열부가 하중을 받는 사각판의 고유 진동수는 열부가 하중이 증가할수록 감소하였다. 상온을 기준으로 300 ℃일 때의 고유진동수 감소율을 살펴보면 알루미늄 사각판의 경우 약 14 % 정도 감소하였고, 강재 및 스테인레스강 사각판의 경우 약 5%정도 감소하였다.

(3) 상기의 결과로 유추해보면 유한요소 해석을 수행하지 않고 이론해석의 고유치에 균일 온도에 상응하는 탄성계수 값만의 변화만 고려해도 진동특성을 파악할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

1) L. Meirovitch, " Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill, Inc., New York, NY, 1975.

2) B. A. Boley, " Thermally Induced Vibration of Beam", Journal of Aeronautical Scieces. Vol. 23, pp. 179-181, 1956.

3) B. A. Boley, and J. H. Weiner, " Theory of Thermal Stresses", John Wiley and Sons, Inc, pp. 3-355, 1960.

4) E. A. Thornton, and Y. A. Kim, " Thermally Induced Bending Vibrations of Flexible Rolled-up Solar Array", Journal of Spacecraft Rockets, Vol. 30, No. 4, pp. 438-448, 1993.

5) E. A. Thornton, G. P. Chin, and D. W. Gulick, "Thermally Induced Vibrations of a Self-shadowed Split-blanket Sollar Array", AIAA-94-1379, 1994.

6) R. S. Foster, and E. A. Thornton, " An Experimental Investigation of Thermally Induced Vibrations of Spaceraft Structures", AIAA-94-1380, 1994.

7) N. Ganesan, " Vibration of Heated Plates with Two Opposite Edges Simply Supported," Journal of Sound and Vibration, Vol.66, No.1, pp. 99-107, 1979

8) J. E. Locke, " Vibrartion Analysis of Heated Anisotropic Plates with Free Edge Condition", Journal of Aircraft, Vol. 31, No. 3, pp. 696-702, 1994.

9) J. Avsec and M. Oblak " Thermal Vibration Analysis for Simply Supported Beam and Clamped Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 308, pp. 514-525, 2007.

10) D. J. Mead, "Vibration and Buckling of Flat Free-free Plates under Non-uniform Inplane Thermal Stress", Journal of Sound and Vibration, Vol. 260, pp. 141-165, 2003.

11) 윤일성, 송오섭, “ 위성체 유연 구조물의 열진동 해석”, 한국항공우주학회지, Vol. 30, no. 1, pp. 56-64, 2002.

12) 공창덕, 오경원, Y. Sugiyama , " 유연 우주구조물의 열적 유기 진동에 관한 연구“, 한국항공우주학회지, Vol. 31, No. 9, pp. 46-54, 2003.

13) D. J. Gorman, " Free Vibration Analysis of the Completely Free Rectangular Plate by the Method of Superposition", Journal of Sound and Vibration., Vol. 57, No. 3, pp. 437-447, 1978.

14) Dassautt System Simlulia Corp., "ABAQUS/Standard User’s Manual", 2008

15) G. H. Golub, and C. F. Van Loan, "Matrix Computations", The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md., USA, 1983.

16) Department of Defence Handbook. "Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures", MIL-HDBK-5J Superseding MIL-HDBK-5H, 2008.

17) A. W. Leissa. "The Free Vibration of Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration., Vol. 31, pp. 257-293, 1973.