

Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

Z teorie konečných pravidelných grafov tretieho a štvrtého stupňa

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 1, 76--92

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117236>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Z TEORIE KONEČNÝCH PRAVIDELNÝCH GRAFOV TRETIEHO A ŠTVRTÉHO STUPŇA

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Došlo dne 21. úmora 1956.)

DT: 513.34.001

V článku pojednáva sa o systémoch uhlov konečného grafu a o ich vzťahu k systému všetkých eulerovských čiastočných grafov daného grafu. Zo získaných poznatkov o grafoch všeobecnejších odvodzujú sa dôsledky pre pravidelné grafy tretieho stupňa všeobecne a zvlášť pre také, ktoré majú aspoň jeden lineárny faktor, resp. ktoré sa dajú rozložiť na tri lineárne faktory. Na základe týchto poznatkov vyvodzujú sa vety o existencii lineárnych faktorov a hamiltonovských čiar v istých pravidelných grafoch štvrtého stupňa.

1. Definície a pomocné vety

V tomto príspevku používam termínov obvyklých v teorii grafov. Definície základných pojmov v tejto práci používaných sú uvedené napr. aj v mojej práci „O istých rozkladoch konečných grafov“ (Matematicko fyzikálny časopis SAV, V, 1955, č. 3). Uvádzam preto na doplnenie len tieto definície:

Definícia 1. Hovoríme, že graf je orientovaný, ak pre každú hranu grafu je ustálený smer a to tak, že z dvoch uzlov u, v , s ktorými je ľubovoľná hrana incidentná, jeden ustalujeme ako počiatočný, druhý ako konečný uzol hrany. Ak u je počiatočný, v konečný uzol hrany h , vyjadrujeme sa tiež tak, že hrana h smeruje z uzla u do uzla v .

Definícia 2. Trojici prvkov grafu $\{u, h_1, h_2\}$ pozostávajúcej z uzla u a hrán $h_1 \neq h_2$ hovoríme uhol grafu s vrcholom v uzle u a s ramenami h_1, h_2 , ak obe hrany h_1, h_2 sú incidentné s uzlom u .

Definícia 3. Kružnici K ľubovoľného konečného grafu hovoríme hamiltonovská čiara grafu, ak K obsahuje všetky uzly grafu.

Vzhľadom na to, že predmetom skúmania budú len konečné grafy, budeme v celej práci pod grafom rozumieť vždy konečný graf.

Prv než prikročíme ku skúmaniu pravidelných grafov, odvodme si niektoré pomocné vety, ktoré majú všeobecnejšiu platnosť:

Veta 1. Nech \vec{G} je ľubovoľný orientovaný graf o q hranach. O počte n tých uzlov grafa \vec{G} , do ktorých smeruje nepárný počet hrán, platí $n \equiv q \pmod{2}$.

Dôkaz. Označme znakom $\xi(i)$ počet tých uzlov grafa \vec{G} , do ktorých smeruje práve i hránu. Pretože každá hrana orientovaného grafa smeruje práve do jednoho uzla platí: $q = \sum_{i=0}^{\infty} i\xi(i)$ z čoho ihned vyplýva: $n = q - 2[\xi(2) + \xi(3) + 2\xi(4) + 2\xi(5) + \dots]$ čiže $n \equiv q \pmod{2}$.

Veta 2. Nech \vec{G}_1 je ľubovoľný orientovaný súvislý graf, $u \neq v$ nech sú ľubovoľné dva jeho uzly a nech \vec{C} je ľubovoľná cesta spojujúca uzly u , v v grafe \vec{G}_1 (pritom orientácia hrán cesty nemusí súhlasiť so smerom, v ktorom prichádzame z uzla u do uzla v). Ak zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty \vec{C} v orientáciu opačnú a u ostatných hrán grafa \vec{G}_1 zachováme orientáciu bez zmeny, vznikne tak istý graf \vec{G}_2 , o ktorom platí:

1. Do uzla u (resp. v) smeruje v grafe \vec{G}_2 párný resp. nepárný počet hrán práve vtedy, keď do tohto uzla smeruje v grafe \vec{G}_1 nepárný resp. párný počet hrán.

2. Do ľubovoľného uzla w rôzneho od u a rôzneho od v smeruje v grafe \vec{G}_2 párný resp. nepárný počet hrán práve vtedy, keď do w v grafe \vec{G}_1 smeruje párný resp. nepárný počet hrán.

Dôkaz. Uzel u (resp. v) je incidentný práve s jednou hranou cesty \vec{C} , teda zmena v orientácii hrán pri vzniku grafa \vec{G}_2 nastane práve u jednej hrany incidentnej s uzlom u (resp. v), z čoho ihned vyplýva tvrdenie 1.

Ak w je ľubovoľný iný uzol než u a iný ako v , potom buď w nie je uzlom cesty (čiže nenastane žiadna zmena v orientácii hrán incidentných s w pri vzniku grafa \vec{G}_2), alebo w je uzol cesty taký, že zmena v orientácii pri vzniku \vec{G}_2 nastala práve u dvoch hrán, s ktorými je uzol w incidentný, z čoho ihned vyplýva tvrdenie 2.

Veta 3. Nech G je ľubovoľný neorientovaný súvislý graf, ktorý má párný počet hrán, potom hrany grafa G možno orientovať tak, že vznikne orientovaný graf \vec{G} , v ktorom do každého uzla smeruje párný počet hrán.

Dôkaz. Nech \vec{G}_0 je orientovaný graf, ktorý vznikne z G , ak orientujeme každú jeho hranu. Ak by už pri tejto orientácii hrán do každého uzla smeroval párný počet hrán, nebolo by treba nič dokazovať. Predpokladajme preto, že v \vec{G}_0 existujú také uzly, do ktorých smeruje nepárný počet hrán. Počet týchto uzlov je podľa vety 1. párný, lebo počet hrán grafa G (resp. \vec{G}_0) je párný. Nech u_1, u_2, \dots, u_{2n} sú tie uzly grafa G , do ktorých smeruje v \vec{G}_0 nepárný počet hrán. Pretože G a teda aj \vec{G}_0 je podľa predpokladu súvislý graf, existujú v grafe G cesty C_1, C_2, \dots, C_n také, že cesta C_i spojuje uzly u_{2i-1}, u_{2i} ($i = 1, 2, \dots, n$).

Ak zmeníme v grafe \vec{G}_0 orientáciu všetkých hrán cesty C_1 a zachováme orientáciu všetkých ostatných hrán grafu \vec{G}_0 , vznikne tak istý graf \vec{G}_1 . Ak v grafe \vec{G}_1 zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty C_2 a u ostatných hrán ponecháme orientáciu bez zmeny, vznikne tak istý graf \vec{G}_2 atď. až: ak zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty C_n v grafe \vec{G}_{n-1} a zachováme orientáciu jeho ostatných hrán, dostaneme tak istý graf \vec{G}_n , v ktorom podľa vety 2. do všetkých uzlov bude smerovať párný počet hrán. $\vec{G} = \vec{G}_n$ je orientovaný graf požadovaných vlastností. Tým je veta 3. dokázaná.

Označme znakom $\mathfrak{U}(G) \neq \emptyset$ systém všetkých orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou všetkých hrán istého neorientovaného grafu G a ktoré majú túto vlastnosť: do každého uzla ľubovoľného grafu $\vec{G} \in \mathfrak{U}(G)$ smeruje párný počet hrán. Označme znakom $\mathfrak{P}(G)$ systém všetkých tých čiastočných grafov grafu G , ktoré sú eulerovskými grafmi (t. j. grafmi, u ktorých každý uzol je párnego stupňa), pričom prvkom systému $\mathfrak{P}(G)$ nech je tiež nulový graf N (t. j. graf, ktorý nemá žiadnej hrany a žiadneho uzla).

Dokážme, že platí: *Systémy $\mathfrak{U}(G)$, $\mathfrak{P}(G)$ pre ľubovoľný konečný graf G s párnym počtom hrán sú ekvivalentné, t. j. existuje vždy prosté zobrazenie ω systému $\mathfrak{U}(G)$ na systém $\mathfrak{P}(G)$.*

Nech $\mathfrak{P}(G) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ (kde $P_1 = N$) a nech \vec{G}_1 je orientovaný graf $\in \mathfrak{U}(G)$. Označme znakom \vec{G}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) orientovaný graf, ktorý vznikne z grafu \vec{G}_1 tak, že zmeníme orientáciu všetkých hrán grafu P_i na orientáciu opačnú a u ostatných hrán ponecháme orientáciu bez zmeny. Je zrejme $\vec{G}_i \in \mathfrak{U}(G)$, pretože do ľubovoľného uzla $u \in G$ smeruje v grafe \vec{G}_1 podľa predpokladu párný počet hrán a pri vzniku grafu \vec{G}_i dojde ku zmene orientácie hrany u párnego počtu hrán, s ktorými je uzol u incidentný (pretože P_i je eulerovský graf).

Nech ďalej \vec{G}_x je ľubovoľný graf $\in \mathfrak{U}(G)$. Označme znakom $H_{1,x}$ množinu tých hrán grafu G , ktoré majú inú orientáciu v grafe \vec{G}_1 než v grafe \vec{G}_x a znakom P_x čiastočný graf grafu G , ktorý pozostáva z hrán množiny $H_{1,x}$ a z tých uzlov grafu G , s ktorými je incidentná aspoň jedna hrana $\in H_{1,x}$. Tvrďme: P_x je eulerovský graf. Nech totiž u je ľubovoľný uzol $\in P_x$. Podľa predpokladu do uzla u smeruje ako v grafe \vec{G}_1 tak aj v grafe \vec{G}_x párný počet hrán, preto je potrebné zmeniť orientáciu u párnego počtu hrán incidentných s uzlom u v grafe \vec{G}_1 , aby všetky hrany incidentné s u mali takú istú orientáciu ako v \vec{G}_x , čiže každý uzol grafu P_x je párnego stupňa t. j. $P_x \in \mathfrak{P}(G)$.

Uvážme ešte toto: nech $P_i, P_j \in \mathfrak{P}(G)$ sú dva rôzne eulerovské grafy. U grafov \vec{G}_i, \vec{G}_j , ktoré vzniknú s grafu \vec{G}_1 popísaným spôsobom, bude mať aspoň jedna hrana odlišnú orientáciu. Teda \vec{G}_i, \vec{G}_j sú rôzne grafy. Je preto $\mathfrak{U}(G) =$

$= \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_n\}$ a ak položíme $\omega(\vec{G}_i) = P_i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ je tým definované prosté zobrazenie ω systému $\mathfrak{U}(G)$ na systém $\mathfrak{P}(G)$, teda systémy $\mathfrak{U}(G)$, $\mathfrak{P}(G)$ sú ekvivalentné. Z toho vyplýva napr., že strom S s párnym počtom hrán možno práve jedným spôsobom orientovať tak, aby do každého uzla smeroval párný počet hrán (stromom nazývame súvislý graf, ktorý neobsahuje žiadnu kružnicu a teda ani žiadny nenulový eulerovský graf), pretože systém $\mathfrak{P}(S)$ obsahuje jediný prvk: graf N .

Poznámka 1. Je známe, že o počte x eulerovských čiastočných grafov súvislého konečného grafu o m uzloch a n hranach platí: $x = 2^{n-m+1}$. Uvedený poznatok dáva nám preto možnosť ľahko vypočítať počet prvkov systému $\mathfrak{U}(G)$.

Veta 4. Nech G je ľubovoľný súvislý graf s párnym počtom hrán, potom existuje systém \mathfrak{W} uhlov grafu G taký, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhlia systému \mathfrak{W} a systém uhlov s touto vlastnosťou existuje len vtedy, keď graf G má párný počet hrán.

Dôkaz. I. Podľa vety 3. možno orientovať hrany grafu G tak, že vznikne orientovaný graf \vec{G} , v ktorom do každého uzla smeruje párný počet hrán. Nech $\bar{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ je množina tých uzlov grafu G (teda aj grafu \vec{G}), do ktorých smeruje v grafe \vec{G} aspoň jedna hrana. Označme znakom $H(u_i)$ množinu tých hrán, ktoré v grafe \vec{G} smerujú do uzla u_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Pretože každá hrana orientovaného grafu smeruje práve do jednoho uzla grafu, je každá hrana grafu G hranou práve jednej množiny systému $\mathfrak{G} = \{H(u_1), H(u_2), \dots, H(u_m)\}$. Nech $2n_i$ je počet hrán množiny $H(u_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Rozložme ľubovoľným spôsobom množinu $H(u_i)$ na n_i tried $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_{n_i}}$ po dvoch prvkoch a nech W_{i_x} ($x = 1, 2, \dots, n_i$) je uhol grafu \vec{G} , ktorého vrcholom je uzol u_i a jeho ramenami hrany triedy R_{i_x} .

Nech $\mathfrak{W}_i = \{W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_{n_i}}\}$ je systém uhlov takto konštruovaných, ktorých vrcholom je uzol u_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Súčet systémov $\mathfrak{W} = \sum_{i=1}^m \mathfrak{W}_i$ je systém požadovaných vlastností, lebo každá hrana grafu G je hranou práve jednej množiny $H(u_i) \in \mathfrak{G}$ a je prvkom práve jednej z tried R_{i_x} ($i = 1, 2, \dots, m$, $x = 1, 2, \dots, n_i$) a teda aj ramenom práve jednoho uhlia $\in \mathfrak{W}$.

II. Že systém \mathfrak{W} môže existovať len v grafe s párnym počtom hrán, je zrejmé z toho, že každý uhol má práve dve ramená.

2. Systémy uhlov v pravidelných grafoch tretieho stupňa

Priamym dôsledkom vety 4 je táto veta o pravidelných grafoch tretieho stupňa:

Veta 5. V lubovoľnom súvislom pravidelnom grafe tretieho stupňa s párnym počtom $2p > 0$ hrán existuje taký systém uhlov, že každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla systému.

Poznámka 2. V dôkaze vety 4. popísali sme postup ako najst v grafe taký systém uhlov \mathfrak{W} , že každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla systému, keď je daná orientácia hrán grafu, pri ktorej do každého uzla grafu smeruje párný počet hrán. V popisanom postupe je ponechána lubovôľa v tom, ako rozložime množinu $H(u_i)$ obsahujúcu $2n_i$ hrán na n_i tried po dvoch prvkoch, keď $n_i > 1$. Pretože v pravidelných grafoch tretieho stupňa nemôže byť $n_i > 1$, odpadá tu spomenutá lubovôľa a každej orientácii hrán grafu, pri ktorej do každého uzla grafu smeruje párný počet hrán, odpovedá (pri zachovaní popísaného postupu) práve jeden systém uhlov \mathfrak{W} .

Odvodme si teraz ďalšie vety o pravidelných grafoch tretieho stupňa.

Veta 6. Ak súvislý pravidelný graf tretieho stupňa G s párnym počtom hrán má lineárny faktor, potom existujú také dva systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ grafu, že platí:

1. Každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla $\in \mathfrak{W}_1$ a každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla $\in \mathfrak{W}_2$.

2. Systémy $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ sú disjunktné.

Dôkaz. Nech G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa s párnym počtom hrán, L lineárny faktor a F kvadratický faktor tohto grafu. Nech ďalej \vec{G}_1 je graf G orientovaný tak, že do každého uzla smeruje párný počet hrán, \mathfrak{W}_1 systém uhlov, ktorý odpovedá orientovanému grafu \vec{G}_1 . Nech \vec{G}_2 je opäť orientovaný graf G , pričom nech hrany lineárneho faktora L majú rovnakú orientáciu v grafoch \vec{G}_1, \vec{G}_2 a hrany kvadratického faktora F nech v grafe \vec{G}_2 majú opačnú orientáciu než v \vec{G}_1 . Pretože každý uzol grafu je incidentný práve s dvoma hranami kvadratického faktora, bude sa orientácia hrán incidentných a lubovoľným uzlom u grafu \vec{G}_1 lísiť práve u dvoch hrán voči orientácii týchto hrán v grafe \vec{G}_2 . To však znamená, že aj v grafe \vec{G}_2 bude do každého uzla smerovať párný počet hrán. Podľa dôkazu vety 4. existuje potom systém uhlov \mathfrak{W}_2 (odpovedajúci jednoznačne orientovanému grafu \vec{G}_2) taký, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla z \mathfrak{W}_2 .

Treba ešte dokázať, že systémy $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ sú disjunktné. Nech h_1 je lubovoľná hrana grafu G a nech h_2 je taká hrana grafu G , ktorá s hranou h_1 tvorí ramená uhla z \mathfrak{W}_1 , vrcholom tohto uhla nech je uzol u . Označme znakom v druhý uzol, s ktorým je hrana h_1 incidentná ($u \neq v$) a znakom h_3 hranu rôznu od h_0 a rôznu od h_2 , ktorá je incidentná s uzlom u .

A. Ak hrana h_1 je hranou lineárneho faktora, potom bude mať tú istú orientáciu v \vec{G}_2 , akú mala v \vec{G}_1 , ale hrany h_2, h_3 budú mať inú orientáciu v \vec{G}_2 .

než v \vec{G}_1 . Teda uhol z \mathfrak{W}_2 , ktorého ramenom je hrana h_1 , bude mať tieto prvky u, h_1, h_3 .

B. Ak hrana h_1 je hranou kvadratického faktora, potom h_1 bude mať inú orientáciu v \vec{G}_2 než v \vec{G}_1 . To znamená, že vrcholom uhla z \mathfrak{W}_2 , ktorého ramenom je h_1 , nebude uzol u , ale uzol v .

V oboch prípadoch uhol z \mathfrak{W}_1 a uhol z \mathfrak{W}_2 , ktorých ramenom je hrana h_1 , sú dva rôzne uhly. Hrana h_1 bola však lubovoľná hrana grafu G . Teda systémy $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$ nemôžu mať spoločného prvku. Tým je veta 6. dokázaná.

Veta 7. Nech súvislý pravidelný graf tretieho stupňa G s párnym počtom hrán dá sa rozložiť na tri lineárne faktory L_1, L_2, L_3 , potom existujú systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$, ktoré majú tieto vlastnosti:

1. Pre každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí: každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uha systému \mathfrak{W}_i .

2. Ak $i \neq j; i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, potom platí: $\mathfrak{W}_i, \mathfrak{W}_j = \emptyset$.

Dôkaz. Označme znakom \vec{G}_4 orientovaný graf G , ktorého hrany sú orientované tak, že do každého uzla grafu smeruje párný počet hrán. Nech \mathfrak{W}_4 je systém uhlov, ktorý odpovedá grafu \vec{G}_4 . Označme ďalej znakom $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$ orientované grafy, ktoré z grafu \vec{G}_4 vzniknú zmenou orientácie hrán takto: orientácia hrán v grafoch \vec{G}_4 a \vec{G}_i je rovnaká u hrán lineárneho faktora L_i , ostatné hrany nech majú inú (opačnú) orientáciu v \vec{G}_i než v \vec{G}_4 ($i = 1, 2, 3$).

Z dôkazu vety 6. je zrejmé, že grafy $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$ budú mať opäť tú vlastnosť, že do každého uzla grafu smeruje párný počet hrán a že teda existujú týmto grafom odpovedajúce systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$, také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uha z \mathfrak{W}_i ($i = 1, 2, 3$).

Vieme už (z dôkazu vety 6.), že platí $\mathfrak{W}_i \mathfrak{W}_4 = \emptyset$ pre všetky $i = 1, 2, 3$. Treba ešte dokázať, že platí $\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 = \emptyset; \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_3 = \emptyset; \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_3 = \emptyset$; platnosť týchto tvrdení je však zrejmá z toho, že graf \vec{G}_i dostaneme z grafu \vec{G}_j , ak zmeníme orientáciu u hrán kvadratického faktora, ktorý pozostáva z hrán aj lineárneho faktora L_i aj lineárneho faktora L_j ($i \neq j; i, j \in \{1, 2, 3\}$). Preto $\mathfrak{W}_i \mathfrak{W}_j = \emptyset$ pre všetky $i \neq j; i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, čo bolo treba dokázať.

3. ϑ -obrazy grafov tretieho stupňa

Nech $G = U + H$ je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa. Označme znakom \mathfrak{W} systém všetkých uhlov grafu G . Nech počet uzlov grafu G je $2n$ (je známe, že počet uzlov nepárnego stupňa lubovoľného grafu je párný), $3n$ je potom počet jeho hrán. Počet rôznych uhlov v grafe G je $6n$, lebo každý uzol grafu je vrcholom troch rôznych uhlov. Nech teda $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{3n}\}$;

$\mathfrak{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_{6n}\}$. Skonštruujme graf $G^* = U^* + H^*$ podľa grafu G takto:

1. $U^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_{3n}^*\}$, 2. $H^* = \{h_1^*, h_2^*, \dots, h_{6n}^*\}$, 3. Hrana h_i^* je incidentná s uzlom u_j^* práve vtedy, keď hrana h_j je ramenom uhla W_i .

Pretože každý uhol v G má dve ramená, bude skutočne každá hrana h_i^* incidentná práve s dvoma uzlami z U^* ; teda množina $G^* = U^* + H^*$ pri definovanej incidencii je grafom. Ukážme ešte, že ak G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, potom G^* je súvislý pravidelný graf štvrtého stupňa. Ukážme najprv, že každá hrana z G je ramenom štyroch rôznych uhlov z G . Nech totiž h_0 je ľubovoľná hrana z G , u, u' uzly, s ktorými je táto hrana incidentná v grafe G . Označme znakom h_1, h_2, h_0 hrany, s ktorými je incidentný uzol u a znakom h'_1, h'_2, h'_0 hrany, s ktorými je incidentný uzol u' . Hrana h_0 je ramenom týchto uhlov $\{u, h_0, h_1\}, \{u, h_0, h_2\}, \{u', h_0, h'_1\}, \{u', h_0, h'_2\}$. Pretože za prvé: $h_1 \neq h_2, h'_1 \neq h'_2$ (ináč by uzly u, u' neboli tretieho stupňa) a za druhé: $u \neq u'$ ide nutne o štyri rôzne uhly. Že h_0 nemôže byť ramenom ďalších uhlov grafu je zrejmé. Preto každý uzol $u^* \in U^*$ je nutne uzlom štvrtého stupňa v G^* , čiže G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa.

Dokážme ešte, že G^* je súvislý graf, keď G je súvislý graf. Stačí dokázať toto: keď G je súvislý graf a u_i^*, u_j^* sú ľubovoľné dva uzly z G^* , potom u_i^* súvisí s u_j^* .

Nech hrana h_i z G je incidentná s uzlami u, u' , hrana h_j z G incidentná s uzlami v, v' v G . Ak by hrany h_i, h_j boli incidentné s tým istým uzlom u_0 v grafe G , znamenalo by to, že existuje v grafe G uhol $W_k = \{u_0, h_i, h_j\}$ a teda v grafe G^* by hrana h_k^* bola incidentná s uzlami u_i^*, u_j^* , čiže uzly u_i^*, u_j^* by súviseli v grafe G^* . Predpokladajme preto, že u, u', v, v' sú čtyri rôzne uzly grafu G . Pretože G je podľa predpokladu súvislý graf, existuje v grafe G cesta $u_1, h_{1,2}, u_2, \dots, h_{n-1,n}, u_n$ (kde $u_1 = u, u_n = v$) spojujúca uzly u, v . Je buď $h_{1,2} = h_i$, alebo je $h_{1,2}$ taká hrana, ktorá s hranou h_i a uzlom u tvorí uhol grafu G . Je dalej buď $h_{n-1,n} = h_j$, alebo hrana $h_{n-1,n}$ s hranou h_j a uzlom v tvorí uhol grafu G . Okrem toho, ak $n > 2$, platí pre všetky $x = 1, 2, \dots, n - 2$ toto: hrana $h_{x,x+1}$ s hranou $h_{x+1,x+2}$ a uzlom u_{x+1} tvorí uhol grafu G .

Označme znakom $u_{x_x}^*$ ten uzol z G^* , ktorý odpovedá hrane $h_{x,x+1}$ z G . Z uvedeného vyplýva, že uzol $u_{x_x}^*$ súvisí s uzlom $u_{x_x+1}^*$ ($x = 1, 2, \dots, n - 2$), pretože existuje hrana v G^* , ktorá je incidentná s oboma uzlami. Pretože dalej uzol u_i^* buď je totožný, alebo súvisí s uzlom $u_{x_x}^*$ a práve tak uzol u_i^* buď je totožný, alebo súvisí s uzlom $u_{x_x+1}^*$, platí nutne u_i^* súvisí s u_j^* . Teda ľubovoľné dva uzly grafu G^* súvisia. Preto G^* je súvislý graf, ak G je súvislý graf.

O pravidelnom grafe štvrtého stupňa G^* budeme hovoriť, že je ϑ -obrazom pravidelného grafu tretieho stupňa G (písané $G^* = \vartheta(G)$) ak:

1. existuje prosté zobrazenie α množiny hrán H grafu G na množinu uzlov U^* grafu G^* ,

2. existuje prosté zobrazenie β systému uhlov \mathfrak{W} grafu G na množinu hrán H^* grafu G^* ,

3. pre ľubovoľnú dvojicu pozostávajúcú z uzlu u^* a hrany h^* grafu G^* ; kde $u^* = \alpha(h_i)$; $h^* = \beta(W_j)$; $h_i \in H$; $W_j \in \mathfrak{W}$ platí: Uzol u^* je incidentný v grafe G^* s hranou h^* práve vtedy, keď hrana h_i je ramenom uhu W_j v grafe G .

Poznámka 3. Špeciálnym prípadom pravidelných grafov tretieho stupňa sú grafy, u ktorých uzelmi sú vrcholy a hranami sú hrany takého mnohostenu, v ktorom každý vrchol je incidentný s troma hranami. Nech napr. G_1 je graf pravidelného štvorstenu, potom $\vartheta(G_1)$ je napr. graf pravidelného osmistenu; alebo nech G_2 je graf krychle, potom $\vartheta(G_2)$ je graf známeho štrnásťstenu, u ktorého 6 stien sú štvoruholníky a 8 stien sú trojuholníky. Dá sa dokázať, že platí toto: ak pravidelný graf tretieho stupňa G dá sa realizovať na orientovanej ploche rodu g , potom pravidelný graf štvrtého stupňa $\vartheta(G)$ dá sa tiež realizovať na tejto ploche. Táto problematika vymyká sa však z rámca našho príspevku.

Poznámka 4. Existujú tiež grafy štvrtého stupňa, ktoré nie sú ϑ -obrazom žiadneho pravidelného grafu tretieho stupňa.

O pravidelných grafoch štvrtého stupňa, ktoré sú ϑ -obrazom pravidelného grafu tretieho stupňa, platia tieto vety:

Veta 8. *Každý pravidelný graf štvrtého stupňa, ktorý má párný počet uzlov a je ϑ – obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa, má lineárny faktor.*

Dôkaz. Množinou hrán lineárneho faktora grafu $G^* = \vartheta(G)$ je množina obrazov systému \mathfrak{W}_1 uhlov grafu G (v zobrazení β), ktorého existencia vyplýva z vety 5.

Poznámka 5. Existujú tiež pravidelné grafy štvrtého stupňa s párnym počtom uzlov, ktoré nemajú lineárneho faktora.

Veta 9. *Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa s párnym počtom uzlov, ktorý je ϑ – obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa G a nech G má lineárny faktor, potom graf G^* má kvadratický faktor, ktorý sa dá rozložiť na dva lineárne faktory.*

Dôkaz. Podľa vety 6. existujú v G systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhu z \mathfrak{W}_1 a práve jednoho uhu z \mathfrak{W}_2 , pričom $\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 = \emptyset$. To znamená, že ľubovoľný uzol u^* u G^* je incidentný práve s jednou hranou množiny $H_1^* = \beta(\mathfrak{W}_1)$ a práve s jednou hranou množiny $H_2^* = \beta(\mathfrak{W}_2)$ a platí $H_1^* \cdot H_2^* = \emptyset$. Teda množina H_1^* je množinou hrán istého lineárneho faktoru L_1^* a taktiež množina H_2^* množinou hrán istého lineárneho faktoru L_2^* , pričom L_1^* a L_2^* nemajú spoločnej hrany.

Ich kompozícia je kvadratický faktor, ktorý sa dá rozložiť na dva lineárne faktory.

Veta 10. Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa s párnym počtom uzlov, ktorý je ϑ — obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa G a nech G dá sa rozložiť na tri lineárne faktory, potom G^* dá sa rozložiť na štyri lineárne faktory.

Poznámka 6. Ako je známe, existuje pravidelný graf tretieho stupňa s párnym počtom hrán, ktorý sa nedá rozložiť na tri lineárne faktory.

Dôkaz vety 10.: Podľa vety 7. existujú v G systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla systému \mathfrak{W}_i ($i = 1, 2, 3, 4$) a pre $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí: $\mathfrak{W}_i \mathfrak{W}_j = \emptyset$. Označme znakom H_i^* množinu obrazov prvkov systému \mathfrak{W}_i v zobrazení β . Lubovoľný uzol u^* grafu G^* je incidentný práve s jednou hranou množiny H_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$). Teda H_i^* je množinou hrán istého lineárneho faktora L_i^* grafu G^* . Pretože $H_i^* H_j^* = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ možno graf G^* rozložiť na lineárne faktory $L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*$, čo bolo treba dokázať.

Ukážeme, že platí aj táto veta:

Veta 11. Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa, ktorý sa dá rozložiť na štyri lineárne faktory $L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*$ a nech G^* je ϑ -obrazom istého pravidelného grafu tretieho stupňa G , potom G dá sa rozložiť na tri lineárne faktory.

Dôkaz. Nech $U = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ je množina uzlov grafu G . Označme znakom $H(u_i)$ množinu tých troch hrán grafu G , ktoré sú incidentné s uzlom u_i ($i = 1, 2, \dots, p$). V zobrazení α obrazom množiny $H(u_i)$ je istá trojica uzlov grafu G^* , označme ju znakom T_i^* . Pretože lubovoľná dvojica hrán množiny $U(u_i)$ spolu s uzlom u_i tvorí uhol grafu G existuje nevyhnutne taká hraňa v G^* , ktorá je incidentná s lubovoľnou dvojicou uzlov z trojice T_i^* . Trojica hrán grafu G^* , ktorá je v zobrazení β obrazom trojice uhlov s vrcholom v uzle u_i v grafe G , spolu s uzlami trojice T_i^* tvorí istú kružnicu K_i^* grafu G^* . Uzol u_i bol lubovoľný uzol grafu G . Ak teda najdeme takéto kružnice pre všetky uzly u_i ($i = 1, 2, \dots, p$), dostaneme tak systém kružník $C^* = \{K_1^*, K_2^*, \dots, K_p^*\}$, ktorý má tieto vlastnosti:

1. Každá hrana grafu G^* je hranou práve jednej kružnice z C^* , pretože každý uhol má práve jeden vrchol a je podľa predpokladu $h^* \in K_1^*$ práve vtedy, keď vrcholom uhla, ktorý je vzorom hrany h^* v zobrazení β , je uzol u_i .

2. Každý uzol u^* grafu G^* je uzlom práve dvoch kružník systému C^* , lebo vzor uzla u^* v zobrazení α t. j. hrana $h = \alpha^{-1}(u^*)$, je ramenom jednak uhlov s vrcholom v jednom, jednak uhlov s vrcholom v druhom uzle, s ktorým je hrana h incidentná.

Teda zo štyroch hrán, ktoré sú incidentné s lubovoľným uzlom u^* grafu G^* dve patria do jednej z kružník ϵC^* a dve do inej kružnice ϵC^* . Pri danom rozklade grafu G^* na štyri lineárne faktory (ktorý podľa predpokladu existuje), patrí každá z týchto štyroch hrán k inému lineárnemu faktoru L_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$). Teda o hranach incidentných s uzlom u^* platí:

bud' A. hrany z lineárnych faktorov L_1^* a L_4^* (resp. L_2^* a L_3^*) sú v tej istej kružnici systému C^* ,

alebo: B. hrany z lineárnych faktorov L_2^* a L_4^* (resp. L_1^* a L_3^*) sú v tej istej kružnici systému C^* ,

alebo: C. hrany z lineárnych faktorov L_3^* a L_4^* (resp. L_1^* a L_2^*) sú v tej istej kružnici systému C^* .

Ak platí tvrdenie A. (resp. B., resp. C.) zaraďme uzol u^* do triedy uzlov U_1^* (resp. U_2^* , resp. U_3^*). Keď prevedieme uvedeným spôsobom zatriedenie všetkých uzlov grafu G^* do tried dostaneme tak istý rozklad $\mathfrak{N}^* = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}$ množiny uzlov grafu G^* .

O rozklade \mathfrak{N}^* platí: nech T_i^* je lubovoľná trojica uzlov grafu G^* , ktorá je obrazom trojice hrán incidentných s uzlom u_i grafu G v zobrazení α , potom každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy uzlov U_x^* .

Dokážeme správnosť uvedeného tvrdenia.

Každá z hrán kružnice K_i^* musí patrí k inému lineárному faktoru, pretože ináč by uzol kružnice bol incidentný s dvoma hranami toho istého lineárneho faktora, čo nie je možné. Z toho však vyplýva, vzhľadom na to akým spôsobom sme zatriedovali uzly grafu G^* do tried U_x^* , že každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy rozkladu \mathfrak{N}^* .

Každý uzol grafu G^* má práve jeden vzor v zobrazení α , jeho vzorom je istá hrana grafu G . Vzormi uzlov triedy U_x^* sú hrany istej triedy hrán H_x grafu G ($x = 1, 2, 3$).

Z troch hrán, s ktorými je incidentný lubovoľný uzol z G jedna je z H_1 , jedna z H_2 , jedna z H_3 . Dokázali jsme už totiž, že každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy rozkladu \mathfrak{N}^* . Z toho vyplýva, že každá hrana trojice hrán $H(u_i)$ (kde u_i je lubovoľný uzol grafu G) incidentných s uzlom u_i patrí do inej z množín H_x ($x = 1, 2, 3$).

Graf G možno preto rozložiť na tri lineárne faktory takto: lineárny faktor L_x bude pozostávať z hrán a len z hrán množiny H_x ($x = 1, 2, 3$). Pretože $H_x H_y = \emptyset$ pre $x \neq y$, je tým skutočne daný rozklad grafu G na tri lineárne faktory. To bolo treba dokázať.

4. O rozkladoch pravidelných grafov štvrtého stupňa $\vartheta(G)$ na hamiltonovské čiary

Odvodme si niektoré vety, ktoré poukazujú na úzky vzťah medzi hamiltonovskými čiarami v pravidelných grafoch tretieho stupňa a rozkladmi ϑ -obrazov týchto grafov na dve hamiltonovské čiary.

Veta 12. Nech G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa. Ak v grafe G existuje hamiltonovská čiara, potom graf $\vartheta(G)$ možno rozložiť na dve hamiltonovské čiary.

Veta 13. Ak graf $\vartheta(G)$ dá sa rozložiť na dve hamiltonovské čiary, potom v G existuje hamiltonovská čiara.

Veta 14. Nech λ je počet rôznych hamiltonovských čiar v súvislom pravidelnom grafe tretieho stupňa G a nech $2n$ je počet uzlov tohto grafu, potom o počte λ^* rôznych rozkladov grafu $G^* = \vartheta(G)$ na dve hamiltonovské čiary platí $\lambda^* = \lambda \cdot 2^{n-1}$.

Dôkaz vety 12: Nech $G = U + H$ je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ množina jeho uzlov a nech existuje v G hamiltonovská čiara K . Hamiltonovská čiara je faktorom druhého stupňa, preto hrany z G nepatriace do K sú hranami lineárneho faktora (označme ho L) grafu G .

Nech $G^* = \vartheta(G)$; $G^* = U^* + H^*$ a nech U_L^* je množina tých uzlov grafu G^* , ktoré v zobrazení α sú obrazmi hrán lineárneho faktora L , U_K^* množina tých uzlov grafu G^* , ktoré v zobrazení α sú obrazmi hrán hamiltonovskej čiary K . Zachovajme označenie $C^* = \{K_1^*, K_2^*, \dots, K_r^*\}$ pre systém kružníc grafu G^* taký, že kružnica K_i^* odpovedá uzlu $w^* \in G$ takto: uzly kružnice K_i^* sú obrazy tých hrán grafu G v zobrazení α , ktoré sú incidentné s uzlom u_i a hrany kružnice K_i^* sú obrazmi v zobrazení β tých uhlov grafu G , ktorých vrcholom je uzol u_i . Vieme, že každý uzol grafu G^* je uzlom práve dvoch kružníc z C^* .

Nech C_L^* je systém tých kružníc z C^* , ktoré obsahujú uzol z U_L^* ; platí: $C_L^* = C^*$. Je totiž C_L^* systém všetkých tých kružníc, ktoré odpovedajú množine U_L všetkých uzlov z grafu G , ktoré sú incidentné s hranami lineárneho faktora L .

Rozdelme hrany množiny H^* do dvoch tried H_1^*, H_2^* takto: nech u_i^* je lubovoľný uzol množiny U_L^* a nech $K_{p_i}^*, K_{q_i}^*$ sú tie kružnice systému C^* , ktoré obsahujú uzol u_i^* ,

1. do triedy H_1^* zaradme dve hrany kružnice $K_{p_i}^*$, ktoré sú incidentné s uzlom u_i^* , zbývajúcemu (tretiu) hranu kružnice $K_{p_i}^*$ zaradme do triedy H_2^* ,
2. dve hrany kružnice $K_{q_i}^*$ a to tie, ktoré sú incidentné s u_i^* zaradme do H_2^* , ostávajúcemu (tretiu) hranu zaradme do triedy H_1^* .

Ak takto prevedieme zatriedenie hrán všetkých dvojíc kružníc obsahujúcich uzol z ϵU_L^* , je každá hrana grafu hranou práve jednej z tried H_1^*, H_2^* , pretože za prvé: každá hrana je hranou práve jednej kružnice z C^* (pozri dôkaz predchádzajúcej vety) a za druhé: každá kružnica z C^* obsahuje práve jeden uzol z U_L^* . Všimnime si ešte, že dve hrany lubovoľnej kružnice ϵC^* , s ktorými je incidentný uzol z U_L^* patria do tej istej triedy a dve kružnice, s ktorými je incidentný uzol z U_K^* , patria k rôznym triedam.

Dokážme teraz, že platí: Čiastočný graf G_1^* (resp. G_2^*) grafu G^* obsahujúci všetky hrany a len hrany triedy H_1^* (resp. H_2^*) je hamiltonovskou čiarou grafu G^* .

A. Tvrďme: G_1^* (resp. G_2^*) je faktorom druhého stupňa v G^* . Nech u_i^* je lubovoľný uzol grafu G^* . Ak je $u_i^* \in U_L^*$, potom u_i^* je zrejme incidentný práve s dvoma hranami z H_1^* a s dvoma hranami z H_2^* . Ak je $u_i^* \in U_K^*$, potom vzhľadom na to, že každá z dvoch hrán incidentných s uzlom u_i^* v jednej kružnici (a tak isto aj v druhej kružnici) systému C^* obsahujúcej uzol u_i^* patrí do inej triedy, platí: uzol u_i^* je incidentný s dvoma hranami z H_1^* a s dvoma hranami z H_2^* . Tým je dôkaz tvrdenia A. vykonaný.

B. Tvrďme: G_1^* (resp. G_2^*) je súvislý graf. Dôkaz tvrdenia: Ak h_1, h_2 sú lubovoľné také dve hrany hamiltonovskej čiary K , ktoré sú incidentné s tým istým uzlom u_i grafu G , potom uzly $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ súvisia v grafe G_1^* . Nech totiž h_0 je tá hrana lineárneho faktora L , ktorá je incidentná s uzlom u_i , potom obrazy $\alpha(h_1), \alpha(h_2), \alpha(h_0)$ sú uzlami kružnice $K_i^* \in C^*$. Teda do triedy H_1^* patrí bud' hrana incidentná v G^* s uzlami $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ (potom uzly $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ zrejme súvisia v G_1^*), alebo do triedy H_1^* patrí aj hrana incidentná v G^* s uzlami $\alpha(h_1), \alpha(h_0)$ aj hrana incidentná s uzlami $\alpha(h_2), \alpha(h_0)$. Čiže uzly $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ súvisia v grafe G_1^* . Obdobná úvaha vedie k rovnakému uzáveru pre G_2^* .

Teda v zobrazení α obrazy dvoch „súsedných“ hrán hamiltonovskej čiary K súvisia v G_1^* (resp. v G_2^*). To však znamená, že v G_1^* (resp. v G_2^*) súvisia všetky obrazy (v zobrazení α) hrán z K . Ináč povedané: lubovoľné dva uzly množiny U_K^* súvisia v grafe G_1^* (resp. v grafe G_2^*). Pretože hrana z H_1^* (resp. z H_2^*), ktorá je incidentná v grafe G_1^* (resp. G_2^*) s istým uzlom z U_L^* je incidentná aj s jedným uzlom z U_K^* , súvisí v grafe G_1^* (resp. v grafe G_2^*) každý uzol u U_L^* so všetkými uzlami z U_K^* . Preto graf G_1^* (resp. graf G_2^*) je súvislý graf. Tým je dôkaz vety 12. vykonaný.

Dôkaz vety 13.: I. Nech $G^* = \vartheta(G)$; $G = U + H$; $U = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ a nech G_1^*, G_2^* sú dve hamiltonovské čiary grafu G^* , ktoré nemajú spoločnej hrany. Hrany hamiltonovskej čiary G_1^* (resp. G_2^*) tvoria triedu hrán H_1^* (resp. H_2^*). Nech $C^* = \{K_1^*, K_2^*, \dots, K_p^*\}$ je systém kružník grafu G^* taký, že uzly kružnice $K_i^* \in C^*$ sú obrazmi troch hrán incidentných s uzlom $u_i \in U$ v zobrazení α a hrany kružnice K_i^* sú obrazmi troch uhlov grafu G s vrcholom v uzle u_i v zobrazení β . Ak by systém C^* obsahoval iba dve kružnice, t. j. ak by graf G pozostával iba z dvoch uzlov u_1, u_2 a z troch hrán s týmito uzlami incidentných, potom by G zrejme obsahoval hamiltonovskú čiaru a nebolo by potrebné nič dokazovať. Predpokladajme preto, že G má najmenej štyri uzly a teda najmenej šesť hrán t. j., že C^* obsahuje najmenej štyri kružnice a najmenej šesť uzlov. Platí: lubovoľná kružnica K_i^* systému C^* obsahuje hrany z oboch tried H_1^*, H_2^* . Ak by totiž kružnica K_i^* obsahovala napr. len hrany z triedy H_1^* , potom K_i^* by bola kružnicou aj v G_1^* a uzly tejto kružnice by nesúviseli s ostatnými uzlami grafu G_1^* , čo odporuje predpokladu, že G_1^* je hamiltonovská čiara.

Teda každá kružnica z C^* bud' obsahuje dve hrany z H_1^* a jednu z H_2^* , alebo obsahuje jednu hranu z H_1^* a dve z H_2^* . Tak či tak existuje práve jeden

uzol (budeme mu hovoriť význačný uzol) kružnice K_i^* taký, že je incidentný s dvoma hranami kružnice, ktoré patria do tej istej triedy H_j^* ($j = 1, 2$). Každý uzol je užom práve dvoch kružníc systému C^* , je však zrejmé, že ak istý uzol je význačným (resp. nie je význačným) uzlom jednej kružnice, je význačným (resp. nie je význačným) uzlom aj druhej kružnice.

Označme znakom V^* množinu všetkých význačných uzlov grafu G^* . Vzory význačných uzlov v zobrazení α tvoria istú množinu hrán H_V grafu G , ktorá má túto vlastnosť: každý uzol grafu G je incidentný práve s jednou hranou z H_V , pretože obrazy hrán incidentných s uzlom grafu G v zobrazení α sú uzly kružnice z C^* a každá kružnica z C^* — ako sme práve dokázali — má práve jeden význačný uzol. Teda H_V je množinou hrán istého lineárneho faktora L grafu G . Hrany grafu G nepatriace do L sú hranami istého kvadratického faktora K grafu G . Dokážeme, že K je hamiltonovská čiara grafu G . Prv však než prikročíme k dôkazu tohto tvrdenia, dokážeme ešte toto:

II. Nech \bar{G}^* je čiastočný graf grafu G^* , ktorý pozostáva z tých hrán grafu G^* , ktoré sú incidentné s dvoma uzlami nevýznačnými, potom \bar{G}^* je kružnica, ktorá obsahuje všetky nevýznačné uzly grafu G^* .

Že všetky uzly v \bar{G}^* sú druhého stupňa, je zrejmé, lebo ak istá hrana je incidentná s dvoma nevýznačnými uzelmi, potom každý z týchto uzelov je incidentný ešte práve s jednou takouto hranou.

Nech K_1^* je kružnica z C^* a nech v_1^* je jej význačný uzol, u_1^*, u_2^* jej uzly nevýznačné. Obiehajme po hranach hamiltonovskej čiary G_1^* a po hranach hamiltonovskej čiary G_2^* cez ich jednotlivé uzly tak, že v oboch prípadoch vyjdeme z užla u_1^* a užol u_2^* bude najbližší nevýznačný užol, ktorý dostihneme. Teda u jednej hamiltonovskej čiary bude nás postup popisovať istá postupnosť užlov u_1^*, u_2^*, \dots , u druhej postupnosť užlov $u_1^*, v_1^*, u_2^*, \dots$. Pri ďalšom postupe z užla u_2^* v jednej z hamiltonovských čiar prejdeme hned do ďalšieho nevýznačného užla $u_3^* \neq u_1^*$, u druhej najbližší užol bude opäť istý význačný užol (v_2^*) a potom až nasleduje užol u_4^* . Uvážme totiž, že v každej kružnici z C^* jedna hrana patrí do jednej z tried H_1^*, H_2^* , zbývajúce obe do druhej z týchto tried a užol kružnice incidentný s hranami tejto kružnice, ktoré patria do tej istej triedy, je význačný užol.

Všimnime si, že poradie užlov nevýznačných (ak neprihliadame k „umiesteniu“ význačných užlov) v akom cez tieto prechádzame obiehajúc hamiltonovské čiary G_1^*, G_2^* , musí byť v oboch hamiltonovských čiarach rovnaké, nech ako dlho pokračujeme v postupe. Avšak v takom istom poradí musíme prechádzať cez jednotlivé nevýznačné užly, ak volíme tento postup: vyjdeme z užla u_1^* , po hrane, ktorá je incidentná s u_2^* , ďalej z užla u_2^* po hrane, ktorá je incidentná s u_3^* a je incidentná s ďalším nevýznačným užlom (týmto užlom je zrejme užol u_3^*) bez ohľadu na to, do ktorej triedy táto hrana incidentná s dvoma nevýznačnými uzelmi patrí. Obdobne z užla u_3^* do nevýznačného užla u_4^*

atď. Pretože pri obiehaní po hamiltonovskej čiare prejdeme po konečnom počte krokov cez všetky uzly grafu G^* (a teda aj cez všetky nevýznačné uzly tohto grafu), musíme nutne pri obiehaní po hranách grafu \bar{G}^* po konečnom počte krokov (a to v rovnakom poradí ako pri obiehaní hamiltonovských čiar) prejsť cez všetky nevýznačné uzly grafu G^* . Teda \bar{G}^* je graf druhého stupňa a je grafom súvislým. \bar{G}^* je kružnica a obsahuje všetky nevýznačné a len nevýznačné uzly grafu G^* . Tým je dôkaz tvrdenia II prevedený.

III. Dokážme napokon, že kvadratický faktor K (z prvej časti dôkazu) je hamiltonovskou čiarou grafu G . Stačí dokázať, že K je súvislý graf.

Nech postupnosť hrán $P^* = h_1^*h_2^*, \dots, h_p^*, h_1^*, \dots$ popisuje v akom poradí prechádzame cez hrany kružnice \bar{G}^* pri obiehaní po nej v pevne zvolenom smere obiehania vychádzajúc z jej hrany h_1^* . Každá hrana postupnosti P^* je hranou práve jednej kružnice z C^* ; označme znakom $K_{z_j}^*$ kružnicu z C^* , ktorej hranou je hrana h_j^* postupnosti P^* ($j = 1, 2, \dots, p$). Ďalej označme znakom $u_{j,j+1}^*$ uzol kružnice \bar{G}^* , ktorý je incidentný s jej hranami h_j^*, h_{j+1}^* ($j = 1, 2, \dots, p - 1$).

Platí zrejme: vzorom v zobrazení α uzla $u_{j,j+1}^*$ je istá hrana $h_{j,j+1} = \alpha^{-1}(u_{j,j+1}^*)$ ktorá je v grafe K incidentná s uzlami $u_{z_j}, u_{z_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \dots, p - 1$). Pretože súvislosť medzi uzlami je vzťah tranzitívny, musia nutne súviset v K všetky uzly u_{z_j} ($j = 1, 2, \dots, p$), ktoré odpovedajú kružniciam $K_{z_1}^*, K_{z_2}^*, \dots, K_{z_p}^*$, z ktorých každá obsahuje po jednej hrane postupnosti P^* (kružnica $K_{z_j}^*$ obsahuje podľa predpokladu hranu h_j^*).

Nech $\bar{U} = \{u_{z_1}, u_{z_2}, \dots, u_{z_p}\}$. Vieme, že každá kružnica z C^* obsahuje práve jednu hranu z \bar{G}^* a teda podľa časti II. dôkazu aj práve jednu hranu postupnosti P^* a každá hrana postupnosti P^* je hranou práve jednej kružnice z C^* . Teda $\bar{U} = U$, čiže K je súvislý graf obsahujúci všetky uzly grafu G a každý uzol z K je uzlom druhého stupňa. Preto K je hamiltonovská čiara grafu G , čo bolo treba dokázať.

Dôkaz vety 14.: Ak je $\lambda = 0$, potom je aj $\lambda^* = 0$, lebo z $\lambda^* > 0$ vyplýva podľa vety 13. $\lambda > 0$. Nech $\lambda > 0$ a nech $K_1, K_2, \dots, K_\lambda$ sú všetky rôzne hamiltonovské čiary v G , K_i ľubovoľná z nich. K tejto hamiltonovskej čiare K_i možno najst rozklad množiny hrán grafu $G^* = \vartheta(G)$ na triedy hrán H_1^*, H_2^* taký, že H_1^* resp. H_2^* je množina všetkých hrán istej hamiltonovskej čiary G_1^* resp. G_2^* pričom tieto hamiltonovské čiary nemajú spoločnej hrany. Pri zatriedovaní hrán spôsobom, ktorý sme popísali v dôkaze vety 12 pri dvojici kružník $K_{p_i}^*, K_{q_i}^*$ (ktorých spoločným uzlom je uzol $u_i^* \in U_L^*$) do tried H_1^*, H_2^* , mali sme možnosť si vybrať, ktorú z kružník označíme $K_{p_i}^*$ a ktorú $K_{q_i}^*$. To má pravda vplyv na zatriedovanie. Pretože počet uzlov grafu G je podľa predpokladu $2n$, má G práve $3n$ hrán a počet hrán lineárneho faktora L je n . Teda U_L^* má n uzlov a existuje n dvojíc kružník, ktorých spoločným uzlom je uzol ϵU_L^* . Zmena označenia najmenej v jednej a najviac v $n - 1$ dvojiciach kruž-

níč spôsobí zmenu v rozklade na triedy H_1^*, H_2^* (zmena u všetkých dvojíc by spôsobila iba zmenu označenia tried, nie však zmenu rozkladu). Pre rozklad na dve hamiltonovské čiary grafu G^* podľa pevne zvolenej hamiltonovskej čiary K_i grafu G máme teda vcelku 2^{n-1} rôznych možností. Pretože pri dvoch rôznych hamiltonovských čiarach K_i, K_j v G príslušné lineárne faktory (ktorých hranami sú hrany nepatriace do K_i resp. do K_j) sa líšia aspoň jednou hranou, budú rozdielne aj odpovedajúce množiny význačných uzlov v grafe G^* a budú rozdielne aj týmto odpovedajúce rozklady grafu G^* na dve hamiltonovské čiary. Teda je $\lambda^* \geq \lambda \cdot 2^{n-1}$. Ak by bolo $\lambda^* > \lambda \cdot 2^{n-1}$ musela by podľa vety 13. existovať množina význačných uzlov, ktorá nie je obrazom množiny hrán grafu G nepatriacich do hamiltonovskej čiary K_i ($i = 1, 2, \dots, \lambda$) v zobrazení α . Podľa vety 13. by potom existovala ešte aspoň jedna ďalšia hamiltonovská čiara $K_{\lambda+1}$ v grafe G . To je spor s predpokladom. Je proto $\lambda^* = \lambda \cdot 2^{n-1}$, čo bolo treba dokázať.

LITERATURA

Steinitz E.: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934.

König D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

Kotzig A.: O istých rozkladoch konečných grafov, Matem. fyz. časopis SAV, V, 1955, č. 3.

Резюме

ИЗ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава.

(Поступило в редакцию 21/II 1956 г.)

В статье доказываются следующие теоремы:

1. Пусть G — произвольный связный граф с четным числом ребер; тогда существует система \mathfrak{W} углов графа G такая, что каждое ребро из G принадлежит точно одному углу системы и система углов \mathfrak{W} с этим свойством существует только тогда, если G содержит четное число ребер (тройка элементов графа G : $\{u, h_1, h_2\}$, где u — вершина, $h_1 \neq h_2$ — ребра, называется углом графа G , если оба ребра h_1, h_2 инцидентны с вершиной u).

2. Если связный регулярный граф третьей степени G с четным числом ребер содержит линейный множитель, то в G существуют две системы углов $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$, являющиеся дизъюнктными, и каждое ребро графа является элементом точно одного угла системы \mathfrak{W}_1 (соотв. \mathfrak{W}_2). Если, кроме того, G можно разложить на три линейных множителя, то существуют

в G четыре системы углов, не имеющие попарно общего угла, причем каждое ребро графа является элементом точно одного угла каждой из этих систем.

Граф G^* , множество вершин которого есть U^* , множество ребер H^* , называется ϑ -образом графа G — где G есть связный регулярный граф третьей степени, U есть множество его вершин, H есть множество его ребер — если:

- I. Существует простое отображение α множества H на множество U^* ,
- II. существует простое отображение β системы всех углов \mathfrak{W} графа G на множество ребер H^* ,

III. вершина $u^* = \alpha(h_i)$ инцидентна с ребром $h^* = \beta(W_i)$ в графе G^* тогда и только тогда, если ребро $h_i \in H$ является элементом угла $W_i \in \mathfrak{W}$.

3. Для графов $G^* = \vartheta(G)$ с четным числом вершин, которые являются, очевидно, связными регулярными графами четвертой степени, доказывается следующее:

Каждый граф $\vartheta(G)$ содержит линейный множитель. Если в G существует линейный множитель, то в графе $\vartheta(G)$ имеется квадратичный множитель, разложимый на два линейных множителя. Если граф G можно разложить на три линейных множителя, то граф $\vartheta(G)$ можно разложить на четыре линейных множителя и наоборот.

4. Дальнейшие доказываемые теоремы обращают внимание на тесную связь между гамильтоновыми линиями в регулярных графах третьей степени и разложениями их ϑ -образов на две гамильтоновы линии. Доказывается следующее теоремы:

- a) Если в регулярном графе третьей степени G существует гамильтонова линия, то $\vartheta(G)$ можно разложить на две гамильтоновы линии и наоборот.
- б) Пусть λ — число различных гамильтоновых линий в регулярном графе третьей степени G и $2n$ — число его углов, тогда о числе λ^* различных разложений графа $\vartheta(G)$ на две гамильтоновы линии можно утверждать: $\lambda^* = \lambda \cdot 2^{n-1}$.

Zusammenfassung

AUS DER THEORIE DER ENDLICHEN REGULÄREN GRAPHEN DRITTEN UND VIERTEN GRADES

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Eingelangt am 21. Feber 1956.)

In dem Beitrag werden folgende Sätze bewiesen:

1. Es sei G ein beliebiger zusammenhängender Graph, welcher eine gerade Anzahl von Kanten enthält, dann existiert ein Winkelsystem \mathfrak{W} des Graphen G so, dass jede Kante aus G genau einem Winkel aus \mathfrak{W} gehört und ein Winkelsystem

\mathfrak{W} mit dieser Eigenschaft existiert nur dann, wenn G eine gerade Anzahl von Kanten enthält. (Die drei Elemente aus G : $\{u, h_1, h_2\}$, wo u ein Knotenpunkt und $h_1 \neq h_2$ die Kanten sind, werden Winkel des Graphen G genannt, wenn beide Kanten h_1, h_2 mit dem Knotenpunkt u inzident sind.)

2. Wenn ein zusammenhängender regulärer Graph dritten Grades G mit gerader Anzahl von Kanten einen linearen Faktor enthält, dann existieren solche zwei Winkelsysteme $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ die elementfremd sind und jede Kante des Graphen gerade einem Winkel aus \mathfrak{W}_1 (resp. aus \mathfrak{W}_2) gehört. Wenn außerdem G in drei lineare Faktoren zerlegbar ist, dann gibt es in G vier solche Winkelsysteme, die paarweise elementfremd sind und jede Kante genau einem Winkel aus jedem System gehört.

Den Graph G^* , dessen Knotenpunktmenge U^* und die Kantenmenge H^* ist, nennen wir ϑ -Bild des Graphen $G = U + H$ (wobei G ein regulärer zusammenhängender Graph dritten Grades, U resp. H seine Knotenpunktmenge, resp. Kantenmenge ist), wenn gilt:

I. Es gibt eine einfache Abbildung α der Kantenmenge H des Graphen G auf die Knotenpunktmenge U^* des Graphen G^* .

II. Es gibt eine einfache Abbildung β des Systems \mathfrak{W} aller Winkel des Graphen G auf die Kantenmenge H^* des Graphen G^* .

III. Ein Knotenpunkt u^* ist inzident mit der Kante h^* des Graphen G^* , wo $u^* = \alpha(h_i)$; $h_i \in H$; $h^* = \beta(W_j)$; $W_j \in \mathfrak{W}$; dann und nur dann, wenn die Kante h_i ein Element des Winkels W_j im Graphen G ist.

3. Für die Graphen $G^* = \vartheta(G)$ mit gerader Knotenzahl, welche selbstverständlich reguläre zusammenhängende Graphen vierten Grades sind, wird Folgendes bewiesen:

Jeder Graph $\vartheta(G)$ hat einen linearen Faktor. Wenn es im Graphen G einen linearen Faktor gibt, dann hat $G^* = \vartheta(G)$ einen quadratischen Faktor, der sich in zwei lineare Faktoren zerlegen lässt. Wenn der Graph G sich in drei lineare Faktoren zerlegen lässt, dann lässt sich der Graph G^* in vier lineare Faktoren zerlegen und umgekehrt.

4. Weitere Sätze weisen auf den engen Zusammenhang zwischen den Hamiltonschen Linien im Graphen dritten Grades und die Zerlegung der ϑ -Bilder dieser Graphen in zwei Hamiltonsche Linien. Man beweist diese Sätze:

a) Wenn es im regulären Graphen dritten Grades G eine Hamiltonsche Linie gibt, dann lässt sich der Graph $G^* = \vartheta(G)$ in zwei Hamiltonsche Linien zerlegen und umgekehrt.

b) Es sei λ die Anzahl verschiedener Hamiltonscher Linien im regulären Graphen dritten Grades G und es sei $2n$ die Knotenzahl des Graphen G , dann gilt von der Anzahl λ^* der verschiedenen Zerlegungen des Graphen $G^* = \vartheta(G)$ in zwei Hamiltonsche Linien: $\lambda^* = \lambda \cdot 2^{n-1}$.