MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 13 (1975)

FUNKCJE PRZEMIESZCZEŃ DLA OŚRODKA POPRZECZNIE IZOTROPOWEGO

BOGDAN ROGOWSKI (ŁÓDŹ)

Wstęp

LECHNICKI [1] podał funkcję naprężeń dla ciał o izotropii poprzecznej, której stosowanie ograniczone jest do zagadnień osiowo-symetrycznych. Wyprowadzona przez NOWACKIEGO [2] funkcja naprężeń, spełniająca równanie różniczkowe czwartego rzędu, ma szersze zastosowanie, nie obejmuje jednak tych zagadnień, w których na obwodzie obiektu dane są trzy warunki brzegowe. W pracy [3] pokazano, że stan naprężenia i przemieszczenia w ośrodku poprzecznie izotropowym można wyrazić przez dwie funkcje spełniające równania różniczkowe, odpowiednio, drugiego i czwartego rzędu. Podane w pracy [3] funkcje rozwiązujące rozszerzyły zakres możliwych rozwiązań, jednak użycie ich do rozwiązywania problemów brzegowych napotyka poważne trudności [4]. W pracy [5] pokazano, że stan naprężenia i przemieszczenia można w przypadku zagadnienia osiowo-symetrycznego wyrazić przez dwie funkcje naprężeń, spełniające równania różniczkowe drugiego rzędu.

W pracy niniejszej pokażemy, że możliwe jest dalsze rozprzężenie podstawowego układu równań zagadnienia równowagi ciała trójwymiarowego i w konsekwencji wyrażenie stanu naprężenia i przemieszczenia w liniowym, poprzecznie izotropowym sprężystym ośrodku ciągłym przez trzy funkcje, z których każda spełnia cząstkowe równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Równania tego samego rzędu otrzymuje się dla dwóch funkcji przemieszczeń w płaskim zagadnieniu ośrodka ortotropowego, dla którego przestrzenne zagadnienie równowagi sprowadzono w pracy [6] do całkowania równań szóstego rzędu.

1. Podstawowy układ równań zagadnienia równowagi sprężystego ośrodka poprzecznie izotropowego

Rozpatrzymy w ramach liniowej teorii sprężystości statyczne zagadnienie jednorodnego, liniowo-sprężystego, poprzecznie izotropowego ciała trójwymiarowego.

Przyjmiemy kartezjański układ współrzędnych, w którym płaszczyzna $x_3 = 0$ pokrywa się z płaszczyzną izotropii.

Wykorzystując uogólnione prawo Hooke'a dla ośrodka poprzecznie izotropowego [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda_1 \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + \lambda_2 \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{33} + 2\mu_1 \varepsilon_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha 3} &= 2\mu_2 \varepsilon_{\alpha 3}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_2 \varepsilon_{\gamma\gamma} + \lambda_3 \varepsilon_{33}, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2; \end{aligned} \tag{1.1}$$

równania równowagi:

$$\sigma_{ij,j}+X_i = 0, \quad i,j = 1,2,3 \tag{1.2}$$

oraz związki Cauchy'ego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \tag{1.3}$$

można otrzymać dla omawianego ośrodka, przy pominięciu sił masowych X_i, następujący układ równań dla przemieszczeń

$$\begin{gathered}(\lambda_1+\mu_1)u_{\beta,\beta\alpha}+\mu_1 u_{\alpha,\beta\beta}+\mu_2 u_{\alpha,33}+(\lambda_2+\mu_2)u_{3,3\alpha} = 0,\\ (\lambda_2+\mu_2)u_{\beta,\beta 3}+\mu_2 u_{3,\beta\beta}+\lambda_3 u_{3,33} = 0,\end{gathered} \tag{1.4}$$

gdzie u_α, u_3 są rzutami wektora przemieszczenia u_i na płaszczyzny, odpowiednio, równoległe i normalne do izotropowej płaszczyzny $x_3 = \mathrm{const}$.

Występujące w (1.1) i (1.4) parametry materiałowe λ_i, μ_α wyrażają się przez techniczne stałe wzorami:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{E}{1+\nu}\,\frac{\nu+\nu_1\nu_2}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}, &\quad \mu_1 &= G = \frac{E}{2(1+\nu)},\\ \lambda_2 &= E\frac{\nu_1}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}, & \mu_2 &= G_1,\\ \lambda_3 &= E_1\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}, & E\nu_1 &= E_1\nu_2,\end{aligned} \tag{1.5}$$

gdzie E, ν — moduł Younga i współczynnik Poissona charakteryzują własności sprężyste w płaszczyznach $x_3 = \mathrm{const}$ (izotropowe), a E_1, G_1, ν_1 są modułami sprężystości i współczynnikiem Poissona w kierunku prostopadłym do tych płaszczyzn.

2. Funkcje przemieszczeń

Wprowadzimy funkcje przemieszczeń $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi_3(x_1, x_2, x_3)$ takie, aby

$$\begin{gathered}u_\alpha = a\partial_\alpha\varphi+\varepsilon_\alpha^\beta\partial_\beta\varphi_3,\\ u_3 = \partial_3\varphi; \quad \alpha,\beta = 1,2,\end{gathered} \tag{2.1}$$

gdzie a jest stałą, ε_α^β symbolem permutacyjnym ($\varepsilon_1^1 = \varepsilon_2^2 = 0$, $\varepsilon_1^2 = 1$, $\varepsilon_2^1 = -1$), a dla symboli różniczkowania przyjęto oznaczenia

$$\frac{\partial\ldots}{\partial x_\alpha} = \partial_\alpha(\ldots), \quad \frac{\partial\ldots}{\partial x_3} = \partial_3(\ldots).$$

Podstawiając (2.1) do (1.4) otrzymujemy

$$\begin{gathered}\partial_\alpha\{(\lambda_1+2\mu_1)a\Delta+[\lambda_2+\mu_2(a+1)]\partial_3^2\}\varphi+\varepsilon_\alpha^\beta\partial_\beta[\mu_1\Delta+\mu_2\partial_3^2]\varphi_3 = 0,\\ \partial_3\{[(\lambda_2+\mu_2)a+\mu_2]\Delta+\lambda_3\partial_3^2\}\varphi = 0,\end{gathered} \tag{2.2}$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a względem zmiennych x_α.

Równania te będą spełnione, jeśli funkcje φ, φ_3 będą rozwiązaniami równań

$$\begin{aligned}&\{(\lambda_1+2\mu_1)a\Delta+[\lambda_2+\mu_2(a+1)]\partial_3^2\}\varphi = 0,\\ &\{[(\lambda_2+\mu_2)a+\mu_2]\Delta+\lambda_3\partial_3^2\}\varphi = 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\left(\Delta+\frac{\mu_2}{\mu_1}\partial_3^2\right)\varphi_3 = 0. \tag{2.4}$$

Niezerowe rozwiązania dla funkcji φ otrzymujemy wtedy, gdy operatory różniczkowe występujące w (2.3) są identyczne, na to zaś potrzeba, aby

$$\frac{\lambda_3}{(\lambda_2+\mu_2)a+\mu_2} = \frac{\lambda_2+\mu_2(a+1)}{(\lambda_1+2\mu_1)a} = \frac{1}{s^2}. \tag{2.5}$$

Eliminując w równaniach (2.5) stałą a otrzymujemy równanie dla s^2

$$\mu_2\lambda_3 s^4-[(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-(\lambda_2+2\mu_2)\lambda_2]s^2+(\lambda_1+2\mu_1)\mu_2 = 0. \tag{2.6}$$

Z kolei dla stałej a otrzymujemy

$$a = \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\mu_2}s^2-\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}. \tag{2.7}$$

Jeśli s_1^2, s_2^2 są pierwiastkami równania (2.6) i funkcje φ_1 i φ_2 spełniają równania

$$\left(\Delta+\frac{1}{s_\alpha^2}\partial_3^2\right)\varphi_\alpha = 0; \qquad \alpha = 1,2, \tag{2.8}$$

to funkcje te spełniają także równania (2.3).

Parametrom s_1^2, s_2^2 danym wzorami wynikającymi z (2.6)

$$\begin{Bmatrix}s_1^2\\ s_2^2\end{Bmatrix} = \frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-(\lambda_2+2\mu_2)\lambda_2}{2\mu_2\lambda_3} \pm \left[\left(\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-(\lambda_2+2\mu_2)\lambda_2}{2\mu_2\lambda_3}\right)^2 - \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_3}\right]^{1/2} \tag{2.9}$$

odpowiadają stałe, odpowiednio, a_1 i a_2, które zgodnie z (2.7) wynoszą

$$\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\mu_2}\begin{Bmatrix}s_1^2\\ s_2^2\end{Bmatrix}-\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}. \tag{2.10}$$

Wykorzystując równości wynikające z (2.6)

$$\begin{aligned}s_1^2s_2^2 &= \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_3},\\ s_1^2+s_2^2 &= \frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-(\lambda_2+2\mu_2)\lambda_2}{\mu_2\lambda_3}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

dochodzimy do wniosku, że stałe a_1 i a_2 związane są zależnością

$$a_1\cdot a_2 = 1, \tag{2.12}$$

czyli

$$a_2 = a_1^{-1}. \tag{2.12'}$$

Składowe wektora przemieszczenia możemy zgodnie z (2.1) wyrazić przez funkcje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ wzorami

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= \partial_\alpha(a_1\varphi_1+a_1^{-1}\varphi_2)+\varepsilon_\alpha^\beta\partial_\beta\varphi_3,\\
u_3 &= \partial_3(\varphi_1+\varphi_2); \quad \alpha,\beta = 1,2.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Jeśli w związkach (2.13) wprowadzimy nowe oznaczenia

$$
a_1 = k, \quad \varphi_1 = \psi_1, \quad a_1^{-1}\varphi_2 = \psi_2, \quad \varphi_3 = \psi_3,
\tag{2.14}
$$

to otrzymamy

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= \partial_\alpha(k\psi_1+\psi_2)+\varepsilon_\alpha^\beta\partial_\beta\psi_3,\\
u_3 &= \partial_3(\psi_1+k\psi_2).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Funkcje ψ_i ($i = 1, 2, 3$) spełniają równania wynikające z (2.8) i (2.4)

$$
\left(\Delta+\frac{1}{s_i^2}\partial_3^2\right)\psi_i = 0, \quad i = 1,2,3,
\tag{2.16}
$$

w których parametry s_i^2 zależą od technicznych stałych sprężystości ośrodka i wynoszą zgodnie z (1.5), (2.4), (2.9)

$$
s_1^2, s_2^2 = \begin{cases}
\mathrm{I}; & \alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta}, \quad \text{gdy } \alpha^2-\beta > 0, \quad \text{tj. } \dfrac{G}{G_1} > \gamma,\\[2mm]
\mathrm{II}; & \alpha \quad \text{gdy } \alpha^2-\beta = 0, \quad \text{tj. } \dfrac{G}{G_1} = \gamma,\\[2mm]
\mathrm{III}; & \alpha\pm i\sqrt{\beta-\alpha^2}, \quad \text{gdy } \alpha^2-\beta < 0, \quad \text{tj. } 0 < \dfrac{G_1}{G} < \gamma,
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

$$
s_3^2 = \frac{G}{G_1},
\tag{2.18}
$$

przy czym

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{G}{G_1}-\nu_1\frac{E}{E_1}\right),\\
\beta &= \frac{1}{1-\nu^2}\frac{E}{E_1}\left(1-\nu_1^2\frac{E}{E_1}\right) > 0,\\
\gamma &= \nu_1\frac{E}{E_1}+(1-\nu)\sqrt{\beta}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Stała k wchodząca do związków dla składowych wektora przemieszczenia wyraża się zgodnie z (2.14) i (2.10) wzorem

$$
k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\mu_2}s_1^2-\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}.
\tag{2.20}
$$

Zależnie od właściwości sprężystych ośrodka parametry s_1^2 i s_2^2 mogą być rzeczywiste dodatnie (różne przyp. I), (równe przyp. II) lub zespolone, sprzężone (przyp. III) (por. [1]).

Taka może być również stała k dana wzorem (2.20). Dla większości materiałów konstrukcyjnych parametry te są rzeczywiste. Na przykład materiały–kompozycje typu laminaty, które, jak wiadomo, charakteryzują się silną anizotropią ($E/E_1 \approx 5-15$, $G/G_1 \approx 5-100$ [7]) będą należały do tej klasy materiałów.

W pracy [3], gdzie trójwymiarowe, statyczne zagadnienie ośrodka poprzecznie izotropowego sprowadzono do całkowania kolejnych równań drugiego i czwartego rzędu, operatory różniczkowe występujące w tych równaniach zawierają parametry analogiczne do danych wzorami (2.17), (2.18). Także równanie dla funkcji naprężeń podanej w [2] zależy od analogicznych parametrów.

Uwzględnienie (2.15) w (1.3), a tych ostatnich w (1.1) prowadzi do wyrażenia składowych tensora naprężenia przez pochodne cząstkowe funkcji przemieszczeń. Po wykorzystaniu zależności, jakie zachodzą między parametrami s_1^2, s_2^2, k i równań (2.16) otrzymuje się:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\mu_2(k+1)\,\partial_3^2(\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\,\partial_2^2(k\psi_1+\psi_2)+2\mu_1\,\partial_{12}^2\psi_3,\\
\sigma_{22} &= -\mu_2(k+1)\,\partial_3^2(\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\,\partial_1^2(k\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\,\partial_{12}^2\psi_3,\\
\sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu_1\,\partial_{12}^2(k\psi_1+\psi_2)+\mu_1(\partial_2^2\psi_3-\partial_1^2\psi_3),\\
\sigma_{13} &= \mu_2(k+1)\,\partial_{13}^2(\psi_1+\psi_2)+\mu_2\,\partial_{23}^2\psi_3,\\
\sigma_{23} &= \mu_2(k+1)\,\partial_{23}^2(\psi_1+\psi_2)-\mu_2\,\partial_{13}^2\psi_3,\\
\sigma_{33} &= \mu_2(k+1)\,\partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\psi_1+\frac{1}{s_2^2}\psi_2\right).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Związki (2.15) i (2.21) opisują składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia przy pomocy cząstkowych pochodnych trzech funkcji przemieszczeń, spełniających równania różniczkowe drugiego rzędu (2.16). Sprowadzenie zagadnień równowagi do całkowania równań drugiego rzędu ułatwia rozwiązywanie problemów brzegowych.

Większość materiałów poprzecznie izotropowych posiada takie właściwości sprężyste, że np. w płytach wykonanych z tych materiałów istotny wpływ na stany naprężenia i przemieszczenia mają poprzeczne ścinanie oraz naprężenia normalne poprzeczne do płaszczyzny środkowej [12]. Zachodzi tu zatem konieczność budowania ścisłych rozwiązań dla ciał trójwymiarowych na gruncie teorii sprężystości.

3. Szczególny przypadek ośrodka poprzecznie izotropowego

Załóżmy, że mamy do czynienia z takim ośrodkiem poprzecznie izotropowym, dla którego parametry s_1^2 i s_2^2 wynoszą

$$
s_1^2 = \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_3}, \qquad s_2^2 = 1. \tag{3.1}
$$

Wówczas warunek $(2.11)_1$ spełniony jest tożsamościowo, a równość w $(2.11)_2$ zachodzi wtedy, gdy moduł sprężystości postaciowej w kierunku normalnym do płaszczyzn izotropowych x_3 = const związany jest z pozostałymi parametrami materiałowymi ośrodka zależnością

$$\mu_2 = \frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-\lambda_2^2}{\lambda_1+2\mu_1+\lambda_3+2\lambda_2}. \tag{3.2}$$

Mamy tu zatem cztery niezależne stałe sprężyste.

Uwzględniając (3.1) i (3.2) we wzorze (2.20) otrzymujemy dla stałej k

$$k = \frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}. \tag{3.3}$$

Związki dla składowych wektora przemieszczenia i tensora naprężenia otrzymuje się uwzględniając (3.3) i (3.1) w (2.15) i (2.21) w postaci:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \partial_\alpha\left(\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}\psi_1+\psi_2\right)+\varepsilon_\alpha^\beta\partial_\beta\psi_3, \\ u_3 &= \partial_3\left(\psi_1+\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}\psi_2\right); \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\mu_2\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3-\mu_2}\partial_3^2(\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\partial_2^2\left(\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}\psi_1+\psi_2\right)+2\mu_1\partial_{12}^2\psi_3, \\ \sigma_{22} &= -\mu_2\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3-\mu_2}\partial_3^2(\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\partial_1^2\left(\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}\psi_1+\psi_2\right)-2\mu_1\partial_{12}^2\psi_3, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu_1\partial_{12}^2\left(\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}\psi_1+\psi_2\right)+\mu_1(\partial_2^2\psi_3-\partial_1^2\psi_3), \\ \sigma_{13} &= \mu_2\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3-\mu_2}\partial_{13}^2(\psi_1+\psi_2)+\mu_2\partial_{23}^2\psi_3, \\ \sigma_{23} &= \mu_2\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3-\mu_2}\partial_{23}^2(\psi_1+\psi_2)-\mu_2\partial_{13}^2\psi_3, \\ \sigma_{33} &= \mu_2\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3-\mu_2}\partial_3^2\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+2\mu_1}\psi_1+\psi_2\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Funkcje przemieszczeń $\psi_i(x_1, x_2, x_3)$ spełniają tu równania

$$\left(\Delta+\frac{1}{s_i^2}\partial_3^2\right)\psi_i = 0; \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.6}$$

przy czym

$$s_1^2 = \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_3}; \quad s_2^2 = 1, \quad s_3^2 = \frac{G}{G_1}. \tag{3.7}$$

Istnieje duża klasa poprzecznie izotropowych materiałów konstrukcyjnych, których stałe sprężyste z dobrym przybliżeniem spełniają związek (3.2), który, przy wykorzystaniu zależności (1.5), ma postać

$$\frac{G}{G_1} = \nu_1\frac{E}{E_1}+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{E}{E_1}\left(1-\nu_1^2\frac{E}{E_1}\right)+\frac{1-\nu}{2}, \tag{3.8}$$

w której wszystkie składniki występujące po prawej stronie są dodatnie. Do tych materiałów należą niektóre tworzywa sztuczne uzbrojone siatkami z włókien szklanych, drutów stalowych czy siatkami azbestowymi.

Warunek (3.8) spełniony jest, między innymi, w przypadku ośrodka izotropowego.

4. Przypadek izotropii

Szczególnym przypadkiem omawianego w pracy ośrodka jest ciało izotropowe, dla którego

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \lambda_3 = \lambda+2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{4.1}$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Jeśli w wyrażeniach (3.4) i równaniach (3.6) zastosujemy podstawienie

$$\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}\psi_1+\psi_2 = \Omega, \quad \frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_3-\mu_2}\left[1-\left(\frac{\lambda_3-\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\right)^2\right]\psi_2 = \psi, \quad \psi_3 = \varphi, \tag{4.2}$$

i wykorzystamy wynikającą z (3.2) zależność

$$\left(\frac{\lambda_3-\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\right)^2 = \frac{\lambda_3-\mu_2}{\lambda_1+2\mu_1-\mu_2}, \tag{4.3}$$

to otrzymamy

$$u_\alpha = \partial_\alpha\Omega+\varepsilon_\alpha^\beta\partial_\beta\varphi, \quad u_3 = \frac{\lambda_3-\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\partial_3\Omega+\partial_3\psi, \tag{4.4}$$

$$(\Delta+\partial_3^2)\psi = 0,$$
$$\left(\Delta+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+2\mu_1}\partial_3^2\right)\Omega+\frac{(\lambda_3-\mu_2)(\lambda_1+2\mu_1-\mu_2)}{(\lambda_2+\mu_2)(\lambda_1+2\mu_1)}\partial_3^2\psi = 0, \tag{4.5}$$
$$\left(\Delta+\frac{\mu_2}{\mu_1}\partial_3^2\right)\varphi = 0.$$

Pole przemieszczeń opisane jest w tym przypadku wzorami (4.4) za pomocą trzech funkcji ψ, Ω, φ, które spełniają równania różniczkowe (4.5).

W granicznym przypadku ośrodka izotropowego otrzymuje się z (4.4) i (4.5) po uwzględnieniu (4.1)[1])

$$u_\alpha = \partial_\alpha\Omega+\varepsilon_\alpha^\beta\partial_\beta\varphi, \tag{4.6}$$
$$u_3 = \partial_3(\Omega+\psi),$$

[1]) Harmoniczność funkcji ψ wynika bezpośrednio z (4.2) jedynie dla $\frac{\lambda_3-\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} \neq 1$. Okazuje się jednak, że równania (4.4), (4.5) pozostają słuszne także dla $\frac{\lambda_3-\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} = 1$ i wtedy mają postać (4.6) i (4.7), co łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, podstawiając (4.6) i (4.7) do równań przemieszczeniowych ośrodka izotropowego.

przy czym funkcje przemieszczeń Ω, φ, ψ spełniają równania

$$\Delta_3\psi = 0, \quad \Delta_3\varphi = 0, \quad 2(1-\nu)\Delta_3\Omega + \partial_3^2\psi = 0, \tag{4.7}$$

gdzie

$$\Delta_3 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Przypadek $(2.17)_2$, w którym

$$s_1^2 = s_2^2 = \alpha = \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{G}{G_1} - \nu_1\frac{E}{E_1}\right)$$

można sprowadzić przez podstawienie $x_3' = x_3\alpha$ do analogicznego zagadnienia dotyczącego ośrodka izotropowego, opisanego związkami (4.6) i równaniami (4.7)

5. Płaski stan naprężenia w ośrodku ortotropowym

W przestrzennym zagadnieniu równowagi ośrodka ortotropowego nie jest możliwe zastosowanie podanego sposobu rozprzężenia układu równań problemu, [8, 9, 10]. Jest to natomiast możliwe dla ciał o ortotropii poprzecznej, znajdujących się w płaskim stanie naprężenia lub płaskim stanie odkształcenia.

Rozpatrzmy ciało ortotropowe, w którym osie przyjętego prostokątnego, kartezjańskiego układu współrzędnych pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii. Stan naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia rozpatrywanego ośrodka opisuje się uogólnionym prawem Hooke'a wiążącym naprężenia $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ i małe odkształcenia $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ [11][2)]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

związkami Cauchy'ego:

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y}, \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}, \tag{5.2}$$

równaniami równowagi:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + X &= 0, \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + Y &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

oraz warunkami brzegowymi, wynikającymi ze sposobów podparcia i obciążenia obiektu.

Występujące w (5.1) c_{11}, c_{22}, c_{12}, c_{66} są parametrami materiałowymi rozpatrywanego ośrodka ortotropowego, a w (5.2) u i v są składowymi wektora przemieszczenia, odpowiednio, w kierunku osi x i y.

[2)] We wzorach tego punktu użyjemy tradycyjnych oznaczeń współrzędnych prostokątnych (x, y) zamiast poprzednio występujących (x_1, x_2, x_3).

Wykorzystując związki (5.2) i (5.1) możemy sprowadzić równania równowagi (5.3) do równań wyrażonych przez przemieszczenia $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, które przy pominięciu sił masowych X i Y mają postać

$$
\begin{aligned}
&c_{11}u_{,xx}+c_{66}u_{,yy}+(c_{12}+c_{66})v_{,xy} = 0,\\
&c_{66}v_{,xx}+c_{22}v_{,yy}+(c_{12}+c_{66})u_{,xy} = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Wprowadzimy funkcję przemieszczeń $\phi(x, y)$ taką, aby

$$
u = a\phi_{,x}, \qquad v = \phi_{,y}, \tag{5.5}
$$

gdzie a jest stałą.

Podstawienie (5.5) do (5.4) prowadzi do równań dla funkcji ϕ

$$
\begin{aligned}
&\{c_{11}a\phi_{,xx}+[c_{66}(a+1)+c_{12}]\phi_{,yy}\}_{,x} = 0,\\
&\{[c_{12}a+c_{66}(a+1)]\phi_{,xx}+c_{22}\phi_{,yy}\}_{,y} = 0.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
&c_{11}a\phi_{,xx}+[c_{66}(a+1)+c_{12}]\phi_{,yy} = f(y),\\
&[c_{12}a+c_{66}(a+1)\phi_{,xx}+c_{22}]\phi_{,yy} = h(x).
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Jednorodne równania (5.7)

$$
\begin{aligned}
&c_{11}a\phi_{,xx}+[c_{66}(a+1)+c_{12}]\phi_{,yy} = 0,\\
&[c_{12}a+c_{66}(a+1)]\phi_{,xx}+c_{22}\phi_{,yy} = 0
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

mają niezerowe rozwiązania wtedy, gdy

$$
\frac{c_{22}}{c_{12}a+c_{66}(a+1)} = \frac{c_{66}(a+1)+c_{12}}{c_{11}a} = \frac{1}{s^2} \tag{5.9}
$$

Z (5.9) otrzymujemy równanie dla parametru s^2

$$
c_{66}c_{22}s^4-[c_{11}c_{22}-c_{12}(c_{12}+2c_{66})]s^2+c_{11}c_{66} = 0 \tag{5.10}
$$

oraz dla stałej a wyrażenie

$$
a = \frac{c_{22}}{c_{12}+c_{66}}s^2-\frac{c_{66}}{c_{12}+c_{66}}. \tag{5.11}
$$

Pierwiastkom s_1^2, s_2^2 równania (5.10) odpowiadają dwie funkcje spełniające równania

$$
\phi_{\alpha,xx}+\frac{1}{s_\alpha^2}\phi_{\alpha,yy} = 0; \qquad \alpha = 1, 2 \tag{5.12}
$$

będące rozwiązaniami równań (5.8).

Składowe wektora przemieszczenia wyrażają się przez te funkcje wzorami wynikającymi z (5.5)

$$
\begin{aligned}
u &= a_1\phi_{1,x}+a_2\phi_{2,x},\\
v &= \phi_{1,y}+\phi_{2,y},
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

gdzie a_1, a_2 są stałymi odpowiadającymi parametrom s_1^2, s_2^2, które oblicza się ze wzoru (5.11).

Parametry s_1^2, s_2^2 wyrażają się przez stałe sprężystości wzorami analogicznymi do (2.17), w których w tym przypadku

$$\alpha = \frac{c_{11}}{c_{66}} - \frac{c_{12}(c_{12}+2c_{66})}{c_{66}c_{22}}, \tag{5.14}$$
$$\beta = \frac{c_{11}}{c_{22}} > 0$$

mają takie same właściwości, jak parametry dla poprzecznie izotropowego ciała trójwymiarowego omówionego w punkcie 2 (por. też [1]).

Podobnie, jak dla ciała trójwymiarowego, mamy tu

$$a_1 \cdot a_2 = 1. \tag{5.15}$$

Wprowadzając oznaczenia $a_1 = k$, $\phi_1 = \psi_1$, $a_1^{-1}\phi_2 = \psi_2$, otrzymujemy z (5.13)

$$u = k\psi_{1,x} + \psi_{2,x}, \tag{5.16}$$
$$v = \psi_{1,y} + k\psi_{2,y},$$

przy czym funkcje ψ_α spełniają równania analogiczne do (5.12)

$$\psi_{\alpha,xx} + \frac{1}{s_\alpha^2}\psi_{\alpha,yy} = 0; \quad \alpha = 1, 2, \tag{5.17}$$

a stała k dana jest wzorem

$$k = \frac{c_{22}}{c_{12}+c_{66}} s_1^2 - \frac{c_{66}}{c_{12}+c_{66}}. \tag{5.18}$$

Składowe tensora naprężenia wyrażają się przez funkcje $\psi_\alpha(x, y)$ wzorami, które otrzymuje się ze związków (5.1), (5.2) i (5.16). Wykorzystanie zależności, jakie zachodzą między występującymi w tych związkach parametrami i równań (5.17) prowadzi do następujących wyrażeń:

$$\sigma_x = -c_{66}(k+1)(\psi_{1,yy}+\psi_{2,yy}), \tag{5.19}$$
$$\sigma_y = -c_{66}(k+1)(\psi_{1,xx}+\psi_{2,xx}),$$
$$\tau_{xy} = c_{66}(k+1)(\psi_{1,xy}+\psi_{2,xy}).$$

Związki (5.16), (5.19) i równania (5.17), w których stała k dana jest wzorem (5.18), a parametry s_1^2, s_2^2 wzorami (2.17), w których α i β mają wartości (5.14), stanowią ogólne rozwiązanie równań jednorodnych (5.8).

Dla znalezienia ogólnego rozwiązania wyjściowego problemu trzeba znaleźć ponadto rozwiązanie szczególne równań (5.7). Z równań (5.7) wyznaczymy

$$\phi_{,xx} = \frac{c_{22}f(y) - [c_{66}(a+1)+c_{12}]h(x)}{M}, \tag{5.20}$$
$$\phi_{,yy} = \frac{c_{11}ah(x) - [c_{12}a+c_{66}(a+1)]f(y)}{M}$$

przy założeniu, że wyznacznik tego układu jest różny od zera

$$M = c_{11}c_{22}a-[(c_{66}(a+1)+c_{12}][c_{66}(a+1)+c_{12}a)] \neq 0, \tag{5.21}$$

tj. stała a przyjmuje dowolne wartości z wyjątkiem

$$a \neq k, \quad a \neq k^{-1}, \tag{5.21'}$$

gdzie k dane jest wzorem (5.18).

Z równań (5.20) otrzymujemy

$$\frac{c_{22}f''(y)}{M} = \frac{c_{11}ah''(x)}{M}. \tag{5.22}$$

Wynika stąd, że funkcje $f(y)$ i $h(x)$ muszą mieć postać

$$f(y) = by^2+cy+d, \quad h(x) = \frac{c_{22}}{c_{11}a}bx^2+gx+m. \tag{5.23}$$

Uwzględniając (5.23) w (5.20) i całkując te ostatnie, otrzymujemy dla funkcji $\phi(x,y)$

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = {} & c_{22}\left(\frac{3}{2}Ay^2x^2+Byx^2\right)+c_{11}aCxy^2-[c_{66}(a+1)+c_{12}]\left(\frac{c_{22}}{4ac_{11}}Ax^4+\right.\\ & \left.+\frac{1}{3}Cx^3\right)+Dxy+Ex^2+Fx-[c_{12}a+c_{66}(a+1)]\left(\frac{1}{4}Ay^4+\frac{1}{3}By^3\right)+Gy^2+Hy+K,\end{aligned} \tag{5.24}$$

gdzie A, B, C, D, E, F, G, H, K są stałymi dowolnymi.

Składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia wyrażają się tu wzorami:

$$\begin{aligned} u = a\phi_{,x} = {} & c_{22}a(3Ay^2x+2Byx)+c_{11}a^2Cy^2+\\ & +[c_{66}(a+1)+c_{12}]\left(\frac{c_{22}}{c_{11}}Ax^3+aCx^2\right)+aDy+2Eax+Fa,\\ v = \phi_{,y} = {} & c_{22}(3Ayx^2+Bx^2)+2c_{11}aCxy+\\ & +[c_{12}a+c_{66}(a+1)]\,(Ay^3+By^2)+Dx+2Gy+H\,;\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x = {} & [(c_{22}c_{11}-c_{12}^2)a-c_{66}c_{12}(a+1)]\,(3Ay^2+2By)+\\ & +c_{66}(a+1)\,(3c_{22}Ax^2+2c_{11}aCx)+2c_{11}aE+2c_{12}G,\\ \sigma_y = {} & -c_{22}c_{66}(a+1)\,(3Ay^2+2By)+3\frac{c_{22}}{c_{11}}[c_{22}c_{11}-c_{12}c_{66}(a+1)-c_{12}^2]Ax^2+\\ & +2a[c_{11}c_{22}-c_{12}c_{66}(a+1)-c_{12}^2]Cx+2c_{12}aE+2c_{22}G,\\ \tau_{xy} = {} & 2c_{22}c_{66}(a+1)\,(3Ayx+Bx)+2c_{66}(a+1)ac_{11}Cy+c_{66}(a+1)D.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Za pomocą rozwiązań (5.25) i (5.26) można opisać stany naprężenia i przemieszczenia w tarczach o skończonych wymiarach w szczególnych przypadkach warunków brzegowych (metoda odwrotna). Dane zagadnienie brzegowe w tarczach prostokątnych można rozwiązać wykorzystując ogólne rozwiązanie, które jest sumą rozwiązań (5.16), (5.19), (5.17) oraz (5.25) i (5.26).

6. Przypadek izotropii

Związki (5.16) i równania (5.17) można przekształcić w odpowiednie związki i równania opisujące płaski stan naprężenia w ośrodku izotropowym.

Jeśli zastosujemy w (5.16) i (5.17) podstawienie

$$k\psi_1+\psi_2 = \Omega, \quad (1-k^2)\psi_1 = \varphi, \tag{6.1}$$

to otrzymamy

$$u = \Omega_{,x}, \quad v = k\Omega_{,y}+\varphi_{,y}, \tag{6.2}$$

$$s_1^2\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy} = 0,$$
$$s_2^2\Omega_{,xx}+\Omega_{,yy}+A\varphi_{,yy} = 0, \tag{6.3}$$

gdzie oznaczono

$$A = \frac{k(s_1^2-s_2^2)}{s_1^2(k^2-1)}. \tag{6.4}$$

W przypadku ośrodka izotropowego, dla którego

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \tag{6.5}$$

otrzymujemy z (2.17), (5.14) oraz (5.18)

$$s_1^2 = s_2^2 = k = 1. \tag{6.6}$$

Uwzględniając (6.6) w (6.4) stwierdzamy, że dla stałej A otrzymujemy w tym przypadku symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$.[3]

Dla obliczenia granicy wyrażenia (6.4) przyjmiemy taki przypadek ośrodka ortotropowego, dla którego

$$s_1^2 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad s_2^2 = 1, \quad c_{66} = \frac{c_{11}c_{22}-c_{12}^2}{c_{11}+c_{22}+2c_{12}}. \tag{6.7}$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (5.10) jest spełnione tu tożsamościowo.

Podstawiając (5.18) oraz $(6.7)_1$ i $(6.7)_2$ do (6.4) i uwzględniając wynikające z $(6.7)_3$ równości

$$k = \frac{c_{12}+c_{66}}{c_{22}-c_{66}} = \frac{c_{11}-c_{66}}{c_{12}+c_{66}},$$
$$\frac{c_{22}-c_{12}-2c_{66}}{(c_{22}+c_{12})(c_{22}-c_{11})} = \frac{1}{c_{11}+c_{22}+2c_{12}}, \tag{6.8}$$

otrzymujemy dla stałej A

$$A = \frac{(c_{12}+c_{66})^2(c_{11}+c_{22}+2c_{12})}{c_{11}(c_{12}+c_{22})^2}. \tag{6.9}$$

[3] W tym przypadku niezerową funkcję φ, wiążącą się z funkcją ψ_1 za pomocą wzoru $(6.1)_2$ należy rozumieć jako graniczną funkcję ciągu $\varphi^{(k)}$, gdy $k \to 1$.

W przypadku izotropii, dla której zachodzą zależności (6.5) mamy

$$A = \frac{1}{2}(1+\nu). \tag{6.10}$$

Tak więc dla izotropii otrzymuje się w przypadku płaskiego stanu naprężenia

$$u = \Omega_{,x}, \qquad v = \Omega_{,y}+\varphi_{,y}, \tag{6.11}$$

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\Omega+\frac{1+\nu}{2}\varphi_{,yy} = 0. \tag{6.12}$$

7. Płaski stan odkształcenia

Wyprowadzone w punkcie 6 funkcje przemieszczeń opisują zarówno płaski stan naprężenia, jak również płaski stan odkształcenia, a więc płaski problem teorii sprężystości. W obu zagadnieniach podstawowy układ równań różniczkowych zagadnienia równowagi ma postać (5.4), a jedynie różne są stałe współczynniki w równaniach dla obu zagadnień.

W przypadku płaskiego stanu naprężenia jest:

$$\begin{gathered} c_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \qquad c_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ c_{12} = c_{21} = \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \end{gathered} \tag{5.1}$$

a w przypadku płaskiego stanu odkształcenia

$$\begin{gathered} c_{11} = \frac{E_1}{B}(1-\nu_{23}\nu_{32}), \qquad c_{22} = \frac{E_2}{B}(1-\nu_{13}\nu_{31}), \\ c_{12} = c_{21} = \frac{E_1}{B}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) = \frac{E_2}{B}(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}), \\ B = 1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}, \end{gathered} \tag{7.2}$$

gdzie przez E_i $(i = 1, 2)$, ν_{ij} $(i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$ oznaczono moduły Younga i współczynniki Poissona, przy czym indeksy 1, 2, 3 odpowiadają głównym kierunkom sprężystości, odpowiednio, x, y, z.

Parametr k, dany wzorem (5.18) oraz α i β, od których zależą parametry s_1^2 i s_2^2, określone zależnościami (5.14) wyrażają się przez techniczne stałe wzorami:

— dla płaskiego stanu naprężenia

$$\begin{aligned} k &= \frac{E_2 s_1^2 - G(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1\nu_{21}+G(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \\ \alpha &= \frac{E_1}{2G}-\nu_{12}, \\ \beta &= \frac{E_1}{E_2}; \end{aligned} \tag{7.3}$$

— dla płaskiego stanu odkształcenia

$$
(7.4) \qquad
\begin{aligned}
k &= \frac{(1-\nu_{13}\nu_{31})s_1^2 - \frac{GB}{E_2}}{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}+\frac{GB}{E_2}},\\
\alpha &= \frac{E_1}{2G(1-\nu_{13}\nu_{31})} - \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{1-\nu_{13}\nu_{31}},\\
\beta &= \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}.
\end{aligned}
$$

Wykorzystując (7.2) i wykonując w (5.16), (5.17) przejście graniczne, otrzymano rozwiązania dla płaskiego stanu odkształcenia w ośrodku izotropowym. Mają one postać:

$$
(7.5) \qquad u = \Omega_{,x}, \qquad v = \Omega_{,y}+\psi_{,y},
$$

gdzie funkcje $\Omega(x, y)$, $\psi(x, y)$ są rozwiązaniami równań

$$
(7.6) \qquad \Delta\psi = 0, \qquad 2(1-\nu)\Delta\Omega+\psi_{,yy} = 0.
$$

Tak więc, sprowadzono płaski problem teorii sprężystości ośrodka ortotropowego do całkowania równań drugiego rzędu (5.17). Dla ośrodka izotropowego rozwiązania mają postać (6.2) i (6.3) dla płaskiego stanu naprężenia oraz (7.5), (7.6) w przypadku płaskiego stanu odkształcenia.

W obu zagadnieniach występują ponadto rozwiązania w postaci wielomianów (5.25), (5.26), w których parametry sprężyste wyrażają się wzorami, odpowiednio, (7.1) i (7.2).

Literatura cytowana w tekście

1. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Гостехиздат, 1950.
2. W. Nowacki, *O wyznaczaniu naprężeń i odkształceń w ciele sprężystym o izotropii poprzecznej*, Arch. Mech. Stos., **5**, 4 (1953).
3. Hu. Hai-Chang, *On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transv. isotr. body*, Acta Sci Sinica, **2**, 2 (1953).
4. С. Г. Лехницкий, *Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты*, ПММ. **26** (1962).
5. A. Singh, *Stress distributions within solids of revolution*, ZAMM, **39**, 12 (1959).
6. Z. Mossakowska, *Funkcje naprężeń dla ciał sprężystych o ortotropii trójosiowej*, AMS, **7**, 1 (1955).
7. Ю. М. Тарнопольский, А. В. Розе, *Особенности расчета деталей из армированных пластиков*, Рига 1969.
8. В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе, *Трехмерные задачи математической теории упругости*, Изд-во Тбилисского ун-та, 1968.
9. И. В. Ким, Р. Я. Сунчелеев, *Об одной контактной задаче для ортотропного полупространства*, Прикл. механ., **6**, 7 (1970).
10. C. I. Borş, *Teoria elasticităţii corpurilor anisotrope*, Bucuresti, Editura Akademici R. S. România. 1970.
11. A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th ed. Dover Publications, 1944.
12. B. Rogowski, *Zginanie płyty poprzecznie izotropowej*, AIL, **4** (1974).

Резюме

ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ УПРУГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Трехмерная статическая задача линейной теории упругости трансверсально-изотропной среды сведена к интегрированию трех дифференциальных уравнений второго порядка, для трех функций перемещений. Для всех трех функций присутствующие в уравнениях дифференциальные операторы обладают одинаковым строением

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \quad i = 1, 2, 3,$$

где константы s_i^2 зависят от материальных констант среды. Приводятся выражения компонент вектора перемещения и тензора напряжения через выведенные функции перемещений. Уравнения такого же строения получены для двух функций, являющихся функциями перемещений плоской задачи теории упругости ортотропной среды. Показаны также уравнения для трех функций перемещений при трехмерной задаче, или же для двух функций перемещений при плоских задачах, а также описание поля перемещений с помощью этих функций, для случая изотропной среды.

Summary

DISPLACEMENT FUNCTIONS FOR TRANSVERSALLY ISOTROPIC MEDIA

Three-dimensional, static problem of linear elasticity of a transversally isotropic medium is reduced to the solution of a system of three-second order differential equations for three displacement functions.

The differential operators applied to the functions have the same form

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \quad i = 1, 2, 3,$$

constants s_i^2 depending on the material parameters of the medium. Components of the displacement vector and stress tensor are expressed in terms of the displacement functions. Similar equations are also obtained for two displacement functions governing the plane problem of elasticity of orthotropic bodies.

The corresponding equations are also shown in the cases of three functions (spatial problem) or two functions (plane problem) describing the displacement field in isotropic media.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lutego 1974 r.