В. В. Горяйнов, Функция Кёнигса и дробное итерирование вероятностных производящих функций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 7, 69–86

DOI: https://doi.org/10.4213/sm667

УДК 517.54+519.21

В. В. Горяйнов

Функция Кёнигса и дробное итерирование вероятностных производящих функций

Функция Кёнигса возникает как предел нормированной определенным образом последовательности итераций голоморфной функции. Она также является решением соответствующего функционального уравнения и может служить для получения итераций порождающей ее функции.

В работе дано описание класса функций Кёнигса, отвечающих вероятностным производящим функциям, допускающим вложение в однопараметрическую полугруппу дробных итераций. Полученные результаты можно рассматривать как критерий вложимости процесса Гальтона–Ватсона в однородный марковский ветвящийся процесс.

Библиография: 20 названий.

Введение

Итерации отображения можно рассматривать лишь в случае согласованности областей определения и значений. В контексте аналитических функций изучаются следующие три ситуации. Локальный случай, когда областью определения является окрестность неподвижной точки (для каждой итерации своя). Случай мероморфных функций, когда областью определения является вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Наконец, случай, когда функция аналитична в некоторой области и принимает значения из этой же области. В последнем случае в качестве области определения обычно выбирается круг или полуплоскость. В настоящей работе изучаются функции, аналитические в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Более точно, основным предметом изучения являются вероятностные производящие функции, т.е. те, которые имеют тейлоровское разложение вида $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, где $p_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Если $p_0 \neq 1$, т.е. соответствующее распределение вероятностей невырожденное и $f(z) \not\equiv 1$, то ограничения на коэффициенты p_k влекут аналитичность f в единичном круге и условие $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Через f^n будем обозначать n-кратную итерацию функции f, т.е. $f^0(z) \equiv z$, $f^1 = f$ и $f^n = f \circ f^{n-1}$ при $n = 2, 3, \dots$. Изучение асимптотического поведения итераций при $n \to \infty$ приводит (см., например, [1]) к так называемой *функции Кёнигса*. Возникая как предел нормированной тем или иным способом последовательности итераций f^n, $n = 1, 2, \dots$, она является решением определенного функционального уравнения с известной функцией f. Важным обстоятельством при этом является то, что все итерации f^n, $n = 2, 3, \dots$, можно получить как решения функционального уравнения с той же функцией Кёнигса.

Целью данной работы является описание множества функций Кёнигса, соответствующих вероятностным производящим функциям, которые допускают дробное итерирование в классе вероятностных производящих функций. Другими словами, решается задача вложения функции в однопараметрическую полугруппу вероятностных производящих функций в терминах ее функции Кёнигса. Поскольку каждую вероятностную производящую функцию можно ассоциировать с процессом Гальтона–Ватсона, описывающего развитие популяции однотипных частиц, то решаемая задача вложения эквивалентна получению условий вложимости соответствующего процесса в однородный марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем. Исследование этого вопроса имеет достаточно длительную историю (см. [2], [3; гл. 5], [4], [5], [6, гл. 3]). В работах [7], [8] были получены критерии вложимости в терминах асимптотического поведения натуральных итераций производящей функции и в терминах решений некоторого функционального уравнения, определяемого производящей функцией и ее производной. Функция Кёнигса также определяет процесс Гальтона–Ватсона посредством соответствующего функционального уравнения. Это направление в теории ветвящихся процессов получило развитие в ряде работ [9], [10]. С этой точки зрения полученные в данной работе результаты можно рассматривать как описание вложимых процессов Гальтона–Ватсона в терминах функциональных уравнений.

Общая проблема дробных итераций аналитической функции, естественно, имеет еще более длительную историю. Ее решение существенно зависит от того, в каком классе функций она рассматривается. Первые результаты относились к локальной постановке и были получены в работах [11], [12] в конце 19-го века. Оказалось, что за редким исключением (если производная в неподвижной точке не обращается в нуль и не равна по модулю единице) функция допускает вложение в однопараметрическую полугруппу дробных итераций. Результат для мероморфных функций [13] оказался диаметрально противоположным – вложение допускают только дробно-линейные преобразования. Случай единичного круга качественно отличается и по результатам и по методам. Его активное исследование началось значительно позже (см., например, [14] и приведенную там библиографию). Здесь в отличие от других двух случаев возникают трудности, связанные с граничным поведением аналитических функций. При изучении итераций важную роль играет природа неподвижных точек отображения. В случае аналитической в единичном круге функции может не оказаться внутренней неподвижной точки. Тогда ее заменяет некоторая выделенная точка q на границе $\partial\mathbb{D}$ единичного круга, в которой существуют угловые пределы самой функции и ее производной и, кроме того, $f(q) = q$, $0 < f'(q) \leqslant 1$. Вид решения поставленной выше задачи будет зависеть от того, существует ли внутренняя неподвижная точка у вероятностной производящей функции или нет, а в случае ее отсутствия, является ли выделенная граничная точка притягивающей ($f'(q) < 1$) или нет ($f'(q) = 1$).

В §1 вводится терминология, уточняется постановка задачи и формулируются основные результаты работы. Во §2 рассматривается случай, когда вероятностная производящая функция имеет внутреннюю неподвижную точку. В §3 изучается случай граничной притягивающей точки. Случай $f'(q) = 1$, известный в теории ветвящихся процессов как критический, рассматривается в §4. В §5 полученные результаты иллюстрируются на некоторых примерах, в которых удается найти явный вид функции Кёнигса и разрешить функциональное уравнение для дробных итераций.

Автор выражает искреннюю признательность А. А. Гончару и Е. М. Чирке за предоставленную возможность обсуждения результатов работы на семинаре по теории функций в МИАН, а также А. А. Гончару за полезные советы по улучшению структуры статьи.

§ 1. Терминология и формулировка основных результатов

Совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, принимающих значения из $\mathbb{D}$, будем обозначать через $\mathfrak{P}$. Заметим, что $\mathfrak{P}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости. Совокупность всех вероятностных производящих функций, исключая тождественно постоянную $f(z) \equiv 1$, образует подполугруппу $\mathfrak{P}^+$ в полугруппе $\mathfrak{P}$. Роль единицы в этой некоммутативной полугруппе играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Рассматривая $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$ как топологическую полугруппу относительно операции сложения и обычной топологии вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$ (или $\mathfrak{P}^+$) будем понимать непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}^+$ в $\mathfrak{P}$ (или $\mathfrak{P}^+$). Будем говорить также, что f как элемент полугруппы $\mathfrak{P}$ (или $\mathfrak{P}^+$) *безгранично делим* в соответствующей полугруппе, если для каждого натурального n найдется такой элемент g_n полугруппы $\mathfrak{P}$ (соответственно, $\mathfrak{P}^+$), что

$$f = g_n \circ \dots \circ g_n = g_n^n.$$

Оказывается, что безграничная делимость в полугруппе $\mathfrak{P}^+$ эквивалентна (см. [8], [15]) вложимости f в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}^+$. Другими словами, f является безгранично делимой в $\mathfrak{P}^+$ тогда и только тогда, когда найдется такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}^+$, что $f^1 = f$. Поскольку семейство $\{f^t\}_{t \geqslant 0}$ обладает свойством $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ для всех $s, t \geqslant 0$, то f^t, $t \geqslant 0$, называют *дробными итерациями функции* f. В случае существования такой однопараметрической полугруппы будем говорить, что f *вложима в непрерывную полугруппу итераций* в $\mathfrak{P}^+$ или, просто, *вложима*.

Важным результатом при изучении динамики голоморфного отображения круга $\mathbb{D}$ в себя является теорема Данжуа–Вольфа ([16], [17], см. также [1]), согласно которой, если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от мёбиусова преобразования единичного круга на себя, то последовательность ее итераций f^n, $n = 1, 2, \dots$, сходится локально равномерно в $\mathbb{D}$ к тождественно постоянной функции, т.е. $f^n(z) \to q$ при $n \to \infty$. В случае, когда q принадлежит $\mathbb{D}$, она является единственной неподвижной внутренней точкой функции f. В случае же, когда $|q| = 1$, в этой точке существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z \to q} f(z), \qquad f'(q) = \lim_{z \to q} f'(z).$$

При этом $f(q) = q$ и $0 < f'(q) \leqslant 1$. В литературе q называют *точкой Данжуа–Вольфа* функции f. Заметим также, что все итерации функции f (включая и дробные, если они существуют) имеют одну и ту же точку Данжуа–Вольфа. В связи с этим естественно выделить в $\mathfrak{P}$ подполугруппы $\mathfrak{P}[q]$, $|q| \leqslant 1$, функций с одной и той же точкой Данжуа–Вольфа q. Если $f \in \mathfrak{P}^+$, то $f^n(0)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$ при всех натуральных n. Поэтому точка Данжуа–Вольфа вероятностной производящей функции принадлежит отрезку $[0,1]$ и

$$\mathfrak{P}^+ = \bigcup_{0 \leqslant q \leqslant 1} \mathfrak{P}^+[q],$$

где $\mathfrak{P}^+[q] = \mathfrak{P}^+ \cap \mathfrak{P}[q]$.

Пусть $f \in \mathfrak{P}^+[q]$, $0 \leqslant q < 1$, и $f'(q) = \gamma > 0$. Тогда (см., например, [1; §44]) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z) - q}{\gamma^n} = K(z), \tag{1}$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению Шрёдера

$$K(f(z)) = \gamma K(z). \tag{2}$$

При этом K называют *функцией Кёнигса функции* f и она является единственным решением уравнения (2) в классе аналитических в единичном круге функций с $K(q) = 0$, $K'(q) = 1$. Итерации функции f удовлетворяют уравнению

$$K(f^n(z)) = \gamma^n K(z).$$

В случае $f'(q) = 0$ функция f не является вложимой. Для формулировки критерия вложимости f в терминах ее функции Кёнигса введем в рассмотрение следующие классы функций.

Определим вначале семейство функций

$$\varphi_n(z,q) = \frac{z^n + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} z^k}{1 + \sum_{k=1}^{n} q^k},$$

где $q \in [0,1]$ и $n = 1, 2, \dots$. Через $\mathfrak{C}[q]$, $0 \leqslant q \leqslant 1$, будем обозначать класс функций φ, допускающих представление в виде $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z,q)$, в котором $\lambda_n \geqslant 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathfrak{P}^+[q]$, $0 \leqslant q < 1$, и $f'(q) = \gamma > 0$. Тогда f допускает вложение в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}^+$ в том и только том случае, если ее функция Кёнигса* (1) *допускает представление в виде*

$$K(z) = (z-q)\exp\left(\int_q^z \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(q)}{(\zeta - q)(1 - \varphi(\zeta))}\, d\zeta\right) \tag{3}$$

с некоторой φ из $\mathfrak{C}[q]$.

Доказательство этой теоремы приводится в следующем параграфе. Показано также, что функция K, имеющая представление (3), является однолистной и отображает $\mathbb{D}$ на звездную относительно начала координат область, а дробные итерации функции f определяются посредством K формулой $f^t(z) = K^{-1}(\gamma^t K(z))$, $t \geqslant 0$.

В случае $q = 1$ функция f имеет в точке $z = 1$ угловую производную $f'(1) = \mu$, $0 < \mu \leqslant 1$. Если в левой части (1) вместо q подставить 1, а вместо γ подставить μ, то для функции f из $\mathfrak{P}^+[1]$ предел, по-прежнему, будет существовать. Однако предельная функция K может оказаться тождественно постоянной. Поэтому определение функции Кёнигса для $f \in \mathfrak{P}^+[1]$ нуждается в корректировке.

Допустим, что $f \in \mathfrak{P}^+[1]$ и $f'(1) = \mu < 1$. Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z) - 1}{f^n(0) - 1} = Q(z), \tag{4}$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию и удовлетворяет функциональному уравнению

$$Q(f(z)) = \mu Q(z). \tag{5}$$

Функция Q, очевидно, удовлетворяет следующим условиям: $Q(0) = 1$, $\operatorname{Re} Q(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$ и все ее производные неположительны на интервале $(0,1)$. В классе таких функций уравнение (5) также имеет единственное решение (см., например, [9], [10]).

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathfrak{P}^+[1]$ и $f'(1) = \mu < 1$. Тогда f допускает вложение в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}^+$ в том и только том случае, если найдется φ из $\mathfrak{C}[1]$ с $\varphi(1) < 1$ и такая, что для функции Кёнигса (4) выполняется равенство*

$$Q(z) = \exp\biggl(\int_0^z \frac{1-\varphi(1)}{(\zeta-1)(1-\varphi(\zeta))}\,d\zeta\biggr). \tag{6}$$

В третьем параграфе доказывается эта теорема и устанавливается, что дробные итерации функции f, как и в предыдущем случае, определяются однозначно посредством Q равенством $f^t(z) = Q^{-1}(\mu^t Q(z))$.

В случае $f \in \mathfrak{P}^+[1]$ и $f'(1) = 1$ предел в (4) снова может оказаться тождественно постоянной функцией. Этот случай известен в теории ветвящихся процессов как критический ($f'(1) < 1$ соответствует докритическому случаю). С точки зрения анализа его можно рассматривать как случай двойной неподвижной точки, поскольку равенство $f'(1) = 1$ означает кратность корня $z = 1$ уравнения $f(z) - z = 0$. Его изучению посвящены работы [18], [19].

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathfrak{P}^+[1]$, $f'(1) = 1$ и $f'(0) \neq 0$. Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z) - f^n(0)}{(f^n)'(0)} = H(z), \tag{7}$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$H(f(z)) = H(z) + H(f(0)). \tag{8}$$

Кроме того, уравнение (8) имеет единственное решение в классе аналитических в $\mathbb{D}$ функций H с тейлоровским разложением вида

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_1 = 1, \quad a_n \geqslant 0, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Функцию H, определяемую равенством (7) в критическом случае, мы также будем называть *функцией Кёнигса вероятностной производящей функции* f. Итерации f^n, $n = 2, 3, \dots$, будут удовлетворять уравнению

$$H(f^n(z)) = H(z) + nH(f(0)).$$

В случае существования дробных итераций в этом равенстве n можно заменить на t, $t \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть* $f \in \mathfrak{P}^+[1]$, $f'(1) = 1$ *и* $f'(0) > 0$. *Тогда* f *допускает вложение в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{P}^+$ *в том и только том случае, если найдется* φ *из* $\mathfrak{C}[1]$ *с* $\varphi(1) = 1$ *и такая, что для функции Кёнигса* (7) *выполняется равенство*

$$H(z) = \int_0^z \frac{1 - \varphi(0)}{(1-\zeta)(1-\varphi(\zeta))}\, d\zeta. \tag{9}$$

§ 2. Случай внутренней точки Данжуа–Вольфа

Основной целью данного параграфа является доказательство теоремы 1. Будем предполагать, что вероятностная производящая функция $f(z) \not\equiv z$ принадлежит $\mathfrak{P}^+[q]$ и $0 \leqslant q < 1$.

Допустим вначале, что f вложима и K – ее функция Кёнигса, определенная равенством (1). Заметим, что условие вложимости влечет однолистность (см., например, [7]) функции f и, следовательно, $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$ (в частности, $f'(q) = \gamma \neq 0$). Свойство однолистности распространяется и на итерации f^n, $n = 2, 3, \dots$, функции f, а поскольку $K(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то и на функцию Кёнигса K. Кроме того, по теореме Вейерштрасса о локально равномерной сходимости последовательности аналитических функций имеем

$$K'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(f^n)'(z)}{\gamma^n}.$$

Учитывая, что $(f^n)'(z) \neq 0$ и $K'(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{D}$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma^n}{(f^n)'(z)} = \frac{1}{K'(z)}\,.$$

Но тогда

$$\frac{K(z)}{K'(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z) - q}{(f^n)'(z)}\,.$$

Допустим теперь, что $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}^+$, для которой $f^1 = f$. По теореме 4 из [7] инфинитезимальная образующая

$$v(z) = \frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\bigg|_{t=0}$$

этой однопараметрической полугруппы имеет вид

$$v(z)=\alpha\biggl(q-z+(1-q)\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k\frac{z^k-q^k}{1-q^k}\biggr),$$

где $\alpha>0$, $\lambda_k\geqslant 0$ и $\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k=1$. При доказательстве теоремы 6 в [7] было показано также, что выполняется следующее предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f^t(z)-q}{(f^t)'(z)}=\frac{v(z)}{v'(q)}\,.$$

Сравнивая его с полученным выше, приходим к равенству

$$\frac{K(z)}{K'(z)}=\frac{v(z)}{v'(q)}\,,$$

связывающему функцию Кёнигса и инфинитезимальную образующую.

Преобразуем теперь вид инфинитезимальной образующей

$$\begin{aligned}v(z)&=\alpha(z-q)\biggl(\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k\frac{z^{k-1}+qz^{k-2}+\dots+q^{k-1}}{1+q+\dots+q^{k-1}}-1\biggr)\\&=\alpha(z-q)\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k+1}\varphi_k(z,q)-1\biggr),\end{aligned}$$

где $\varphi_k(z,q)$, $k=1,2,\dots$, определены как и в §1. Замечая что,

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k+1}\varphi_k(z,q)$$

принадлежит $\mathfrak{C}[q]$, приходим к представлению

$$v(z)=\alpha(z-q)(\varphi(z)-1).$$

Отсюда следует, что $v'(q)=\alpha(\varphi(q)-1)$ и, следовательно,

$$\frac{v(z)}{v'(q)}=\frac{(z-q)(\varphi(z)-1)}{\varphi(q)-1}=(z-q)\frac{1-\varphi(z)}{1-\varphi(q)}\,.$$

Теперь полученное выше соотношение между функцией Кёнигса и инфинитезимальной образующей можно переписать в виде

$$\frac{(z-q)K'(z)}{K(z)}=\frac{1-\varphi(q)}{1-\varphi(z)}\,.$$

Отсюда, в частности, следует, что $K(z)/(z-q)$ является аналитической и не обращается в нуль в круге $\mathbb{D}$. Поэтому в $\mathbb{D}$ выделяется однозначная ветвь логарифма

$\ln(K(z)/(z-q))$, которая обращается в нуль при $z=q$. При этом, ее производная имеет вид

$$\left(\ln\frac{K(z)}{z-q}\right)' = \frac{\varphi(z)-\varphi(q)}{(z-q)(1-\varphi(z))}\,.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\ln\frac{K(z)}{z-q} = \int_q^z \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(q)}{(\zeta-q)(1-\varphi(\zeta))}\,d\zeta,$$

что после потенцирования дает

$$K(z) = (z-q)\exp\left(\int_q^z \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(q)}{(\zeta-q)(1-\varphi(\zeta))}\,d\zeta\right).$$

Таким образом, в одну сторону теорема 1 доказана.

Обратно, пусть функция Кёнигса, определяемая формулой (1), имеет интегральное представление (3) с некоторой функцией φ из $\mathfrak{C}[q]$. Покажем, что K однолистна в $\mathbb{D}$ и переводит единичный круг в звездную относительно начала координат область. Пусть $\zeta = L(z) = (z-q)/(1-qz)$ и $G(\zeta) = K\circ L^{-1}(\zeta)$. Тогда доказываемое свойство функции K эквивалентно тому, что G – звездная функция или (см., например, [20]) для всех $\zeta\in\mathbb{D}$ выполняется неравенство $\mathrm{Re}\big((\zeta G'(\zeta))/(G(\zeta))\big) > 0$. Поскольку

$$G'(\zeta) = \frac{K'(z)}{L'(z)} = \frac{(1-qz)^2}{1-q^2}K'(z)\,,$$

то условие звездности функции G переписывается в виде

$$\mathrm{Re}\left((z-q)(1-qz)\frac{K'(z)}{K(z)}\right) > 0$$

для всех $z\in\mathbb{D}$. Учитывая представление функции K равенством (3), последнее соотношение принимает вид $\mathrm{Re}\big((1-qz)/(1-\varphi(z))\big) > 0$, что, в свою очередь, эквивалентно условию

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-\varphi(z)}{1-qz}\right) > 0$$

при $z\in\mathbb{D}$. Проверку этого условия достаточно провести лишь для функций $\varphi_n(z,q)$, $n=1,2,\dots$, поскольку φ представляет собой выпуклую комбинацию последних. После очевидных преобразований

$$1-\varphi_n(z,q) = \frac{1+q+\dots+q^{n-1} - z(z^{n-1}+qz^{n-2}+\dots+q^{n-1})}{1+q+\dots+q^n}\,,$$

доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+q+\dots+q^{n-1} - z(z^{n-1}+qz^{n-2}+\dots+q^{n-1})}{1-qz}\right) > 0.$$

В силу принципа минимума для гармонических функций достаточно показать, что

$$\mathrm{Re}\big((1-q\overline{\varkappa})(1+q+\dots+q^{n-1} - \varkappa(\varkappa^{n-1}+q\varkappa^{n-2}+\dots+q^{n-1}))\big) \geqslant 0$$

для всех $\varkappa \in \partial\mathbb{D}$, т.е. $|\varkappa| = 1$. Однако

$$(1 - q\overline{\varkappa})(1 + q + \cdots + q^{n-1} - \varkappa(\varkappa^{n-1} + q\varkappa^{n-2} + \cdots + q^{n-1})) \\ = (1 - \varkappa^n) + (1 - \overline{\varkappa})(q + q^2 + \cdots + q^n).$$

Поскольку $\operatorname{Re}(1 - \varkappa^n) \geqslant 0$, $\operatorname{Re}(1 - \overline{\varkappa}) \geqslant 0$, то требуемое неравенство доказано.

Таким образом, функция K однолистна в единичном круге и отображает его на звездную относительно начала координат область. Это позволяет определить для всех $t \geqslant 0$ функции $f^t(z) = K^{-1}(e^{-\sigma t} K(z))$, где $\sigma = -\ln\gamma$. Легко видеть, что $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$, а ее инфинитезимальная образующая v выражается через K по формуле

$$v(z) = \frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\bigg|_{t=0} = -\sigma \frac{K(z)}{K'(z)}\,.$$

Из интегрального представления функции K следует, что

$$v(z) = \frac{\sigma}{1 - \varphi(q)}(z - q)(\varphi(z) - 1)\,.$$

Но тогда (см. [7]) $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\overline{\mathfrak{P}^+[q]}$, замыкании полугруппы $\mathfrak{P}^+[q]$. Далее, по предположению K является функцией Кёнигса для f и потому выполняется равенство (2). Из однолистности функции K и определения функций f^t, $t \geqslant 0$, получаем $f(z) = K^{-1}(\gamma K(z)) = f^1(z)$. Поскольку $f \in \mathfrak{P}^+[q]$, то $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}^+[q]$ и вложимость f доказана.

В заключение этого параграфа сделаем некоторые замечания относительно интегрального представления (3). Если φ – произвольная функция из $\mathfrak{C}[q]$, $0 \leqslant q < 1$, то соответствующая ей функция K является однолистной в единичном круге и отображает его на звездную относительно начала координат область. Для любого $\alpha > 0$ определены функции $f^t = K^{-1}(e^{-\alpha t} K(z))$, $t \geqslant 0$. При этом $t \mapsto f^t$ будет однопараметрической полугруппой в $\overline{\mathfrak{P}^+[q]}$. Таким образом, формула (3) дает точное описание класса функций Кёнигса, отвечающих вложимым функциям в $\overline{\mathfrak{P}^+[q]}$. Другими словами, каждая функция K вида (3) определяет единственный с точностью до замены временной шкалы однородный марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем и вероятностью вырождения q.

§ 3. Докритический случай

В этом параграфе мы докажем теорему 2, т.е. рассмотрим случай, когда точка Данжуа–Вольфа является граничной и строго притягивающей. Таким образом, на протяжении этого параграфа мы будем считать, что $f \in \mathfrak{P}^+[1]$ и $f'(1) = \mu < 1$. Кроме того, будем предполагать, что в разложении $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ коэффициенты p_0, p_1 удовлетворяют неравенству $p_0 + p_1 < 1$, поскольку случай $p_0 + p_1 = 1$, т.е. $f(z) = p_0 + p_1 z$, подробно рассмотрен в последнем параграфе.

Допустим вначале, что f вложима и Q – ее функция Кёнигса, определяемая равенством (4). Поскольку для всех $n = 1, 2, \ldots$ в единичном круге выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f^n(z) - 1}{f^n(0) - 1}\right) > 0,$$

то и Re $Q(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$. В силу теоремы Вейерштрасса

$$Q'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(f^n)'(z)}{f^n(0) - 1}$$

и, следовательно,

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(f^n)'(z)}{f^n(z) - 1}\,.$$

Пусть $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}^+$, для которой $f^1 = f$. Как следует из [7], ее инфинитезимальная образующая v допускает представление в виде

$$v(z) = \alpha\biggl(1 - z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k}(z^k - 1)\biggr),$$

где $\alpha > 0$, $\lambda_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k < 1$. Кроме того, выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(f^t)'(z)}{f^t(z) - 1} = \frac{v'(1)}{v(z)}\,.$$

Таким образом, мы снова приходим к соотношению

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \frac{v'(1)}{v(z)}\,,$$

которое связывает функцию Кёнигса и инфинитезимальную образующую. Как и в предыдущем случае, инфинитезимальную образующую можно преобразовать к виду $v(z) = \alpha(z-1)(\varphi(z)-1)$, где $\varphi \in \mathfrak{C}[1]$ и $\varphi(1) = \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k < 1$. Замечая также, что

$$v'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{v(x)}{x - 1} = \alpha(\varphi(1) - 1),$$

полученное выше соотношение между Q и v перепишем в виде

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \frac{1 - \varphi(1)}{(z-1)(1 - \varphi(z))}\,.$$

Интегрирование этого соотношения с учетом условия $Q(0) = 1$ приводит к интегральному представлению (6) функции Кёнигса.

Обратно, пусть функция Кёнигса Q, определяемая итерациями функции f по формуле (4), допускает представление (6) с некоторой функцией

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(z, 1) = \frac{1}{z-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k+1}(z^{k+1} - 1),$$

где $\lambda_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \varphi(1) < 1$. Как следует из [7], функция

$$v(z) = (z-1)(\varphi(z) - 1) = 1 - z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k+1}(z^{k+1} - 1)$$

является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto g^t$ в $\mathfrak{P}^+[1]$. Дифференцируя обе части эволюционного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} g^t(z) = v(g^t(z))$$

по z, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(g^t)'(z) = v'(g^t(z))(g^t)'(z).$$

Отсюда с учетом условия $(g^t)'(z)\big|_{t=0} \equiv 1$ получаем

$$\ln\big((g^t)'(z)\big) = \int_0^t v'(g^s(z))\,ds,$$

где под логарифмом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $t = 0$. Далее, поскольку для всех $s > 0$ выполняются соотношения $g^s(x) \nearrow 1$ и $v'(g^s(x)) \nearrow v'(1)$ при $x \nearrow 1$, то в последнем равенстве можно осуществить предельный переход под знаком интеграла при $z = x \nearrow 1$, что приводит к равенствам

$$(g^t)'(1) = \mathrm{e}^{tv'(1)} = \mathrm{e}^{t(\varphi(1)-1)}.$$

Функция $g = g^1$ принадлежит $\mathfrak{P}^+[1]$ и $g'(1) = \mathrm{e}^{v'(1)} = \nu < 1$. По доказанному ее функция Кёнигса однозначно определяется инфинитезимальной образующей v и, следовательно, совпадает с Q, т.е. та же, что и у функции f. Кроме того, для каждого $\tau > 0$ функция g^τ является вложимой в однопараметрическую полугруппу $t \mapsto g^{t\tau}$, инфинитезимальная образующая которой лишь множителем отличается от v. Следовательно, для g^τ функцией Кёнигса также является Q и выполняется равенство $Q(g^\tau(z)) = \nu^\tau Q(z)$. В частности, при $\tau = \ln\mu/\ln\nu = \tau_0$ получаем $Q(g^{\tau_0}(z)) = \mu Q(z)$. Если теперь мы докажем однолистность функции Q, то отсюда и из уравнения (5) будет следовать, что $f(z) = Q^{-1}(\mu Q(z)) = g^{\tau_0}(z)$. Тем самым вложимость f будет доказана.

Для доказательства однолистности Q заметим прежде всего, что условия $\operatorname{Re} Q(z) > 0$ и $Q(0) = 1$ позволяют выделить в $\mathbb{D}$ однозначную ветвь $\ln Q(z)$, обращающуюся в нуль при $z = 0$. Далее, поскольку $L(z) = \ln(1-z)$ – выпуклая функция и

$$\frac{(\ln Q(z))'}{L'(z)} = \frac{1-\varphi(1)}{1-\varphi(z)}$$

имеет положительную вещественную часть в $\mathbb{D}$, то $\ln Q(z)$ является почти выпуклой (см., например, [20]) и, следовательно, однолистной функцией. Отсюда следует однолистность Q и теорема 2 доказана.

Завершим параграф некоторыми замечаниями относительно интегрального представления (6). Пусть φ – произвольная из $\mathfrak{C}[1]$ с $\varphi(1) < 1$ и Q – функция, определяемая посредством φ формулой (6). Как было показано выше, $v(z) = (z-1)(\varphi(z)-1)$ является инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы $t \mapsto g^t$ в $\mathfrak{P}^+[1]$ и каждая g^t имеет в качестве функции Кёнигса Q. Если же f из $\mathfrak{P}^+[1]$ с $f'(1) < 1$ имеет в качестве функции Кёнигса также Q, то она должна совпадать с одной из функций семейства $\{g^t\}_{t>0}$. Таким образом, формула (6) описывает в точности класс функций Кёнигса, отвечающих вложимым функциям из $\mathfrak{P}^+[1]$, для которых $z=1$ является строго притягивающей точкой. Кроме однолистности Q обладает еще геометрическим свойством, которое заключается в звездности области $Q(\mathbb{D})$ относительно начала координат, являющимся граничной точкой этой области. Действительно, если $w_0 = Q(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{D}$, то кривая $\Gamma\colon t \mapsto g^t(z_0), 0 \leqslant t < \infty$, отображается посредством Q в отрезок, соединяющий w_0 с началом координат, поскольку при всех $t \geqslant 0$ выполняется $Q(g^t(z_0)) = \mathrm{e}^{tv'(1)} w_0$.

§ 4. Критический случай

Доказательство теоремы 3. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \not\equiv z$ принадлежит $\mathfrak{P}^+[1]$ и $f'(1)=1$. Поскольку $p_k \geqslant 0$, $k=0,1,\dots$, то сама функция, ее итерации и все производные неотрицательны и не убывают на промежутке $(0,1)$. Кроме того, для любого $x \in [0,1)$ последовательность $\{f^n(x)\}$ строго монотонно возрастает и ее пределом является 1, т.е. точка Данжуа–Вольфа. Если $f'(0)=0$, то f не будет вложимой. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $f'(0) \neq 0$. Но тогда и для всех ее итераций будет выполняться условие $(f^n)'(0) \neq 0$. Следовательно, для всех $n=1,2,\dots$ определены функции

$$h_n(z) = \frac{f^n(z) - f^n(0)}{(f^n)'(0)}\,,$$

которые аналитичны в $\mathbb{D}$ и имеют тейлоровское разложение в окрестности $z=0$ с неотрицательными коэффициентами.

Покажем, что последовательность $\{h_n\}$ сходится локально равномерно в $\mathbb{D}$. Для доказательства этого заметим вначале, что для всех $x \in (0,1)$ и $n=1,2,\dots$ выполняется

$$\frac{h_{n+1}(x)}{h_n(x)} = \frac{(f^{n+1}(x) - f^{n+1}(0))(f^n)'(0)}{(f^{n+1})'(0)(f^n(x) - f^n(0))} = \frac{f(f^n(x)) - f(f^n(0))}{f'(f^n(0))(f^n(x) - f^n(0))} > 1.$$

Последнее неравенство следует из выпуклости f на интервале $(0,1)$ и показывает, что для любого $x \in (0,1)$ последовательность $\{h_n(x)\}$ монотонно возрастает. В силу теоремы Витали локально равномерная сходимость в $\mathbb{D}$ последовательности $\{h_n\}$ будет следовать из ее локально равномерной ограниченности.

Фиксируем произвольно $r \in (0,1)$. Из неотрицательности тейлоровских коэффициентов функции h_n, $n=1,2,\dots$, следует

$$\max_{|z|\leqslant r} |h_n(z)| = h_n(r).$$

Выберем теперь номер $k>1$ так, чтобы выполнялось неравенство $r < f^k(0)$. Это можно сделать, поскольку $f^n(0) \nearrow 1$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $n=1,2,\dots$ будем иметь

$$\begin{aligned} h_n(r) \leqslant h_n(f^k(0)) &= \frac{f^n(f^k(0)) - f^n(0)}{(f^n)'(0)} < \frac{(f^n)'(f^k(0)) f^k(0)}{(f^n)'(0)} \\ &= \frac{(f^{n+k})'(0) f^k(0)}{(f^n)'(0)(f^k)'(0)} = \frac{(f^k)'(f^n(0)) f^k(0)}{(f^k)'(0)} < \frac{1}{(f^k)'(0)}, \end{aligned}$$

откуда и следует локально равномерная ограниченность в $\mathbb{D}$ последовательности $\{h_n\}$ и, следовательно, ее сходимость. Предел

$$H(z) = \lim_{n\to\infty} h_n(z)$$

является аналитической в $\mathbb{D}$ функцией с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. При этом $H(0) = 0$ и $H'(0) = 1$. Последнее влечет, в частности, что $H(z) \not\equiv \text{const}$. Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} H(z) &= \lim_{n\to\infty} h_{n+1}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(z) - f^{n+1}(0)}{(f^{n+1})'(0)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f^n(f(z)) - f^n(0)}{f'(f^n(0))(f^n)'(0)} - \frac{f^n(f(0)) - f^n(0)}{f'(f^n(0))(f^n)'(0)}\right) = H(f(z)) - H(f(0)), \end{aligned}$$

то H является решением уравнения (8).

Доказательство единственности решения уравнения (8) в классе аналитических в $\mathbb{D}$ функций с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами можно провести по следующей схеме (см., например, [6]). Допустим, что R является аналитической в $\mathbb{D}$, имеет неотрицательные тейлоровские коэффициенты, $R(0) = 0$, $R'(0) = 1$ и выполняется равенство

$$R(f(z)) = R(z) + R(f(0)).$$

Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ будут выполняться равенства

$$R(f^n(z)) = R(z) + nR(f(0)).$$

Фиксируем произвольно $x \in (0,1)$ и выберем номер k так, чтобы выполнялись неравенства $f^k(0) \leqslant x < f^{k+1}(0)$. Используя монотонность производных H' и R' на промежутке $(0,1)$, получаем

$$\frac{R'(f^{n+k}(0))}{H'(f^{n+k+1}(0))} \leqslant \frac{R'(f^n(x))}{H'(f^n(x))} \leqslant \frac{R'(f^{n+k+1}(0))}{H'(f^{n+k}(0))},$$

$n = 1, 2, \ldots$. Дифференцирование функциональных уравнений для итераций дает

$$H'(f^n(z))(f^n)'(z) = H'(z), \qquad R'(f^n(z))(f^n)'(z) = R'(z).$$

Используя эти соотношения, полученные выше неравенства можно переписать в виде

$$\frac{(f^{n+k+1})'(0)}{(f^{n+k})'(0)} \leqslant \frac{R'(x)}{H'(x)} \leqslant \frac{(f^{n+k})'(0)}{(f^{n+k+1})'(0)}\,.$$

Однако

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(f^{n+k+1})'(0)}{(f^{n+k})'(0)} = \lim_{n\to\infty} f'(f^{n+k}(0)) = 1$$

и, следовательно, $R'(x) = H'(x)$ для всех $x \in (0,1)$. В силу теоремы единственности для аналитических функций приходим к равенству $R'(z) = H'(z)$, которое с учетом условия $H(0) = R(0) = 0$ приводит к равенству $R(z) \equiv H(z)$. Теорема 3, таким образом, доказана.

Доказательство теоремы 4. Как и выше, мы будем предполагать, что $f(z) \not\equiv z$ принадлежит $\mathfrak{P}^+[1]$, $f'(1) = 1$ и $f'(0) \neq 0$. Следовательно, соотношение (7) определяет непостоянную функцию Кёнигса H, которая удовлетворяет функциональному уравнению (8).

Допустим вначале, что f вложима, и покажем возможность представления H в виде (9). Снова в силу теоремы Вейерштрасса имеем соотношение

$$H'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(f^n)'(z)}{(f^n)'(0)}\,.$$

Далее, пусть $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}^+$, для которой $f^1 = f$. Тогда, как было показано в [7], ее инфинитезимальная образующая имеет вид

$$v(z) = \alpha\left(1 - z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k}(z^k - 1)\right),$$

где $\alpha > 0$, $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k = 1$, и выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(f^t)'(0)}{(f^t)'(z)} = \frac{v(z)}{v(0)}\,.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае функция Кёнигса связана с инфинитезимальной образующей соотношением

$$H'(z) = \frac{v(0)}{v(z)}\,.$$

Как и в предыдущем случае, инфинитезимальную образующую можно преобразовать к виду $v(z) = \alpha(z-1)(\varphi(z)-1)$, где $\varphi \in \mathfrak{C}[1]$ и $\varphi(1) = 1$. Интегрируя теперь соотношение

$$H'(z) = \frac{1-\varphi(0)}{(1-z)(1-\varphi(z))}$$

с учетом условия $H(0) = 0$, приходим к интегральному представлению (9).

Прежде чем приступить к доказательству достаточности представления (9), заметим, что, как и в предыдущих случаях, все дробные итерации f^t, $t > 0$, имеют одну и ту же функцию Кёнигса H. При этом по доказанному

$$H(f^t(z)) = H(z) + H(f^t(0)).$$

Далее,

$$\frac{d}{dt} H(f^t(0)) = H'(f^t(0))v(f^t(0)).$$

Поскольку

$$H'(f^t(0)) = \frac{v(0)}{v(f^t(0))}\,,$$

то

$$\frac{d}{dt} H(f^t(0)) = v(0).$$

Интегрируя это соотношение, получаем $H(f^t(0)) = tv(0)$, $t \geqslant 0$. Следовательно, все дробные итерации удовлетворяют уравнению

$$H(f^t(z)) = H(z) + tv(0).$$

При $t = 1$ отсюда, в частности, следует, что $H(f(0)) = v(0)$, и мы приходим к функциональному уравнению

$$H(f^t(z)) = H(z) + tH(f(0)).$$

Допустим теперь, что функция Кёнигса H, определяемая итерациями функции f по формуле (7), допускает представление (9) с некоторой функцией φ из $\mathfrak{C}[1]$ и $\varphi(1) = 1$. Из [7] следует, что тогда

$$v(z) = (z-1)(\varphi(z) - 1)$$

будет инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto g^t$ в $\mathfrak{P}^+[1]$ и $(g^t)'(1) \equiv 1$. Поскольку $g^t(0) \nearrow 1$ при $t \to \infty$ и $g^0(0) = 0$, то найдется такое $\tau > 0$, что $g^\tau(0) = f(0)$. Покажем, что тогда $g^\tau(z) \equiv f(z)$, и вложимость f тем самым будет доказана. Поскольку f и g^τ имеют одну и ту же функцию Кёнигса H (f по условиям теоремы, а g^τ в силу связи функции Кёнигса и инфинитезимальной образующей), то

$$H(g^\tau(z)) = H(z) + H(g^\tau(0)) = H(z) + H(f(0)) = H(f(z)).$$

Равенство $f = g^\tau$ будет теперь установлено, если доказать однолистность функции H. Замечая, что $L(z) = -\ln(1-z)$ является выпуклой функцией, а в силу представления (9) имеет место равенство

$$\frac{H'(z)}{L'(z)} = \frac{1-\varphi(0)}{1-\varphi(z)},$$

правая часть которого имеет положительную вещественную часть в единичном круге, приходим к выводу о принадлежности функции H классу почти выпуклых функций. Таким образом, однолистность H, а вместе с этим и теорема 4 доказаны.

В заключение этого параграфа отметим, что каждая функция H, допускающая представление (9), может рассматриваться как функция Кёнигса некоторой вложимой функции f из $\mathfrak{P}^+[1]$ с $f'(1) = 1$. Следовательно, она определяет однородный марковский критический ветвящийся процесс с непрерывным временем.

§ 5. Некоторые примеры и замечания

Этот параграф носит иллюстративный характер. Здесь рассмотрены некоторые частные случаи, которые формально выпали из рассмотрения при доказательстве основных результатов. Показано, как эти и другие рассматриваемые ниже примеры вписываются в формулировки теорем.

Начнем рассмотрение с вероятностной производящей функции вида $f(z) = p_0 + p_1 z$. Если $p_0 = 1$, то $f(z) \equiv 1$ и не допускает вложения в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}^+$. При $p_1 = 1$ мы имеем тривиальный случай вложимой функции $f(z) \equiv z$. Поэтому остается рассмотреть случай $0 < p_1 < 1$. Поскольку $p_1 = f'(1) < 1$, то мы имеем дело с докритическим случаем. Итерации f^n и функция Кёнигса Q в этом случае легко находятся

$$f^n(z) = (1 - p_1^n) + p_1^n z, \qquad Q(z) = 1 - z.$$

Из формулы (6) она получается при $\varphi(z) \equiv 0$, т.е. когда в представлении φ все числа λ_k равны нулю. Дробные итерации легко находятся из уравнения Шрёдера:

$$f^t(z) = 1 - p_1^t + p_1^t z.$$

Важную роль в приложениях играют дробно-линейные вероятностные производящие функции

$$f(z) = \frac{p}{1 - (1-p)z}\,,$$

$0 < p < 1$, соответствующие геометрическим распределениям вероятностей. В зависимости от значения p мы имеем все три случая. Рассмотрим вначале критический случай, который соответствует значению $p = 1/2$, т.е. $f(z) = 1/(2 - z)$. Поскольку мёбиусовы преобразования образуют группу, то решение уравнения (8) естественно искать в классе дробно-линейных функций. Замечая, что $z = 1$ является неподвижной точкой для f и $H(f(0)) \neq 0$, приходим к следующему выводу: в этой точке H должна иметь полюс. Если дополнить эту информацию равенствами $H(0) = 0, H'(0) = 1$, то мы однозначно приходим к виду $H(z) = z/(1-z)$. Простой проверкой можно убедиться, что эта функция действительно является решением уравнения (8). Из формулы (9) она получается при $\varphi(z) = \varphi_1(z,1) = (z+1)/2$. Замечая, что $H^{-1}(w) = w/(1+w)$, находим дробные итерации

$$f^t(z) = H^{-1}(H(z) + tH(f(0))) = \frac{t + (1-t)z}{1 + t - tz}\,, \qquad t \geqslant 0.$$

В случае $0 < p < 1/2$ функция f имеет внутреннюю неподвижную точку $q = p/(1-p)$, которая для нее и является точкой Данжуа–Вольфа. При $1/2 < p < 1$ точкой Данжуа–Вольфа является $q = 1$. В обоих случаях функция f имеет еще одну неподвижную точку $r = 1$ при $0 < p < 1/2$, или $r = p/(1-p)$ при $1/2 < p < 1$. И в том, и в другом случаях функция Кёнигса R (K или Q в прежних обозначениях) является решением уравнения Шрёдера

$$R(f(z)) = cR(z),$$

где

$$c = f'(q) = \begin{cases} \dfrac{p}{1-p} & \text{при } 0 < p < \dfrac{1}{2}\,; \\[2ex] \dfrac{1-p}{p} & \text{при } \dfrac{1}{2} < p < 1. \end{cases}$$

Поскольку в точке $z = q$ функция R обращается в нуль, то в другой неподвижной точке $z = r$ функции f она должна иметь полюс. Следовательно, R лишь множителем отличается от функции $S(z) = (z-q)/(z-r)$. Замечая, что $S^{-1}(w) =$

$(q - rw)/(1 - w)$, находим однопараметрическую полугруппу дробных итераций функции f в рассматриваемых случаях

$$f^t(z) = S^{-1}(c^t S(z)) = \frac{p((1-p)^t - p^t) + ((1-p)p^t - p(1-p)^t)z}{(1-p)^{t+1} - p^{t+1} - (1-p)((1-p)^t - p^t)z}, \qquad t > 0.$$

К получению дробных итераций и вложимых функций можно подойти с другой стороны, начиная с построения функции Кёнигса. Например, функция $\varphi(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежит $\mathfrak{C}[0]$ и совпадает с $\varphi_n(z, 0)$. Подставляя ее в формулу (3), получаем функцию Кёнигса

$$K(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{\zeta^n}{\zeta(1-\zeta^n)}\, d\zeta\right) = \frac{z}{(1-z^n)^{1/n}},$$

где под дробной степенью в знаменателе понимается однозначная ветвь, принимающая значение 1 при $z = 0$. Соответствующая функция f и ее дробные итерации находятся из уравнения Шрёдера

$$f^t(z) = \frac{\gamma^t z}{(1 - (1-\gamma^{nt})z^n)^{1/n}},$$

где $\gamma = f'(0)$. В теории ветвящихся процессов этот случай соответствует обобщенным процессам Юла.

Функция $\varphi(z) = \varphi_2(z, 1) = (z^2 + z + 1)/3$ относится к критическому случаю, поскольку $\varphi(1) = 1$. Она порождает по формуле (9) функцию Кёнигса

$$H(z) = \frac{2}{3}\,\frac{z}{1-z} + \frac{2}{9}\ln\frac{2+z}{2(1-z)}.$$

Соответствующая однопараметрическая полугруппа находится из уравнения

$$H(f^t(z)) = H(z) + tc,$$

где в качестве c можно выбрать произвольное положительное число.

Список литературы

1. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М.: ГИТ-ТЛ, 1957.
2. *Harris T. E.* Some mathematical models for branching processes // 2-d Berk. Symp. 1951. P. 305–328.
3. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
4. *Karlin S., McGregor J.* Embeddability of discrete time simple branching processes into continuous time processes // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 132. P. 115–136.
5. *Karlin S., McGregor J.* Embedding iterates of analytic functions with two fixed points into continuous semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 132. P. 137–145.
6. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972.
7. *Горяйнов В. В.* Дробное итерирование вероятностных производящих функций и вложение дискретных ветвящихся процессов в непрерывные // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 5. С. 55–74.
8. *Goryainov V. V.* Semigroups of probability generating functions, and infinitely splittable random variables // Theory of Random Processes. 1995. V. 1(17). P. 2–9.

9. *Seneta E.* Functional equations and the Galton–Watson processes // Adv. in Appl. Probab. 1969. V. 1. P. 1–42.
10. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. Warszawa: PWN–Polish Scientific Publishers, 1968.
11. *Königs G.* Recherches sur les intégrales des certaines equations fonctionelles // Ann. Ecole Norm. Sup. (3). 1884. V. 1. P. 3–41.
12. *Schröder E.* Über itierte Funktionen // Math. Ann. 1871. V. 3. P. 296–322.
13. *Baker I. N.* Fractional iteration near a fixpoint of multtiplier 1 // J. Austral. Math. Soc. 1964. V. 4. P. 143–148.
14. *Cowen C. C.* Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 265. P. 69–95.
15. *Горяйнов В. В.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций и композиционный аналог безграничной делимости // Труды ИПММ НАН Украины. 2000. Т. 5. С. 44–57.
16. *Denjoy A.* Sur l'iteration des fonctions analytiques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 255–257.
17. *Wolff J.* Sur l'iteration des fonctions // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 42–43, 200–201.
18. *Baker I. N., Pommerenke Ch.* On the iteration of analytic functions in a halfplane II // J. London Math. Soc. (2). 1979. V. 20. P. 255–258.
19. *Pommerenke Ch.* On asymptotic iteration of analytic functions in the disk // Analysis (Munich). 1981. V. 1. P. 45–61.
20. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. Gottingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.

Волжский гуманитарный институт,
Волгоградская обл.
E-mail: vgor@vgumi.vlink.ru

Поступила в редакцию
23.10.2001