ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIII (1983)

G-Distributions et G-intégrales multiplicatives sur une variété

par J. MARION (Marseille)

Abstract. Une distribution réelle T sur une variété X définit un caractère unitaire continu $e^{\langle T, \cdot \rangle}$ du groupe abélien $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$, c'est-à-dire une distribution multiplicative sur X. Dans cette perspective les classes de représentations unitaires irréductibles continues du groupe $C_0^\infty(X, G)$, où G est un groupe de Lie réel, s'interprètent comme des distributions sur X à valeurs dans G. Nous développons les bases d'une théorie de ces distributions non commutatives et étudions leur comportement sous l'action du groupe des difféomorphismes de X; la notion d'intégrale multiplicative associée à une mesure est également étudiée, en liaison avec les produits tensoriels continus de représentations. L'existence de G-distributions à support infini est un problème difficile; des résultats partiels, relatifs au cas où G est semi-simple ont été établis essentiellement par Vershik, Gelfand et Graev; dans cet article on montre que lorsque G est nilpotent connexe simplement connexe, il existe des séries variées de G-distributions à support infini et de tous ordres.

Introduction. Soit X une variété réelle de classe C^∞, $\boldsymbol{R}$ l'ensemble des nombres réels; la donnée d'une distribution réelle T sur X détermine un caractère unitaire continu $e^{i\langle T, \cdot \rangle}$ du groupe abélien $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$, ou encore une $\boldsymbol{R}$-distribution multiplicative sur X. Lorsque l'on remplace $\boldsymbol{R}$ par un groupe de Lie réel G, ce qui va remplacer un caractère unitaire continu de $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$ sera naturellement une classe d'équivalence de représentations unitaires continues irréductibles de $C_0^\infty(X, G)$; d'où l'idée de considérer, avec I. M. Gel'fand, ces objets comme des G-distributions sur X.

Le présent travail est une tentative pour jeter les bases d'une théorie des G-distributions, les G-intégrales multiplicatives jouant dans cette théorie le rôle que jouent les mesures dans la théorie des distributions ordinaires. Après l'étude des concepts de support et d'ordre, l'étude de l'action du groupe des difféomorphismes de X introduit le concept de distribution (ordinaire) associée à une G-distribution, et de mesure sur X associée à une G-intégrale multiplicative.

Ainsi les G-distributions à support ponctuel x et d'ordre k sont associées à la distribution dérivée $k^{\text{ième}}$ de la mesure de Dirac au point x.

Lorsqu'ils sont irréductibles les produits tensoriels continus $u^{\mu,\pi,\beta}$ (où μ est une mesure positive non atomique sur X, π une représentation unitaire continue de G et β un 1-cocycle continu de G pour π), définissent des intégrales multiplicatives associées à la mesure μ; il est montré que si φ est un difféomorphisme de X, $\varphi \cdot u^{\mu,\pi,\beta}$ est dans la classe de $u^{\varphi \cdot \mu,\pi,\beta}$; en particulier la donnée d'un élément non nul λ de $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$ vérifiant $\mu(\lambda) = 0$ détermine une famille continue de difféomorphismes $(\varphi_\tau^\lambda)_{\tau \in I}$ de X tels que les représentations $(\varphi_\tau^\lambda \cdot u^{\mu,\pi,\beta})_{\tau \in I}$ définissent des intégrales multiplicatives 2 à 2 distinctes.

Enfin, dans le cas où G est un groupe de Lie réel nilpotent connexe simplement connexe, outre certains produits tensoriels continus déjà connus, on construit des séries variées de G-distributions à support non fini et de tous ordres: une forme linéaire α sur l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ de G telle que $\alpha(\mathscr{G}^{(1)}) \neq (0)$ et $\alpha(\mathscr{G}^{(2)}) = (0)$ étant donnée, on associe un C^∞-morphisme surjectif de groupes de G sur un espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{V}_\alpha$; puis, étant donnés une mesure positive non atomique μ sur X, une distribution T sur X et un opérateur différentiel P_α à support compact du fibré vectoriel trivial $X \times \mathscr{V}_\alpha$ dans le fibré trivial $X \times \boldsymbol{R}$, on construit une G-distribution $\Gamma^\alpha_{\mu,T,P_\alpha}$ de dimension infinie, de support non fini et dont l'ordre est celui de la $\mathscr{V}_\alpha$-distribution

$$P_\alpha^T : f \to \langle T, P_\alpha(f) \rangle, \quad f \in C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha);$$

en outre, pour un difféomorphisme φ de X on a

$$\varphi \cdot \Gamma^\alpha_{\mu,T,P_\alpha} = \Gamma^\alpha_{\varphi \cdot \mu, \varphi \cdot T, \varphi \cdot P_\alpha}.$$

1. G-distribution sur une variété. Etant donnés une variété réelle X de classe C^∞ et un groupe de Lie réel connexe G, l'ensemble $C_0^\infty(X, G)$ de toutes les applications C^∞ de X dans G dont le support est compact a une structure de groupe pour la multiplication point par point; si K désigne un sous-ensemble compact de X, $C^\infty(K, G)$ désigne le sous-groupe de $C_0^\infty(X, G)$ constitué par les éléments dont le support est dans K; on sait que $C_0^\infty(X, G)$, doté de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des applications et de toutes leurs différentielles, a une structure de groupe topologique, et pour K compact contenu dans X, $C^\infty(K, G)$ a une structure de variété de Fréchet ([1]).

Définition 1. Une représentation unitaire π de $C_0^\infty(X, G)$ dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ sera dite *continue* si, pour tout compact K de X, quels que soient les vecteurs u, v de $\mathscr{H}$, l'application $g \to \langle \pi(g)u, v \rangle$ est continue sur $C^\infty(K, G)$.

Nous noterons $\widehat{C_0^\infty(X, G)}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires continues irréductibles de $C_0^\infty(X, G)$, $\hat{T}$ la classe d'une représentation unitaire continue irréductible T de $C_0^\infty(X, G)$.

DÉFINITION 2. On appellera G-distribution sur X tout élément de $\widehat{C_0^\infty(X, G)}$.

2. Support d'une G-distribution. Soit π une représentation unitaire continue de $C_0^\infty(X, G)$, et x un élément de X; nous dirons que x est dans le support de π si pour tout voisinage ouvert V de x il existe un élément g de $C_0^\infty(X, G)$ tel que le support de g soit contenu dans V et tel que $g \notin \ker \pi$.

LEMME 1. *Deux représentations unitaires continues équivalentes ont même support.*

Preuve. Soient π, π' deux représentations unitaires équivalentes, A un opérateur unitaire entrelaçant π et π', et x un élément du support de π'; pour tout voisinage V de x et pour tout élément g de $C_0^\infty(X, G)$ à support dans V: $A\pi(g) = \pi'(g)A$; donc, si $\pi'(g) \neq I$, $\pi(g) \neq I$ et donc x est dans le support de π; l'assertion résulte alors du fait que π et π' jouent des rôles symétriques. C.Q.F.D.

Le lemme 1 justifie alors la définition suivante:

DÉFINITION 3. On appelle *support d'une G-distribution* T le support de l'une quelconque des représentations dont la classe est T.

3. Ordre d'une G-distribution. Pour chaque entier positif ou nul k, l'ensemble $C_0^k(X, G)$ des applications de classe C^k à support compact de X dans G, muni de la multiplication point par point et de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des applications et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre k, est un groupe topologique; si, pour K compact contenu dans X on note $C^k(K, G)$ l'ensemble des éléments de $C_0^k(X, G)$ dont le support est dans K, $C^k(K, G)$ est un sous-groupe de $C_0^k(X, G)$ et a une structure de variété banachique ([1]). Une représentation unitaire de $C_0^k(X, G)$ dont la restriction à chaque $C^k(K, G)$, K compact de X, est continue sera dite représentation unitaire continue; l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de $C_0^k(X, G)$ sera noté $\widehat{C_0^k(X, G)}$. Il est clair que si k, k' sont deux entiers tels que $0 \leqslant k' \leqslant k$ on a les inclusions:

$$C_0^\infty(X, G) \subset C_0^k(X, G) \subset C_0^{k'}(X, G) \subset C_0(X, G);$$

par suite tout élément de $\widehat{C_0^k(X, G)}$ définit par restriction un élément de $\widehat{C_0^\infty(X, G)}$.

DÉFINITION 4. Une G-distribution appartenant à $\widehat{C_0^k(X, G)}$ sera dite *d'ordre* $\leqslant k$.

EXEMPLE. Soit k un entier non négatif et soit $J_x^k(X, G)$ l'ensemble des jets d'ordre k au point x des éléments de $C_0^\infty(X, G)$; on sait que c'est un groupe de Lie de dimension finie, produit semi-direct de G par un groupe nilpotent ([6]). Soit alors $T^{(k)}$ une représentation unitaire continue irréductible de

$J_x^k(X, G)$; on définit une représentation unitaire irréductible continue de $C_0^k(X, G)$, et donc de $C_0^\infty(X, G)$: $T_x^{(k)}$ telle que $T_x^{(k)}(g) = T^{(k)}(j_x^k(g)), j_x^k(g)$ étant le k-jet de g au point x; il est clair que $T_x^{(k)}$ est d'ordre $\leqslant k$ et de support ponctuel x. En particulier, pour $k = 0$, $J_x^0(X, G) = G$, et donc toute représentation unitaire continue irréductible π de G fournit une représentation unitaire continue irréductible d'ordre 0 et à support ponctuel: soit $x \in X$; la représentation d'ordre 0 et de support x sera donnée par

$$\pi_x(g) = \pi(g(x)), \qquad g \in C_0^\infty(X, G).$$

4. Intégrales multiplicatives.

Définition 5. On appellera *G-intégrale multiplicative* sur X toute G-distribution sur X continue sur chaque $C^\infty(K, G)$, K compact de X, pour la topologie induite par $C^0(K, G)$.

Dans le cas où l'on prend $G = \boldsymbol{R}$, on sait que les éléments de $\widehat{C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})}$ sont donnés par les distributions sur X: si T est une distribution sur X l'élément χ_T correspondant de $\widehat{C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})}$ est le caractère $f \to \chi_T(f) = \exp(i\langle T, f\rangle)$ ([4]).

En outre T est une mesure sur X si et seulement si T est continue sur chaque $C^\infty(K, \boldsymbol{R})$ muni de la topologie induite par $C^0(K, \boldsymbol{R})$ ([8], théorème III), de sorte que χ_T est alors une intégrale multiplicative au sens habituel du terme.

Il est aisé de vérifier que si π est une représentation unitaire continue irréductible de G et si x est un élément donné de X la représentation π_x d'ordre 0 et de support x associée est une intégrale multiplicative.

De même, si l'on dispose d'une représentation unitaire continue de G à valeur dans un espace de Hilbert réel et d'un 1-cocycle continu de G pour π de telle sorte que le produit tensoriel continu associé (cf. [2], [5] et [9]) soit irréductible, alors ce produit tensoriel continu est une G-intégrale multiplicative sur X, comme il est aisé de le déduire de [9].

5. Action du groupe des difféomorphismes de X. Notons $\mathrm{Diff}(X)$ le groupe des difféomorphismes de X. Montrons d'abord que $\mathrm{Diff}(X)$ opère comme groupe de transformations sur $C_0^\infty(X, G)$:

Proposition 1. *Soit π une représentation unitaire continue de $C_0^\infty(X, G)$ et soit ψ un élément de* $\mathrm{Diff}(X)$.

(a) *L'application $\psi \cdot \pi$: $g \to \pi(g \circ \psi)$ est une représentation unitaire continue de $C_0^\infty(X, G)$;*

(b) *$\psi \cdot \pi$ est irréductible si et seulement si π est irréductible;*

(c) *Si π' est une représentation unitaire continue de $C_0^\infty(X, G)$ équivalente à π, alors $\psi \cdot \pi$ et $\psi \cdot \pi'$ sont équivalentes.*

Preuve. (a) Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert de la représentation π, K un compact de X, u et v deux éléments de $\mathscr{H}$; notons d'abord que, $\mathrm{Diff}(X)$

étant équipé de la C^∞-topologie de la convergence uniforme sur les compacts, l'application $g \to g \circ \psi$ est continue sur $C_0^\infty(X, G)$, et que c'est un automorphisme du groupe $C_0^\infty(X, G)$; il en résulte d'une part que $\psi \cdot \pi$ est un homomorphisme du groupe $C_0^\infty(X, G)$ dans le groupe unitaire de $\mathscr{H}$, et que $g \to \langle \psi \cdot \pi(g) u, v\rangle$ est continue sur $C^\infty(K, G)$ comme composée des applications $g \to g \circ \psi$ et $\gamma \to \langle \pi(\gamma) u, v\rangle$.

(b) Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace de $\mathscr{H}$ stable par π; pour v, dans $\mathscr{V}$, $\pi(g \circ \psi) v$ est un élément de $\mathscr{V}$ quelque soit g; par suite $\psi \cdot \pi$ laisse stable $\mathscr{V}$; de la même façon on voit que si $\mathscr{V}$ est $\psi \cdot \pi$ stable, $\mathscr{V}$ est ψ stable, d'où l'assertion.

(c) Soit $\mathscr{H}'$ l'espace de Hilbert de la représentation π'; π' et π seront équivalentes si l'on peut trouver un opérateur isométrique A de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}'$ tel que, quelque soit g' dans $C_0^\infty(X, G)$, $A\pi(g')A^{-1} = \pi'(g')$, c'est-à-dire, en prenant $g = g' \circ \psi^{-1}$, si et seulement si, quelque soit g dans $C_0^\infty(X, G)$: $A\pi(g \circ \psi) \cdot A^{-1} = \pi'(g \circ \psi)$, d'où l'assertion. C.Q.F.D.

La proposition 1 permet donc de définir une action de Diff(X) dans $\widehat{C_0^\infty(X, G)}$: soit $\psi \in \mathrm{Diff}(X)$, $\omega \in \widehat{C_0^\infty(X, G)}$ et $\pi \in \omega$, on notera $\psi \cdot \omega$ la G-distribution dont un représentant est $\psi \cdot \pi$.

Pour un élément ω de $\widehat{C_0^\infty(X, G)}$ notons:

$$\mathrm{Diff}(X, \omega) = \{\psi \in \mathrm{Diff}(X) / \psi \cdot \omega = \omega\}.$$

On vérifie immédiatement que Diff(X, ω) est un sous-groupe de Diff(X). Cette situation est donc tout à fait analogue à celle des distributions usuelles sur une variété: si T est une distribution sur X, et si ψ est un difféomorphisme de X, $\psi \cdot T$: $f \to \langle \psi \cdot T, f\rangle = \langle T, f \circ \psi\rangle$ est une nouvelle distribution sur X et $\mathrm{Diff}(X, T) = \{\psi \in \mathrm{Diff}(X) / \psi \cdot T = T\}$ est un sous-groupe de Diff(X).

Proposition 2. *Soit θ un élément de* Diff(X); *quelle que soit la G-distribution ω, la restriction à* Diff$(X; \omega)$ *de l'automorphisme intérieur de* Diff(X): i_θ: $\psi \to \theta \circ \psi \circ \theta^{-1}$ *est un isomorphisme de* Diff$(X; \omega)$ *sur* Diff$(X, \theta \cdot \omega)$.

Preuve. Soit π une représentation unitaire irréductible continue dans la classe d'une G-distribution ω, et soit ψ un élément de Diff$(X; \omega)$: $\psi \cdot \pi \sim \pi$; en outre $(\theta \circ \psi \circ \theta^{-1}) \cdot (\theta \cdot \pi) = (\theta \circ \psi) \cdot \pi = \theta \cdot (\psi \cdot \pi)$; comme $\psi \cdot \pi \sim \pi$, il résulte du (c) de la proposition 1 que $\theta \cdot (\psi \cdot \pi) \sim \theta \cdot \pi$, et donc $(\theta \cdot \psi \cdot \theta^{-1}) \cdot (\theta \cdot \pi) \sim \theta \cdot \pi$; par suite $\theta \cdot \psi \cdot \theta^{-1} \in \mathrm{Diff}(X; \theta \cdot \pi) = \mathrm{Diff}(X; \theta \cdot \omega)$; la restriction de i_θ à Diff$(X; \omega)$ est donc un homomorphisme injectif à valeur dans Diff$(X; \theta \cdot \omega)$; reste à montrer sa surjectivité: soit $\Phi \in \mathrm{Diff}(X; \theta \cdot \omega)$: $\Phi \cdot (\theta \cdot \pi) \sim \theta \cdot \pi$ donc $(\theta^{-1} \cdot \Phi \cdot \theta) \cdot \pi \sim \pi$; donc $\psi = \theta^{-1} \cdot \Phi \cdot \theta \in \mathrm{Diff}(X; \omega)$ et $i_\theta(\psi) = \Phi$, d'où la surjectivité. C.Q.F.D.

Corollaire. *Soit θ un élément de* Diff(X), *T une distribution usuelle sur X; la restriction à* Diff$(X; T)$ *de i_θ est un isomorphisme de* Diff$(X; T)$ *sur* Diff$(X; \theta \cdot T)$.

6. G-distribution associée à une distribution.

DÉFINITION 6. Soient ω une G-distribution et λ une distribution sur X: nous dirons que ω est associée à λ si:

$$\mathrm{Diff}(X;\ \lambda) \subset \mathrm{Diff}(X;\ \omega).$$

Notons que si ω est d'ordre $\leqslant k$, toute distribution λ auquelle elle est associée est nécessairement d'ordre $\leqslant k$, et qu'il est possible que ω soit associée à une large famille de distributions. Dans le cas où λ est une mesure positive μ sur X, l'ensemble des distributions T telles que $\mathrm{Diff}(X;\ T) = \mathrm{Diff}(X;\ \mu)$ est formé des mesures $r\mu, r \in \boldsymbol{R}, r > 0$; il résulte des considérations précédentes que si une G-intégrale multiplicative est associée à une distribution, cette distribution est nécessairement une mesure:

DÉFINITION 7. Soit ω une G-intégrale multiplicative et μ une mesure sur X; on dira que ω est une *intégrale multiplicative* relativement à μ si $\mathrm{Diff}(X;\ \mu) \subset \mathrm{Diff}(X;\ \omega)$.

On a le résultat suivant:

PROPOSITION 3. *Soit ω une G-distribution associée à une distribution T; pour tout élément θ de* $\mathrm{Diff}(X)$, *$\theta\cdot\omega$ est une G-distribution associée à $\theta\cdot T$; en particulier si ω est une intégrale multiplicative relativement à une mesure μ, $\theta\cdot\omega$ est une intégrale multiplicative relativement à la mesure $\theta\cdot\mu$.*

Preuve. Il résulte de la proposition 2 et de son corollaire que i_θ est un isomorphisme de $\mathrm{Diff}(X;\ T)$ sur $\mathrm{Diff}(X;\ \theta\cdot T)$ et de $\mathrm{Diff}(X;\ \omega)$ sur $\mathrm{Diff}(X;\ \theta\cdot\omega)$; par suite $\mathrm{Diff}(X;\ T) \subset \mathrm{Diff}(X;\ \omega)$ implique: $\mathrm{Diff}(X;\ \theta\cdot T) \subset \mathrm{Diff}(X;\ \theta\cdot\omega)$. C.Q.F.D.

Soit X dotée d'une mesure positive μ, et soit $C_0^\infty(X)^\mu = \{\lambda \in C_0^\infty(X, \boldsymbol{R}) / \mu(\lambda) = \int_X \lambda(x)\, d\mu(x) = 0\}$. Pour un élément λ de $C_0^\infty(X)^\mu$, nécessairement on a les inégalités:

$$0 \leqslant M_\lambda \ \ (= \sup_{x\in X} \lambda(x)) < +\infty \quad \text{et} \quad -\infty < m_\lambda \ \ (= \inf_{x\in X} \lambda(x)) \leqslant 0;$$

nous noterons A_λ l'intervalle ouvert $A_\lambda = [1/m_\lambda,\ 1/M_\lambda]$, avec la convention $1/m_\lambda = -\infty$, $1/M_\lambda = +\infty$ si $\lambda \equiv 0$.

PROPOSITION 4. *Soit μ une mesure positive sur X, ω une G-intégrale multiplicative relativement à μ et λ un élément de $C_0^\infty(X)^\mu$. A tout élément τ de A_λ on peut associer une mesure positive μ_τ^λ sur X telle que $d\mu_\tau^\lambda(x)/d\mu(x) = 1 - \tau\cdot\lambda(x)$, pour tout x dans X, et un difféomorphisme θ_τ^λ de X à support compact tels que $\theta_\tau^\lambda\cdot\omega$ soit une intégrale multiplicative pour μ_τ^λ.*

Preuve. Notons d'abord que pour tout réel τ de A_λ, c'est-à-dire tel que $1/m < \tau < 1/M_\lambda$, avec $m_\lambda \leqslant 0$, $M_\lambda \geqslant 0$, on a $1-\tau\cdot\lambda(x) > 0$ pour tout x dans

X; par suite il existe une mesure positive μ_τ^λ sur X telle que

$$d\mu_\tau^\lambda(x) = [1 - \tau \cdot \lambda(x)]\, d\mu(x);$$

Les mesures μ et μ_τ^λ coïncident hors d'un compact Y de X contenant le support de λ avec de plus $\mu(Y) = \mu_\tau^\lambda(Y)$; il résulte alors d'un théorème de Moser ([7]) qu'il existe un difféomorphisme à support compact de X, soit θ_τ^λ tel que $\theta_\tau^\lambda \cdot \mu = \mu_\tau^\lambda$; l'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition 3. C.Q.F.D.

7. Le cas des G-distributions à support ponctuel.

PROPOSITION 5. *Soit π une représentation unitaire continue irréductible de G, et x un élément de X; la G-distribution dont un représentant est la représentation π_x: $g \to \pi(g(x))$, $g \in C_0^\infty(X, G)$, est une intégrale multiplicative relativement à la mesure de Dirac au point x.*

Preuve. On sait (Section 3) que π_x définit une G-intégrale multiplicative. Soit δ_x la mesure de Dirac au point x: $\varphi \in \mathrm{Diff}(X;\, \delta_x)$ si et seulement si, pour tout élément f de $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$ on a $(f \circ \varphi)(x) = f(x)$; $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$ séparant les points de X, on en déduit que $\mathrm{Diff}(X;\, \delta_x)$ n'est autre que:

$$\{\varphi \in \mathrm{Diff}(X) / \varphi(x) = x\}.$$

Il en résulte que pour tout élément θ de $\mathrm{Diff}(X, x)$ on a $\theta \cdot \pi_x = \pi_x$ et donc $\mathrm{Diff}(X;\, \delta_x) \subset \mathrm{Diff}(X;\, \pi_x)$. C.Q.F.D.

Cela étant, soit x un élément donné de X, k un entier positif, et notons $P_x^k(X)$ l'espace des k-jets au point x des éléments de $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$; un élément λ du dual $P_x^k(X)'$ de $P_x^k(X)$ définit une distribution T_λ sur X de support x et d'ordre $\leqslant k$, telle que pour $f \in C_0^\infty(X, \boldsymbol{R}) \langle T_\lambda, f\rangle = \lambda(j_x^k(f))$.

PROPOSITION 6. *Soit x un élément de X, k un entier positif, λ un élément de $P_x^k(X)'$ non nul, et $\pi^{(k)}$ une représentation unitaire continue irréductible du groupe $J_x^k(X, G)$. La représentation $\pi_x^{(k)}$: $g \to \pi^{(k)}(j_x^k(g))$ définit une G-distribution d'ordre $\leqslant k$ associée à T_λ.*

Preuve. On sait déjà que $\pi_x^{(k)}$ définit une G-distribution d'ordre $\leqslant k$ sur X (Section 3). Soit alors φ dans $\mathrm{Diff}(X)$: pour tout élément f de $C_0(X, \boldsymbol{R})$ on a:

$$\langle \varphi \cdot T_\lambda, f\rangle = \langle T_\lambda, f \circ \varphi\rangle = \lambda(j_x^k(f \circ \varphi));$$

λ étant supposée non nulle, on aura $T_\lambda = \varphi \cdot T_\lambda$ si et seulement si $j_x^k(\varphi) = j_x^k(I_X)$, où I_X désigne l'identité sur X; donc $\mathrm{Diff}(X;\, T_\lambda) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(X) / j_x^k(\varphi) = j_x^k(I_X)\}$; or, pour g dans $C_0^\infty(X, G)$, on aura, pour φ dans $\mathrm{Diff}(X;\, T_\lambda)$: $\varphi \cdot \pi_x^{(k)}(g) = \pi_x^{(k)}(g \circ \varphi) = \pi^{(k)}[j_x^k(g \circ \varphi)] = \pi^{(k)}(j_x^k(g)) = \pi_x^{(k)}(g)$ d'où l'assertion. C.Q.F.D.

8. Le cas des produits tensoriels continus. Etant donné un espace de Hilbert réel $\mathscr{V}$, nous noterons $S\mathscr{V}$ l'espace de Hilbert $\boldsymbol{R} \oplus$

$\oplus \mathscr{V} \oplus S^1 \mathscr{V} \oplus \ldots \oplus S^n \mathscr{V} \oplus \ldots$, où $S^n \mathscr{V}$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle symétrique de $\mathscr{V}$; on sait que les vecteurs

$$\mathrm{EXP}\, v = \bigoplus_{n \geq 0} v^{\otimes n} / \sqrt{n!}, \qquad v \in \mathscr{V},$$

forment un système total de vecteurs linéairement indépendants dans $S\mathscr{V}$ ([5]). En outre si π est une représentation unitaire continue d'un groupe topologique Γ dans $\mathscr{V}$ et si β est un 1-cocycle continu de Γ pour π, on obtient une nouvelle représentation unitaire continue $\mathrm{EXP}_\beta\, \pi$ de Γ dans $S\mathscr{V}$ telle que ([9]):

(1) $$\mathrm{EXP}_\beta\, \pi(\gamma) \cdot \mathrm{EXP}\, v = \exp\{-\tfrac{1}{2}\|\beta(\gamma)\|^2 - \langle \pi(\gamma) v, \beta(\gamma) \rangle\}\, \mathrm{EXP}\,(\pi(\gamma) v + \beta(\gamma)).$$

Cela étant, supposons que la variété X soit dotée d'une mesure borélienne positive σ-additive, σ-finie de densité positive en chaque point, et que G possède une représentation unitaire continue π dans un espace de Hilbert réel $\mathscr{H}$; enfin, soit β un 1-cocycle continu de G pour π. Pour chaque x dans X soit $\mathscr{H}_x = \mathscr{H}$ et $\pi^x = \pi$; on note $\pi_X = \int_X^{\oplus} \pi^x \, d\mu(x)$, $\mathscr{H}_{X,\mu} = \int_X^{\oplus} \mathscr{H}_x \, d\mu(x)$: $\mathscr{H}_{X,\mu} = \{F\colon X \underset{\text{mes}}{\to} \mathscr{H} / \int_X \|F(x)\|^2 \, d\mu(x) < +\infty\}$ et pour g dans $C_0^\infty(X, G)$, $F \in \mathscr{H}_{X,\mu}$, $\pi_X(g) F$ est l'application $x \to \pi(g(x))(F(x))$.

π_X est une représentation unitaire continue de $C_0^\infty(X, G)$ dans $\mathscr{H}_{X,\mu}$ dont $\beta_X\colon g \to \beta_X(g)$ définie par $\beta_X(g)(x) = \beta(g(x))$, $x \in X$, est un 1-cocycle.

La représentation $\mathrm{EXP}_{\beta_X} \pi_X$ de $C_0^\infty(X, G)$ dans $S\mathscr{H}_{X,\mu}$, que l'on notera $u^{\mu,\pi,\beta}$, n'est autre que le produit tensoriel continu $\bigotimes_X (\mathrm{EXP}_\beta\, \pi)^x \, d\mu(x)$ ([9]).

Les représentations du type $U^{\mu,\pi,\beta}$ sont à support infini; elles sont non localisées et définissent des représentations unitaires continues du groupe $C_0(X, G)$. Lorsque le produit tensoriel continu est irréductible il définit donc une intégrale multiplicative sur X.

LEMME 2. *Soit μ une mesure positive non atomique borélienne σ-additive sur X, π une représentation unitaire continue de G, β un 1-cocycle continu de G pour π, et θ un difféomorphisme de X; $U^{\theta \cdot \mu,\pi,\beta}$ et $\theta \cdot U^{\mu,\pi,\beta}$ sont deux représentations unitairement équivalentes de $C_0^\infty(X, G)$.*

Preuve. Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert de la représentation π, $\mathscr{H}_x = \mathscr{H}\ \forall\, x \in X$, $\mathscr{H}^\mu = \int_X^{\oplus} \mathscr{H}_x \, d\mu(x)$ et $\mathscr{H}^{\theta\mu} = \int_X^{\oplus} \mathscr{H}_x \, d(\theta \cdot \mu)(x)$, $\langle\ ,\ \rangle_\mu$ et $\|\ \|_\mu$ le produit scalaire et la norme dans $\mathscr{H}^\mu$, $\langle\ ,\ \rangle_{\theta \cdot \mu}$, $\|\ \|_{\theta \cdot \mu}$ le produit scalaire et la norme dans $\mathscr{H}^{\theta\cdot\mu}$. Soit $h \in \mathscr{H}^{\mu}$: h: $X \overset{\text{mes}}{\to} \mathscr{H}$ avec $\|h\|_{\mu}^{2} = \int_{X} \|h(x)\|^{2} d\mu(x) < +\infty$; alors $h \cdot \theta^{-1}$: $X \to \mathscr{H}$ est mesurable et:

$$\|h \circ \theta^{-1}\|_{\theta\cdot\mu}^{2} = \int_{X} \|h \circ \theta^{-1} \circ \theta(x)\|^{2} d\mu(x)$$

$$= \int_{X} \|h \circ \theta^{-1}(x)\|^{2} d(\theta \cdot \mu)(x) = \|h\|_{\mu}^{2} < +\infty.$$

Il en résulte immédiatement que l'application v: $h \to h \cdot \theta^{-1}$ est une isométrie de $\mathscr{H}^{\mu}$ sur $\mathscr{H}^{\theta\cdot\mu}$, qui se prolonge en une isométrie EXP v de $S\mathscr{H}^{\mu}$ sur $S\mathscr{H}^{\theta\cdot\mu}$, telle que pour EXP $h \in S\mathscr{H}^{\mu}$, $h \in \mathscr{H}^{\mu}$: EXP v(EXP h) $=$ EXP$(h \circ \theta^{-1})$; on notera qu'en tant qu'espaces vectoriels $\mathscr{H}^{\mu} = \mathscr{H}^{\theta\cdot\mu}$. Soit alors h dans $\mathscr{H}^{\mu}$ et g dans $C_{0}^{\infty}(X, G)$:

$$[\theta \cdot U^{\mu,\pi,\beta}(g)](\exp h) = U^{\mu,\pi,\beta}(g \circ \theta)(\exp h)$$

$$= \exp\{-\tfrac{1}{2}\|\beta_{X}(g \circ \theta)\|_{\mu}^{2} - \langle \pi_{X}(g \circ \theta) h,$$

$$\beta_{X}(g \circ \theta)\rangle_{\mu}\} \exp(\pi_{X}(g \circ \theta) h + \beta_{X}(g \circ \theta));$$

mais:

$$\|\beta_{X}(g \circ \theta)\|_{\mu}^{2} = \int_{X} \|\beta(g \circ \theta)(x)\|^{2} d\mu(x) = \int_{X} \|\beta(x)\|^{2} d(\theta \cdot \mu)(x) = \|\beta_{X}(g)\|_{\theta\cdot\mu}^{2},$$

$$\langle \pi_{X}(g \circ \theta) h, \beta_{X}(g \circ \theta)\rangle_{\mu} = \int_{X} \langle \pi(g \circ \theta)(x)[(h \circ \theta^{-1}) \circ \theta(x)], \beta(g \circ \theta)(x)\rangle d\mu(x)$$

$$= \int_{X} \langle \pi(g(x))(h \circ \theta^{-1}(x)), \beta(g(x))\rangle d(\theta \cdot \mu)(x)$$

$$= \langle \pi_{X}(g) h \circ \theta^{-1}, \beta_{X}(g)\rangle_{\theta\cdot\mu};$$

par suite:

$$[\theta \cdot U^{\mu,\pi,\beta}(g)] (\text{EXP}\, h = \exp\{-\tfrac{1}{2}\|\beta_{X}(g)\|_{\theta\cdot\mu}^{2} -$$

$$- \langle \pi_{X}(g) \cdot h \cdot \theta^{-1}, \beta_{X}(g)\rangle_{\theta\cdot\mu}\} \text{ EXP}(\pi_{X}(g \circ \theta) h + \beta_{X}(g \circ \theta))$$

d'où

$$\text{EXP}\, v \cdot (\theta \cdot U^{\mu,\pi,\beta}(g)) \text{ EXP}\, h = \exp\{-\tfrac{1}{2}\|\beta_{X}(g)\|_{\theta\cdot\mu}^{2} -$$

$$- \langle \pi_{X}(g) h \cdot \theta^{-1}, \beta_{X}(g)\rangle_{\theta\cdot\mu}\} \text{ EXP}(\pi_{X}(g \cdot \theta) \cdot h \cdot \theta^{-1} + \beta_{X}(g))$$

$$= U^{\theta\cdot\mu,\pi,\beta}(g) \text{ EXP}(\pi_{X}(g)(h \cdot \theta^{-1})) = [U^{\theta\cdot\mu,\pi,\beta}(g) \cdot \text{EXP}\, v] (\text{EXP}\, h).$$

Par suite EXP v entrelace $\theta \cdot U^{\mu,\pi,\beta}$ et $U^{\theta\cdot\mu,\pi,\beta}$. C.Q.F.D.

Le lemme 2 détruit ainsi l'espoir d'obtenir, à partir de l'action d'un difféomorphisme sur un produit tensoriel continu, de nouvelles intégrales multiplicatives non localisées qui ne soient pas dans la classe d'un produit tensoriel continu.

Rappelons que si T est une représentation unitaire continue irréductible de $C_0^\infty(X, G)$, la G-distribution qu'elle définit est notée $\hat{T}$. De même, rappelons que pour un élément λ de

$$C_0^\infty(X)^\mu = \{\varphi \in C_0^\infty(X, \boldsymbol{R}) / \int_X \varphi(x)\, d\mu(x) = 0\}$$

on a $-\infty < \inf_{x \in X} \lambda(x) \leqslant 0 \leqslant \sup_{x \in X} \lambda(x) < +\infty$, toutes les inégalités étant strictes si $\lambda \neq 0$; soit $\lambda \in C_0^\infty(X)^\mu - \{0\}$; alors pour tout réel τ dans:

$$A_\lambda =]1/\inf_{x \in X} \lambda(x),\ 1/\sup_{x \in X} \lambda(x)[,$$

$1 - \tau\lambda(x)$ est strictement positif pour tout x dans X.

Définition 8. Soit G un groupe de Lie réel connexe, π une représentation unitaire continue de G, β un 1-cocycle continu de G pour π. Nous dirons que le triplet (G, π, β) *vérifie la condition VGG* si:

(a) π est à valeurs dans un espace de Hilbert réel $\mathscr{H}$ et si $\beta(G)$ engendre $\mathscr{H}$;

(b) il existe un sous-groupe compact K de G tel que $\beta(K) = (0)$ et tel qu'aucun vecteur non nul de $\mathscr{H}$ soit $\pi(K)$-invariant.

On sait que de tels triplets existent essentiellement pour les groupes $G = SO_0(n, 1)$, $SU(n, 1)$ dans le cas semi-simple ([9]), [2]), ou encore quand G est le produit semi-direct d'un groupe compact par un groupe vectoriel ([6]).

Proposition 7. *Soit X une variété réelle compacte C^∞ dotée d'une mesure borélienne positive, σ-additive, de densité positive en chaque point, et (G, π, β) un triplet vérifiant la condition VGG.*

(a) *Soit λ un élément non nul de $C_0^\infty(X)^\mu$; pour tout réel τ dans A_λ, $\widehat{U^{\mu_\tau^\lambda, \pi, \beta}}$ est une intégrale multiplicative relativement à la mesure μ_τ^λ de densité $1 - \tau \cdot \lambda(x)$ par rapport à μ.*

(b) *Si τ et τ' sont 2 éléments distincts de A_λ, $\widehat{U^{\mu_\tau^\lambda, \pi, \beta}}$ et $\widehat{U^{\mu_{\tau'}^\lambda, \pi, \beta}}$ sont des intégrales multiplicatives distinctes.*

(c) *Si λ et λ' sont deux éléments non nuls non proportionnels de $C_0^\infty(X)^\mu$, avec deux réels distincts τ et τ' dans respectivement A_λ et $A_{\lambda'}$, alors $\widehat{U^{\mu_\tau^\lambda, \pi, \beta}}$ et $\widehat{U^{\mu_{\tau'}^{\lambda'}, \pi, \beta}}$ sont des intégrales multiplicatives distinctes.*

Preuve. (a) Notons d'abord que, X étant compacte, l'espace $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R}) = C^\infty(X, \boldsymbol{R})$ contient les constantes mais que $C_0^\infty(X)^\mu$ ne contient que la constante identiquement nulle. Comme $1 - \tau\lambda(x) > 0\ \forall\ x \in X$, μ_τ^λ est positive borélienne, de densité positive en tout point; L'irréductibilité du produit tensoriel $U^{\mu_\tau^\lambda, \pi, \beta}$ résulte du théorème 1 de [9], et par suite $\widehat{U^{\mu_\tau^\lambda, \pi, \beta}}$ est une intégrale multiplicative. D'après la proposition 4 il existe un difféomorphisme θ_τ^λ tel que $\theta_\tau^\lambda \cdot \widehat{U^{\mu, \pi, \beta}}$ soit une intégrale multiplicative relativement à $\theta_\tau^\lambda \cdot \mu$

$= \mu_\tau^\lambda$; or il résulte du lemme 2 que $\theta_\tau^\lambda \cdot \widehat{U^{\mu,\pi,\beta}} = \widehat{U^{\mu_\tau^\lambda,\pi,\beta}}$, d'où la première assertion.

(b) Soient τ et τ' deux éléments distincts de A_λ: on a:

$$d\mu_\tau^\lambda(x) = (1 - \tau \cdot \lambda(x))d\mu(x), \quad d\mu_{\tau'}^\lambda(x) = (1 - \tau' \cdot \lambda(x))d\mu(x) \ \forall \ x \in X.$$

J'affirme alors qu'il n'existe aucun réel strictement positif c tel que $\mu_{\tau'} = c\mu_\tau$; en effet, si cela était, on aurait $1 - \tau' \cdot \lambda(x) = c(1 - \tau \cdot \lambda(x))$, soit $1 - c = (c\tau - - \tau')\lambda(x) \ \forall \ x \in X$; mais λ étant un élément non nul de $C_0^\infty(X)^\mu$ n'est pas constante; on en déduit donc que $c = 1$, $\tau = \tau'$ contrairement à l'hypothèse faite. $\mu_{\tau'}^\lambda$ n'étant pas un multiple strictement positif de μ_τ^λ, il résulte alors du théorème 2 de [9] que

$$U^{\mu_\tau^\lambda,\pi,\beta} \quad \text{et} \quad U^{\mu_{\tau'}^\lambda,\pi,\beta}$$

sont inéquivalentes d'où l'assertion.

(c) Soient λ, λ' deux éléments non nuls, non proportionnels de $C_0^\infty(X)^\mu$, τ dans A_λ, τ' dans $A_{\lambda'}$: $\forall \ x \in X$:

$$d\mu_\tau^\lambda(x) = (1 - \tau \cdot \lambda(x))d\mu(x), \quad d\mu_{\tau'}^{\lambda'}(x) = (1 - \tau' \cdot \lambda'(x))d\mu(x);$$

d'après le théorème 2 de [9], une condition nécessaire pour que $U^{\mu_\tau^\lambda,\pi,\beta}$ et $U^{\mu_{\tau'}^{\lambda'},\pi,\beta}$ soient équivalentes est qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $\mu_{\tau'}^{\lambda'} = c\mu_\tau^\lambda$, d'où $d\mu_{\tau'}^{\lambda'}(x) = cd\mu_\tau^\lambda(x)$, $\forall \ x \in X$, et donc tel que

$$1 - \tau' \cdot \lambda'(x) = c(1 - \tau \cdot \lambda(x)) \ \forall \ x \in X,$$

soit:

$$1 - c = \tau' \cdot \lambda'(x) - c\tau\lambda(x) \ \forall \ x \in X;$$

on en déduit:

$$(1 - c)\mu(X) = \tau' \int_X \lambda'(x)d\mu(x) - c\tau \int_X \lambda(x)d\mu(x) = 0,$$

et donc $c = 1$; par suite nécessairement $\forall \ x \in X$:

$$\tau' \cdot \lambda'(x) - \tau\lambda(x) = 0.$$

τ et τ' étant supposés distincts, l'un au moins d'entre eux n'est pas nul, et par suite λ et λ' sont nécessairement proportionnelles, contrairement à l'hypothèse faite, d'où l'assertion. C.Q.F.D.

9. Cas où G est un groupe de Lie nilpotent. Soit G un groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe; on notera $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathscr{G}'$ le dual de $\mathscr{G}$, L l'application réciproque de l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G, $\mathscr{G}^{(1)} = [\mathscr{G}, \mathscr{G}]$, et $\mathscr{G}^{(2)} = [\mathscr{G}, \mathscr{G}^{(1)}]$; enfin, soit $\tilde{\mathscr{G}}' = \{\lambda \in \mathscr{G}' / \lambda(\mathscr{G}^{(1)}) \neq (0)$ et $\lambda(\mathscr{G}^{(2)}) = (0)\}$.

Notons que pour un élélement α dans $\tilde{\mathscr{G}}'$ on a: $\mathscr{G}^{(1)} \subset \mathscr{G}(\alpha) \subset \mathscr{G}$, où $\mathscr{G}(\alpha) = \{U \in \mathscr{G} / \alpha([U, \mathscr{G}]) = 0\}$ est le noyau de la forme bilinéaire alternée:

$$B_\alpha: (U, V) \to \alpha([U, V]).$$

En outre, $\mathscr{G}/\mathscr{G}(\alpha)$ est un espace vectoriel réel de dimension paire sur lequel B_α induit une forme bilinéaire alternée $\tilde{B}_\alpha$ non dégénérée; le choix d'une base symplectique permet alors de définir sur $\mathscr{V}_\alpha$ une structure hilbertienne complexe. Notons p_α la projection canonique de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{V}_\alpha$.

LEMME 3. *$a_\alpha = p_\alpha \circ L$ est un homomorphisme surjectif de groupes de classe C^∞ de G sur $\mathscr{V}_\alpha$.*

Preuve. Notons d'abord que L est de classe C^∞; de même, p_α étant une application libéaire continue, est également de classe C^∞; par suite $p_\alpha \circ L$ est de classe C^∞; en outre p_α étant surjective et L bijective $p_\alpha \circ L$ est donc une application surjective de classe C^∞ de G sur $\mathscr{V}_\alpha$. Cela étant, soient $g_1 = \exp U_1$ et $g_2 = \exp U_2$ deux éléments de G, où $U_1 = L(g_1)$, $U_2 = L(g_2)$; d'après la formule de Campbell–Hausdorff: $g_1 \cdot g_2 = \exp U_1 \cdot \exp U_2 = \exp(U_1 + U_2 + \varphi(U_1, U_2))$ avec $\varphi(U_1, U_2) \in \mathscr{G}^{(1)}$; comme $\mathscr{G}^{(1)} \subset \mathscr{G}(\alpha)$, $p_\alpha(\mathscr{G}^{(1)}) = (0)$ par suite:

$$\begin{aligned} p_\alpha \circ L(g_1 \cdot g_2) &= p_\alpha(U_1 + U_2 + \varphi(U_1, U_2)) = p_\alpha(U_1) + p_\alpha(U_2) \\ &= p_\alpha \circ L(g_1) + p_\alpha \circ L(g_2). \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Soit alors X une variété réelle de classe C^∞:

LEMME 4. *Pour tout élément g de $C_0^\infty(X, G)$, $p_\alpha \circ L \circ g$ est un élément de $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$. En outre l'application $g \to p_\alpha \circ L \circ g$ est un homomorphisme continu du groupe $C_0^\infty(X, G)$ dans $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$.*

Preuve. La seule assertion qui ne résulte pas trivialement du lemme 3, c'est-à-dire celle concernant la continuité de l'application $g \to p_\alpha \circ L \circ g$, découle d'un résultat général bien connu sur la topologie de la convergence uniforme C^∞ sur les compacts: soient U, V, W trois variétés réelles C^∞, et Φ un élément de $C^\infty(V, W)$; l'application $\Phi_*: C^\infty(U, V) \to C^\infty(U, W)$ définie par $\Phi_*(f) = f \circ \Phi$ est continue (Cf. [3], § XVII-2). C.Q.F.D.

Soit P_α une application linéaire continue de $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ dans $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$ ayant la propriété suivante: pour tout élément f de $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ et pour tout ouvert U de X tel que $f|_U = 0$ alors $P_\alpha[f]|_U = 0$. P_α est donc un opérateur différentiel linéaire du fibré vectoriel trivial $X \times \mathscr{V}_\alpha$ dans le fibré vectoriel trivial $X \times \boldsymbol{R}$; nous noterons $\Delta(X, \alpha)$ l'espace des opérateurs différentiels de $X \times \mathscr{V}_\alpha$ dans $X \times \boldsymbol{R}$ qui sont des applications linéaires continues de $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ dans $C_0^\infty(X, \boldsymbol{R})$ Soit alors $\mathscr{D}'_{\boldsymbol{R}}(X)$ l'espace des distributions sur X à valeurs réelles et T un élément de $\mathscr{D}'_{\boldsymbol{R}}(X)$; considérons alors l'application P_α^T de $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ dans $\boldsymbol{R}$ définie pour tout f dans $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ par:

$$\langle P_\alpha^T, f \rangle = \langle T, P_\alpha[f] \rangle.$$

On vérifie aisément que P_α^T est une forme linéaire réelle sur $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ dont la restriction à chaque sous-espace $C^\infty(K, \mathscr{V}_\alpha)$, K compact de X, est continue; un tel objet se comporte donc comme une distribution (en fait il est aisé de vérifier qu'un tel objet est l'équivalent de $\dim(\mathscr{V}_\alpha)$ distributions ordinaires sur X); on peut en particulier définir le support et l'ordre de P_α^T: P_α^T n'est autre qu'une $\mathscr{V}_\alpha$-distribution sur X.

Il résulte alors du lemme 4 et de l'étude ci-dessus que:

PROPOSITION 8. *Soit X une variété réelle C^∞, G un groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe, α un élément de $\mathscr{G}'$. A tout couple (T, P_α) de $\mathscr{D}'_{\mathbf{R}}(X) \times \Delta(X, \alpha)$ on peut associer un caractère unitaire continu χ^α_{T,P_α} de $C_0^\infty(X, G)$, ayant pour ordre l'ordre de P_α^T, tel que*

$$\chi^\alpha_{T,P_\alpha}(g) = e^{i\langle \overset{T}{P_\alpha}, p_\alpha\circ \mathrm{Log}\rangle} = e^{i\langle T, P_\alpha[p_\alpha\circ \mathrm{Log} g]\rangle}.$$

χ^α_{T,P_α} est donc une G-distribution ayant pour ordre celui de P_α^T.

Cela étant, rappelons que l'action de $\mathrm{Diff}(X)$ sur l'espace des opérateurs différentiels d'un fibré vectoriel E de base X dans un fibré vectoriel F de base X est donnée par: $(\varphi, P) \to \varphi\cdot P$ tel que, pour $\varphi \in \mathrm{Diff}(X)$:

$$(\varphi\cdot P)[\cdot] = P[\cdot\circ\varphi]\circ\varphi^{-1} \qquad ([3], \S\ 17\text{–}13\text{–}7).$$

Notons que si $P_\alpha \in \Delta(X, \alpha)$ et $\varphi \in \mathrm{Diff}(X)$, pour tout f dans $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ on a donc $(\varphi\cdot P_\alpha)[f] = P_\alpha[f\circ\varphi]\circ\varphi^{-1}$; on en déduit aisément que $\varphi\cdot P_\alpha$ est aussi dans $\Delta(X, \alpha)$.

PROPOSITION 9. *Soit $\varphi \in \mathrm{Diff}(X)$ et χ^α_{T,P_α} le caractère de $C_0^\infty(x, G)$ donné dans la proposition 8.*

On a l'égalité:

$$\varphi\cdot\chi^\alpha_{T,P_\alpha} = \chi^\alpha_{\varphi\cdot T, \varphi\cdot P_\alpha}.$$

Preuve. Pour tout élément φ de $\mathrm{Diff}(X)$, pour tout élément g de $C_0^\infty(X, G)$ on a:

$$\begin{aligned}\varphi\cdot\chi^\alpha_{T,P_\alpha}(g) &= \chi^\alpha_{T,P_\alpha}(g\circ\varphi) = e^{i\langle T, P_\alpha[p_\alpha\circ \mathrm{Log} g\circ\varphi]\rangle}\\ &= e^{i\langle T, P_\alpha[p_\alpha\circ \mathrm{Log} g\circ\varphi]\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\rangle} = e^{i\langle\varphi\cdot T, (\varphi\cdot P_\alpha)[p_\alpha\circ \mathrm{Log} g]\rangle} \qquad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Soit μ une mesure positive non atomique sur x, et notons $\mathscr{V}_\alpha^\mu$ la complétion de $C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$ pour le produit scalaire

$$(u, v)_\mu = \int_X (u(x), v(x))\, d\mu(x).$$

Soit alors pour $g \in C_0^\infty(X, G)$ défini sur $S\mathscr{V}_\alpha^\mu$, l'opérateur $U_\mu^\alpha(g)$ tel que pour tout $\mathrm{EXP}\, v \in S\mathscr{V}_\alpha^\mu$, $v \in C_0^\infty(X, \mathscr{V}_\alpha)$:

$$U_\mu^\alpha(g)\mathrm{EXP} v = e^{i\mu(\alpha\circ \mathrm{Log} g)}\cdot e^{-\frac{1}{2}\|p_\alpha\circ \mathrm{Log} g\|_\mu^2 - (v, p_\alpha\circ \mathrm{Log} g)_\mu}\cdot \mathrm{EXP}(v + p_\alpha\circ \mathrm{Log} g).$$

PROPOSITION 10. (a) *U_μ^α est une représentation unitaire irréductible continue de dimension infinie et d'ordre 0 de $C_0^\infty(X, G)$.*

(b) *$\chi^{\alpha}_{T,P_\alpha} \otimes U^{\alpha}_{\mu}$ est une représentation unitaire irréductible continue de dimension infinie et d'ordre l'ordre de la distribution P^T_α de $C^{\infty}_0(X, G)$.*

(c) *Soit $\Gamma^{\alpha}_{\mu,T,P_\alpha}$ la G-distribution classe de $\chi^{\alpha}_{T,P_\alpha} \otimes U^{\alpha}_{\mu}$; alors pour tout difféomorphisme φ de X:*

$$\varphi \cdot \Gamma^{\alpha}_{\mu,T,P_\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\varphi \cdot \mu, \varphi \cdot T, \varphi \cdot P_\alpha}.$$

Preuve. (a) U^{α}_{μ} n'est autre que le produit tensoriel continu de représentations de G associé au triplet $(I_\alpha, p_\alpha \circ L, c)$ où I_α est la représentation triviale de G dans $\mathscr{V}_\alpha$, $p_\alpha \circ L$ le morphisme surjectif de G dans $\mathscr{V}_\alpha$, et c l'application de G dans le groupe des nombres complexes unimodulaires définie par $c(\gamma) = \exp(\alpha \circ L(\gamma))$. U^{α}_{μ} est donc irréductible (cf. lemme 5 de [2] et théorème III–2 de [2]). Il en résulte en particulier que la classe de U^{α}_{μ} est une G-intégrale multiplicative relativement à μ.

(b) Résulte trivialement de (a) et de la proposition 8.

(c) Soit $\varphi \in \mathrm{Diff}(X)$:

$$\varphi \cdot (\chi^{\alpha}_{T,P_\alpha} \otimes U^{\alpha}_{\mu}) = \varphi \cdot \chi^{\alpha}_{T,P_\alpha} \otimes \varphi \cdot U^{\alpha}_{\mu};$$

d'après la proposition 9, $\varphi \cdot \chi^{\alpha}_{T,P_\alpha} = \chi^{\alpha}_{\varphi \cdot T, \varphi \cdot P_\alpha}$; d'après le lemme 2, $\varphi \cdot U^{\alpha}_{\mu}$ est équivalente à $U^{\alpha}_{\varphi \cdot \mu}$; par suite $\varphi \cdot (\chi^{\alpha}_{T,P_\alpha} \otimes U^{\alpha}_{\mu})$ est équivalente à $\chi^{\alpha}_{\varphi \cdot T, \varphi \cdot P_\alpha} \otimes U^{\alpha}_{\varphi \cdot \mu}$; par suite:

$$\varphi \cdot \Gamma^{\alpha}_{\mu,T,P_\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\varphi \cdot \mu, \varphi \cdot T, \varphi \cdot P_\alpha}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

References

[1] N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques*, fasc. des résultats, § 8–15, Hermann (1971).

[2] P. Delorme, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles; produits tensoriels continus de représentations*, Bull. Soc. Math. de France (1977).

[3] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tome III, Gauthier-Villars, Editeur (1971).

[4] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, *Représentations du groupe quaternionique sur un champ de fonctions localement compact*, Funkt. Analys., vol 2, n° 1 (1968).

[5] A. Guichardet, *Symmetric Hilbert spaces and related topics*. Lect. Notes in Math., n° 261, Springer-Verlag (1972).

[6] J. Marion, *Sur les représentations unitaires d'ordre k des groupes $C^{\infty}_0(X, G)$*, preprint, U.E.R. Marseille-Luminy (1978).

[7] J. Moser, *On the volume element on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965).

[8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann (1966).

[9] A. M. Vershik, I. M. Gel'fand, M. I. Graev, *Irreductible representations of the group G^X and cohomologies*, Funk. Ana. i Ego. Pril., vol. 8, n° 2 (1974).

Reçu par la Rédaction le 28.5.1979