Геометрические основы параллельных вычислений в системах компьютерного моделирования и автоматизированного проектирования

Е.В. Конопацкий [1]

[1] *Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, ул. Ильинская, 65, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

Аннотация

Предложена концепция разработки геометрического ядра САПР, основанного на инвариантах параллельного проецирования геометрических объектов на оси глобальной системы координат, которая объединяет в себе потенциал конструктивных методов геометрического моделирования, способных обеспечить распараллеливание геометрических построений по задачам (message passing), и математического аппарата «Точечное исчисление», способного реализовать распараллеливание по данным за счёт покоординатного расчёта (data parallel). Использование покоординатного расчёта точечных уравнений позволяет не только распараллелить вычисления по координатным осям, но и обеспечить согласованность вычислительных операций по потокам, что значительно уменьшает простой вычислений и оптимизирует работу центрального процессора для достижения максимального эффекта от использования параллельных вычислений. Чем больше размерность моделируемого геометрического объекта, тем больше он поддаётся распараллеливанию вычислительных потоков. Это приводит к тому, что время расчёта многомерной задачи становится величиной независимой от количества измерений. Все вычисления будут проходить параллельно и закончатся одновременно. Приведенный пример алгоритма параллельных вычислений для моделирования топографической поверхности демонстрирует возможности реализации предложенной концепции для определения непрерывных и дискретных геометрических объектов, аналитическое описание которых выполнено в точечном исчислении. В результате для построения одного 16-точечного отсека получено распределение параллельных вычислений на 12 потоков для 4-х направляющих линий и на 3 потока для образующей линии. В дальнейшем количество одновременно задействованных вычислительных потоков является величиной пропорциональной количеству 16-точечных отсеков и может быть дополнительно оптимизировано за счёт параллельного вычисления нескольких образующих линий. В приведенном примере все вычислительные потоки являются полностью сбалансированными по количеству вычислений, что в значительной мере минимизирует простой вычислений и оптимизирует работу процессора. Также предложенный подход к организации параллельных вычислений может быть эффективно использован для численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов, что совместно с разработкой моделей геометрических объектов в точечном исчислении создаёт замкнутый цикл цифровой продукции, который по аналогии с изогеометрическим методом исключает необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами.

Ключевые слова

Компьютерное моделирование, параллельные вычисления, точечное исчисление, инвариант параллельного проецирования, покоординатный расчёт, многомерная интерполяция, геометрический параллелизм, распараллеливание по задачам, распараллеливание по данным, вычислительный поток.

ГрафиКон 2022: 32-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-22 сентября 2022 г., Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия
EMAIL: e.v.konopatskiy@mail.ru (Е.В. Конопацкий)
ORCID: 0000-0003-4798-7458 (Е.В. Конопацкий)

Geometric Bases of Parallel Computing in Computer Modeling and Computer-Aided Design Systems

E.V. Konopatskiy [1]

[1] Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Ilyinskaya Street, 65, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

Abstract

The concept of developing a geometric CAD kernel based on the invariants of parallel projection of geometric objects on the axes of the global coordinate system, which combines the potential of constructive geometric modeling methods that can provide paralleling of geometric constructions by tasks (message passing), and the mathematical apparatus "Point calculus" capable of implementing data paralleling by means of subordinate calculations (data parallel) is proposed. Use of subordinate calculation of point equations allows not only to parallelize calculations along coordinate axes, but also to provide coherence of computational operations by threads, which significantly reduces downtime and optimizes the performance of CPU to achieve the maximum effect of parallel computations. The greater the dimensionality of the modeled geometric object, the more it lends itself to paralleling computational flows. This leads to the fact that the computation time of a multidimensional problem becomes a value independent of the number of measurements. All calculations will run in parallel and finish simultaneously. The example of parallel computational algorithm for topographic surface modeling demonstrates the possibilities of realization of the offered concept for definition of continuous and discrete geometrical objects, the analytical description of which is carried out in point-calculus. As a result, to build a single 16-point patches, the distribution of parallel computing on 12 threads for the 4 direction lines and 3 threads for the formative line is obtained. Further, the number of simultaneously involved computational threads is a value proportional to the number of 16-point patches and can be further optimized by calculating several forming lines in parallel. In the above example, all computational threads are fully balanced in the number of calculations, which greatly minimizes the downtime of calculations and optimizes the performance of the processor. Also the proposed approach to the organization of parallel computations can be effectively used for the numerical solution of differential equations using geometric interpolants, which together with the development of models of geometric objects in the point calculus creates a closed loop digital production, which by analogy with the isogeometric method eliminates the need to coordinate geometric information in the interaction between CAD and FEA systems.

Keywords

Computer modeling, parallel computing, point calculus, parallel projection invariant, coordinate calculation, multidimensional interpolation, geometrical parallelism, message passing, data parallel, computing thread.

1. Введение

За последние десятилетия развития компьютерной техники активное распространение получили многоядерные процессоры, которые могут параллельно выполнять несколько вычислительных операций. Это обеспечивает современным компьютерным системам значительный прирост производительности и в значительной мере экономит энергопотребление центрального процессора, что привело к их массовому внедрению для эффективного решения многих научно-технических задач в различных отраслях человеческой деятельности [1-6]. Вместе с тем возникает проблема разработки программного обеспечения, способного в полной мере реализовать потенциал многоядерных процессоров за счёт согласованного выполнения параллельных вычислений.

На текущий момент существует два основных подхода к реализации параллельных вычислений: распараллеливание по задачам (message passing) и распараллеливание по данным (data parallel). Распараллеливание по задачам подразумевает фрагментацию решаемой задачи на независимые подзадачи, каждую из которых можно решать отдельно. Одним из недостатков такого подхода является уникальность фрагментации каждой отдельной задачи. Кроме того, далеко не каждая задача может быть подвергнута фрагментации. Распараллеливание по данным является более универсальным подходом, не привязанным к решению конкретной задачи. Такой подход часто используется при решении задач численного моделирования, связанных с формирование многомерной сети точек, формирующих простые геометрические объекты. В математической физике такой подход к реализации параллельных вычислений получил название геометрический параллелизм [7-9].

Несмотря на большое количество исследований [10-13], одним из проблемных секторов внедрения многоядерных компьютерных систем остаётся компьютерная графика. К сожалению, существующие системы автоматизированного проектирования (САПР) и твердотельного моделирования не используют в полной мере многоядерные возможности современных процессоров. Например, на официальном сайте одного из флагманов САПР компании Autodesk имеется следующая информация: «Программы AutoCAD и AutoCAD for Mac поддерживают технологию многоядерных процессоров только в отдельных областях применения (2D-регенерация). Чтобы воспользоваться всеми преимуществами многоядерных процессоров, необходимо использовать многопоточное программное обеспечение. AutoCAD представляет собой приложение с однопотоковой обработкой». Одной из причин сложившейся ситуации является отсутствие поддержки параллельных вычислений на уровне геометрического ядра системы, ограниченного возможностями математического аппарата. Исходя из вышеизложенного разработка математического аппарата геометрического моделирования, способного обеспечить параллельные вычисления на уровне геометрического ядра является актуальной и востребованной научной задачей.

Вообще, вычислительные алгоритмы компьютерной графики, основанные на методах конструктивного геометрического моделирования, прекрасно поддаются распараллеливанию вычислений. Например, в работе [14] приводится пример структуры алгоритма решения задачи Аполлония, допускающей распараллеливание вычислений и их конвейерную организацию, который относится к распараллеливанию по задачам и предусматривает согласованное и единовременное построение нескольких геометрических объектов. Однако, в процессе проектирования нет острой необходимости единовременного построения разных геометрических объектов. Проектировщик, использующий САПР для построения 3-мерной модели, не будет одновременно строить несколько окружностей, прямых или других геометрических объектов. Он будет строить их по очереди, применяя инструменты САПР. Другое дело, что при построении самих геометрических объектов можно и нужно использовать параллельные вычисления. Это приводит к новой концепции разработки геометрического ядра САПР, основанного на эффективном использовании обоих подходов к реализации параллельных вычислений.

2. Геометрические основы параллельных вычислений

В качестве математического аппарата, способного обеспечить эффективную реализацию новой концепции разработки геометрического ядра САПР, предлагается использовать точечное исчисление (другое название БН-исчисление) [15-17] исходя из следующих соображений. Базовым методом точечного исчисления является метод проецирования геометрического объекта на оси глобальной системы координат, в отличие от начертательной геометрии, в основу которой положен метод проецирования пространственных геометрических объектов на плоскости проекций. Такой подход позволяет переходить от символьных точечных уравнений к системе однотипных параметрических уравнений. Геометрическая интерпретация такого перехода представляет собой параллельное проецирование пространственного геометрического объекта на оси глобальной системы координат. Аналитически этот процесс описывается систематической заменой точек на соответствующие их координаты. Эта операция получила название покоординатного расчёта. Вместе с тем покоординатный расчёт целесообразно выполнять тогда, когда получено итоговое точечное уравнение моделируемого геометрического объекта, что значительно сокращает время необходимых вычислений. Геометрическое моделирование в точечном исчислении осуществляется на основе геометрической схемы –

графического алгоритма построения геометрического объекта с последующим описанием в виде точечных уравнений и вычислительных алгоритмов на их основе. При этом каждой графической операции ставится в соответствие аналитическая операция. Это привело к разработке инструментов геометрического моделирования, инвариантных относительно параллельного проецирования, которые способны обеспечить покоординатный расчёт точечных уравнений [18]. Например, определение отрезка прямой в 3-мерном пространстве благодаря инвариантным свойствам параметра точечного исчисления, которым является простое отношение трёх точек прямой (рисунок 1), выглядит следующим образом:

$$M=(B-A)t+A \Leftrightarrow \begin{cases} x=(x_B-x_A)t+x_A \\ y=(y_B-y_A)t+y_A \\ z=(z_B-z_A)t+z_A \end{cases}.$$

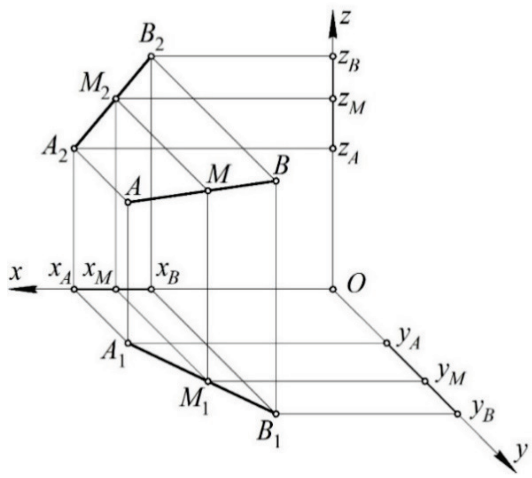

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация покоординатного расчёта для отрезка прямой в 3-мерном пространстве

Этот же подход справедлив и для многомерного пространства. Фактически размерность пространства определяет необходимое количество осей проекций и соответственно количество параметрических уравнений системы. Теоретически таких осей может быть бесконечное множество, как и однотипных параметрических уравнений, которые являются аналитическим представлением геометрической операции покоординатного расчёта.

Также справедливым остаётся проецирование не только на оси проекций, но и на любую прямую, что позволяет работать с подпространствами (локальными симплексами), а результат получать в глобальной системе координат (глобальном симплексе). Причём переход от локального симплекса к глобальному осуществляется автоматически путём замены точек на их точечные уравнения и не требует дополнительных вычислений.

В общем виде точечное уравнение любого геометрического объекта можно представить в виде суммы произведений точек симплекса на функции от текущих параметров:

$$M=\sum_{i=1}^{n} A_i p_i \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\sum_{i=1}^{n} x_{A_i} p_i \\ y_M=\sum_{i=1}^{n} y_{A_i} p_i \\ z_M=\sum_{i=1}^{n} z_{A_i} p_i \\ \ldots \end{cases}, \tag{1}$$

где M – текущая точка, которая своим движением заполняет пространство, формируя геометрический объект;

A_i – точки, определяющие исходный симплекс многомерного пространства;

$p_i = p_i(u, v, w, ...)$ – функции от текущих параметров $(u, v, w, ...)$, которые обеспечивают движение текущей точки M.

n – размерность пространства исходного симплекса.

Условием принадлежности текущей точки исходному симплексу является суммарное значение функций от текущих параметров равное 1: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Как видно из (1) все параметрические уравнения системы, полученные на основе точечного уравнения являются полностью однотипными. Меняются только координаты точек симплекса, которые относятся к исходным или промежуточным данным. Используя это свойство точечных уравнений, для определения геометрических объектов многомерного пространства будем выполнять параллельные вычисления для каждой отдельной оси проекций. Таким образом, получим распараллеливание вычислений по данным. И чем больше будет размерность пространства, в котором определяется геометрический объект, тем больше вычислительных потоков многоядерного процессора могут быть одновременно задействованы. Такому же распараллеливанию вычислений могут быть подвергнуты все вычислительные алгоритмы определения многомерных геометрических объектов, представленные в виде последовательности точечных уравнений.

Следует отметить, что при определении метрических характеристик геометрических объектов с помощью метрического оператора могут понадобиться ряд промежуточных вычислений, не предусматривающих покоординатного расчёта. Это приводит к невозможности использования распараллеливания вычислений по данным. Вместе с тем, доля таких вычислений несравненно мала по сравнению и ею можно пренебречь. Кроме того, такие вычисления можно распараллелить по задачам.

В соответствии с [19] основными параметрами эффективности параллельных вычислительных систем являются: время выполнения, ускорение и масштабируемость (эффективность). Максимальное ускорение S параллельного алгоритма определяется по закону Амдала:

$$S = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}},$$

где p – количество одинаковых процессоров;

α – доля последовательных вычислений.

С учётом $\alpha = 0$ для системы уравнений (1) получим линейное ускорение при $S = p$ и эффективность $E = \frac{S}{p} = 1$.

В исследованиях [20] отмечалось, что выигрыш по времени вычислений не пропорционален числу ядер процессора. Это связано с невозможностью равномерного распределения работы по всем ядрам. Возможна и другая проблема, если загрузка ядер процессора достаточно равномерная, но скорость обмена данными низкая, то основная часть времени будет тратиться впустую на ожидание информации, необходимой для дальнейшей работы данного ядра процессора. В предложенном подходе к распараллеливанию вычислений путём покоординатного расчёта все вычисления не просто проходят параллельно, чего можно было бы достичь с использованием обычных систем параметрических уравнений. Результатом покоординатного расчёта точечного исчисления является система однотипных параметрических уравнений, в которых отличаются лишь соответствующие координаты точек, а все остальные функции от параметров остаются неизменными, что следует из уравнения (1). Это приводит к тому, что количество математических операций, необходимых для вычисления координат точек, является одинаковым, обеспечивает согласованное выполнение вычислений и минимизирует простой ядер. Таким образом, предложенный подход повышает общую производительность многоядерной системы за счёт согласованного выполнения всех вычислительных операций.

3. Пример алгоритма параллельных вычислений для моделирования топографической поверхности

Необходимость решения многомерных задач, учитывая огромный объём вычислений, послужила источником генерации целого класса методов их минимизации. Использование параллельных вычислений позволяет эффективно решать многомерные задачи напрямую без применения таких методов. В качестве примера рассмотрим алгоритм параллельных вычислений для моделирования криволинейной топографической поверхности с помощью 16-точечных отсеков [21].

Вычислительный алгоритм моделирования 16-точечного отсека поверхности включает выполнение пяти точечных уравнений:

$$\begin{cases} M_{i,j}=\left(A_{i,j}\overline{u}+A_{i+3,j}u\right)\dfrac{2-9\overline{u}u}{2}+\dfrac{9\overline{u}u\left(A_{i+1,j}\left(2-3u\right)+A_{i+2,j}\left(3u-1\right)\right)}{2} \\ M_{i,j+1}=\left(A_{i,j+1}\overline{u}+A_{i+3,j+1}u\right)\dfrac{2-9\overline{u}u}{2}+\dfrac{9\overline{u}u\left(A_{i+1,j+1}\left(2-3u\right)+A_{i+2,j+1}\left(3u-1\right)\right)}{2} \\ M_{i,j+2}=\left(A_{i,j+2}\overline{u}+A_{i+3,j+2}u\right)\dfrac{2-9\overline{u}u}{2}+\dfrac{9\overline{u}u\left(A_{i+1,j+2}\left(2-3u\right)+A_{i+2,j+2}\left(3u-1\right)\right)}{2} \\ M_{i,j+3}=\left(A_{i,j+3}\overline{u}+A_{i+3,j+3}u\right)\dfrac{2-9\overline{u}u}{2}+\dfrac{9\overline{u}u\left(A_{i+1,j+3}\left(2-3u\right)+A_{i+2,j+3}\left(3u-1\right)\right)}{2} \\ M_{k}=\left(M_{i,j}\overline{v}+M_{i,j+3}v\right)\dfrac{2-9\overline{v}v}{2}+\dfrac{9\overline{v}v\left(M_{i,j+1}\left(2-3v\right)+M_{i,j+2}\left(3v-1\right)\right)}{2} \end{cases}, \qquad (2)$$

где $A_{i,j}...A_{i+3,j+3}$ – исходные 16 точек для построения отсека поверхности (рис. 2);

$M_{i,j}...M_{i,j+3}$ – текущие точки, которые определяют 4 направляющие линии 16-точечного отсека поверхности (рисунок 2);

M_k – текущая точка образующей линии 16-точечного отсека поверхности, проходящей через 4 направляющих линии (рисунок 2);

u и v – текущие параметры, которые изменяются от 0 до 1;

$\overline{u}=1-u$ и $\overline{v}=1-v$ – дополнение соответствующих параметров до 1;

i, j, k – счётчики соответствующих циклов.

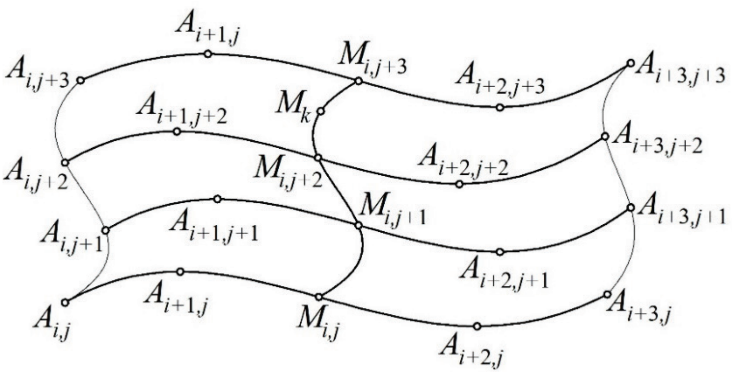

Рисунок 2 – Геометрическая схема моделирования 16-точечного отсека поверхности

Моделирование криволинейной топографической поверхности осуществляется за счёт интерполяции исходных точек $A_{i,j}...A_{i+3,j+3}$. Подразумевается, что для каждых 16-ти исходных точек строится отдельный отсек поверхности. В связи с чем, счётчики циклов i и j

организуются с шагом 4. Счётчик $k = k + 1$ предусмотрен для визуализации криволинейной топографической поверхности в виде последовательности 16-точечных отсеков.

Исходя из геометрического алгоритма определения 16-точечного отсека (рисунок 2) возможно параллельное вычисление 4-х направляющих линий отсека поверхности (распараллеливание по задачам). Вместе с тем, вычисление каждой из направляющих линий с помощью соответствующих 4-х точечных уравнений можно распределить на 3 потока за счёт покоординатного расчёта в 3-мерном пространстве (распараллеливание по данным). В результате получим распараллеливание вычислений на 12 потоков (рисунок 3). Для вычисления образующей линии использование распараллеливания по задачам невозможно, но возможно использование распараллеливание по данным на 3 потока за счёт покоординатного расчёта в 3-мерном пространстве.

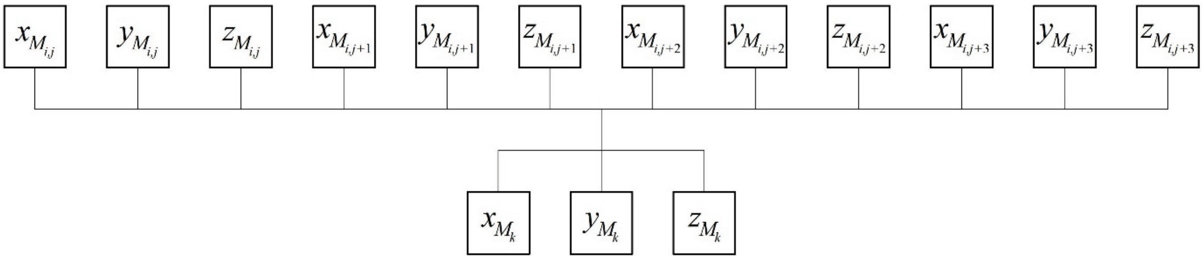

Рисунок 3 – Схема распределения параллельных вычислений для моделирования 16-точечного отсека поверхности

На рисунке 3 $x_{M_{i,j}}$, $y_{M_{i,j}}$ и $z_{M_{i,j}}$ определяются следующими параметрическими уравнениями, полученными из точечного уравнения (2):

$$\begin{cases} x_{M_{i,j}} = \left(x_{A_{i,j}} \bar{u} + x_{A_{i+3,j}} u \right) \dfrac{2 - 9\bar{u}u}{2} + \dfrac{9\bar{u}u \left(x_{A_{i+1,j}} (2 - 3u) + x_{A_{i+2,j}} (3u - 1) \right)}{2} \\ y_{M_{i,j}} = \left(y_{A_{i,j}} \bar{u} + y_{A_{i+3,j}} u \right) \dfrac{2 - 9\bar{u}u}{2} + \dfrac{9\bar{u}u \left(y_{A_{i+1,j}} (2 - 3u) + y_{A_{i+2,j}} (3u - 1) \right)}{2} \\ z_{M_{i,j}} = \left(z_{A_{i,j}} \bar{u} + x_{A_{i+3,j}} u \right) \dfrac{2 - 9\bar{u}u}{2} + \dfrac{9\bar{u}u \left(z_{A_{i+1,j}} (2 - 3u) + z_{A_{i+2,j}} (3u - 1) \right)}{2} \end{cases}.$$

Аналогичным образом посредством покоординатного расчёта в 3-мерном пространстве определяются остальные координаты текущих точек $M_{i,j+1} ... M_{i,j+3}$ и M_k.

Учитывая, что вся топографическая поверхность интерполируется однотипными 16-точечными отсеками, которые вычисляются последовательностью точечных уравнений (2), то количество одновременно задействованных вычислительных потоков является величиной пропорциональной количеству 16-точечных отсеков. Например, для построения топографической поверхности, состоящей из 100 отсеков, можно одновременно задействовать 1200 вычислительных потоков для определения множества направляющих линий и 300 вычислительных потоков для определения множества образующих. При этом все вычислительные потоки являются полностью сбалансированными по количеству вычислений, что в значительной мере минимизирует простой вычислений и оптимизирует работу процессора.

Предложенный метод распределения параллельных вычислений может быть эффективно использован для вычисления большого и сверхбольшого объёма данных. Например, расшифровке спутниковых снимков и моделирования на их основе рельефа местности с любой наперёд заданной точностью [22]. Также он прекрасно обобщается для построения любых кинематических поверхностей. И если распараллеливание вычислений направляющих линий зависит исключительно от геометрической схемы конструирования поверхности, то распараллеливание вычислений за счёт покоординатного расчёта доступно всегда для определения любых непрерывных и дискретных геометрических объектов в точечном исчислении.

Если исходить из определения максимального ускорения и эффективности распараллеливания вычислений, то видно, что предложенный алгоритм параллельных вычислений для определения топографической поверхности вообще не содержит последовательных вычислений ($\alpha = 0$). Из этих соображений можно сделать вывод о достижении максимального эффекта распределения вычислений, что не в полной мере соответствует действительности. Поскольку для выполнения вычислений множества направляющих линий используется 12 вычислительных потоков, а для построения образующей – всего 3. Т.е. на момент построения образующей линии 9 вычислительных потоков будут простаивать. Таким образом, приведенные выше формулы для определения максимального ускорения и эффективности распараллеливания вычислений требуют дополнительного усовершенствования с учётом как доступного количества вычислительных потоков, так и различного уровня их использования. Для уменьшения количества простаивающих вычислительных потоков можно предложить одновременное вычисление образующих для 4-х 16-точечных отсеков.

4. Заключение

Предложенная концепция разработки геометрического ядра САПР объединяет в себе потенциал конструктивных методов геометрического моделирования, способных обеспечить распараллеливание геометрических построений по задачам (message passing), и математического аппарата «Точечное исчисление», способного реализовать распараллеливание по данным за счёт покоординатного расчёта (data parallel). Её реализация за счёт эффективного использования вычислительного потенциала многоядерных процессоров позволит вывести системы автоматизированного проектирования и твердотельного моделирования [23, 24] на качественно новый уровень. Также предложенный подход к организации параллельных вычислений может быть эффективно использован для численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов [25, 26], что совместно с разработкой моделей геометрических объектов в точечном исчислении создаёт замкнутый цикл цифровой продукции, который по аналогии с изогеометрическим методом [27-29] исключает необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами.

Вместе с тем внедрение предложенного подхода не ограничивается САПР. Он может найти широкое применение в визуализации графических объектов на экране монитора и в виде полноценных объёмных изображений в 3-мерном пространстве по аналогии с голографическими [30-32]. Также он может быть эффективно использован при моделировании многофакторных процессов и явлений с помощью многомерной интерполяции и аппроксимации [33, 34], обработке больших и сверхбольших объёмов данных, а также при выполнении любых вычислительных операций, реализованных в точечном исчислении.

5. Список источников

[1] Разработка параллельного программного кода для расчетов задачи радиационной магнитной газодинамики и исследования динамики плазмы в канале КСПУ / В.А. Бахтин, Д.А. Захаров, А.Н. Козлов, В.С. Коновалов // Научный сервис в сети Интернет. 2019. № 21. С. 105-118. DOI: 10.20948/abrau-2019-80.

[2] Пекунов В.В. Предицирующие каналы в параллельном программировании: возможное применение в математическом моделировании процессов в сплошных средах // Программные системы и вычислительные методы. 2019. № 3. С. 37-48. DOI: 10.7256/2454-0714.2019.3.30393.

[3] Воробьев В.Е., Мурынин А.Б., Хачатрян К.С. Высокопроизводительная регистрация пространственных спектров морского волнения при оперативном космическом мониторинге обширных акваторий // Исследование Земли из космоса. 2020. № 2. С. 56-68. DOI: 10.31857/S0205961420020062.

[4] Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Implementation and performance of wave tomography algorithms on SIMD CPU and GPU computing platforms // Numerical Methods and Programming. 2021. Vol. 22. No 4. pp. 322-332. DOI: 10.26089/NumMet.v22r421.

[5] Шмаков И.А., Иордан В.И., Соколова И.Е. Компьютерное моделирование св-синтеза алюминида никеля методом молекулярной динамики в пакете LAMMPS с использованием параллельных вычислений // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2018. Т. 2. № 1. С. 48-54.

[6] Федотов В.Л. Использование архитектуры параллельных вычислений в подходе к построению самолетных комплексов систем управления // Навигация и управление летательными аппаратами. 2019. № 1(24). С. 12-20.

[7] Пекунов В.В. Улучшенная балансировка загрузки процессоров при численном решении задач механики сплошной среды, осложненных химической кинетикой // Кибернетика и программирование. 2021. № 1. С. 13-19. DOI: 10.25136/2644-5522.2021.1.35101.

[8] Параллельный алгоритм трассировки лучей для анализа поля излучения и построения обскурограмм излучающего газа / О.Г. Ольховская, В.А. Гасилов, А.М. Котельников, М.В. Якобовский // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 143. С. 1-16. DOI: 10.20948/prepr-2018-143.

[9] Development of parallel algorithms for intelligent transportation systems / B.N. Chetverushkin, A.A. Chechina, N.G. Churbanova, M.A. Trapeznikova // Mathematics. 2022. Vol. 10. No. 4. DOI: 10.3390/math10040643.

[10] Кучеров Д.П., Моргун К.О., Аникеенко Л.С. Средства управления параллельными вычислениями в задачах компьютерной графики // Наукоємні технології. 2018. Т. 38. № 2. С. 178-186. DOI: 10.18372/2310-5461.38.12833.

[11] Nizovskikh A.S., Koporushkin P.A., Tarasenko R.R. Problems of parametric approach in some modern CAD // Современные проблемы теории машин. 2016. No. 4-1. pp. 83-85.

[12] Абрамов О.В. Вычислительная среда для решения задач автоматизации проектирования на многопроцессорных системах // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2018. Т. 5. С. 28-30.

[13] A large-scale parallel hybrid grid generation technique for realistic complex geometry / Z. Zhao [et al.] // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2020. Vol. 92. No. 10. pp.1235-1255. DOI: 10.1002/fld.4825.

[14] Волошинов Д.В., Соломонов К.Н. Программно-аппаратная реализация конструктивных геометрических моделей // Труды Международной конференции по компьютерной графики и зрению "Графикон". 2020. № 30. С. 83-98. DOI: 10.51130/graphicon-2020-1-83-98.

[15] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бумага А.И. Точечное исчисление: учебно-методическое пособие. Макеевка: Донбасская национальная академия строительства и архитектуры. 2020. 244 с.

[16] Введение в математический аппарат БН-исчисления / А.И. Бумага, Е.В. Конопацкий, А.А. Крысько, О.А. Чернышева // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. 2017. Т. 1. С. 76-82.

[17] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В. Точечное исчисление. Историческая справка и основополагающие определения // Физико-техническая информатика (CPT2020): Материалы 8-ой Международной конференции, Пущино, Московская обл., 09–13 ноября 2020 года. Нижний Новгород: Автономная некоммерческая организация в области информационных технологий "Научно-исследовательский центр физико-технической информатики", 2020. С. 321-327. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fd755c0adb1d9.27038265.

[18] Конопацкий Е.В., Бездитный А.А. Точечные инструменты геометрического моделирования, инвариантные относительно параллельного проецирования // Геометрия и графика. 2022. Т.9. №4. С. 11-21. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21.

[19] Методы распараллеливания процессов вычисления больших объемов данных с использованием технологий параллельного программирования / Х.Н. Зайнидинов, О.У. Маллаев, Р.М. Зулунов, Ж. Нурмуродов // Автоматика и программная инженерия. 2019. № 4(30). С. 81-87.

[20] Дейкина А.С., Червякова М.В. Использование распределенных вычислений в пакете Maple для решения задачи о минимальном покрытии множества // Ученые заметки ТОГУ. 2019. Т. 10. № 2. С. 167-172.

[21] Конопацкий Е.В., Чернышева О.А., Кокарева Я.А. Моделирование криволинейного участка топографической поверхности на нерегулярной сети точек // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2018. № 7. С.17-22. DOI: 10.14489/vkit.2018.07.pp.017-022.

[22] Конопацкий Е.В., Чернышева О.А., Кокарева Я.А. Моделирование поверхности рельефа местности на основе спутниковых данных SRTM // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 6(180). С. 23-31. DOI: 10.14489/vkit.2019.06.pp.023-031.

[23] Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A. Solid modeling of geometric objects in point calculus // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021) Nizhny Novgorod, Russia, September 27-30, 2021. – Vol. 3027. – pp. 666-672. – DOI: 10.20948/graphicon-2021-3027-666-672.

[24] Principles of solid modelling in point calculus / E.V. Konopatskiy, A.A. Bezditnyi, M.V. Lagunova, A.V. Naidysh // IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series 1901 (2021) 012063. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012063.

[25] About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants / E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, O.A. Shevchuk, A.A. Bezditnyi // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 8th International Scientific Conference on Computing in Physics and Technology (CPT 2020) Moscow, November 9-13, 2020. Vol. 2763. pp. 213-219. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.

[26] Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Shevchuk O.A. Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 30th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision, (GraphiCon 2020) Saint Petersburg, Russia, September 22-25, 2020. Vol. 2744. DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.

[27] Изо-геометрический метод расчета как альтернатива стандартному методу конечных элементов / А.И. Исрафилова, В. Кутрунов, М. Гарсия, М. Калиске // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2019. № 9(84). С. 7-21. DOI: 10.18720/CUBS.84.1.

[28] An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells / L. Leonetti, F. Liguori, D. Magisano, G. Garcea // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018. Vol. 331. pp. 159-183. DOI: 10.1016/j.cma.2017.11.025.

[29] Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M. A new doubly-curved shell element for the free vibrations of arbitrarily shaped laminated structures based on weak formulation isogeometric analysis // Composite Structures. 2017. Vol. 171. pp. 429-461. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.03.055.

[30] Chen N., Wang C., Heidrich W. Holographic 3D particle imaging with model-based deep network. IEEE Transactions on Computational Imaging. 2021. Vol. 7. pp. 288-296. DOI: 10.1109/TCI.2021.3063870.

[31] Mixed reality and 3D printed models for planning and execution of face transplantation / K. Cho [et al.] // Annals of Surgery. 2021. Vol. 274. No. 6. pp. E1238-E1246. DOI: 10.1097/SLA.0000000000003794.

[32] Bolognesi C.M., Teruggi S., Fiorillo F. Holographic visualization and management of big point cloud. Paper presented at the International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences - ISPRS Archives. 2021. Vol. 46. Chap. M-1-2021. pp. 71-78. DOI: 10.5194/isprs-Archives-XLVI-M-1-2021-71-2021.

[33] Конопацкий Е.В. Подход к построению геометрических моделей многофакторных процессов и явлений многомерной интерполяции // Программная инженерия. 2019. Т. 10. № 2. С. 77-86. DOI: 10.17587/prin.10.77-86.

[34] Конопацкий Е.В., Ротков С.И. Аппроксимация геометрических объектов многомерного пространства с помощью дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки // Труды Международной конференции по компьютерной графики и зрению "Графикон". 2019. №29. С. 191-195. DOI: 10.30987/graphicon-2019-1-191-195.