

Gesammelte

**Mathematische Abhandlungen.**

Gesammelte  
Mathematische Abhandlungen

von

H. A. Schwarz.

Erster Band.

Mit 67 Textfiguren und 4 Figurentafeln.



Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1890.

ISBN 978-3-642-50356-6      ISBN 978-3-642-50665-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-50665-9

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1890

Herrn Geheimen Regierungs - Rath, Professor

# Ernst Eduard Kummer

zum 29. Januar 1890

in Verehrung und Dankbarkeit

zugeeignet.

## Vorwort zum ersten Bande.

Geordnet nach der Zeitfolge ihrer ersten Veröffentlichung sind in dem vorliegenden Bande diejenigen in den Jahren 1865—1887 veröffentlichten wissenschaftlichen Abhandlungen des Unterzeichneten in neuem Abdrucke vereinigt worden, welche auf die Flächen kleinsten Flächeninhalts Bezug haben.

Der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin spreche ich für die Liberalität, mit welcher dieselbe den Abdruck der im Jahre 1871 auf Kosten der Königlichen Akademie gedruckten Preisschrift „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche“ mir gestattet hat, meinen ehrerbietigsten Dank aus.

Vor dem Abdrucke sind alle Abhandlungen einer wiederholten, sorgfältigen Durchsicht, beziehungsweise Bearbeitung unterzogen worden: überall da, wo es wünschenswerth erschien, einen Ausdruck, der mich weniger befriedigte, durch einen anderen zu ersetzen, bin ich bemüht gewesen, einen besseren an die Stelle zu setzen. Ausser wenigen Druckfehlern habe ich nur eine kleine Zahl von Ungenauigkeiten zu berichtigen gefunden.

Die bei Gelegenheit des Neudruckes zu einzelnen Abhandlungen hinzugefügten Anmerkungen und Zusätze sind am Schlusse des Bandes vereinigt. Da im Texte der Abhandlungen auf diese Zusätze nicht verwiesen werden konnte, erlaube ich mir, an dieser Stelle auf dieselben hinzuweisen.

Die verehrliche Verlagsbuchhandlung ist allen meinen, die äussere Ausstattung betreffenden Wünschen mit der grössten Bereitwilligkeit

entgegengekommen. Die diesem Bande beigegebenen vier lithographischen Figurentafeln verpflichten mich zu besonderem Danke.

Bei der Correctur der einzelnen Druckbogen dieses Bandes bin ich von Herrn Dr. Diestel in dankenswerther Weise unterstützt worden.

Göttingen, im Januar 1890.

H. A. S c h w a r z.

## Inhaltsverzeichniss zum ersten Bande.

---

	Seite
Ueber die Minimalfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes räumliches Vierseit gegeben ist. (Im April 1865 von Herrn Kummer der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin mitgetheilt. Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1865, Seite 149—153.) . . . . .	1
Zu dieser Abhandlung gehören die Figurentafeln 1, 2 und 3.	
Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. (Eine von der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 4. Juli 1867 gekrönte Preisschrift. Nebst einem Nachtrage und einem Anhang.) . . . . .	6
Erster Theil. . . . .	8
Zweiter Theil. . . . .	34
Übergang zu den elliptischen Functionen. . . . .	50
Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Nachtrag. . . . .	92
Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Anhang, enthaltend Anmerkungen und Zusätze. . . . .	109
Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen. (Im Januar 1872 von Herrn Kummer der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin mitgetheilt. Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1872, Seite 3—27.) . . . . .	126
Zu dieser Abhandlung gehört die Figurentafel 4.	
Ueber ein Modell eines Minimalflächenstückes, welches längs seiner Begrenzung vier gegebene Ebenen rechtwinklig trifft. (Eine im Februar 1872 von Herrn Kummer der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin gemachte Mittheilung. Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1872, Seite 122—123.) . . . . .	149
Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besonderen. (Im October 1872 von Herrn Kummer der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin mitgetheilt. Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1872, Seite 718—735.)	151
Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. (Zuerst im XIX. Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Seite 243—271, veröffentlicht. Ein zweiter, einige Aenderungen enthaltender Abdruck erschien im 80. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik, Seite 280—300.) . . . . .	168

	Seite
Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden. (Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 80, Seite 301—314.) . . . . .	190
Ueber einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten. (Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 87, Seite 146—160.) . . . . .	205
Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface. (Lu le 9. avril 1883. Comptes rendus des seances de l'Académie des sciences, Tome XCVI. p. 1011.) . . . . .	221
Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. Festschrift zum siebenzigsten Geburtstag des Herrn Karl Weierstrass. (Acta societatis scientiarum Fennicae, tomus XV. p. 315—362.)	223
<i>Erster Theil.</i> Ueber Minimalflächenstücke, welche bei unverändert gelassener Begrenzungslinie ein Minimum des Flächeninhalts besitzen.	
Art. 1. Zwei unendlich benachbarte Minimalflächenstücke . . . . .	224
Art. 2. Betrachtung einer Schaar von Minimalflächenstücken. Herleitung des Fundamentalsatzes . . . . .	225
Art. 3. Einführung einer neuen Bedingung. Erweiterung des Geltungsbereiches des Fundamentalsatzes . . . . .	227
Art. 4. Andere Begründung des Fundamentalsatzes . . . . .	228
Art. 5. Analytischer Beweis des Fundamentalsatzes . . . . .	229
Art. 6. Anwendung des Fundamentalsatzes . . . . .	234
Art. 7. Geometrische Deutung einiger eine Schaar von Minimalflächenstücken betreffender Formeln . . . . .	236
Art. 8. Unterscheidung dreier Fälle. Tragweite der durch die Betrachtung derselben zu treffenden Entscheidung . . . . .	239
<i>Zweiter Theil.</i> Integration der partiellen Differentialgleichung $\mathcal{L}u + p \cdot u = 0$ unter vorgeschriebenen Bedingungen.	
Art. 9. Stellung der Aufgabe . . . . .	241
Art. 10. Einige als bekannt vorauszusetzende Hilfssätze . . . . .	242
Art. 11. Voraussetzung der Existenz einer für den Bereich T den gestellten Bedingungen genügenden Function $w$ , welche für keine Stelle dieses Bereiches den Werth Null annimmt. Folgerungen . . . . .	243
Art. 12. Weitere Folgerungen . . . . .	245
Art. 13. Einführung der Specialisirung $w_0 = 1$ . . . . .	246
Art. 14. Erklärung der Grössen $W_{m,n}$ , $V_{m,n}$ , $W_n$ . . . . .	247
Art. 15. Einführung der Constante $c$ . . . . .	251
Art. 16. Einführung der Grösse $Q$ . . . . .	252
Art. 17. Untersuchung der Convergenz der Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \dots$ . . . . .	253
Art. 18. Untersuchung der Convergenz einiger unendlicher Producte . . . . .	254
Art. 19. Einführung der Functionen $w_n$ und der Grössen $\mathfrak{B}_n$ . Der Fall $c = 1$ . . . . .	256
Art. 20. Die Constante $\frac{1}{c}$ als Minimum. Folgerungen . . . . .	257
Art. 21. Stetige Änderung des Werthes der Constante $c$ bei stetiger Verkleinerung des Bereiches T . . . . .	260
Art. 22. Anwendung auf den Fall $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$ . . . . .	262



	Seite
<i>Schluss.</i> Einige den Grenzfall betreffende Bemerkungen.	
Art. 23. Den Bedingungen des Grenzfalles entsprechende Minimalflächenstücke, für welche die Eigenschaft des Minimums im gewöhnlichen Sinne zu bestehen aufhört. Verallgemeinerung des von Herrn LINDELÖF zuerst untersuchten speciellen Falles . . . . .	265
Art. 24. Den Bedingungen des Grenzfalles entsprechende Minimalflächenstücke, für welche die Eigenschaft des Minimums uneingeschränkt bestehen bleibt . . . . .	268
Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke. (Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt am 2. Juli 1887. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Band 34.) . . . . .	270
1. Analytische Bestimmung der Minimalflächenstücke $M^*$ . . . . .	277
2. Einführung der Grössen $\mathfrak{B}'$ , $\mathfrak{B}''$ , $\mathfrak{S}$ , $\mathfrak{I}$ , $\mathfrak{R}'$ , $\mathfrak{R}''$ . . . . .	287
3. Untersuchung der durch die Functionen $U$ , $V$ , $W$ vermittelten conformen Abbildungen des Gebietes $S$ . . . . .	291
4. Herleitung eines Hilfssatzes . . . . .	293
5. Anwendung des Hilfssatzes. Erklärung des Bereiches $Q^*$ . . . . .	295
6. Untersuchung der Gestalt des Aequators . . . . .	297
7. Einführung der den Minimalflächenstücken $M^*(R)$ ähnlichen Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*(R)$ . . . . .	300
8. Untersuchung des Ganges des Quotienten $\frac{H}{L}$ in dem Intervalle $R_0 < R < 1$ . Flächenstücke kleinsten Flächeninhalts . . . . .	304
9. Untersuchung des Ganges des Quotienten $\frac{H}{L}$ in dem Intervalle $0 < R < R_0$	309
10. Uebergang zur Grenze $n = \infty$ . . . . .	314
<b>Anmerkungen und Zusätze zum ersten Bande . . . . .</b>	<b>317—338</b>

