

Introduction.

Soit G un groupe de Coxeter fini, soit u une involution de G et soit G_u le centralisateur de u dans G . Dans certains cas, par exemple quand u est une réflexion, le groupe G_u est engendré par des réflexions de G ; en particulier, c'est un groupe de Coxeter. Il n'en est pas de même en général, mais c'est "presque" le cas. Notre but est de préciser cet énoncé (cf. th.1.1 ci-dessous), et de décrire explicitement certains invariants de G_u , pour chaque type $A_n, B_n, \dots, I_2(m)$.

1. Premiers énoncés.

Rappelons d'abord quelques notations et quelques définitions.

Soit V un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie, et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions, i.e. par des éléments d'ordre 2 fixant un hyperplan. Nous dirons, comme dans [Se 22], 1.1, que le couple (V, G) est un *couple de Coxeter*. Sauf mention expresse du contraire (cf. §4 ou 5), on supposera que V est *réduit*, c'est-à-dire ne contient aucun élément $\neq 0$ fixé par G ; cela revient à demander que $\dim V$ est égal au rang $\mathrm{rg}(G)$ de G .

Soit H un sous-groupe de G . On dit que H est un *\mathcal{C} -sous-groupe* de G s'il est engendré par des réflexions, i.e. si (V, H) est un couple de Coxeter. On dit que H est *parabolique* s'il existe une partie X de V telle que H soit l'ensemble des éléments de G qui fixent X ; on sait que cela entraîne que H est un \mathcal{C} -sous-groupe, cf. [Se 22], 1.5.

Soit u une involution de G , autrement dit un élément de G de carré 1. On note V_u^+ le sous-espace vectoriel de V fixé par u , et V_u^- celui fixé par $-u$. On a $V = V_u^+ \oplus V_u^-$. Le *degré* de u est défini par $\mathrm{deg}(u) = \dim V_u^-$; c'est la multiplicité de -1 comme valeur propre de u ; on le note souvent d .

Théorème 1.1. *Le centralisateur G_u de u dans G est engendré par des involutions de degré 1 et 2.*

Dans le cas particulier où u est une involution de degré maximal, c'est le cor.3.18 de [Se 22].

Soit G_u^1 le sous-groupe de G_u engendré par les éléments de G_u qui sont des réflexions de G . C'est le plus grand \mathcal{C} -sous-groupe de G_u . Il est normal dans G_u . Notons Γ_u le quotient G_u/G_u^1 ; ce groupe précise dans quelle mesure G_u n'est pas engendré par des réflexions. Le th.1.1 équivaut à dire que Γ_u est engendré par les images des involutions de degré 2 de G_u .

Réduction au cas irréductible.

Supposons que V soit réduit. On sait (cf. [Bo 68], V3.7) que V se décompose de façon unique en une somme directe $V = \oplus V_i$ de représentations irréductibles

non triviales de G , et que $G = \prod G_i$, avec $G_i \subset \text{GL}(V_i)$. Les G_i sont les *composantes irréductibles* de G . On a $G_u = \prod G_{u_i}$, où les u_i sont les composantes de u . Il y a des décompositions analogues pour G_u^1, Γ_u , etc. En particulier, il suffit de démontrer le th.1.1 lorsque G est irréductible, donc de l'un des types A, B, \dots, I ; c'est ce que nous ferons dans la suite.

Théorème 1.2. (a) *Si G est irréductible non de type D_n ($n \geq 5$), le groupe Γ_u est isomorphe à un groupe symétrique.*

(b) *Si G est irréductible de type D_n , Γ_u est isomorphe, soit à un groupe symétrique, soit au produit d'un groupe symétrique par un groupe d'ordre 2.*

[Par exemple, quand G est de type D_5 , il existe une involution u de G telle que Γ_u soit abélien élémentaire de type $(2, 2)$.]

Notation. Dans le cas (a), si $\Gamma_u \neq 1$, nous noterons γ_u l'unique entier $r > 1$ tel que $\Gamma_u \simeq \text{Sym}_r$. Lorsque $\Gamma_u = 1$, nous écrirons tantôt $\gamma_u = 1$ et tantôt $\gamma_u = 0$, suivant le contexte.

Les théorèmes 1.1 et 1.2 seront démontrés dans les §§3-12 par une analyse cas par cas, qui donnera la structure de Γ_u , ainsi que celle des groupes de Coxeter $G_u^+, \tilde{G}_u^+, G_u^-, \tilde{G}_u^-$ définis ci-dessous. Nous verrons également que l'on peut choisir l'isomorphisme $\Gamma_u \rightarrow \text{Sym}_{\gamma_u}$ du théorème 1.2 (a) de telle sorte que toute transposition de Sym_{γ_u} soit l'image d'une involution de degré 2 de G_u ; il y a un énoncé analogue dans le cas du type D_n , cf. §6.

2. Les groupes $G_u^+, G_u^-, \tilde{G}_u^+, \tilde{G}_u^-$.

L'action de G_u sur V respecte la décomposition $V = V_u^+ \oplus V_u^-$. On a donc $G_u \subset \text{GL}(V_u^+) \times \text{GL}(V_u^-)$, ce qui permet de définir les quatre groupes suivants :

$$\begin{aligned} G_u^+ &= G_u \cap \text{GL}(V_u^+), \\ G_u^- &= G_u \cap \text{GL}(V_u^-), \\ \tilde{G}_u^+ &= \text{image de } G_u \text{ dans } \text{GL}(V_u^+) \text{ par la première projection,} \\ \tilde{G}_u^- &= \text{image de } G_u \text{ dans } \text{GL}(V_u^-) \text{ par la seconde projection.} \end{aligned}$$

Noter que u appartient à G_u^- ; il s'identifie à l'élément -1 de $\text{GL}(V_u^-)$.

On a les inclusions :

$$G_u^+ \subset \tilde{G}_u^+, \quad G_u^- \subset \tilde{G}_u^- \quad \text{et} \quad G_u^+ \times G_u^- \subset G_u \subset \tilde{G}_u^+ \times \tilde{G}_u^-.$$

Proposition 2.1 (a) G_u^+ et G_u^- sont des sous-groupes paraboliques de G .

(b) $G_u^1 = G_u^+ \times G_u^-$.

(c) G_u^- est engendré par les cubes de G d'extrémité u .

[Rappelons que G_u^1 est le sous-groupe de G_u engendré par les réflexions de G qui commutent à u , cf. §1. Un *cube* C de G est un sous-groupe abélien engendré par des réflexions; on appelle *extrémité* de C l'unique élément de C de degré maximum, cf. [Se 22], 4.1.]

Démonstration.

Les groupes G_u^+ et G_u^- sont des fixateurs de parties de V ; cela entraîne que ce sont des *sous-groupes paraboliques* ; d'où (a). En particulier, ils sont engendrés par des réflexions. D'après la définition de G_u^1 , on a donc $G_u^1 \supset G_u^+ \times G_u^-$.

D'autre part, si $s \in G_u$ est une réflexion de G , on a $s \in G_u^+$ si $\deg(us) = \deg(u)+1$ et $s \in G_u^-$ si $\deg(us) = \deg(u)-1$; le groupe G_u^+ est donc engendré par les réflexions du premier type, et G_u^- par celles du second type. Toute réflexion de G_u est donc contenue dans $G_u^+ \times G_u^-$; comme G_u^1 est engendré par de telles réflexions, cela démontre l'inclusion $G_u^1 \subset G_u^+ \times G_u^-$. D'où (b).

Si C est un cube de G d'extrémité u , les réflexions appartenant à C sont du second type, donc appartiennent à G_u^- , d'où $C \subset G_u^-$. Inversement, toute réflexion de G_u^- appartient à un cube maximal de G_u^- ; un tel cube a pour extrémité u , puisque u est l'élément “ -1 ” de G_u^- . D'où (c).

Corollaire 2.2. (V_u^+, G_u^+) et (V_u^-, G_u^-) sont des couples de Coxeter.

Démonstration. D'après (a), (V, G_u^+) est un couple de Coxeter. Comme $V = V_u^+ \oplus V_u^-$ et que G_u^+ opère trivialement sur V_u^- , il en est de même du couple (V_u^+, G_u^+) . Le cas du couple (V_u^-, G_u^-) se traite de manière analogue.

Proposition 2.3. ([FV 05], prop.7 et [DPR 13], prop.2.2) *Le normalisateur de G_u^- dans G est égal à G_u .*

Démonstration. Il est clair que G_u^- est normal dans G_u . Inversement, soit g un élément de G normalisant G_u^- . Comme u est l'unique involution de G_u^- de degré $\deg(u)$, elle est fixée par l'automorphisme intérieur défini par g , d'où $g \in G_u$.

Remarque. L'énoncé analogue avec G_u^- remplacé par G_u^+ n'est pas toujours vrai ; il se peut même que $G_u^+ = 1$ et $G_u \neq G$; c'est le cas si G est de type A_2 et u est une réflexion.

Proposition 2.4. *La suite exacte $1 \rightarrow G_u^1 \rightarrow G_u \rightarrow \Gamma_u \rightarrow 1$ est scindée.*

(Autrement dit, il existe un sous-groupe X_u de G_u tel que $G_u = G_u^1 \cdot X_u$ et $G_u^1 \cap X_u = 1$.)

Démonstration. Cela résulte du lemme 2 de [Ho 80], appliqué au groupe de Coxeter G_u^1 . De plus, la démonstration de [Ho 80] donne une méthode pour construire un groupe X_u : on choisit une chambre \mathcal{C} de G_u^1 dans V , et on lui associe le sous-groupe $H_{\mathcal{C}}$ de $\text{GL}(V)$ formé des éléments qui normalisent G^1 et qui stabilisent \mathcal{C} . Le normalisateur de G_u^1 dans $\text{GL}(V)$ est le produit semi-direct $G_u^1 \cdot H_{\mathcal{C}}$. On prend alors $X_u = G_u^1 \cap H_{\mathcal{C}}$.

Passons maintenant aux groupes \tilde{G}_u^+ et \tilde{G}_u^- définis plus haut :

Proposition 2.5. *On a des suites exactes :*

$$(a) \quad 1 \rightarrow G_u^- \rightarrow G_u \rightarrow \tilde{G}_u^+ \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 \rightarrow G_u^+ \rightarrow G_u \rightarrow \tilde{G}_u^- \rightarrow 1.$$

$$(b) \quad 1 \rightarrow G_u^- \rightarrow \tilde{G}_u^- \rightarrow \Gamma_u \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 \rightarrow G_u^+ \rightarrow \tilde{G}_u^+ \rightarrow \Gamma_u \rightarrow 1.$$

Les suites (b) sont scindées.

Démonstration. Le noyau de $G_u \rightarrow \text{GL}(V_u^+)$ est G_u^- ; cela entraîne la première suite exacte de (a) ; la seconde se prouve de la même manière.

D'après (a) on peut identifier \tilde{G}_u^- à G_u/G_u^+ . L'homomorphisme $G_u \rightarrow \Gamma_u$ est trivial sur G_u^+ . Il définit donc un homomorphisme $\tilde{G}_u^- \rightarrow \Gamma_u$ qui est surjectif, et dont le noyau est $G_u^1/G_u^+ = G_u^-$, cf. prop. 2.1 (b). Cela donne la première des suites exactes (b) ; la seconde se prouve de manière analogue.

Le fait que ces suites soient scindées résulte du fait analogue pour la suite exacte $1 \rightarrow G_u^+ \times G_u^- \rightarrow G_u \rightarrow \Gamma_u \rightarrow 1$, cf. prop.2.4.

Remarque. Les constructions ci-dessus sont des cas particuliers de celles du *lemme de Goursat* ([Se 16], 1.4) qui décrit la structure d'un sous-groupe d'un produit de deux groupes dont les projections sur les deux facteurs sont surjectives. Ici les deux groupes sont \tilde{G}_u^+ et \tilde{G}_u^- ; le sous-groupe est G_u .

Corollaire 2.6. *Dans la suite d'inclusions $G_u^+ \times G_u^- \subset G_u \subset \tilde{G}_u^+ \times \tilde{G}_u^-$, chaque groupe est d'indice $|\Gamma_u|$ dans le suivant.*

Cela résulte des suites exactes (b).

Remarque. Le plus petit des trois groupes du cor.2.6 est normal dans les deux autres. Par contre le groupe du milieu G_u est normal dans le grand seulement si Γ_u est abélien. En effet, après passage au quotient par le petit groupe, on obtient l'inclusion diagonale $1 \subset \Gamma_u \subset \Gamma_u \times \Gamma_u$. Or la diagonale n'est un sous-groupe normal que si le groupe est abélien.

Revenons à la première suite exacte (b) : $1 \rightarrow G_u^- \rightarrow \tilde{G}_u^- \rightarrow \Gamma_u \rightarrow 1$. L'action de \tilde{G}_u^- sur G_u^- par conjugaison donne un homomorphisme $\tilde{G}_u^- \rightarrow \text{Aut}(G_u^-)$. L'image de cet homomorphisme est contenue dans le sous-groupe $\text{Aut}_c(G_u^-)$ de $\text{Aut}(G_u^-)$ formé des automorphismes qui transforment réflexions en réflexions. Notons $\text{Out}_c(G_u^-)$ le quotient de $\text{Aut}_c(G_u^-)$ par le sous-groupe des automorphismes intérieurs¹. Par passage au quotient, on obtient un homomorphisme de $\Gamma_u = \tilde{G}_u^-/G_u^-$ dans $\text{Out}_c(G_u^-)$.

Proposition 2.7. *L'homomorphisme $\Gamma_u \rightarrow \text{Out}_c(G_u^-)$ est injectif.*

Démonstration. On utilisera le lemme suivant :

Lemme 2.8. *Soit (E, W) un couple de Coxeter tel que $-1 \in W$. Tout élément d'ordre fini de $\text{GL}(E)$ qui centralise W appartient à W .*

Démonstration du lemme. Soit $-1 = \prod_i s_i$ une décomposition de -1 en produit de réflexions de W deux à deux distinctes et commutant entre elles. Soit D_i la droite de E sur laquelle s_i opère par -1 . On a $E = \bigoplus_i D_i$. Soit $g \in \text{GL}(E)$ d'ordre fini et centralisant W . Puisque g commute aux s_i , il stabilise les D_i . Sa restriction à chaque D_i est une homothétie $x \mapsto \varepsilon_i x$, avec $\varepsilon_i \in \mathbf{R}^\times$ d'ordre fini, donc égal à 1 ou -1 . Il en résulte que g est égal au produit des s_i tels que $\varepsilon_i = -1$. En particulier, on a $g \in W$.

Fin de la démonstration de la prop.2.7. Soit γ un élément de $\Gamma_u \rightarrow \text{Out}_c(G_u^-)$, et soit g un représentant de γ dans \tilde{G}_u^- . Supposons que l'image de γ dans $\text{Out}_c(G_u^-)$ soit 1. Cela signifie qu'il existe $z \in G_u^-$ tel que $gxg^{-1} = zxz^{-1}$ pour

1. Autre interprétation de $\text{Out}_c(G_u^-)$: c'est le groupe des automorphismes du graphe de Coxeter de G_u^- .

tout $x \in G_u^-$. L'élément $z^{-1}g$ centralise G_u^- . D'après le lemme 2.8, appliqué au couple (V_u^-, G_u^-) , on a $z^{-1}g \in G_u^-$, d'où $g \in G_u^-$, i.e. $\gamma = 1$.

Remarque. On définit de façon analogue un homomorphisme $\Gamma_u \rightarrow \text{Out}_c(G_u^+)$. Cet homomorphisme est injectif si $-1 \in G$: cela résulte de la prop.2.7, appliquée à $-u$; si $-1 \notin G$, il peut ne pas être injectif.

Théorème 2.9. *Si le théorème 1.1 est vrai pour (V, G) , les couples (V_u^+, \tilde{G}_u^+) et (V_u^-, \tilde{G}_u^-) sont des couples de Coxeter.*

En particulier, \tilde{G}_u^+ et \tilde{G}_u^- sont des groupes de Coxeter.
(Cela répond positivement à une question posée dans [Se 22], 3.15.)

Démonstration.

Faisons la démonstration pour \tilde{G}_u^+ ; le cas de \tilde{G}_u^- est analogue. Soit H le sous-groupe de \tilde{G}_u^+ engendré par les V_u^+ -réflexions. Nous devons montrer que $H = \tilde{G}_u^+$. Comme ce dernier groupe est un quotient de G_u , le théorème 1.1 dit qu'il est engendré par les images dans $\text{GL}(V_u^+)$ des involutions de degré 1 ou 2 dans G . Si g est une involution de G_u , notons g^+ son image dans $\text{GL}(V_u^+)$, et g^- son image dans $\text{GL}(V_u^-)$. On a $\deg(g) = \deg(g^+) + \deg(g^-)$. Si $\deg(g) \leq 2$, on a, soit $\deg(g^+) \leq 1$, soit $\deg(g^-) = 0$. Dans le premier cas, g^+ est, soit 1, soit une réflexion dans $\text{GL}(V_u^+)$, donc appartient à H . Dans le second cas, on a $g^- = 1$, i.e. g fixe V_u^- , donc g^+ appartient à G_u^+ , qui est contenu dans H , on l'a vu. Cela prouve que $H = \tilde{G}_u^+$.

Remarque. Le théorème 2.9 était essentiellement connu, mais dans une formulation différente. On peut le déduire d'un théorème de R.B. Howlett ([Ho 80]) sur les normalisateurs de sous-groupes paraboliques, théorème qui est applicable à G_u^1 d'après la prop.2.3. Je dois cette remarque à G. Röhrle; c'est également lui qui m'a indiqué la prop.2.3.

La démonstration de [Ho 80], comme celle donnée ici, est une vérification cas par cas. Il serait intéressant d'avoir une démonstration directe.

§3. Détermination des groupes G_u^+ .

Les groupes G_u^+ s'obtiennent par une récurrence sur $\deg(u)$ qui permet de passer d'un groupe de Coxeter à un autre de rang inférieur. On se ramène ainsi au cas où u est une réflexion.

De façon plus précise :

Réduction au cas où u est une réflexion.

Proposition 3.1. *Soient v, w deux involutions de G , commutant entre elles et telles que $\deg(vw) = \deg(v) + \deg(w)$. Alors $G_{vw}^+ = (G_v^+)_w^+ = (G_w^+)_v^+$.*

Démonstration. Les hypothèses faites sur v, w équivalent à $V_{vw}^- = V_v^- \oplus V_w^-$. Un élément de G appartient à G_{vw}^+ si et seulement si il fixe V_v^- et V_w^- . D'où la proposition.

Corollaire 3.2. *Soit u une involution de degré d , et soient s_1, \dots, s_d des réflexions, commutant deux à deux, telles que $u = s_1 \cdots s_d$. Soit $G(i)$ ($i = 0, \dots, d$) la*

suite de sous-groupes de G définie par $G(0) = G$ et $G(i) = G(i-1)_{s_i}^+$. On a $G_u^+ = G(d)$.

Démonstration. Cela résulte de la prop. 3.1 en raisonnant par récurrence sur d .

Le cas où u est une réflexion et où G est cristallographique.

[Rappelons (cf.[Bo 68], VI.2.5) que G est dit *cristallographique* s'il stabilise un réseau de V ; cela équivaut à dire que G est le groupe de Weyl d'un système de racines de V .]

Supposons que G soit cristallographique et irréductible. Soit R un système de racines de V dont G est le groupe de Weyl, soit $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base de R et soit X le graphe de Dynkin correspondant (celui dont l'ensemble des sommets est S).

Soit $\alpha_0 = -\tilde{\alpha}$ l'opposée de la plus grande racine de R et soit $X_0 = X \cup \{\alpha_0\}$ le graphe de Dynkin complété (cf. [Bo 68], VI.4.3). Soit Y le sous-graphe de X obtenu en supprimant les sommets $\{\alpha_i\}$ de X liés à α_0 dans X_0 . Alors :

Proposition 3.3. *Soit s_0 la réflexion associée à α_0 . Le groupe $G_{s_0}^+$ est égal au sous-groupe parabolique G_Y de G de base Y .*

Démonstration. Le groupe $G_{s_0}^+$ est engendré par les réflexions s_α correspondant aux racines positives orthogonales à α_0 (pour un produit scalaire défini positif et G -invariant, noté $x \cdot y$). Si l'on écrit α comme $\sum m_i \alpha_i$, on a $\alpha \cdot \alpha_0 = \sum m_i \alpha_i \cdot \alpha_0$. Les m_i sont ≥ 0 et les $\alpha_i \cdot \alpha_0$ sont ≤ 0 ([Bo 68], VI.1.8, prop.8). On a donc $\alpha \cdot \alpha_0 = 0$ si et seulement si $m_i = 0$ pour tout i tel que $\alpha_i \cdot \alpha_0 \neq 0$, autrement dit pour tout i tel que $\alpha_i \notin Y$; cela revient à dire que α est une réflexion de G_Y , cf. [Bo 68], VI.1.7, cor.4 à la prop.7. D'où la proposition.

Corollaire 3.4. *Supposons que G soit de type impair. Soit s une réflexion de G . Le groupe G_s^+ est un conjugué du groupe G_Y de la prop.3.3.*

[Rappelons, cf. [Se 22] 1.13, que G est dit de type impair si tous les produits de deux réflexions sont, soit d'ordre 2, soit d'ordre impair. C'est le cas si G est de l'un des types A, D, E.]

Démonstration. Les réflexions d'un groupe de type impair sont conjuguées entre elles. Donc s est conjuguée de la réflexion s_0 de la prop.3. D'où le corollaire.

Exemples.

Voici trois exemples, qui seront utilisés dans les §§10, 11, 12; les notations sont celles des Tables de [Bo 68], VI.

(a) *Type E_6 .*

(a₁) Le cas $\deg(u) = 1$. Dans le graphe de Dynkin étendu, le sous-diagramme Y de la prop.3.3 a pour sommets $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$. Il est de type A_5 . On a donc $G_u^+ \simeq A_5$.

(a₂) Le cas $\deg(u) = 2$. Ecrivons u comme produit de deux réflexions s_1 et s_2 , commutant entre elles. D'après (a₁), le groupe $H = G_{s_1}^+$ est de type A_5 ; il contient s_2 . D'après le cor.3.2, on a $G_u^+ = H_{s_2}^+$. Comme toutes les réflexions de H sont conjuguées, on en déduit que toutes les involutions de degré 2 de G sont conjuguées. En appliquant à H le cor.3.4 (ou en raisonnant directement), on voit que $H_{s_2}^+$ est de type A_3 , et il en est donc de même de G_u^+ .

(a₃) Le cas $\deg(u) = 3$. Un argument analogue donne à la fois le fait que toutes les involutions de degré 3 sont conjuguées et que le groupe G_u^+ est de type A_1 .

(a₄) Le cas $\deg(u) = 4$. Même argument : les involutions de degré 4 sont conjuguées, et le groupe G_u^+ est 1.

On peut résumer ce qui précède par une chaîne : $E_6 \longrightarrow A_5 \longrightarrow A_3 \longrightarrow A_1 \longrightarrow 1$.

(b) *Type E_7 .*

La même méthode donne la chaîne $E_7 \longrightarrow D_6 \longrightarrow A_1 \times D_4$, et montre qu'il y a une seule classe de conjugaison d'involutions de degré 2. Comme un groupe de type $A_1 \times D_4$ a deux types de réflexions, cette chaîne a deux prolongements possibles, l'un par D_4 , l'autre par $(A_1)^4$; ils correspondent aux deux classes d'involutions de G de degré 3.

(c) *Type E_8*

Le début de la chaîne est $E_8 \longrightarrow E_7$; d'après (b), elle se prolonge par D_6 , puis par $A_1 \times D_4$, et puis, soit par D_4 , soit par $(A_1)^4$.

4. Les types $A_1, I_2(m), H_3$ et H_4 .

On suppose que le type de G est $A_1, I_2(m), H_3$ ou H_4 . Soit u une involution de G . On se propose de démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2 pour le couple (G, u) , et de déterminer les groupes $G_u, \Gamma_u, G_u^+, \dots, \tilde{G}_u^-$ correspondants.

Type A_1 .

Ici, G est d'ordre 2; l'involution u est, soit 1, soit -1 . On a $G_u = G$; si $u = 1$, on a $G_u^+ = \tilde{G}_u^+ = G$ et $G_u^- = \tilde{G}_u^- = 1$; si $u = -1$, on a $G_u^+ = \tilde{G}_u^+ = 1$ et $G_u^- = \tilde{G}_u^- = G$. Dans les deux cas $\Gamma_u = 1$. Nous résumons ceci dans le tableau ci-dessous :

$\deg(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	2	1	1	A_1	A_1	1
1	2	A_1	A_1	1	1	1

Type $I_2(m), m$ impair.

Le groupe G est diédral d'ordre $2m, m$ impair. Toute involution $u \neq 1$ est une réflexion et son centralisateur est $\{1, u\}$. D'où le tableau :

$\deg(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2m$	1	1	$I_2(m)$	$I_2(m)$	1
1	2	A_1	A_1	1	1	1

Type $I_2(m), m$ pair.

Le groupe G est diédral d'ordre divisible par 4. Il contient -1 . Ses réflexions forment deux classes de conjugaison, permutées par un automorphisme extérieur ; le centralisateur d'une réflexion est le groupe de type $(2, 2)$ engendré par cette involution et l'élément -1 . On en déduit le cas $\deg(u) = 1$ du tableau ci-dessous. Le cas où $\deg(u) = 0$ (resp. 2) est immédiat, puisqu'alors $u = 1$ (resp. -1).

$\deg(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2m$	1	1	$I_2(m)$	$I_2(m)$	1
1	4	A_1	A_1	A_1	A_1	1
2	$2m$	$I_2(m)$	$I_2(m)$	1	1	1

Type H_3 .

Ici, $G = \text{Alt}_5 \times \{1, -1\}$. C'est un groupe de rang 3, contenant -1 ; il y a une seule classe d'involutions pour chaque degré ≤ 3 . On a le tableau suivant :

$\deg(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2^3 3.5$	1	1	H_3	H_3	1
1	2^3	A_1	A_1	$(A_1)^2$	$(A_1)^2$	1
2	2^3	$(A_1)^2$	$(A_1)^2$	A_1	A_1	1
3	$2^3 3.5$	H_3	H_3	1	1	1

Les lignes correspondant à $\deg(u) = 0$ ou 3 sont évidentes. Lorsque $\deg(u) = 1$, le groupe G_u est d'ordre 2^3 . On a $G_u^- = A_1$ et $G_u^+ = A_1 \times A_1$; comme le produit de leurs ordres est égal à celui de G_u , cela montre que $G_u^1 = G_u$ d'où $\Gamma_u = 1$. Le cas $\deg(u) = 2$ se ramène au précédent en remplaçant u par $-u$, ce qui permute les signes “+” et “-”.

Type H_4 .

C'est un groupe de rang 4, contenant -1 , d'ordre $2^6 3^2 5^2$. On l'obtient par “dédoublément” à partir de Alt_5 , cf. [Se 22], 5.10 et 6.12. Cette construction montre que, pour $d = 0, 1, 2, 3, 4$, le nombre des involutions de degré d est respectivement 1, 60, 450, 60, 1, et ces involutions forment une seule classe de conjugaison. On a le tableau suivant :

$\deg(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2^6 3^2 5^2$	1	1	H_4	H_4	1
1	$2^4 3.5$	A_1	A_1	H_3	H_3	1
2	2^5	$(A_1)^2$	B_2	$(A_1)^2$	B_2	2
3	$2^4 3.5$	H_3	H_3	A_1	A_1	1
4	$2^6 3^2 5^2$	H_4	H_4	1	1	1

Les cas $\deg(u) = 0$ et $\deg(u) = 4$ sont évidents. Le cas $\deg(u) = 1$ résulte de ce que le centralisateur d'une réflexion est de type H_3 ; en remplaçant u par $-u$, cela donne le cas $\deg(u) = 3$.

Lorsque $\deg(u) = 2$, les groupes G_u^+ et G_u^- sont de type $A_1 \times A_1$, car sinon ce seraient des groupes diédraux d'ordre $2m$, avec m pair ≥ 4 , contrairement au fait que H_4 est un groupe de type impair, au sens de [Se 22], 1.13 (variante : utiliser le cor.3.4 pour se ramener au type H_3).

Comme $|G_u| = 2^6 3^2 5^2 / 60 = 2^5$, et que $G_u / G_u^- \simeq G_u^+$, on a $|G_u^-| = 8$, d'où $|\Gamma_u| = 2$. Cela justifie la ligne $\deg(u) = 2$ du tableau ci-dessus. L'homomorphisme $G_u \rightarrow \Gamma_u \simeq \text{Sym}_2$ est donné par l'action de G_u sur les deux réflexions de produit u . Il reste à montrer qu'il existe une involution g de G_u , de degré 2, dont l'image dans Γ_u est non triviale. Cela résulte d'un énoncé plus général, démontré au §8. On peut aussi faire un calcul explicite :

Notons a, x, y, z des réflexions de G réalisant le diagramme de Coxeter

$$H_4 : \begin{array}{c} 5 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ . \\ a \quad x \quad y \quad z \end{array}$$

On a $xz = zx, xyx = yxy, yzy = zyz$. Soient $u = xz$ et $g = yuy$. Ce sont des involutions de degré 2. On a $gxg = z$; en effet, $gxg = yu.yxy.u y = yu.xyx.u y = yzyzy = y.yzy.y = z$. Ainsi, la conjugaison par g échange x et z , donc fixe u . On a $g \in G_u$, et l'image de g dans Γ_u est non triviale.

5. Type A_{n-1} .

Dans le cas du type A , il est plus commode de décrire A_{n-1} que A_n . Soit X un ensemble fini à n éléments et soit V_X un \mathbf{R} -espace vectoriel de base X . Le groupe $G = \text{Sym}_X$ des permutations de X opère de façon fidèle sur V_X ; on obtient ainsi un couple de Coxeter (V_X, G) de type A_{n-1} ; les réflexions sont les transpositions de X .

L'espace "V" standard associé à G est l'hyperplan de V_X engendré par les $x - x'$ avec $x, x' \in X$.

Soit $u \in G$ une involution, autrement dit une permutation de X de carré 1. Soit d son degré. Soit $Z = X^u$ l'ensemble des points fixes de u ; le groupe $\{1, u\}$ opère librement sur $X - Z$. Décomposons $X - Z$ en deux parties disjointes Y, Y' telles que $Y' = uY$. On a $d = |Y| = |Y'|$ et $n = a + 2d$, où $a = |Z|$.

Tout élément g de G_u respecte la décomposition de X en deux parties : Z et $Y \cup Y'$, donc définit une permutation g_1 de Z et une permutation g_2 de $Y \cup Y'$ commutant à u . Inversement, si l'on se donne g_1, g_2 vérifiant ces conditions, il lui correspond un élément de G_u . Le groupe formé par les g_1 est Sym_Z ; il est de type A_{a-1} . Celui formé par les g_2 est de type B_d , cf. §6. On a donc :

Proposition 5.1. *G_u est isomorphe à un groupe de Coxeter de type $A_{a-1} \times B_d$.*

Soient x, x' deux éléments distincts de X . La transposition $\text{tr}_{x,x'}$ appartient à G_u si et seulement si l'on a, soit $x, x' \in Z$, soit $x, x' \in Y$ et $x' = ux$. Le groupe engendré par les x, x' du premier type est Sym_Z ; celui engendré par les x, x' du

second type est le produit de d groupes à 2 éléments. Comme les transpositions en question engendrent G_u^1 , on en déduit :

Proposition 5.2. *Le groupe G_u^1 est de type $A_{a-1} \times (A_1)^d$.*

Comme $B_d/(A_1)^d \simeq \text{Sym}_d$, cela entraîne :

Corollaire 5.3. *On a $\Gamma_u \simeq \text{Sym}_d$.*

Il reste à expliciter les groupes $G_u^-, \dots, \tilde{G}_u^+$. Si $y \in Y$, posons $y^+ = y + uy$ et $y^- = y - uy$; soit Y^+ (resp. Y^-) l'ensemble des y^+ (resp. des y^-). Alors V_u^+ a pour base $Z \cup Y^+$ et V_u^- a pour base Y^- . De plus :

(i) Les réflexions de G_u qui fixent V_u^+ sont les transpositions du type $\text{tr}_{y,uy}$, avec $y \in Y$; le groupe G_u^- qu'elles engendrent est de type $(A_1)^Y \simeq (A_1)^d$.

(ii) Les réflexions de G_u qui fixent V_u^- sont les transpositions de Z ; le groupe G_u^+ qu'elles engendrent est $\text{Sym}_Z \simeq \text{Sym}_a$, qui est de type A_{a-1} .

(i') Les réflexions de V_u^- qui sont les restrictions d'un élément de G_u sont de deux types :

celles de (i), qui changent de signe les y^- ;

celles de la forme $s_{y_1, y_2} = \text{tr}_{y_1, y_2} \text{tr}_{uy_1, uy_2}$, avec $y_1, y_2 \in Y$, qui échangent y_1^- et y_2^- .

Ces réflexions engendrent un sous-groupe H de \tilde{G}_u^- qui est de type B_d , donc d'ordre $2^d d!$, cf. §6. Comme $|\tilde{G}_u^-| = |G_u^-| \cdot |\Gamma_u| = 2^d d!$, on a $H = \tilde{G}_u^-$. Cela montre que (V_u^-, \tilde{G}_u^-) est un couple de Coxeter de type B_d , et cela montre aussi que Γ_u est engendré par les images des s_{y_1, y_2} , donc par des images d'involutions de degré 2 de G_u . Cela achève la démonstration des th. 1.1 et 1.2 pour G .

(ii') Les réflexions de V_u^+ qui sont les restrictions d'un élément de G_u sont celles de (ii), et aussi celles de la forme s_{y_1, y_2} , cf. (i'), qui échangent y_1^+ et y_2^+ . On en déduit que \tilde{G}_u^+ est isomorphe à $\text{Sym}_Z \times \text{Sym}_{Y^+}$, donc de type $A_{a-1} \times A_{d-1}$.

On obtient ainsi le tableau :

$\text{deg}(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
d	$2^d d! a!$	$(A_1)^d$	B_d	A_{a-1}	$A_{a-1} \times A_{d-1}$	d

[Rappelons que G est de type A_{n-1} et que a est le nombre de points fixes de u .]

Remarque. Pour certaines valeurs de d , on peut avoir $d-1 = -1$ ou $n-2d = -1$, ce qui introduit des facteurs A_{-1} dans G_u^+ et \tilde{G}_u^+ ; on les interprète en convenant que $A_{-1} = A_0 = 1$, ce qui est naturel puisque le groupe des permutations d'un ensemble à 0 ou 1 élément est égal à 1. Dans les tableaux relatifs aux types B_n et D_n , on rencontre aussi B_0, B_1, D_0, D_1 ; on convient que $B_0 = 1, B_1 = A_1, D_0 = D_1 = 1$.

6. Type B_n .

Soit n un entier > 0 . (On pourrait même supposer $n > 2$, car $B_1 = A_1$ et $B_2 = I_2(4)$, et ces cas ont été traités au §4.)

Rappels.

Soit Z est un ensemble fini à $2n$ éléments, et soit ε une permutation de Z de carré 1 sans point fixe. Soit Y le quotient de Z par l'action du groupe $C = \{1, \varepsilon\}$. On a $|Y| = n$. Soit $G = \text{Sym}_{Z,Y}$ le groupe des permutations de Z commutant à ε , autrement dit le groupe d'automorphismes du diagramme $Z \rightarrow Y$. On a une suite exacte

$$1 \rightarrow C^Y \rightarrow G \rightarrow \text{Sym}_Y \rightarrow 1,$$

où C^Y est le groupe des applications de Y dans C (i.e. un produit de n copies de C indexées par Y). Cette suite est scindée. On a $|G| = 2^n n!$.

Soit V_Z un \mathbf{R} -espace vectoriel de base Z . Le groupe G opère sur V_Z , et stabilise le sous-espace formé des éléments invariants par ε , espace qui s'identifie à V_Y ; soit $V = (1 - \varepsilon)V_Z$ l'espace formé par les anti-invariants de ε ; on a $V_Z = V_Y \oplus V$. L'action de G sur V est fidèle. *Le couple (V, G) est un couple de Coxeter de type B_n .*

Il y a deux classes de réflexions : les *courtes* qui sont des transpositions de la forme $\text{tr}_{z, \varepsilon z}$, avec $z \in Z$, et les *longues* qui sont de la forme $\text{tr}_{z, z'} \text{tr}_{\varepsilon z, \varepsilon z'}$, avec $z, z' \in Z$ et $z' \neq z, \varepsilon z$. Les premières sont des permutations impaires de Z , et les secondes sont des permutations paires. Avec les notations de [Bo 68], VI.4.5, ces réflexions correspondent aux racines $\pm \epsilon_i$ et $\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j$ ($i \neq j$).

Remarque. Le groupe G , vu comme sous-groupe de Sym_Z n'est pas engendré par des transpositions si $n > 1$; mais il est engendré par des transpositions et des produits de deux transpositions, autrement dit par des involutions de $\text{GL}(V_L)$ de degré 1 ou 2.

Les groupes G_u , G_u^1 et Γ_u associés à une involution u .

Soit u une involution de G , autrement dit une permutation de Z de carré 1 qui commute à ε . Lorsque $u = 1$ ou $u = \varepsilon$, on a $G_u = G$. Supposons que $u \neq 1, \varepsilon$. Soit $\Delta = \langle u, \varepsilon \rangle$ le groupe d'ordre 4 engendré par u et ε . L'action de Δ sur Z donne une partition de Z en trois sous-ensembles :

$$\begin{aligned} Z_u &= \text{ensemble des } z \in Z \text{ tels que } uz = \varepsilon z; \\ Z'_u &= \text{ensemble des } z \in Z \text{ tels que } uz = z; \\ Z''_u &= \text{ensemble des } z \in Z \text{ tels que } uz \neq z, \varepsilon z. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont stables par Δ , donc par ε ; soient Y_u, Y'_u, Y''_u leurs images dans Y : on obtient ainsi une partition $Y = Y_u \cup Y'_u \cup Y''_u$. L'ensemble des points de Y fixés par u est $Y_u \cup Y'_u$. Le groupe $\{1, u\}$ opère librement sur Y''_u ; soit T_u le quotient de Y''_u par cette action. Cela donne le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} Z & = & Z_u & \cup & Z'_u & \cup & Z''_u \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & = & Y_u & \cup & Y'_u & \cup & Y''_u \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & T_u. \end{array}$$

Posons $a = |Y_u|$, $a' = |Y'_u|$, $b = |T_u| = \frac{1}{2}|Y''_u|$. On a $n = a + a' + 2b$ et $\deg(u) = a + b$. Les entiers a et b caractérisent la classe de conjugaison de l'involution u , et peuvent être donnés arbitrairement pourvu que $a + 2b \leq n$.

Le quadruplet (Z, ε, Y, u) est réunion disjointe de trois quadruplets correspondant aux trois composantes de Y que l'on vient de définir. Cette décomposition est stable par le groupe G_u . Plus précisément, G_u est produit direct de trois facteurs :

(i) Le premier facteur est Sym_{Z_u, Y_u} est d'ordre $2^a a!$; sa contribution à G_u^- et à \tilde{G}_u^- est Sym_{Z_u, Y_u} ; celle à G_u^+ et à \tilde{G}_u^+ est 1; celle à Γ_u est 1.

(ii) Le second facteur est $\text{Sym}_{Z'_u, Y'_u}$ est d'ordre $2^{a'} a'!$; sa contribution à G_u^- et à \tilde{G}_u^- est 1; celle à G_u^+ et à \tilde{G}_u^+ est $\text{Sym}_{Z'_u, Y'_u}$; celle à Γ_u est 1.

(iii) Le troisième facteur est le groupe $\text{Sym}_\Delta(Z''_u)$ des permutations de Z''_u qui commutent à l'action de Δ . Il est produit semi-direct des deux groupes suivants :

- le groupe Δ^{T_u} des applications de T_u dans Δ ; c'est un sous-groupe normal d'ordre 4^b ;
- le groupe des Δ -automorphismes de Z''_u qui stabilisent une partie S rencontrant chaque fibre de $Z''_u \rightarrow T_u$ en un point et un seul; il est isomorphe à Sym_{T_u} .

On peut donc écrire le troisième facteur sous la forme $\Delta^{T_u} \cdot \text{Sym}_{T_u}$. Son ordre est $4^b b!$. Si $b > 1$, ce n'est pas un groupe de Coxeter.

En résumé :

Proposition 6.1. *On a $G_u = \text{Sym}_{Z_u, Y_u} \times \text{Sym}_{Z'_u, Y'_u} \times \Delta^{T_u} \cdot \text{Sym}_{T_u}$.*

Les deux premiers facteurs de G_u sont engendrés par des réflexions; ils sont donc contenus dans G_u^1 . Il n'en est pas de même du troisième facteur si $b > 1$:

Proposition 6.2. *On a $G_u^1 \cap \Delta^{T_u} \cdot \text{Sym}_{T_u} = \Delta^{T_u}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que toute réflexion s de G_u qui fixe Z et Z' appartient au groupe Δ^{T_u} . Soit I_s l'ensemble des points de Z'' qui ne sont pas fixés par s ; c'est un ensemble à 2 ou à 4 éléments, on l'a vu. Or I_s est stable par Δ , et les orbites de Δ dans Z'' sont d'ordre 4. Donc I_s est une orbite de Δ , ce qui entraîne que s appartient à Δ^{T_u} .

Proposition 6.4. (a) *L'action de G_u sur T_u définit par passage au quotient un isomorphisme de Γ_u sur Sym_{T_u} .*

(b) *Toute transposition de Sym_{T_u} est image d'une involution de G_u de degré 2.*

Démonstration de (a). Cela résulte des prop. 6.1 et 6.2 puisque $\Gamma_u = G_u/G_u^1$.

Démonstration de (b). Soient $t, t' \in T_u$, avec $t \neq t'$, et soient z, z' des représentants de t, t' dans Z''_u . Soient g, h les réflexions de G données par $g = \text{tr}_{z, z'} \text{tr}_{\varepsilon z, \varepsilon z'}$ et $h = \text{tr}_{uz, uz'} \text{tr}_{\varepsilon uz, \varepsilon uz'}$. Ces réflexions commutent, et l'on a $ugu = h$. On a $gh \in G_u$ et l'image de gh dans Sym_{T_u} est la transposition $\text{tr}_{t, t'}$. D'où (b).

Corollaire 6.5. *Les théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour G .*

C'est clair.

On peut résumer les résultats obtenus de la façon suivante :

Proposition 6.6. *On a :*

$$\begin{aligned}
G_u &= \text{Sym}_{Z_u, Y_u} \times \text{Sym}_{Z'_u, Y'_u} \times \Delta^{T_u} \cdot \text{Sym}_{T_u} \simeq B_a \times B_{a'} \times \Delta^b \cdot \text{Sym}_b; \\
G_u^1 &= \text{Sym}_{Z_u, Y_u} \times \text{Sym}_{Z'_u, Y'_u} \times \Delta^{T_u} \simeq B_a \times B_{a'} \times \Delta^b; \\
\Gamma_u &= \text{Sym}_{T_u} \simeq \text{Sym}_b; \quad \gamma_u = |T_u| = b.
\end{aligned}$$

Les groupes $G_u^+, \tilde{G}_u^+, G_u^-, \tilde{G}_u^-$ associés à u .

La décomposition de G en produit de trois facteurs entraîne une décomposition du même type pour les groupes $G_u^+, \dots, \tilde{G}_u^-$. Nous avons donné plus haut le cas des deux premiers facteurs. Pour le troisième facteur, on a :

Lemma 6.7. *Les troisièmes facteurs des groupes G_u^+ et G_u^- sont de type $(A_1)^b$. Ceux des groupes \tilde{G}_u^+ et \tilde{G}_u^- sont de type B_b .*

Démonstration. Puisque cet énoncé ne concerne que le troisième facteur, on peut supposer que les deux premiers sont triviaux, i.e. que $a = a' = 0$ et $Z = Z''_u$. Dans ce cas, les involutions u et εu sont conjuguées, ce qui entraîne que $G_u^+ \simeq G_u^-$ et $\tilde{G}_u^+ \simeq \tilde{G}_u^-$. Notons ces groupes H et \tilde{H} . D'après la prop.6.2, on a $H \times H \simeq \Delta^b$, ce qui entraîne que H est un groupe abélien élémentaire d'ordre 2^b ; comme c'est un groupe de Coxeter, il est isomorphe à $(A_1)^b$. Un argument analogue montre que $\tilde{H} \times \tilde{H} \simeq \Delta^b \cdot \text{Sym}_b$. En particulier \tilde{H} est d'ordre $2^d d!$. Or, il contient H comme sous-groupe normal. Cela entraîne que c'est un groupe de Coxeter de type B_b , en vertu du lemme suivant :

Lemma 6.8. *Soit (E, H) un couple de Coxeter. Soit $e = \dim E$. Supposons que H soit de type $(A_1)^e$. Soit H' un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$ qui normalise H et qui est d'ordre $2^e e!$. Alors (E, H') est un couple de Coxeter de type B_e .*

Démonstration du Lemme 6.8. L'action de H décompose E en somme directe de droites D_1, \dots, D_e . Comme H' normalise H , il permute les D_i . Soit $\langle x \cdot y \rangle$ un produit scalaire défini positif sur E invariant par H' , et soit Z l'ensemble des $z \in D_1 \cup \dots \cup D_e$ tels que $\langle z \cdot z \rangle = 1$. On a $|Z| = 2e$, et l'application $z \mapsto -z$ est une permutation ε d'ordre 2 de Z sans point fixe. Le groupe H' stabilise Z et commute à ε . On obtient ainsi un homomorphisme injectif de H' dans le groupe de Coxeter de type B_e défini par (Z, ε) ; comme les deux groupes ont le même ordre, cet homomorphisme est un isomorphisme.

On obtient finalement le tableau :

invariants	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
a, a', b	$2^n a! a'! b!$	$B_a \times (A_1)^b$	$B_a \times B_b$	$B_{a'} \times (A_1)^b$	$B_{a'} \times B_b$	b

7. Type D_n .

Conservons les notations (Z, ε, Y) du §6. Soit $G' = B_{Z, Y}$ et soit $G = D_{Z, Y}$ le sous-groupe d'indice 2 de G' formé des éléments g qui sont des permutations paires de Z , i.e. $\text{sgn}_Z(g) = 1$. Le couple $(V_{Z, Y}, G)$ est un couple de Coxeter de type D_n . Les réflexions de G sont les réflexions longues de G' .

Soit u une involution de G , et soient a, a', b ses invariants au sens du §6. Le fait que u appartienne à G équivaut à $a \equiv 0 \pmod{2}$. Deux involutions de

mêmes invariants sont conjuguées, sauf dans le cas $a = a' = 0$ où il y a deux classes de conjugaison.

Le groupe G_u est le sous-groupe d'indice ≤ 2 de G'_u formé des éléments x tels que $\text{sgn}_Z(x) = 1$. La décomposition de G'_u donnée dans la prop. 6.1 est :

$$G'_u = \text{Sym}_{Z_u, Y_u} \times \text{Sym}_{Z'_u, Y'_u} \times \text{Aut}_\Delta(Z''_u).$$

Les éléments de $\text{Aut}_\Delta(Z''_u)$ sont de signature 1. La condition $\text{sgn}_Z(x) = 1$ ne porte donc que sur les deux premières composantes de x . D'où :

Proposition 7.1. *Soit H_u le sous-groupe de $\text{Sym}_{Z_u, Y_u} \times \text{Sym}_{Z'_u, Y'_u}$ formé des couples (g, g') tels que $\text{sgn}_{Z_u}(g) = \text{sgn}_{Z'_u}(g')$. On a $G_u = H_u \times \text{Aut}_\Delta(Z''_u)$.*

[Rappelons que $\Delta = \langle u, \varepsilon \rangle$.]

Il y a quatre possibilités pour (a, a') :

(i) $a = a' = 0$, i.e. $2b = n$. On a alors $H_u = 1$ et $G_u = \text{Aut}_\Delta(Z''_u) = G'_u$. L'ordre de G_u est $2^n b!$, on a $\Gamma_u = \text{Sym}_{T_u}$ et $\gamma_u = b$. Les groupes G_u^- et G_u^+ sont isomorphes à $A_1^{T_u}$; les groupes \tilde{G}_u^- et \tilde{G}_u^+ sont de type B_b .

(ii) $a = 0, a' > 0$. Le premier facteur de H_u est 1 ; le second est $D(Z'_u, Y'_u)$, qui est de type $D_{a'}$. On a $G_u = D(Z'_u, Y'_u) \times \text{Aut}_\Delta(Z''_u)$. La situation est la même que pour G' , avec $B_{a'}$ remplacé par $D_{a'}$. On a $\Gamma_u = \text{Sym}_{T_u}$ et $\gamma_u = b$.

(iii) $a > 0$ et $a' = 0$: comme dans le type (ii), avec a et a' permutés, ainsi que (Z, Z') et (Y, Y') . Ici encore $\Gamma_u = \text{Sym}_{T_u}$ et $\gamma_u = b$.

(iv) $a > 0$ et $a' > 0$. Soit $H_u^1 = D_{Z_u, Y_u} \times D_{Z'_u, Y'_u}$. C'est un sous-groupe d'indice 2 de H_u qui est engendré par des réflexions. Inversement, toute réflexion de H_u appartient à H_u^1 car c'est transposition de $Y_u \cup Y'_u$ qui stabilise à la fois Y_u et Y'_u , donc qui est une transposition, soit de Y_u , soit de Y'_u . D'autre part, le groupe engendré par les réflexions de $\text{Aut}_\Delta(Z''_u)$ est le groupe Δ^{T_u} . On en conclut que $G_u^1 = H_u^1 \times \Delta^{T_u}$ et que le groupe $\Gamma_u = G_u/G_u^1$ est égal au produit de Sym_{T_u} par H_u/H_u^1 qui est d'ordre 2. C'est le cas, mentionné dans le th. 2.2, où Γ_u n'est pas un groupe symétrique (sauf si $b = 0$ ou 1).

La détermination des groupes G_u^-, G_u^+, \dots résulte de celle des groupes correspondants pour le type B_n . Plus précisément :

Les composantes dépendant de l'invariant "b" sont les mêmes que pour le type B_n ; dans les autres, certains groupes B_a ou $B_{a'}$ sont remplacés par D_a ou $D_{a'}$ respectivement.

On obtient ainsi le tableau :

invariants	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
$0, 0, b$	$2^n b!$	$(A_1)^b$	B_b	$(A_1)^b$	B_b	b
$0, a', b \quad a' > 0$	$2^{n-1} a'! b!$	$(A_1)^b$	B_b	$D_{a'} \times (A_1)^b$	$D_{a'} \times B_b$	b
$a, 0, b \quad a > 0$	$2^{n-1} a! b!$	$D_a \times (A_1)^b$	$D_a \times B_b$	$(A_1)^b$	B_b	b
$a, a', b \quad aa' > 0$	$2^{n-1} a! a'! b!$	$D_a \times (A_1)^b$	$B_a \times B_b$	$D_{a'} \times (A_1)^b$	$B_{a'} \times B_b$	$b, 2$

8. Résultats auxiliaires sur les groupes G_u^- et \tilde{G}_u^- .

Ces résultats seront utilisés dans les trois sections suivantes. On note d le degré de l'involution u . On suppose que le type de G est H_4, E_6, E_7 ou E_8 . On s'intéresse aux deux propriétés suivantes :

(i) u est l'extrémité d'un seul cube, i.e. sa décomposition en produit de d réflexions est unique, à permutation près. Cela équivaut à $G_u^- \simeq (A_1)^d$.

(ii) Il existe un \mathcal{C} -sous-groupe H de G de type A tel que $u \in H$.

Proposition 8.1. *Si les propriétés (i) et (ii) sont satisfaites, les théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour le couple (G, u) , alors le groupe \tilde{G}_u^- est de type B_d , le groupe Γ_u est isomorphe à Sym_d et il est engendré par les images des involutions de G_u de degré 2.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe de G satisfaisant à (ii). D'après le §5, la prop.8.5 est vraie si $G = H$. On va se ramener à ce cas. D'après (i), on a $G_u^- = H_u^-$. Le groupe \tilde{G}_u^- contient \tilde{H}_u^- , qui est de type B_d . Cela montre que Γ_u contient un sous-groupe isomorphe à Sym_d . D'autre part Γ_u est isomorphe à un sous-groupe de $\text{Out}_c(G_u^-) \simeq \text{Out}_c((A_1)^d) \simeq \text{Sym}_d$, cf. prop.2.7. On a donc $\tilde{G}_u^- = \tilde{H}_u^-$, ce qui démontre la proposition.

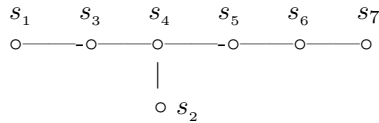
Proposition 8.2. *Les propriétés (i) et (ii) sont satisfaites pour $d \leq 2$ lorsque G est de type H_4 et pour $d \leq 3$ lorsque G est de type E_6, E_7 ou E_8 . La propriété (ii) est satisfaite pour $d \leq 4$ lorsque G est de type E_8 .*

Démonstration. L'hypothèse (i) est satisfaite puisque les seuls groupes de Coxeter de rang ≤ 3 , de type impair, et contenant -1 , sont des puissances de A_1 .

Pour (ii), et G de type H_4 , on remarque que le diagramme de G contient un sous-diagramme de type A_3 . Or un groupe de type A_3 contient des involutions de tout degré ≤ 2 . Comme les involutions de G de même degré sont conjuguées entre elles, cela entraîne (ii).

Le même argument s'applique à G de type E_6 , car son diagramme contient un sous-diagramme de type A_5 ; il s'applique aussi au type E_8 , ainsi qu'à E_7 si $d \leq 2$.

Dans le cas de E_7 , pour $d = 3$, il y a deux classes d'involutions, cf. [Se 22], 7.5 : celles de type *triangle* et celles de type *droite*. Pour les traiter, choisissons des réflexions s_1, \dots, s_7 correspondant au diagramme de Coxeter de E_7 :

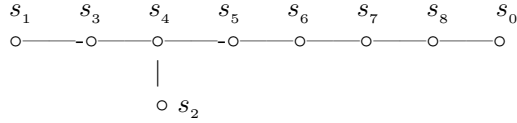


Posons $u = s_3 s_5 s_7$ et $u' = s_2 s_5 s_7$; ce sont des involutions de degré 3. D'après [Se 22], *loc.cit.*, un produit $s_a s_b s_c$ est du type triangle si et seulement si il existe $m \neq a, b, c$ tel que s_m soit adjacent à un et un seul des s_a, s_b, s_c ². Dans le cas de u , l'entier $m = 1$ répond à cette condition; dans le cas de u' , aucun m

2. Dans [Se 22], cette condition est exprimée en termes des racines $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ associées à s_a, s_b, s_c : le produit $s_a s_b s_c$ est du type triangle si et seulement si $\frac{1}{2}(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c)$ n'appartient pas au réseau des poids.

n'est possible ; ainsi, u est du type triangle et u' du type droite. Il suffit donc de vérifier la condition (ii) pour u et pour u' . Pour u , on prend le sous-groupe de type A_5 engendré par s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 ; pour u' , on prend celui engendré par s_2, s_4, s_5, s_6, s_7 .

Le cas de E_8 est analogue au précédent. Il y a deux classes d'involutions de degré 4, celles de type *rectangle* et celles de type *tétraèdre*. On les distingue de la manière suivante : on écrit l'involution u comme produit de quatre réflexions commutant deux à deux, et correspondant à des racines x, y, z, t . Alors u est de type rectangle si $x + y + z + t \in 2R$, où R désigne le réseau des racines ; sinon, u est de type tétraèdre. Soient s_1, \dots, s_8, s_0 des réflexions correspondant au diagramme étendu de E_8 (s_0 correspondant à la plus grande racine) :



Prenons $u = s_2 s_5 s_7 s_0$ et $u' = s_1 s_3 s_5 s_7$. On vérifie par la même méthode que pour E_7 que u est du type rectangle et u' du type tétraèdre. Il suffit donc de vérifier (i) pour u et pour u' : pour u (resp. pour u') on prend le sous-groupe de type A_7 engendré par les $s_i, i \neq 1, 3$ (resp. $i \neq 0, 2$).

9. Type E_6 .

C'est un groupe de rang 6 qui ne contient pas -1 . Il y a une seule classe de conjugaison d'involutions pour chaque degré $d \leq 4$. Le tableau correspondant est :

$\text{deg}(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2^7 3^4 5$	1	1	E_6	E_6	1
1	$2^5 3^2 5$	A_1	A_1	A_5	A_5	1
2	$2^6 3$	$(A_1)^2$	B_2	A_3	$A_1 \times A_3$	2
3	$2^5 3$	$(A_1)^3$	B_3	A_1	$A_1 \times A_2$	3
4	$2^7 3^2$	D_4	F_4	1	A_2	3

Vérification du tableau.

Les cas $d = 0$ et $d = 1$ sont immédiats.

Pour $d = 2$ ou 3 , les prop.8.1 et 8.2 montrent que le th.1.1. et le th.1.2 sont vrais pour (G, u) , que $G_u^- \simeq (A_1)^d$, $\tilde{G}_u^- \simeq B_d$ et que $\Gamma_u \simeq \text{Sym}_d$.

Dans le cas $d = 2$, l'ordre de G_u est $2^6 3$ et l'on a vu au §3 que G_u^+ est de type A_3 . Le groupe \tilde{G}_u^+ contient G_u^+ comme sous-groupe d'indice 2 ; de plus c'est un groupe de type cristallographique ; la seule possibilité est qu'il soit de type $A_1 \times A_3$.

Dans le cas $d = 3$, un raisonnement analogue montre que l'ordre de G_u^+ est 2, donc que ce groupe est de type A_1 ; quant à \tilde{G}_u^+ , c'est un groupe de rang ≤ 3 et d'ordre $2^2 3$, qui normalise un groupe de type A_1 ; son type est donc $A_1 \times A_2$.

Le cas $d = 4$ est traité dans [Se 22], 3.19 (et c'est lui qui est à l'origine du présent travail).

10. Type E_7 .

Il y a une seule classe d'involutions de degré 0, 1, 2, 5, 6, 7, deux classes de degré 3 et deux classes de degré 4; ces dernières sont notées 3, 3', 4, 4' dans le tableau ci-dessous. Rappelons comment on caractérise les deux classes de degré 3, cf. [Se 22], 7.5. Notons R le réseau des racines de E_7 , P le réseau des poids, et V_6 le \mathbf{F}_2 -espace vectoriel $R/2P$; cet espace est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée. Les réflexions de E_7 correspondent bijectivement aux éléments non nuls de V_6 . Soit une involution de degré 3; décomposons u en produit de trois réflexions s, s', s'' commutant entre elles (ce qui est unique, à permutation près); ces réflexions donnent trois éléments non nuls x, x', x'' de $R/2P$, deux à deux orthogonaux. Si la somme $x + x' + x''$ est 0, u est du type droite; si elle ne l'est pas, u est du type *triangle*. Il n'est pas difficile de compter combien il y a d'involutions de chaque type : pour le cas des droites, il y a $2^6 - 1$ possibilités pour x , $2^5 - 2$ possibilités pour x' et une seule possibilité pour x'' . Comme chaque u est obtenu 6 fois, le nombre des involutions du type droite est $(2^6 - 1)(2^5 - 2)/6 = 3^2 5.7$ et G_u est d'ordre $2^{10} 3^4 5.7 / 3^2 5.7 = 2^{10} 3^2$: c'est le type 3 du tableau ci-dessous. Un calcul analogue montre que le nombre des involutions de type triangle est $(2^6 - 1)(2^5 - 2)(2^4 - 2^2)/6 = 2^2 3^3 5.7$ et que G_u est d'ordre $2^8 3$; c'est le type 3' du tableau. Si u est de degré 4 (resp. 4'), on dit que u est de type 4 si $-u$ est de type 3 (resp. 3').

$\deg(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2^{10} 3^4 5.7$	1	1	E_7	E_7	1
1	$2^{10} 3^2 5$	A_1	A_1	D_6	D_6	1
2	$2^{10} 3$	$(A_1)^2$	B_2	$A_1 \times D_4$	$A_1 \times B_4$	2
3	$2^{10} 3^2$	$(A_1)^3$	B_3	D_4	F_4	3
3'	$2^8 3$	$(A_1)^3$	B_3	$(A_1)^4$	$A_1 \times B_3$	3
4	$2^{10} 3^2$	D_4	F_4	$(A_1)^3$	B_3	3
4'	$2^8 3$	$(A_1)^4$	$A_1 \times B_3$	$(A_1)^3$	B_3	3
5	$2^{10} 3$	$A_1 \times D_4$	$A_1 \times B_4$	$(A_1)^2$	B_2	2
6	$2^{10} 3^2 5$	D_6	D_6	A_1	A_1	1
7	$2^{10} 3^4 5.7$	E_7	E_7	1	1	1

Vérification du tableau.

Soit $d = \deg(u)$. Comme G contient -1 , il nous suffit de traiter les cas où $d \leq 3$; les autres s'en déduisent en remplaçant u par $-u$; noter que, si u est de type 3 (resp. 3'), $-u$ est de type 4 (resp. 4').

Les cas $d = 0$ et $d = 1$ sont immédiats.

Lorsque $d = 2$, les prop.8.1 et 8.2 entraînent que G_u^- est de type $(A_1)^2$, \tilde{G}_u^- est de type B_2 et $\Gamma_u \simeq \text{Sym}_2$. Le groupe G_u^+ est de type $A_1 \times D_4$ d'après le §3; comme \tilde{G}_u^- contient G_u^+ avec indice 2, il est de type $A_1 \times B_4$.

Supposons que $d = 3$. Comme ci-dessus, les prop.8.1 et 8.2 entraînent que G_u^- est de type $(A_1)^3$, \tilde{G}_u^- est de type B_3 et $\Gamma_u \simeq \text{Sym}_2$.

Quant u est de type 3, le même argument que pour $d = 2$ montre que G_u^+ est d'ordre $2^6 3$, donc de type D_4 . Comme c'est un sous-groupe normal de \tilde{G}_u^+ , et que \tilde{G}_u^+ / G_u^+ est isomorphe à Sym_3 , on en déduit que \tilde{G}_u^+ est de type F_4 .

Quand u est de type 3', G_u^+ est d'ordre 2^4 , donc de type $(A_1)^4$, alors que \tilde{G}_u^+ est d'ordre $2^5 3$, et le contient comme sous-groupe normal d'indice 6; cela entraîne que \tilde{G}_u^+ est de type $A_1 \times B_3$. Noter que le facteur A_1 est contenu dans le noyau de la surjection $\tilde{G}_u^+ \rightarrow \text{Sym}_3$, donc est engendré par une G -réflexion; c'est l'un des facteurs de G_u^+ .

11. Type E_8 .

Pour $d = 0, 1, 2, 3$ et $d = 5, 6, 7, 8$ il y a une seule classe d'involutions de degré d . Pour $d = 4$, il y en a deux : celle appelée *du type rectangle* dans [Se 22], 5.8, et celle appelée *du type tétraèdre*; dans le tableau ci-dessous, elles correspondent aux lignes 4 et 4'.

$\deg(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2^{14} 3^5 5^2 7$	1	1	E_8	E_8	1
1	$2^{11} 3^4 5 \cdot 7$	A_1	A_1	E_7	E_7	1
2	$2^{12} 3^2 5$	$(A_1)^2$	B_2	D_6	B_6	2
3	$2^{11} 3^2$	$(A_1)^3$	B_3	$A_1 \times D_4$	$A_1 \times F_4$	3
4	$2^{13} 3^3$	D_4	F_4	D_4	F_4	3
4'	$2^{11} 3$	$(A_1)^4$	B_4	$(A_1)^4$	B_4	4
5	$2^{11} 3^2$	$A_1 \times D_4$	$A_1 \times F_4$	$(A_1)^3$	B_3	3
6	$2^{12} 3^2 5$	D_6	B_6	$(A_1)^2$	B_2	2
7	$2^{11} 3^4 5 \cdot 7$	E_7	E_7	A_1	A_1	1
8	$2^{14} 3^5 5^2 7$	E_8	E_8	1	1	1

Vérification du tableau.

On peut se borner au cas $d \leq 4$ puisque G contient -1 . La méthode est la même que pour le type E_7 . Les cas $d = 0$ et $d = 1$ sont immédiats. Lorsque $d = 2$ ou 3, les prop.8.1 et 8.2 entraînent que G_u^- est de type $(A_1)^d$, que $\Gamma_u \simeq \text{Sym}_d$, que

\tilde{G}_u^- est de type B_d , et que Γ_u est engendré par les images des involutions de G_u de degré 2.

Pour $d = 2$, on a vu au §3 que G_u^+ est de type D_6 ; comme \tilde{G}_u^+ le contient avec indice 2, il est de type B_6 . On a $|G_u| = |G_u^-| \cdot |\tilde{G}_u^+| = 2^2 \cdot 2^6 6! = 2^1 2^3 3^5$.

Pour $d = 3$, un argument analogue montre que G_u^+ est de type $A_1 \times D_4$, que \tilde{G}_u^+ est de type $A_1 \times F_4$, et que $|G_u| = 2^1 13^2$.

[Noter que l'inclusion de E_7 dans E_8 transforme une involution v de type 3 de $H = E_7$ en une involution u de G de degré 3; le groupe \tilde{H}_v^+ est donc contenu dans \tilde{G}_u^+ , ce qui entraîne que \tilde{G}_u^+ contient F_4 .]

Pour $d = 4$, on a vu au §3 que G_u^+ est, soit de type D_4 , soit de type $(A_1)^4$, et que les deux cas sont possibles. C'est le premier cas que nous avons choisi de noter 4 dans le tableau ci-dessus, le second étant noté 4'. Dans les deux cas, u et $-u$ sont conjuguées (cela résulte de la description de ces classes donnée dans [Se 22], 5.6); d'où $G_u^- \simeq G_u^+$.

Si u est de type 4', la prop.8.1 montre que \tilde{G}_u^- est de type B_4 . On a $|G_u| = |G_u^-| \cdot |\tilde{G}_u^-| = 2^4 \cdot |B_4| = 2^{11} 3$, et $\Gamma_u = \text{Sym}_4$, ce qui justifie la ligne (4') du tableau. De plus, une comparaison avec le tableau de E_7 montre que l'involution u provient, par l'injection $E_7 \rightarrow E_8$, d'une involution de E_7 de type 4'.

Supposons que u est de type 4. Cette involution provient d'une involution de type 4 de E_7 . On en déduit que \tilde{G}_u^- contient un sous-groupe de type F_4 , donc que Γ_u contient un sous-groupe isomorphe à Sym_3 . Or la prop.2.7 montre que Γ_u est isomorphe à un sous-groupe de $\text{Out}_c(G_u^-) \simeq \text{Out}_c(D_4) \simeq \text{Sym}_3$. On en conclut que $\tilde{G}_u^- \simeq F_4$. [Autre démonstration : utiliser le fait que F_4 est un sous-groupe fini maximal de $\text{GL}_4(\mathbf{Q})$, cf. [Da 65], (4.3).] On déduit de là que $|G_u| = 2^{13} 3^3$ et que $\Gamma_u \simeq \text{Sym}_3$, ce qui justifie la ligne 4 du tableau. De plus, cet argument montre que les éléments d'ordre 2 de Γ_u sont des images d'involutions de degré 2 de G_u .

Il reste à prouver que *les involutions de type 4 (resp. 4') sont des rectangles (resp. des tétraèdres)* au sens de [Se 22], 5.6. Il suffit de le faire pour le type 4, et sur un exemple explicite. Avec les notations de la fin du §8, choisissons $u = s_2 s_5 s_7 s_0$, qui est de type rectangle, on l'a vu. Posons $v = s_2 s_5 s_7$; c 'est une involution de E_7 de type droite, cf. §8. Soit e l'élément -1 de E_7 ; le produit ev est une involution de E_7 de type 4. Son image dans E_8 est aussi de type 4. Mais l'image de e dans E_8 est $-s_0$; celle de ev est donc égale à $-u$. On en conclut que $-u$ est de type 4, et la même chose est vraie pour u , puisque u et $-u$ sont conjuguées.

12. Type F_4 .

Ce groupe contient -1 . Pour $d = 1, 2, 3$, il y a deux classes de conjugaison d'involutions de degré d .

Les réflexions de chacune des deux classes (notées L et C : "longues" et "courtes") engendrent un sous-groupe normal de G , qui est de type D_4 ; le quotient de G par ce sous-groupe est isomorphe à Sym_3 . Les trois sous-groupes d'ordre 2 de Sym_3 correspondent à trois sous-groupes d'indice 3 de G , qui sont

des \mathcal{C} -sous-groupes de type B_4 . Les classes C et L sont permutées par un automorphisme d'ordre 2 de G (par exemple celui qui est évident sur le diagramme de Coxeter). Chaque classe a 12 éléments.

Le groupe G_u^+ associé à une réflexion u est de type B_3 ; lorsque u est de type L , cela résulte de la prop.3.3, car u est conjuguée de la réflexion notée s_0 dans cette proposition ; le cas où u est de type C résulte du précédent en appliquant un automorphisme de G qui permute C et L .

Les deux classes d'involutions de degré 2, notées 2 et 2', ont les propriétés suivantes :

Une involution u de type 2 se décompose de deux façons différentes en produit de deux réflexions s et s' ; dans l'une de ces décompositions, s et s' appartiennent à la classe C ; dans l'autre décomposition, s et s' appartiennent à la classe L . Le groupe G_u^- est de type B_2 . Le nombre de telles involutions est $2 \cdot 3^2$.

Une involution u de type 2' se décompose de façon unique en $u = ss'$, où s est une réflexion de type C et s' est une réflexion de type L . Le groupe G_u^- est de type $A_1 \times A_1$. Le nombre de ces involutions est $2^2 \cdot 3^2$.

[Ces propriétés se démontrent, soit en utilisant les plongements $D_4 \subset B_4 \subset F_4$, soit en utilisant la construction de G par dédoublement à partir de Sym_4 , cf. [Se 22], 6.12.]

On a le tableau suivant :

$\text{deg}(u)$	$ G_u $	G_u^-	\tilde{G}_u^-	G_u^+	\tilde{G}_u^+	γ_u
0	$2^7 3^2$	1	1	F_4	F_4	1
1 et 1'	$2^5 3$	A_1	A_1	B_3	B_3	1
2	2^6	B_2	B_2	B_2	B_2	1
2'	2^4	$A_1 \times A_1$	$A_1 \times A_1$	$A_1 \times A_1$	$A_1 \times A_1$	1
3 et 3'	$2^5 3$	B_3	B_3	A_1	A_1	1
4	$2^7 3^2$	F_4	F_4	1	1	1

Vérification du tableau.

On peut se borner au cas $d \leq 2$ puisque G contient -1 . Les deux cas $d = 0, 1$ sont immédiats.

Lorsque u est de type 2, on a vu que G_u^- est de type B_2 . Or u et $-u$ sont conjugués (puisque leurs centralisateurs ont le même ordre). Le groupe G_u^+ est donc aussi de type B_2 . Comme $\tilde{G}_u^- = G_u/G_u^+$, l'ordre de ce groupe est $2^6/2^3 = 2^3$; puisqu'il contient G_u^- , qui est d'ordre 2^3 , il lui est égal. On a donc $\Gamma_u = 1$.

Le cas du type 2' est analogue : les groupes G_u^- et G_u^+ sont de type $A_1 \times A_1$; l'ordre de $\tilde{G}_u^- = G_u/G_u^+$ est $2^4/2^2 = 2^2$, d'où $\tilde{G}_u^- = G_u^-$ et $\Gamma_u = 1$.

Cette vérification termine la démonstration des énoncés du §1.

RÉFÉRENCES

- [Bo 68] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV-VI*, Hermann, Paris, 1968; English translation, Springer-Verlag, 2002.
- [Da 65] E.C. Dade, *The maximal finite groups of 4×4 integral matrices*, Ill. J. Math. 9 (1965), 99-122.
- [DPR 13] J.M. Douglass, G. Pfeiffer & G. Röhrle, *On reflection subgroups of finite Coxeter groups*, Comm. Algebra 41 (2013), 2574–2592.
- [Ho 80] R.B. Howlett, *Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups*, J. London Math. Soc. 21 (1980), 62-80.
- [Se 16] J-P. Serre, *Finite Groups : an Introduction*, International Press, Somerville, 2016; seconde édition corrigée, 2022.
- [Se 22] J-P. Serre, *Groupes de Coxeter finis : involutions et cubes*, l'Ens. Math., à paraître; arXiv:2012.03689.

Collège de France, Paris
email : jpserre691@gmail.com