ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Journal de l'École polytechnique
Mathématiques

Stéphane Bijakowski & Valentin Hernandez

Groupes p-divisibles avec condition de Pappas-Rapoport et invariants de Hasse

Tome 4 (2017), p. 935-972.

<http://jep.cedram.org/item?id=JEP_2017__4__935_0>

Journal de l'École polytechnique
Mathématiques
Tome 4, 2017, p. 935–972 DOI: 10.5802/jep.60

GROUPES p-DIVISIBLES AVEC CONDITION DE PAPPAS-RAPOPORT ET INVARIANTS DE HASSE

par Stéphane Bijakowski & Valentin Hernandez

Résumé. — Nous étudions les groupes p-divisibles G munis d'une action de l'anneau des entiers d'une extension finie (possiblement ramifiée) de $\mathbb{Q}_p$ sur un schéma de caractéristique p. Nous supposons de plus que le groupe p-divisible satisfait à la condition de Pappas-Rapoport pour une certaine donnée μ ; cette condition consiste en une filtration sur le faisceau des différentielles ω_G satisfaisant certaines propriétés. Sur un corps parfait, nous définissons les polygones de Hodge et de Newton pour de tels groupes p-divisibles, en tenant compte de l'action. Nous montrons que le polygone de Newton est au-dessus du polygone de Hodge, lui-même au-dessus d'un certain polygone dépendant de la donnée μ.

Nous construisons ensuite des invariants de Hasse pour de tels groupes p-divisibles sur une base arbitraire de caractéristique p. Nous prouvons que l'invariant de Hasse total est non nul si et seulement si le groupe p-divisible est μ-ordinaire, c'est-à-dire si son polygone de Newton est minimal. Enfin, nous étudions les propriétés des groupes p-divisibles μ-ordinaires.

La construction des invariants de Hasse s'applique en particulier aux fibres spéciales des modèles des variétés de Shimura PEL construits par Pappas et Rapoport.

Abstract (*p*-divisible groups with Pappas-Rapoport condition and Hasse invariants)

We study p-divisible groups G endowed with an action of the ring of integers of a finite (possibly ramified) extension of $\mathbb{Q}_p$ over a scheme of characteristic p. We suppose moreover that the p-divisible group G satisfies the Pappas-Rapoport condition for a certain datum μ; this condition consists in a filtration on the sheaf of differentials ω_G satisfying certain properties. Over a perfect field, we define the Hodge and Newton polygons for such p-divisible groups, normalized with the action. We show that the Newton polygon lies above the Hodge polygon, itself lying above a certain polygon depending on the datum μ.

We then construct Hasse invariants for such p-divisible groups over an arbitrary base scheme of characteristic p. We prove that the total Hasse invariant is non-zero if and only if the p-divisible group is μ-ordinary, i.e., if its Newton polygon is minimal. Finally, we study the properties of μ-ordinary p-divisible groups.

The construction of the Hasse invariants can in particular be applied to special fibers of PEL Shimura varieties models as constructed by Pappas and Rapoport.

Table des matières

Classification mathématique par sujets (2010). — 14L05, 11G18, 11G25, 11G15.
Mots-clefs. — Groupes p-divisibles, F-cristal, données de Pappas-Rapoport, invariants de Hasse, μ-ordinaire.

Introduction

L'étude des congruences entre formes modulaires s'est avérée, au delà de son caractère esthétique, avoir de nombreuses conséquences importantes en théorie des nombres ; que ce soit l'article fondateur de Serre [Ser73] d'où sont déduites les congruences entre les valeurs des fonctions zêta aux entiers négatifs, ou bien l'article de Deligne et Serre [DS74] qui utilise les congruences pour construire les représentations d'Artin associées aux formes modulaires de poids 1. Ces deux aspects ont depuis été grandement généralisés, et dans les cas cités précédemment ils sont basés sur l'utilisation de la série d'Eisenstein E_{p-1} ($p \geqslant 5$ un nombre premier), puisque l'idéal qui définit (pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) les congruences modulo p entre formes modulaires est donné par $E_{p-1} - 1$.

On peut interpréter géométriquement ce qui précède, puisque E_{p-1} est une section sur la courbe modulaire du fibré ω^{p-1}. Pour chaque nombre premier où une courbe elliptique (disons sur un corps de nombres) a bonne réduction, on peut regarder le nombre de points modulo p (dans $\overline{\mathbb{F}_p}$) de sa p-torsion. Une courbe elliptique (à bonne réduction en p) est dite supersingulière en p si sa p-torsion n'a qu'un point sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, et ordinaire si elle en a p. Si la courbe elliptique est ordinaire, alors sa p-torsion est une extension d'une partie étale par une partie multiplicative. De plus, on peut associer à chaque courbe elliptique un invariant modulo p, dit de Hasse, décrivant l'action du Verschiebung sur le faisceau conormal. Cet invariant est inversible exactement lorsque la courbe elliptique est ordinaire (en p). En fait cet invariant est la réduction modulo p de la série d'Eisenstein E_{p-1} ; son lieu d'annulation étant alors un fermé de la courbe modulaire. L'invariant de Hasse est donc intimement lié aux congruences entre formes modulaires.

Plus généralement, étant donné un groupe p-divisible G, on peut lui associer des polygones de Hodge et Newton et on dit qu'il est ordinaire lorsque ces deux polygones sont égaux. Cette condition est équivalente au fait que la p-torsion soit l'extension d'une partie étale par une partie multiplicative. Comme dans le cas des courbes elliptiques, on peut associer à G un invariant de Hasse qui détecte si le groupe est ordinaire ou non. Étant donné une variété de Shimura (PEL non ramifiée en p), on peut alors grâce à ce qui précède construire un ouvert, le lieu ordinaire. Lorsqu'il est non vide, cet ouvert est dense ([NO80]). Le polygone de Newton permet plus généralement de construire une stratification de la variété.

En général, malheureusement, fixer des endomorphismes dans la donnée de Shimura peut impliquer que le lieu ordinaire est vide. Dans ce cas on doit construire de nouveaux invariants. Lorsque les endomorphismes sont non ramifiés au dessus de p, de nombreux outils permettent d'étudier de telles familles de groupes p-divisibles. En particulier, on peut définir les polygones de Newton et de Hodge normalisés avec l'action (étudiés dans [Kot97] et [RR96]), et on définit le lieu μ-ordinaire comme le lieu où ces deux polygones sont égaux. Ce lieu, défini par Rapoport dans une conférence en 1996, permet donc de construire un ouvert, qu'il a conjecturé être dense pour les variétés de niveau hyperspécial en p (voir [Rap05] pour plus de détails). Ce résultat a été prouvé par Wedhorn dans [Wed99]. Les groupes p-divisibles μ-ordinaires sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ ont ensuite été étudiés dans [Moo04], et l'ouvert des variétés de Shimura précédentes dans [Wed99]. De plus, Goldring et Nicole ([GN17]) ont introduit des invariants de Hasse dans le cas des variétés de Shimura unitaires, qui détectent l'ouvert μ-ordinaire.

En fait le problème précédent est local, détaillons ce qui est connu. Soit S un schéma de caractéristique p, et $G \to S$ un groupe p-divisible muni d'une action d'une $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\mathscr{O}$, qui est l'anneau des entiers d'une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On peut alors associer à G une famille (indexée par les points géométriques de S) de polygones de Newton, ainsi qu'une famille de polygones de Hodge, qui tiennent compte de l'action de $\mathscr{O}$. Les polygones de Hodge sont localement constant sur S (voir [Kot97] ou les rappels de [Her16]). L'ouvert μ-ordinaire est alors le lieu où les polygones de Hodge et Newton coïncident. On peut aussi associer à G un invariant de Hasse μ-ordinaire, qui est une section sur S d'un fibré en droites, le déterminant du faisceau conormal de G (à une certaine puissance explicite) ; voir [Her16] pour la construction à l'aide de la cohomologie cristalline de G, ou [KW14] pour une construction utilisant les G-Zip. Ces derniers invariants ont de nombreuses applications en dehors de la géométrie des variétés de Shimura ([DS74] dans le cas de la courbe modulaire, puis [Box15, GK15] dans un cadre plus général les utilisent pour construire des représentations galoisiennes par interpolation).

Si on autorise l'anneau $\mathscr{O}$ à être ramifié, le problème devient plus difficile. Il semble alors nécessaire d'introduire les modèles entiers de Pappas-Rapoport à la place des modèles entiers de Kottwitz, car ces derniers ne sont pas plats. Sur ces modèles, on dispose d'un groupe p-divisible G satisfaisant une condition de Pappas-Rapoport, c'est-à-dire une filtration sur le faisceau ω_G dont on fixe les dimensions des gradués. Dans le cas des variétés de Hilbert, les dimensions des gradués sont égaux à 1 ; Reduzzi et Xiao ([RX17]) ont alors montré que l'invariant de Hasse classique s'exprimait comme un produit d'invariants partiels. Cette construction a été généralisée dans [Bij15] au cas où la dimension des gradués est constante. Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, l'invariant de Hasse est toujours nul (et le groupe p-divisible ne peut pas être ordinaire). C'est ce cas que nous proposons d'étudier.

Soit p un nombre premier, et L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On note O_L son anneau des entiers, k_L le corps résiduel, f le degré résiduel, e l'indice de ramification, et $\mathscr{T}$ l'ensemble des plongements de L^{nr} dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, où L^{nr} est l'extension maximale non ramifiée contenue dans L. Soient enfin $\mu = (d_{\tau,i})_{\tau\in\mathscr{T},1\leqslant i\leqslant e}$ des entiers. On étudie alors des groupes p-divisibles G sur un schéma S de caractéristique p, munis d'une action de O_L (i.e., un morphisme $\iota : O_L \to \mathrm{End}(G)$), et satisfaisant une condition de Pappas-Rapoport pour la donnée μ. Cette condition consiste en une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet$ sur le faisceau ω_G dont les gradués sont de dimension $d_{\tau,i}$ (voir définition 1.2.1). On note $\underline{G}$ le groupe avec ces structures.

Nos résultats sont alors les suivants (voir théorème 1.3.1 et théorème 1.3.2).

Théorème. — *Soit* $\underline{G} = (G, \iota, \mathrm{Fil}^\bullet)$ *un groupe p-divisible sur un corps parfait k de caractéristique p, muni d'une action de O_L et d'une condition de Pappas-Rapoport* *pour la donnée μ. On peut alors associer à $\underline{G}$ des polygones (convexes) de Newton* $\mathrm{Newt}(\underline{G})$*, de Hodge* $\mathrm{Hdg}(\underline{G})$*, et définir un polygone de Pappas-Rapoport* $\mathrm{PR}(\mu)$*. Ces polygones satisfont aux inégalités*

$$\mathrm{Newt}(\underline{G}) \geqslant \mathrm{Hdg}(\underline{G}) \geqslant \mathrm{PR}(\mu).$$

De plus, les polygones $\mathrm{Newt}(\underline{G})$ *et* $\mathrm{Hdg}(\underline{G})$ *satisfont à la propriété de filtration Hodge-Newton : si ces deux polygones ont un point de contact qui est un point de rupture pour* $\mathrm{Newt}(\underline{G})$ *alors il existe un unique scindage $\underline{G} = \underline{G}' \oplus \underline{G}''$ correspondant à ce contact.*

Remarque. — En fait le théorème vaut plus généralement pour $\underline{M} = (M, F, \iota, \mathrm{Fil}^\bullet)$ un F-cristal sur k.

Dans le cas où $O_L = \mathbb{Z}_p$ (la condition de Pappas-Rapoport est alors triviale), le théorème précédent est le théorème de Mazur ainsi que le théorème de Katz sur la rupture Hodge-Newton (voir [Kat79]). Ces résultats ont été généralisés dans de nombreux cas (voir [RR96, MV10, Her16]), mais pas à notre connaissance dans les cas ramifiés.

Un groupe p-divisible $\underline{G}$ sur un corps parfait k de caractéristique p est alors dit μ-ordinaire si $\mathrm{Newt}(\underline{G}) = \mathrm{PR}(\mu)$. Si la donnée μ est ordinaire, i.e., si le polygone PR a pour pentes 0 ou 1, on retrouve la condition d'ordinarité usuelle. En revanche, si ce n'est pas le cas, la condition de Pappas-Rapoport induit une obstruction à être ordinaire. On dit que $\underline{G}$ satisfait à la condition de Rapoport généralisée si $\mathrm{Hdg}(\underline{G}) = \mathrm{PR}(\mu)$. Dans le cas d'une donnée μ ordinaire, on retrouve la condition de Rapoport usuelle (i.e., le module ω_G est libre sur $k \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$).

La deuxième partie de cet article est consacrée à la construction d'invariants de Hasse. Pour cela la construction est purement locale, et est valable pour les groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1 (voir quand même la remarque 2.2.2). Cela nous permet aussi de caractériser la μ-ordinarité. De plus, on a d'autres caractérisations possibles du fait d'être μ-ordinaire dans le cas d'un corps algébriquement clos ; on peut construire explicitement un groupe p-divisible X^{ord} qui est μ-ordinaire (voir définition 3.1.3) auquel tout groupe p-divisible μ-ordinaire est isomorphe. Enfin, le fait d'être μ-ordinaire ne dépend que de la p-torsion, généralisant ainsi les résultats de Moonen ([Moo04]).

Notre théorème est le suivant (voir proposition 2.2.14, théorème 3.2.1 et proposition 3.2.3).

Théorème. — *Supposons que pour tout τ, $d_{\tau,1} \geqslant d_{\tau,2} \geqslant \cdots \geqslant d_{\tau,e}$. Soit S un schéma sur k_L de caractéristique p. Alors pour tout groupe p-divisible $\underline{G} = (G, \iota, \omega_{G,\bullet}^{[\bullet]})$ sur S, muni d'une action de O_L et d'une condition de Pappas-Rapoport $(\omega_{G,\tau}^{[i]})_{\tau,i}$, il existe des applications compatibles au changement de base*

$$\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}(\underline{G}) : \det\big(\omega_{G,\tau}^{[i]}/\omega_{G,\tau}^{[i-1]}\big) \longrightarrow \det\big(\omega_{G,\tau}^{[i]}/\omega_{G,\tau}^{[i-1]}\big)^{\otimes(p^f)}.$$

De plus, lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$ *avec* k *un corps algébriquement clos de caractéristique* p, $\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}$ *est inversible si et seulement si les polygones* $\mathrm{Newt}(\underline{G})$ *et* $\mathrm{PR}(\mu)$ *ont un point de contact en l'abscisse* $h - d_{\tau,i}$. *En particulier, si on définit* ${}^\mu\mathrm{Ha} = \bigotimes_{\tau,i} \mathrm{Ha}_\tau^{[i]}$, *alors on a l'équivalence entre les propositions suivantes :*

(1) $\underline{G}$ *est* μ*-ordinaire ;*
(2) ${}^\mu\mathrm{Ha}(\underline{G})$ *est inversible ;*
(3) G *est isomorphe à* X^{ord} *;*
(4) $G[p]$ *est isomorphe à* $X^{\mathrm{ord}}[p]$.

Remarque. — En fait la construction des invariants précédents ne dépend que de la p-torsion du groupe p-divisible G. Plus précisément notre construction est valable pour un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1, muni d'une action de O_L, et dont le cristal de Dieudonné est un $\mathscr{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module libre (voir remarque 2.2.2).

La construction de ces invariants $\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}$ est une généralisation de l'invariant de Hasse classique. Dans le cas non ramifié, ils sont aussi construits dans [Her16], dans [KW14] en utilisant les G-Zip et dans [GN17] dans le cas des variétés de Shimura en utilisant la cohomologie cristalline. Ici, c'est l'étude combinatoire de la filtration de Pappas-Rapoport qui permet la construction de tels invariants. Dans [Her16] la construction passe par la cohomologie cristalline et une division du Verschiebung sur le cristal ; ici on adopte une stratégie plus simple : les invariants de Hasse sont alors construit sur le cristal de Berthelot-Breen-Messing de G (cf. [BBM82]) mais évalué sur l'épaississement tautologique $(S \to S)$, qui est tué par p, et l'étape de division du Verschiebung est remplacée par une utilisation astucieuse du Verschiebung et du Frobenius.

Décrivons maintenant brièvement l'organisation de l'article. Dans la première partie, nous étudions les F-cristaux avec action, satisfaisant une condition de Pappas-Rapoport. Nous définissons les polygones de Hodge, de Newton et de Pappas-Rapoport, et prouvons des inégalités entre ces polygones. Nous prouvons également un analogue du théorème de décomposition Hodge-Newton. Dans la deuxième partie, nous définissons les invariants de Hasse pour un groupe p-divisible satisfaisant la condition de Pappas-Rapoport. Nous effectuons cette construction d'abord pour les groupes p-divisibles sur un corps parfait, puis dans le cas général. Enfin, nous donnons plusieurs caractérisations des groupes p-divisibles μ-ordinaires dans la troisième partie.

Remerciements. — Les auteurs souhaitent remercier Laurent Fargues et Vincent Pilloni pour des échanges intéressants, ainsi que le rapporteur pour sa relecture attentive de l'article.

1. Polygones

1.1. F-cristaux avec action. — Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, et soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k. Soit σ le Frobenius agissant sur $W(k)$.

Définition 1.1.1. — Un F-cristal est un couple (M,F), où M est un $W(k)$-module libre de rang fini, et $F : M \to M$ est une injection σ-linéaire. Un morphisme $\varphi : (M,F) \to (M',F')$ entre deux F-cristaux est un morphisme de $W(k)$-modules $\varphi : M \to M'$ satisfaisant à $\varphi \circ F = F' \circ \varphi$.

Définition 1.1.2. — Un F-isocristal est un couple (N,F) où N est un $W(k)[1/p]$-espace vectoriel de dimension finie, et $F : N \to N$ est une bijection σ-linéaire. Un morphisme $\varphi : (N,F) \to (N',F')$ d'isocristaux est un morphisme de $W(k)[1/p]$-espaces vectoriels $\varphi : N \to N'$ tel que $\varphi \circ F = F' \circ \varphi$.

Remarque 1.1.3. — Si l'application F est σ^a-linéaire pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$, on dit que (M,F) (respectivement (N,F)) est un σ^a-F-cristal (resp. isocristal). En particulier, à tout σ^a-F-cristal (M,F), on peut associer le σ^a-F-isocristal $(M[1/p],F)$.

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, L^{nr} l'extension maximale non-ramifiée contenue dans L et k_L le corps résiduel de L. Soient f le degré résiduel, e l'indice de ramification et π une uniformisante de L. Soient O_L et $O_{L^{nr}} = W(k_L)$ les anneaux des entiers de L et L^{nr}, et on suppose que k contient k_L (sans fixer de plongement de k_L dans k).

Définition 1.1.4. — Une action de O_L sur le F-cristal (M,F) est la donnée d'un morphisme de $\mathbb{Z}_p$-algèbres
$$O_L \longrightarrow \mathrm{End}(M,F).$$

Soit (M,F) un F-cristal avec une action de O_L. Le module M a en particulier une action de $O_{L^{nr}}$; si $\mathscr{T}$ désigne l'ensemble des plongements de $O_{L^{nr}}$ dans $W(k)$, alors on a une décomposition naturelle
$$M = \bigoplus_{\tau \in \mathscr{T}} M_\tau$$
où M_τ est le sous-module de M où $O_{L^{nr}}$ agit par τ. Le Frobenius F induit des applications σ-linéaires
$$F_\tau : M_{\sigma^{-1}\tau} \longrightarrow M_\tau.$$
Les modules $(M_\tau)_{\tau \in \mathscr{T}}$ sont donc des $W(k)$-modules libres ayant le même rang. Définissons pour $\tau \in \mathscr{T}$
$$W_{O_L,\tau}(k) := O_L \otimes_{O_{L^{nr}},\tau} W(k).$$
L'anneau $W_{O_L,\tau}(k)$ est un anneau de valuation discrète qui a pour uniformisante π. On normalise la valuation sur cet anneau par $v(p) = 1$. Le morphisme σ s'étend en un morphisme $W_{O_L,\tau}(k) \to W_{O_L,\sigma\tau}(k)$ par $\sigma(\pi) = \pi$.

Remarque 1.1.5. — De manière explicite, si $E(X) \in O_{L^{nr}}[X]$ est le polynôme minimal de π sur $O_{L^{nr}}$, alors pour tout $\tau \in \mathscr{T}$
$$W_{O_L,\tau}(k) = W(k)[X]/(\tau E)(X).$$

On a des définitions et décompositions analogues pour les isocristaux.

Proposition 1.1.6. — *Soit (M,F) un F-cristal avec une action de O_L. Alors M se décompose en $M=\oplus_{\tau\in\mathscr{T}}M_\tau$; pour tout $\tau\in\mathscr{T}$, le module M_τ est un $W_{O_L,\tau}(k)$-module libre de rang fini indépendant de τ. Soit $\tau\in\mathscr{T}$; le morphisme F_τ satisfait à*

$$F_\tau(\lambda x)=\sigma(\lambda)F_\tau(x)$$

pour tout $\lambda\in W_{O_L,\sigma^{-1}\tau}(k)$ et $x\in M_{\sigma^{-1}\tau}$.

Démonstration. — Si (M,F) est un F-cristal avec une action de O_L, alors M_τ est stable par l'action de π, donc est un $W_{O_L,\tau}(k)$-module. Puisque M est sans torsion, il est libre sur $W_{O_L,\tau}(k)$. Puisque le rang de M_τ sur $W(k)$ ne dépend pas de τ, son rang sur $W_{O_L,\tau}(k)$ non plus.

On sait déjà que l'on a la relation $F(\lambda x)=\sigma(\lambda)F(x)$ pour tout $\lambda\in W(k)$ et $x\in M_\tau$. Soit $[\pi]$ l'action de π sur M ; alors $F\circ[\pi]=[\pi]\circ F$. On en déduit que $F(\lambda x)=\sigma(\lambda)F(x)$ pour tout $\lambda\in W_{O_L,\sigma^{-1}\tau}(k)$ et $x\in M_{\sigma^{-1}\tau}$. □

Si (M,F) est un F-cristal avec une action de O_L, alors on définit le rang de ce cristal comme le rang de M_τ sur $W_{O_L,\tau}(k)$ pour n'importe quel élément $\tau\in\mathscr{T}$.

Définissons maintenant les polygones de Hodge et de Newton pour un F-cristal (M,F) avec une action de O_L. Soit $\tau\in\mathscr{T}$; d'après le théorème des diviseurs élémentaires appliqué aux modules $F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau}\subset M_\tau$, il existe des éléments $a_{\tau,1},\dots,a_{\tau,h}$ dans $W_{O_L,\tau}(k)$ tels que

$$M_\tau/F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau}\simeq\bigoplus_{i=1}^{h}W_{O_L,\tau}(k)/a_{\tau,i}W_{O_L,\tau}(k),$$

où h est le rang du cristal. On peut bien sûr supposer les valuations des $a_{\tau,i}$ ordonnées :

$$v(a_{\tau,1})\leqslant v(a_{\tau,2})\leqslant\cdots\leqslant v(a_{\tau,h}).$$

Définition 1.1.7. — Le polygone de Hodge de (M,F) relativement au plongement τ est le polygone à abscisses de rupture entières sur $[0,h]$ défini par $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(0)=0$ et

$$\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(i)=v(a_{\tau,1})+\cdots+v(a_{\tau,i})$$

pour i tel que $1\leqslant i\leqslant h$. Le polygone de Hodge de (M,F) est défini comme la moyenne des polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Hdg}_{O_L}(M,F)(i)=\frac{1}{f}\sum_{\tau\in\mathscr{T}}\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(i)$$

pour i tel que $0\leqslant i\leqslant h$.

Les points initial et terminal du polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)$ sont donc $(0,0)$ et $(h,v(\det F_\tau))$. En fixant des bases pour les modules $M_{\sigma^{-1}\tau}$ et M_τ, on peut écrire la matrice de F_τ, dont le déterminant est un élément de $W_{O_L,\tau}(k)$. La valuation de cet élément est alors bien déterminée. Si

$$M_\tau/F^fM_\tau\simeq\oplus_{i=1}^{h}W_{O_L,\tau}(k)/b_{\tau,i}W_{O_L,\tau}(k)$$

alors on notera $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau,F^f)$ le polygone convexe ayant pour pentes

$$v(b_{\tau,1}),\dots,v(b_{\tau,h}).$$

Soit (N,F) un F-isocristal sur k, muni d'une action de O_L. Soit $\tau \in \mathscr{T}$, et considérons le morphisme $F^f : N_\tau \to N_\tau$. Le couple (N_τ, F^f) est un $\sigma^f - F$-cristal. D'après la classification de Dieudonné-Manin, on peut associer à (N_τ, F^f) un polygone de Newton (voir [Kat79, § 1.3]). En effet, il existe des rationnels $r_1 < \cdots < r_k$ tels que l'on a un isomorphisme d'isocristaux

$$(N_\tau, F^f) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^k E_{r_i},$$

et E_{r_i} est un isocristal sur $W(k)$ isocline de pente r_i. De plus, puisque N_τ a une action de π, chaque module E_{r_i} est un $W_{O_L,\tau}(k)$-module. Notons q_i le rang de E_{r_i} sur $W_{O_L,\tau}(k)$; alors $\sum_{i=1}^k q_i = h$ et on définit le polygone de Newton de (N_τ, F^f) par la suite de pentes

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_h) = (\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{q_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{r_k, \ldots, r_k}_{q_k \text{ fois}}).$$

Définition 1.1.8. — Le polygone de Newton d'un isocristal (N,F) relativement au plongement τ est le polygone à abscisses de rupture entières sur $[0,h]$ défini par $\mathrm{Newt}_{O_L,\tau}(N,F)(0) = 0$ et

$$\mathrm{Newt}_{O_L,\tau}(N,F)(i) = \frac{\nu_1 + \cdots + \nu_i}{f}$$

pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant h$. Le polygone de Newton relativement à un plongement τ d'un cristal (M,F) est celui de l'isocristal $(M[1/p], F)$.

Une autre manière de voir le polygone précédent est la suivante. Effectuons une extension $K = W_{O_L,\tau}(k)[1/p][X]/(X^N - \pi)$ en ajoutant des racines de π (pour un certain entier $N \geqslant 1$ suffisamment grand), et considérons le K-espace vectoriel $N_\tau \otimes_{W_{O_L,\tau}(k)[1/p]} K$. On étend le morphisme σ à K par $\sigma(X) = X$, et on étend le Frobenius F^f sur l'espace précédent par $F^f \otimes \sigma^f$. Alors on peut supposer que la matrice de F^f agissant sur cet espace dans une certaine base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \star \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_h \end{pmatrix}$$

pour des éléments $\lambda_i \in K$ avec $v(\lambda_1) \leqslant \cdots \leqslant v(\lambda_h)$. Les pentes du polygone $\mathrm{Newt}_{O_L,\tau}(N,F)$ sont alors les valuations des éléments λ_i divisés par f. Si (N,F) contient un réseau (M,F) (par exemple si (N,F) est l'isocristal associé à un cristal (M,F)), alors en plus $v(\lambda_i) \geqslant 0$ pour tout i.

La théorie de Dieudonné-Manin montre que ce polygone est bien défini, et ne dépend pas de la base dans laquelle la matrice de F^f est écrite. On notera également $\mathrm{Newt}_{O_L}(N_\tau, F^f)$ le polygone égal à $f \cdot \mathrm{Newt}_{O_L,\tau}(N,F)$.

Proposition 1.1.9. — *Soit (N,F) un isocristal avec action de O_L. Le polygone $\mathrm{Newt}_{O_L,\tau}(N,F)$ est indépendant de τ, et sera noté $\mathrm{Newt}_{O_L}(N,F)$. C'est le O_L-polygone de Newton de (N,F).*

Démonstration. — Fixons des bases sur les modules N_τ, et soit X_τ la matrice de F^f agissant sur N_τ pour tout τ. Soit également Y_τ la matrice de $F_\tau : N_{\sigma^{-1}\tau} \to N_\tau$. Alors on a l'égalité dans $M_h(W_{O_L,\tau}(k)[1/p])$

$$X_\tau = Y_\tau (X_{\sigma^{-1}\tau})^\sigma (Y_\tau^{-1})^{\sigma^f},$$

où $(X_{\sigma^{-1}\tau})^\sigma$ est la matrice $X_{\sigma^{-1}\tau}$ à laquelle on applique σ aux coefficients, et de même pour $(Y_\tau^{-1})^{\sigma^f}$. Cela prouve que, quitte à faire un changement de base pour le module N_τ, on peut supposer que la matrice de F^f agissant sur N_τ est égale à $(X_{\sigma^{-1}\tau})^\sigma$. Les valuations des valeurs propres de X_τ et $X_{\sigma^{-1}\tau}$ sont donc les mêmes. Puisque $\sigma^{\mathbb{Z}}$ agit transitivement sur $\mathscr{T}$, on en déduit le résultat. □

Puisque le morphisme F^f agissant sur M_τ est égal au composé des morphismes $F_{\sigma^i\tau}$ pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant f$, on voit que les points initial et terminal du polygone $\mathrm{Newt}_{O_L}(M, F)$ sont les mêmes que ceux du polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M, F)$.

Exemple 1.1.10. — Si $M = W(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$, et $F = p \cdot (\sigma \otimes 1)$, alors (M, F) est un F-cristal avec action de O_L de rang 1. Les polygones de Hodge et de Newton de (M, F) sont égaux, et ont une pente égale à 1.

Remarque 1.1.11. — Étant donné $a \in \mathbb{Z}$, on peut aussi définir le polygone de Newton d'un σ^a-F-cristal.

Remarque 1.1.12. — Si $\mathrm{Newt}(M, F)$ et $\mathrm{Hdg}(M, F)$ désignent les polygones de Newton et de Hodge de (M, F) (sans prendre en compte l'action de O_L), alors les pentes de $\mathrm{Newt}(M, F)$ sont exactement celles de $\mathrm{Newt}_{O_L}(M, F)$, chacune étant comptée avec une multiplicité ef. En revanche, les pentes de $\mathrm{Hdg}(M, F)$ et $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M, F)$ ne sont pas reliées en général.

1.2. Condition de Pappas-Rapoport. — Soit (M, F) un F-cristal avec action de O_L de rang h, et soit pour tout $\tau \in \mathscr{T}$ un entier $r_\tau \geqslant 1$, ainsi que des entiers $(d_{\tau,1}, \dots, d_{\tau,r_\tau})$ compris entre 0 et h. On notera $\mu := (d_{\tau,i})_{\tau \in \mathscr{T}, 1 \leqslant i \leqslant r_\tau}$ la collection de ces entiers.

Définition 1.2.1. — La condition de Pappas-Rapoport (ou condition PR en abrégé) pour la donnée μ pour le F-cristal (M, F) consiste en une filtration pour tout $\tau \in \mathscr{T}$

$$F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau} = \mathrm{Fil}^{[0]} M_\tau \subset \mathrm{Fil}^{[1]} M_\tau \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^{[r_\tau - 1]} M_\tau \subset \mathrm{Fil}^{[r_\tau]} M_\tau = M_\tau,$$

avec

– pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant r_\tau$, $\mathrm{Fil}^{[i]} M_\tau$ est un sous-$W_{O_L,\tau}(k)$-module de M_τ,
– on a $\pi \cdot \mathrm{Fil}^{[i]} M_\tau \subset \mathrm{Fil}^{[i-1]} M_\tau$ pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant r_\tau$,
– $\mathrm{Fil}^{[i]} M_\tau / \mathrm{Fil}^{[i-1]} M_\tau$ est un k-espace vectoriel de dimension $d_{\tau,i}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r_\tau$.

Remarque 1.2.2. — Supposons que $f = 1$, $e = 2$, $pM \subset FM$, et considérons une condition de Pappas-Rapoport pour la donnée (d_1, d_2). Il existe des entiers a_1, a_2 tels que

$$\omega := M/FM \simeq (k[T]/T^2)^{a_2} \oplus (k[T]/T)^{a_1},$$

avec T agissant par π. Alors la condition de Pappas-Rapoport impose l'égalité $d_1 + d_2 = a_1 + 2a_2$, et consiste en la donnée d'un sous-espace vectoriel $\omega^{[1]}$ de dimension d_1 dans ω avec

$$\pi \cdot \omega \subset \omega^{[1]} \subset \omega[\pi].$$

Les espaces $\pi \cdot \omega$ et $\omega[\pi]$ sont de dimension respectives a_2 et $a_1 + a_2$. La condition de Pappas-Rapoport implique alors que $a_2 \leqslant d_1 \leqslant a_1 + a_2$, ce qui donne une condition sur la structure du O_L-module ω. De plus, le choix d'une condition de Pappas-Rapoport est dans ce cas une grassmannienne (il faut choisir un espace de dimension $d_1 - a_2$ dans un espace de dimension a_1).

D'une manière générale, la condition de Pappas-Rapoport impose des conditions sur la structure du $W(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module M/FM. L'espace des conditions de Pappas-Rapoport est plus compliqué, et peut être vu comme un fermé d'une variété de drapeau.

Soit $\tau \in \mathscr{T}$. Pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r_\tau$, considérons le polygone convexe défini sur $[0, h]$ ayant pour pentes 0 avec multiplicité $h - d_{\tau,i}$ et $1/e$ avec multiplicité $d_{\tau,i}$. On définit le polygone de Pappas-Rapoport $\mathrm{PR}_\tau(\mu)$ comme étant la somme de ces polygones pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant r_\tau$. De manière explicite, on a

$$\mathrm{PR}_\tau(\mu)(j) = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^{r_\tau} \max(j - h + d_{\tau,i}, 0).$$

En étudiant la longueur de $M_\tau / F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau}$ comme $W_{O_L,\tau}(k)$-module, on voit que si (M, F) est un F-cristal avec action de O_L de rang h satisfaisant la condition PR pour la donnée μ, alors $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M, F)(h) = \mathrm{PR}_\tau(\mu)(h)$. En d'autres termes, les polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M, F)$ et $\mathrm{PR}_\tau(\mu)$ ont mêmes points initial et terminal.

On définit le polygone $\mathrm{PR}(\mu)$ comme la moyenne des polygones $\mathrm{PR}_\tau(\mu)$ pour $\tau \in \mathscr{T}$. Les polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M, F)$, $\mathrm{Newt}_{O_L}(M, F)$ et $\mathrm{PR}(\mu)$ ont donc mêmes points initial et terminal.

Soit (M, F) un F-cristal avec action de O_L de rang h, et soit s un entier tel que $1 \leqslant s \leqslant h$. On définit

$$\bigwedge^s M = \bigoplus_{\tau \in \mathscr{T}} \bigwedge^s M_\tau$$

le produit extérieur $\bigwedge^s M_\tau$ étant pris sur $W_{O_L,\tau}(k)$. Le morphisme $\bigwedge^s F$ induit des morphismes σ-linéaires $\bigwedge^s M_{\sigma^{-1}\tau} \to \bigwedge^s M_\tau$. On voit donc que $(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)$ est un F-cristal avec action de O_L ; de plus il est de rang $\binom{h}{s}$.

Remarque 1.2.3. — Puisque M est un $W(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module libre de rang h, on aurait également pu définir $\bigwedge^s M$ comme le s-ième produit extérieur de M, celui-ci étant pris sur l'anneau $W(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$.

Supposons maintenant que (M,F) satisfait à la condition PR pour une certaine donnée μ. On a donc des filtrations pour $\tau\in\mathscr{T}$

$$F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau}=\mathrm{Fil}^{[0]}M_\tau\subset\mathrm{Fil}^{[1]}M_\tau\subset\cdots\subset\mathrm{Fil}^{[r_\tau-1]}M_\tau\subset\mathrm{Fil}^{[r_\tau]}M_\tau=M_\tau.$$

Définition 1.2.4. — On définit une filtration sur $\bigwedge^s M_\tau$ par

$$\mathrm{Fil}^{[is+j]}\bigwedge^s M_\tau:=\mathrm{Im}\Big(\bigwedge^{s-j}\mathrm{Fil}^{[i]}M_\tau\otimes\bigwedge^{j}\mathrm{Fil}^{[i+1]}M_\tau\longrightarrow\bigwedge^s M_\tau\Big)$$

pour i,j tels que $0\leqslant i\leqslant r_\tau-1$ et $0\leqslant j<s$. On définit également $\mathrm{Fil}^{[r_\tau s]}\bigwedge^s M_\tau:=\bigwedge^s\mathrm{Fil}^{[r_\tau]}M_\tau$.

On a donc une filtration

$$\begin{aligned}\bigwedge^s F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau}&=\mathrm{Fil}^{[0]}\bigwedge^s M_\tau\\&\subset\mathrm{Fil}^{[1]}\bigwedge^s M_\tau\subset\cdots\subset\mathrm{Fil}^{[r_\tau s-1]}\bigwedge^s M_\tau\subset\mathrm{Fil}^{[r_\tau s]}\bigwedge^s M_\tau=\bigwedge^s M_\tau.\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\pi\cdot\mathrm{Fil}^{[i]}\bigwedge^s M_\tau\subset\mathrm{Fil}^{[i-1]}\bigwedge^s M_\tau$, pour tout i tel que $1\leqslant i\leqslant r_\tau s$. De plus, il est possible de calculer la dimension des k-espaces vectoriels $\big(\mathrm{Fil}^{[i]}\bigwedge^s M_\tau\big)/\big(\mathrm{Fil}^{[i-1]}\bigwedge^s M_\tau\big)$, pour i tel que $1\leqslant i\leqslant r_\tau s$.

Proposition 1.2.5. — *Soit i un entier entre 1 et r_τ, et k un entier compris entre 0 et $s-1$. Alors la dimension sur k de $\big(\mathrm{Fil}^{[is-k]}\bigwedge^s M_\tau\big)/\big(\mathrm{Fil}^{[is-k-1]}\bigwedge^s M_\tau\big)$ est égale à*

$$\sum_{j=0}^k\binom{d_{\tau,i}}{s-j}\binom{h-d_{\tau,i}}{j}.$$

Démonstration. — Posons $N=\mathrm{Fil}^{[i]}M_\tau$, et $N_0=\mathrm{Fil}^{[i-1]}M_\tau$. Alors N et N_0 sont des $W_{O_L,\tau}(k)$-modules libres de rang h, $\pi\cdot N\subset N_0\subset N$, et le k-espace vectoriel N/N_0 est de dimension $d_{\tau,i}$. On peut donc choisir une base $(e_1,\dots,e_h)$ de N sur $W_{O_L,\tau}(k)$ telle que N_0 soit égal au module engendré par $(\pi e_1,\dots,\pi e_{d_{\tau,i}},e_{d_{\tau,i}+1},\dots,e_h)$. Le module $\bigwedge^s N$ est engendré par les éléments $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}$, avec $i_1<\cdots<i_s$. De plus, pour tout entier j tel que $0\leqslant j\leqslant s$, le module $N_j:=\mathrm{Im}\ (\bigwedge^j N_0\otimes\bigwedge^{s-j}N\to\bigwedge^s N)$ est engendré par

- $\pi^j e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}$, avec $i_1<\cdots<i_s\leqslant d_{\tau,i}$,
- $\pi^{j-1}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}$, avec $i_1<\cdots<i_{s-1}\leqslant d_{\tau,i}<i_s$,
- $\dots$
- $\pi e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}$, avec $i_1<\cdots<i_{s-j+1}\leqslant d_{\tau,i}<i_{s-j+2}<\cdots<i_s$,
- $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_s}$, avec $i_1<\cdots<i_s$ et $d_{\tau,i}<i_{s-j+1}$.

Le quotient $\big(\mathrm{Fil}^{[is-k]}\bigwedge^s M_\tau\big)/\big(\mathrm{Fil}^{[is-k-1]}\bigwedge^s M_\tau\big)$ étant égal à N_k/N_{k+1}, on en déduit le résultat. $\square$

Définissons une collection d'entier $\mu^{(s)}=(d^{(s)}_{\tau,l})_{\tau\in\mathscr{T},1\leqslant l\leqslant r_\tau s}$ par la formule

$$d^{(s)}_{\tau,is-k}=\sum_{j=0}^k\binom{d_{\tau,i}}{s-j}\binom{h-d_{\tau,i}}{j}$$

pour $\tau\in\mathscr{T}$, i tel que $1\leqslant i\leqslant r_\tau$ et k tel que $0\leqslant k\leqslant s-1$.

Corollaire 1.2.6. — *Le F-cristal $(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)$ satisfait à la condition PR pour la donnée $\mu^{(s)}$.*

Il est possible de relier les différents polygones de (M,F) à ceux de $(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)$.

Proposition 1.2.7. — *Soit (M,F) un F-cristal avec une action de O_L de rang h. On suppose que (M,F) satisfait à la condition PR pour la donnée μ. Alors on a, pour tout entier s tel que $1 \leqslant s \leqslant h$ et $\tau \in \mathscr{T}$,*

- $\mathrm{Newt}_{O_L}(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)(1) = \mathrm{Newt}_{O_L}(M,F)(s)$,
- $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)(1) = \mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(s)$,
- $\mathrm{Hdg}_{O_L}(\bigwedge^s M_\tau, \bigwedge^s F^f)(1) = \mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(s)$,
- $\mathrm{PR}_\tau(\mu^{(s)})(1) = \mathrm{PR}_\tau(\mu)(s)$.

En particulier, on en déduit

$$\mathrm{Hdg}_{O_L}(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)(1) = \mathrm{Hdg}_{O_L}(M,F)(s) \text{ et } \mathrm{PR}(\mu^{(s)})(1) = \mathrm{PR}(\mu)(s)$$

pour tout s tel que $1 \leqslant s \leqslant h$.

Démonstration. — Montrons la première égalité. Soit τ un élément de $\mathscr{T}$, et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ les valeurs propres de F^f agissant sur M_τ dans une certaine base. Si on ordonne les valeurs propres λ_i de telle sorte que $v(\lambda_1) \leqslant \cdots \leqslant v(\lambda_h)$, alors $\mathrm{Newt}_{O_L}(M,F)(s) = (v(\lambda_1) + \cdots + v(\lambda_s))/f$. Les valeurs propres de $\bigwedge^s F^f$ agissant sur M_τ sont $\lambda_{i_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_{i_s}$ avec $i_1 < \cdots < i_s$. D'où

$$\mathrm{Newt}_{O_L}(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)(1) = \frac{v(\lambda_1 \dots \lambda_s)}{f} = \mathrm{Newt}_{O_L}(M,F)(s).$$

Cela prouve le premier point. Pour le deuxième, étudions le morphisme $F_\tau : M_{\sigma^{-1}\tau} \to M_\tau$. Quitte à faire des changements de base pour ces deux modules, on peut supposer que la matrice de F_τ est diagonale, avec coefficients $a_1, \dots, a_h$. On ordonne les a_i de telle sorte que $v(a_1) \leqslant \cdots \leqslant v(a_h)$. Alors $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(s) = v(a_1) + \cdots + v(a_s)$. La matrice de $\bigwedge^s F_\tau$ est également diagonale (pour certaines bases de $\bigwedge^s M_{\sigma^{-1}\tau}$ et $\bigwedge^s M_\tau$), avec coefficients $a_{i_1} \dots a_{i_s}$, pour $i_1 < \cdots < i_s$. On en déduit que

$$\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)(1) = v(a_1 \dots a_s) = \mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(s).$$

Pour la troisième égalité, on peut raisonner de même. Soit $(e_1, \dots, e_h)$ et $(f_1, \dots, f_h)$ deux bases de M_τ telles que dans ces bases la matrices de F^f est donnée par $a_1, \dots, a_h$ avec $v(a_1) \leqslant \cdots \leqslant v(a_h)$, et $\mathrm{Hdg}_{\mathscr{O}_L}(M_\tau, F^f)(s) = v(a_1) + \cdots + v(a_s)$. Alors dans les bases induites naturelles de $\bigwedge^s M_\tau$, $\bigwedge^s F^f$ est diagonale de coefficient $a_{i_1} \dots a_{i_s}$ avec $i_1 < \cdots < i_s$, et donc $\mathrm{Hdg}_{O_L}(\bigwedge^s M_\tau, \bigwedge^s F^f)(1) = v(a_1 \dots a_s) = v(a_1) + \cdots + v(a_s)$.

Montrons maintenant la quatrième égalité. La quantité $\mathrm{PR}_\tau(\mu)(1)$ est égale au nombre de $d_{\tau,i}$ égaux à h divisés par e. Pour calculer le terme $\mathrm{PR}_\tau(\mu^{(s)})(1)$, il suffit donc de déterminer quels éléments $d^{(s)}_{\tau,k}$ sont égaux à $\binom{h}{s}$.

Fixons un entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r_\tau$. Si k est compris entre 0 et $s-1$, nous affirmons que $d^{(s)}_{\tau,is-k} = \binom{h}{s}$ si et seulement si $k \geqslant h - d_{\tau,i}$. En effet, si $k \geqslant h - d_{\tau,i}$, on a

$$d^{(s)}_{\tau,is-k} = \sum\nolimits_{j=0}^{h-d_{\tau,i}} \binom{d_{\tau,i}}{s-j}\binom{h-d_{\tau,i}}{j} = \binom{h}{s},$$

la dernière égalité étant obtenue en développant $(X+Y)^h = (X+Y)^{d_{\tau,i}}(X+Y)^{h-d_{\tau,i}}$. Si $k < h - d_{\tau,i}$, nous voulons prouver que

$$d^{(s)}_{\tau,is-k} = \sum\nolimits_{j=0}^{k} \binom{d_{\tau,i}}{s-j}\binom{h-d_{\tau,i}}{j} < \sum\nolimits_{j=0}^{h-d_{\tau,i}} \binom{d_{\tau,i}}{s-j}\binom{h-d_{\tau,i}}{j}.$$

Il suffit pour cela de prouver qu'il existe un entier j avec $k+1 \leqslant j \leqslant h - d_{\tau,i}$ et $0 \leqslant s-j \leqslant d_{\tau,i}$. Puisque l'on a $h - d_{\tau,i} \geqslant s - d_{\tau,i}$ et $k+1 \leqslant s$, cela est en effet possible. Le nombre d'entiers k tels que $0 \leqslant k \leqslant s-1$ et $d^{(s)}_{\tau,is-k} = \binom{h}{s}$ est donc égal à $\max(s-h+d_{\tau,i}, 0)$. On en déduit que

$$\mathrm{PR}_\tau(\mu^{(s)})(1) = \frac{1}{e}\sum_{i=1}^{r_\tau} \max(s-h+d_{\tau,i},0) = \mathrm{PR}_\tau(\mu)(s). \qquad \square$$

1.3. Propriétés. — Si (M,F) est un F-cristal avec une action de O_L de rang h satisfaisant la condition PR pour une donnée μ, alors nous avons construit trois polygones : le polygone de Hodge, le polygone de Newton et le polygone de Pappas-Rapoport. Nous avons de plus des relations entre ces trois polygones. Si P_1 et P_2 sont deux polygones à abscisses de ruptures entières définis sur $[0,h]$, on dit que $P_1 \geqslant P_2$ si $P_1(i) \geqslant P_2(i)$ pour i tel que $0 \leqslant i \leqslant h$.

Théorème 1.3.1. — *Soit (M,F) un F-cristal avec une action de O_L de rang h satisfaisant la condition PR pour une donnée μ. Soit $\tau \in \mathscr{T}$; alors on a les relations*

$$\mathrm{Newt}_{O_L}(M,F) \geqslant \frac{1}{f}\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f) \geqslant \mathrm{Hdg}_{O_L}(M,F) \geqslant \mathrm{PR}(\mu).$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.2.7, quitte à remplacer (M,F) par $(\bigwedge^s M, \bigwedge^s F)$ pour s tel que $1 \leqslant s \leqslant h$, il suffit de montrer les inégalités précédentes en 1. Fixons un élément $\tau \in \mathscr{T}$. On rappelle que $\mathrm{Newt}_{O_L}(M,F) = \mathrm{Newt}_{O_L}(M_\tau, F^f)/f$ est le polygone de Newton obtenu à partir du morphisme F^f agissant sur M_τ. Nous allons montrer la première inégalité. On peut supposer que la matrice de F^f agissant sur M_τ est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ satisfaisant à $v(\lambda_1) \leqslant \dots \leqslant v(\lambda_h)$. Si on écrit $(z_{i,j})$ les coefficients de F^f, alors

$$\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(1) = \inf_{i,j} v(z_{i,j}) \leqslant v(\lambda_1) = \mathrm{Newt}_{O_L}(M_\tau, F^f)(1).$$

Nous allons maintenant montrer que $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(1) \geqslant f \cdot \mathrm{Hdg}_{O_L}(M,F)(1)$. Fixons des bases pour les modules $M_{\tau'}$ (sur $W_{O_L,\tau'}(k)$) pour tout $\tau' \in \mathscr{T}$, et soit $Y_{\tau'} = (y_{\tau',i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$ la matrice de $F_{\tau'} : M_{\sigma^{-1}\tau'} \to M_{\tau'}$. Alors la matrice de F^f agissant sur M_τ est

$$X_\tau = Y_\tau^{\sigma^{f-1}} \cdot Y_{\sigma^{-1}\tau}^{\sigma^{f-2}} \cdot \dots \cdot Y_{\sigma^2\tau}^{\sigma} \cdot Y_{\sigma\tau},$$

où $Y_{\sigma^i\tau}^{\sigma^{i-1}}$ est la matrice avec coefficients $(\sigma^{i-1}(y_{\sigma^i\tau,i,j}))_{i,j}$. Soit $(x_{\tau,i,j})_{i,j}$ les coefficients de la matrice de X_τ. Alors on a $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(1) = \inf_{i,j} v(x_{\tau,i,j})$ et $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau'}(M,F)(1) = \inf_{i,j} v(y_{\tau',i,j})$ pour tout $\tau' \in \mathscr{T}$. Cela prouve que

$$\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(1) \geqslant f \cdot \mathrm{Hdg}_{O_L}(M,F)(1).$$

Montrons enfin que $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M,F)(1) \geqslant \mathrm{PR}(\mu)(1)$. Pour cela, nous allons montrer que $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(1)$ est supérieur à $\mathrm{PR}_\tau(\mu)(1)$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. Soit donc τ un élément de $\mathscr{T}$, et $j = e\,\mathrm{PR}_\tau(\mu)(1)$. Alors j est égal au nombre de $d_{\tau,k}$ égaux à h. On en déduit que $F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau} \subset \pi^j M_\tau$. Or on peut trouver une base $(e_1,\dots,e_h)$ de M_τ telle que $(\pi^{a_1}e_1,\dots,\pi^{a_h}e_h)$ soit une base de $F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau}$, et $e\,\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(1) = \min_k a_k$. L'inclusion $F_\tau M_{\sigma^{-1}\tau} \subset \pi^j M_\tau$ implique que $a_k \geqslant j$ pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant h$, et donc

$$e\,\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)(1) \geqslant \; e\,\mathrm{PR}_\tau(\mu)(1). \qquad \square$$

Le polygone de Newton est donc toujours au-dessus du polygone de Hodge. De plus, le fait que ces deux polygones ont un point commun implique une condition très forte sur le cristal. En effet, le théorème de décomposition Hodge-Newton reste valable dans ce cadre. On rappelle que les points du polygone de Hodge à abscisse entière ont une ordonnée multiple de $1/(ef)$.

Théorème 1.3.2. — *Soit (M,F) un F-cristal avec action de O_L de rang h. Soient $a_{\tau,1} \leqslant \cdots \leqslant a_{\tau,h}$ les pentes du polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M,F)$ pour $\tau \in \mathscr{T}$ et $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_h$ celles de $\mathrm{Newt}_{O_L}(M,F)$. On suppose qu'il existe un point $(i,j) \in \mathbb{N} \times \frac{1}{ef}\mathbb{N}$ qui est un point de rupture du polygone de Newton $\mathrm{Newt}_{O_L}(M,F)$ qui se trouve également sur le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M,F)$. Alors il existe une unique décomposition de (M,F) en somme directe $(M,F) = (M_1,F_1) \oplus (M_2,F_2)$, où (M_i,F_i) sont des F-cristaux avec action de O_L, et tels que*

– *M_1 est de rang i, le polygone $\mathrm{Newt}_{O_L}(M_1,F_1)$ a pour pentes $\lambda_1,\dots,\lambda_i$ et le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_1,F_1)$ a pour pentes $a_{\tau,1},\dots,a_{\tau,i}$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$.*

– *M_2 est de rang $h-i$, le polygone $\mathrm{Newt}_{O_L}(M_2,F_2)$ a pour pentes $\lambda_{i+1},\dots,\lambda_h$ et le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_2,F_2)$ a pour pentes $a_{\tau,i+1},\dots,a_{\tau,h}$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$.*

Démonstration. — Ce théorème est analogue au théorème obtenu par Katz ([Kat79, th. 1.6.1]) dans le cas des cristaux sans action, et une démonstration analogue est possible. À l'initiative du rapporteur, nous donnons une autre démonstration plus simple.

L'unicité de la décomposition est conséquence de la décomposition de l'isocristal $(M[1/p],F)$: puisque le point(i,j) est un point de rupture du polygone de Newton, on a une décomposition

$$M\,[1/p] = D_1 \oplus D_2$$

tels que D_1 et D_2 sont stables par F et par O_L. L'isocristal avec action de O_L (D_1,F) (resp. (D_2,F)) est de rang i (resp. $h-i$), et son polygone de Newton a pour pentes $\lambda_1,\dots,\lambda_i$ (resp. $\lambda_{i+1},\dots,\lambda_h$). Si le cristal (M,F) admet une décomposition comme dans le théorème, alors on a nécessairement $M_1 = D_1 \cap M$ et $M_2 = D_2 \cap M$.

Prouvons donc l'existence. Posons $M_1 = D_1 \cap M$; nous voulons démontrer l'existence d'un supplémentaire de M_1 stable par F. Soit $\tau \in \mathscr{T}$, alors on a $M_{1,\tau} \subset M_\tau$, et la matrice de F^f agissant sur M_τ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

la base étant adaptée à l'inclusion $M_{1,\tau} \subset M_\tau$. On veut trouver un supplémentaire de $M_{1,\tau}$ dans M_τ ; il suffit de prouver que les vecteurs colonnes de Y sont dans l'image de A. Quitte à faire un changement de base au départ et à l'arrivée pour la matrice A, on peut supposer que celle-ci est diagonale avec coefficients $x_1, \dots, x_i$. De plus,

$$\begin{aligned} fj = f \cdot \mathrm{Newt}_{O_L}(M_1, F_1)(i) = \sum_{k=1}^{i} v(x_k) &\geqslant \mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(i) \\ &\geqslant f \cdot \mathrm{Hdg}_{O_L}(M, F)(i) = fj \end{aligned}$$

d'après le théorème 1.3.1 et l'hypothèse sur le polygone de Hodge. On en déduit que $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(i) = fj = \sum_{k=1}^{i} v(x_k)$. Écrivons maintenant

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \end{pmatrix}$$

les coordonnées d'un vecteur colonne de Y dans la base précédente. Puisque la valuation des mineurs de taille i de la matrice de F^f est supérieure à $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\tau, F^f)(i)$, on en déduit que $v(y_j) \geqslant v(x_j)$ si $1 \leqslant j \leqslant i$.

Cela prouve qu'il existe une décomposition en somme directe $M_\tau = M_{1,\tau} \oplus M_{2,\tau}$. Définissons alors $M_k = \oplus_{\tau \in \mathscr{T}} M_{\tau,k}$ pour $k \in \{1, 2\}$. Par l'unicité de cette décomposition, les espaces M_1 et M_2 sont stables par le Frobenius. Nous avons déjà obtenu le résultat pour les pentes de Newton. Pour tout $\tau \in \mathscr{T}$ le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_1, F_1)$ est au-dessus du polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M, F)$ restreint à $[0, i]$. De plus,

$$\begin{aligned} fj = f \cdot \mathrm{Newt}_{O_L}(M_1, F_1)(i) &\geqslant \sum_{\tau \in \mathscr{T}} \mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_1, F_1)(i) \\ &\geqslant \sum_{\tau \in \mathscr{T}} \mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M, F)(i) = fj. \end{aligned}$$

Si $\tau \in \mathscr{T}$, on en déduit que $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_1, F_1)(i) = \mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M, F)(i)$. Soient $b_{\tau,1}, \dots, b_{\tau,i}$ les pentes du polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_1, F_1)$. Alors $b_{\tau,j} \geqslant a_{\tau,j}$ si $1 \leqslant j \leqslant i$, et on a de plus

$$\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_1, F_1)(i) = \sum_{j=1}^{i} b_{\tau,j} \geqslant \sum_{j=1}^{i} a_{\tau,j} = \mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M, F)(i),$$

ce qui permet de conclure. □

2. Invariants de Hasse μ-ordinaires

2.1. Construction sur un corps parfait. — On suppose toujours donné une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, et soit k un corps parfait de caractéristique p contenant le corps résiduel de L. Soit $G \to \operatorname{Spec}(k)$ un groupe p-divisible, et on suppose G muni d'une action de O_L, c'est à dire qu'il existe un morphisme $\mathbb{Z}_p$-linéaire

$$\iota_G : O_L \longrightarrow \operatorname{End}(G).$$

Soit (M, F, V) le module de Dieudonné (contravariant) de G ([Fon77, partie III]), alors (M, F) est un F-cristal avec action de O_L au sens de la section précédente. En particulier on peut associer à (M, F), et donc à G, des polygones de Hodge et Newton, $\operatorname{Hdg}_{O_L}(G), \operatorname{Newt}_{O_L}(G)$ qui ont même points initial $(0,0)$ et mêmes points terminaux, et tels que le polygone de Newton est au-dessus du polygone de Hodge.

L'algèbre de Lie duale ω_G de G est un k-espace vectoriel muni d'une action de O_L, et se décompose en

$$\omega_G = \bigoplus_{\tau \in \mathscr{T}} \omega_{G,\tau}$$

On rappelle que $\mathscr{T}$ est l'ensemble des plongements de la sous-extension non-ramifiée maximale L^{nr} de $L/\mathbb{Q}_p$ dans $W(k)[1/p]$, et l'anneau des entiers de L^{nr} agit par τ sur $\omega_{G,\tau}$. On se donne une collection d'entiers $\mu = (d_{\tau,i})_{\tau \in \mathscr{T}, 1 \leqslant i \leqslant e}$. La condition de Pappas-Rapoport pour le groupe p-divisible G est définie comme suit.

Définition 2.1.1. — La condition de Pappas-Rapoport (PR en abrégé) pour la donnée μ pour G est la donnée d'une filtration pour tout $\tau \in \mathscr{T}$

$$0 = \omega_{G,\tau}^{[0]} \subset \omega_{G,\tau}^{[1]} \subset \omega_{G,\tau}^{[2]} \subset \cdots \subset \omega_{G,\tau}^{[e]} = \omega_{G,\tau}$$

telle que

– $\omega_{G,\tau}^{[i]}$ est un sous-espace vectoriel de $\omega_{G,\tau}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ et $\tau \in \mathscr{T}$.
– $\pi \cdot \omega_{G,\tau}^{[i]} \subset \omega_{G,\tau}^{[i-1]}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ et $\tau \in \mathscr{T}$.
– si on note $\operatorname{Gr}^{[i]} \omega_{G,\tau} := \omega_{G,\tau}^{[i]} / \omega_{G,\tau}^{[i-1]}$, alors $\dim_k \operatorname{Gr}^{[i]} \omega_{G,\tau} = d_{\tau,i}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ et $\tau \in \mathscr{T}$.

Comme $M/FM \simeq \omega_G$, la condition précédente est équivalente au fait que le F-cristal (M, F) (le module de Dieudonné de G) satisfait à la condition de Pappas-Rapoport pour la donnée μ.

On souhaite définir des sections de certaines puissances du faisceau ω_G. Pour ce faire, il est possible de travailler avec le module de Dieudonné M en utilisant l'isomorphisme précédent. Cependant, dans le cas général, nous serons amené à utiliser le cristal de Dieudonné de G et par souci de clarté, nous travaillerons également avec le cristal de Dieudonné dans cette partie.

Détaillons le lien entre cristal et module de Dieudonné. Soit D le cristal de Dieudonné ([BBM82, § 3.3]) évalué sur l'anneau $W(k)$ (muni de ses puissances divisées canoniques). C'est un $W(k)$-module libre muni d'une action de O_L, et il est relié simplement au module de Dieudonné usuel par la formule $D \simeq M^{(\sigma)}$, où l'exposant signifie un twist par le Frobenius ([BBM82, th. 4.2.14]).

Le module D se décompose en $D = \oplus_{\tau\in\mathscr{T}} D_\tau$; de plus le Frobenius induit des morphismes σ-linéaires $F_\tau : D_{\sigma^{-1}\tau} \to D_\tau$, et le Verschiebung des morphismes σ^{-1}-linéaires $V_\tau : D_\tau \to D_{\sigma^{-1}\tau}$. Ces morphismes satisfont à $F_\tau \circ V_\tau = p\,\mathrm{Id}_{D_\tau}$ et $V_\tau \circ F_\tau = p\,\mathrm{Id}_{D_{\sigma^{-1}\tau}}$. De plus, on a $VD/pD \simeq \omega_G$, et $V_{\sigma\tau}D_{\sigma\tau}/pD_\tau \simeq \omega_{G,\tau}$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$.

On note, pour tout $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$,

$$\mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau = \phi_\tau^{-1}(\omega_{G,\tau}^{[i]}),$$

où $\phi_\tau : D_\tau \to D_\tau/pD_\tau$ est la réduction modulo p, et où on voit $\omega_{G,\tau}$ comme un sous objet de D_τ/pD_τ, égal à $V_{\sigma\tau}D_{\sigma\tau}/pD_\tau$. En particulier, $\mathrm{Fil}^{[e]} D_\tau = V_{\sigma\tau}D_{\sigma\tau}$ et $\mathrm{Fil}^{[0]} D_\tau = pD_\tau$. La condition sur π sur l'algèbre de Lie assure que $\pi^j(\mathrm{Fil}^{[j]} D_\tau) \subset pD_\tau$ pour tout j,τ. Comme D_τ est un $W_{O_L,\tau}(k)$-module libre, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 2.1.2. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $0 \leqslant i \leqslant e$. Alors $\mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau \subset \pi^{e-i} D_\tau$.*

On va construire des morphismes sur des puissances extérieures des modules précédents. Si $\tau \in \mathscr{T}$ et d est un entier plus grand que 1, on considère le module $\bigwedge^d D_\tau$, le produit extérieur étant pris sur $W_{O_L,\tau}(k)$ (ce sera le cas de tous les produits extérieurs dans cette section). Puisque D_τ est un $W_{O_L,\tau}(k)$-module libre, on a en particulier une inclusion, pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$, $\bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau \subset \bigwedge^d D_\tau$.

Avant de poursuivre, commençons par le lemme suivant.

Lemme 2.1.3. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$, M un $W_{O_L,\tau}(k)$-module libre de rang fini r et $N \subset M$ un sous-module libre. On suppose que $\pi M \subset N$, et notons $\dim_k M/N = g$. Alors pour $d \in \mathbb{N}$, on a $\pi^{\min(d,g)} \bigwedge^d M \subset \bigwedge^d N$.*

Preuve. — Il existe une base $(e_1, \ldots, e_r)$ de M tel que $(\pi e_1, \ldots, \pi e_g, e_{g+1}, \ldots, e_r)$ soit une base de N. Si $d \leqslant g$ le résultat est évident ; supposons donc $d > g$. Alors $\bigwedge^d M$ est engendré par les images des tenseurs élémentaires $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d}$, avec $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_d \leqslant r$. En particulier, $|\{k : j_k \leqslant g\}| \leqslant g$ et donc $\pi^g(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d}) \in \bigwedge^d N$. On en déduit le résultat. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.4. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$. La multiplication par $\pi^{\min(d,d_{\tau,i})}$ envoie $\bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau$ dans $\bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[i-1]} D_\tau$.*

Proposition 2.1.5. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$ et $d \geqslant 1$ un entier. Alors il existe une application σ^{-1}-linéaire $\zeta_\tau^d : \bigwedge^d D_{\sigma\tau} \to \bigwedge^d D_\tau$ telle que, si $k_{\tau,d} = \sum_{i=1}^e \max(d - d_{\tau,i}, 0)$, alors $\pi^{k_{\tau,d}}\zeta_\tau^d = \bigwedge^d V_{\sigma\tau}$.*

Démonstration. — En effet, l'application

$$\bigwedge^d V_{\sigma\tau} : \bigwedge^d D_{\sigma\tau} \longrightarrow \bigwedge^d D_\tau$$

a son image dans $\bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[e]} D_\tau$. D'après le corollaire précédent, pour tout $i\in\{1,\dots,e\}$, l'application $\pi^{\min(d,d_{\tau,i})}$ envoie $\bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau$ dans $\bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[i-1]} D_\tau$. En particulier, on peut considérer la composée suivante, notée ζ_τ^d,

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^d D_{\sigma\tau} \arrow[r, "\bigwedge^d V_{\sigma\tau}"] & \bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[e]} D_\tau \arrow[d, "\pi^{\min(d,d_{\tau,e})}"] & \bigwedge^d D_\tau \\
& \bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[e-1]} D_\tau \arrow[d, dashed, "\pi^{\min(d,d_{\tau,2})}\circ\cdots\circ\pi^{\min(d,d_{\tau,e-1})}"'] & \\
& \bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[1]} D_\tau \arrow[d, "\pi^{\min(d,d_{\tau,1})}"'] & \\
& \bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[0]} D_\tau \arrow[uuur, "1/\pi^{ed}"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, $\bigwedge^d \mathrm{Fil}^{[0]} D_\tau = \pi^{ed}\bigwedge^d D_\tau$ est un sous-module d'un $W_{O_L,\tau}(k)$-module libre, on peut donc diviser par π^{ed} et ainsi construire l'application composée précédente

$$\zeta_\tau^d : \bigwedge^d D_{\sigma\tau} \longrightarrow \bigwedge^d D_\tau.$$

Finalement, on a multiplié $\bigwedge^d V_{\sigma\tau}$ par $\pi^{\min(d,d_{\tau,i})}$ pour tout i, puis divisé par π^{ed}, ce qui est bien ce qui était annoncé. $\square$

Fixons un élément $\tau\in\mathscr{T}$, et i un entier compris entre 1 et e tel que $d_{\tau,i}\neq 0$. Notre but est de construire une application $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau \to \bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau$ à partir de $V^f : \bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau \to \bigwedge^{d_{\tau,i}} D_\tau$, et en divisant cette application par une puissance optimale de π, lorsque $d_{\tau,i}$ est non nul. Partant de $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau$, plutôt que d'appliquer directement V, on peut composer les applications de descente dans la filtration, données par le corollaire 2.1.4, et donc considérer alors la flèche suivante

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} D_\tau \arrow[d, "\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,i})}=\pi^{d_{\tau,i}}"'] & \bigwedge^{d_{\tau,i}} D_\tau \\
\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i-1]} D_\tau \arrow[d, dashed, "\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,2})}\circ\cdots\circ\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,i-1})}"'] & \\
\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[1]} D_\tau \arrow[d, "\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,1})}"'] & \\
\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[0]} D_\tau \arrow[uuur, "1/\pi^{ed_{\tau,i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Cette composée correspond à une division par $\pi^{ed_{\tau,i}-\sum_{j\leqslant i}\min(d_{\tau,i},d_{\tau,j})}$, et nous noterons $\mathrm{Div}_{\tau,i}$ cette application. Nous pouvons alors composer celle-ci avec les applications $\zeta_{\tau'}^{d_{\tau,i}}$ construites dans la proposition 2.1.5. Plus précisément, on peut étudier le morphisme

$$(\bigwedge^{d_{\tau,i}} V_{\sigma\tau})\circ\zeta_{\sigma\tau}^{d_{\tau,i}}\circ\cdots\circ\zeta_{\sigma^{-1}\tau}^{d_{\tau,i}}\circ\mathrm{Div}_{\tau,i} : \bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau \longrightarrow \bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[e]}D_\tau.$$

Nous allons enfin utiliser la multiplication par une puissance de π pour arriver dans $\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau$. Notons $\mathrm{Mul}_{\tau,i}$ l'application composée

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[e]}D_\tau \arrow[d, "\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,e})}"'] \\
\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[e-1]}D_\tau \arrow[d, dashed, "\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,i+2})}\circ\cdots\circ\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,e-1})}"] \\
\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i+1]}D_\tau \arrow[d, "\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau,i+1})}"'] \\
\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau
\end{tikzcd}$$

Cette application correspond à une multiplication par $\pi^{\sum_{j>i}\min(d_{\tau,i},d_{\tau,j})}$. Définissons $HA_\tau^{[i]} : \bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau \to \bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau$ l'application composée égale à

$$\mathrm{Mul}_{\tau,i}\circ(\bigwedge^{d_{\tau,i}} V_{\sigma\tau})\circ\zeta_{\sigma\tau}^{d_{\tau,i}}\circ\cdots\circ\zeta_{\sigma^{-1}\tau}^{d_{\tau,i}}\circ\mathrm{Div}_{\tau,i}\,.$$

Théorème 2.1.6. — *Pour tout $\tau\in\mathscr{T}$ et i tel que $1\leqslant i\leqslant e$, tels que $d_{\tau,i}\neq 0$, il existe une application σ^{-f}-linéaire*

$$HA_\tau^{[i]} : \bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau \longrightarrow \bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau$$

telle que $\pi^{\sum_{j,\tau'}\max(d_{\tau,i}-d_{\tau',j},0)}HA_\tau^{[i]} = \bigwedge^{d_{\tau,i}}V^f$. De plus, cette application passe au quotient en une application σ^{-f}-linéaire

$$\mathrm{Ha}_\tau^{[i]} : \det\mathrm{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau} \longrightarrow \det\mathrm{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}.$$

Démonstration. — Rappelons que pour $\tau'\in\mathscr{T}$, l'application $\zeta_{\tau'}^{d_{\tau,i}}$ est égale à $\bigwedge^{d_{\tau,i}}V_{\sigma\tau'}$ divisé par $\pi^{k_{\tau',d_{\tau,i}}}$, avec

$$k_{\tau',d_{\tau,i}} = \sum_{j=1}^{e}\max(d_{\tau,i}-d_{\tau',j},0).$$

L'application $\mathrm{Div}_{\tau,i}$ correspond à une division par $\pi^{ed_{\tau,i}-\sum_{j\leqslant i}\min(d_{\tau,i},d_{\tau,j})}$, et $\mathrm{Mul}_{\tau,i}$ à une multiplication par $\pi^{\sum_{j>i}\min(d_{\tau,i},d_{\tau,j})}$. Finalement, l'application $HA_\tau^{[i]}$ est égale à $\bigwedge^{d_{\tau,i}} V^f$ divisé par π^K, avec

$$\begin{aligned}K &= \sum_{\tau'\neq\tau}\sum_{j=1}^{e}\max(d_{\tau,i}-d_{\tau',j},0)+ed_{\tau,i}-\sum_{j=1}^{i}\min(d_{\tau,i},d_{\tau,j})-\sum_{j=i+1}^{e}\min(d_{\tau,i},d_{\tau,j})\\ &= \sum_{\tau'\in\mathscr{T}}\sum_{j=1}^{e}\max(d_{\tau,i}-d_{\tau',j},0).\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned}x\in\operatorname{Ker}\Big(&\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Fil}^{[i]}D_\tau\longrightarrow\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}\Big)\\ &=\operatorname{Im}\Big(\operatorname{Fil}^{[i-1]}D_\tau\otimes\bigwedge^{d_{\tau,i}-1}\operatorname{Fil}^{[i]}D_\tau\longrightarrow\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Fil}^{[i]}D_\tau\Big).\end{aligned}$$

La première application utilisée pour définir $\operatorname{Div}_{\tau,i}$ est la multiplication par

$$\pi^{d_{\tau,i}}:\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Fil}^{[i]}D_\tau\longrightarrow\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Fil}^{[i-1]}D_\tau.$$

L'image de x par cette application est donc dans $\pi\cdot\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Fil}^{[i-1]}D_\tau$, et l'image de x par $HA_\tau^{[i]}$ est dans $\pi\cdot\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Fil}^{[i]}D_\tau$. Puisque $\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}$ est tué par π, on en déduit que l'application $HA_\tau^{[i]}$ passe au quotient et définit une application σ^{-f}-linéaire

$$\operatorname{Ha}_\tau^{[i]}:\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}\longrightarrow\bigwedge^{d_{\tau,i}}\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}.\qquad\square$$

L'application précédente est construite à l'aide de V^f, que l'on divise par une certaine puissance de π. Nous verrons dans la section 3 que cette division est optimale, c'est-à-dire qu'il existe des groupes p-divisibles (avec condition PR pour μ) pour lesquels l'application $\operatorname{Ha}_\tau^{[i]}$ est non nulle.

Définition 2.1.7. — Soit $\tau\in\mathscr{T}$ et i tels que $1\leqslant i\leqslant e$ et $d_{\tau,i}=0$. On pose, par convention,

$$\det\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}=k,$$

et on définit $\operatorname{Ha}_\tau^{[i]}:\det\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}\to\det\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}$ comme l'application σ^{-f}.

On dispose donc d'un faisceau inversible $\det\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}$ sur k, et l'application $\operatorname{Ha}_\tau^{[i]}$ induit un morphisme linéaire $\det\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau}\to(\det\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau})^{\otimes p^f}$, et donc une section du faisceau $(\det\operatorname{Gr}^{[i]}\omega_{G,\tau})^{\otimes(p^f-1)}$ sur $\operatorname{Spec}k$. Le produit de ces sections donne une section du faisceau $(\det\omega_G)^{\otimes(p^f-1)}$.

Définition 2.1.8. — Soit G un groupe p-divisible sur k muni d'une action de $\mathscr{O}_L$. Le produit des sections construites précédemment permet de définir une section

$${}^{\mu}\operatorname{Ha}(G)=\bigotimes_{\tau\in\mathscr{T},1\leqslant i\leqslant e}\operatorname{Ha}_\tau^{[i]}\in H^0(k,\det(\omega_G)^{p^f-1}),$$

appelée μ-invariant de Hasse de G.

2.2. Cas général. — Soit S un k_L-schéma, et soit $G \to S$ un groupe p-divisible tronqué d'échelon 1 (ou pour le dire plus rapidement, un $\mathscr{BT}_1$) de hauteur constante sur S. On suppose G muni d'une action de O_L, et soit ω_G le faisceau conormal de G. Via le morphisme structural de S, on peut identifier $\mathscr{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(O_{L^{nr}}, W(k))$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(k_L, \mathscr{O}_S)$, ce que l'on fait désormais. Le faisceau ω_G est muni d'une action de O_L, et se décompose donc en $\omega_G = \oplus_{\tau\in\mathscr{T}}\omega_{G,\tau}$, avec $O_{L^{nr}}$ agissant par τ via l'identification précédente sur $\omega_{G,\tau}$. Les faisceaux $\omega_{G,\tau}$ sont localement libres. On rappelle que l'on s'est donné une collection d'entiers $\mu = (d_{\tau,i})_{\tau\in\mathscr{T},1\leqslant i\leqslant e}$, et on supposera que G satisfait à la condition de Pappas-Rapoport suivante.

Définition 2.2.1. — La condition de Pappas-Rapoport (PR en abrégé) pour la donnée μ pour G consiste en la donnée d'une filtration pour tout $\tau \in \mathscr{T}$
$$0 = \omega_{G,\tau}^{[0]} \subset \omega_{G,\tau}^{[1]} \subset \omega_{G,\tau}^{[2]} \subset \cdots \subset \omega_{G,\tau}^{[e]} = \omega_{G,\tau}$$
telle que

– $\omega_{G,\tau}^{[i]}$ est un sous-faisceau localement facteur direct de $\omega_{G,\tau}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ et $\tau \in \mathscr{T}$.

– $\pi \cdot \omega_{G,\tau}^{[i]} \subset \omega_{G,\tau}^{[i-1]}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ et $\tau \in \mathscr{T}$.

– si on note $\mathrm{Gr}^{[i]}\,\omega_{G,\tau} := \omega_{G,\tau}^{[i]}/\omega_{G,\tau}^{[i-1]}$, alors $\mathrm{Gr}^{[i]}\,\omega_{G,\tau}$ est localement libre de rang $d_{\tau,i}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ et $\tau \in \mathscr{T}$.

Regardons $\mathscr{E}$ l'évaluation du cristal de Berthelot-Breen-Messing (contravariant) de G sur l'épaississement tautologique $S \overset{\mathrm{id}}{\to} S$ ([BBM82, §3.3]). Alors $\mathscr{E}$ est est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang constant muni d'une action de O_L. On suppose de plus que l'hypothèse suivante est satisfaite.

(BTO) $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module localement libre.

Remarque 2.2.2. — L'hypothèse (BTO) n'est pas automatique, le groupe G pouvant par exemple être de π-torsion. Elle est cependant satisfaite si G est la p-torsion d'un groupe p-divisible muni d'une action de O_L ([FGL08, lem. B.1.1]).

Lorsque l'on a G_∞ un groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}\, k$, on étudiait dans la section précédente D son cristal évalué sur $W(k) \to k$. Ici, le cristal $\mathscr{E}$ de $G = G_\infty[p]$ s'identifie à D/pD. On va alors généraliser la construction de la partie précédente dans le cas d'une base générale, et en considérant seulement un $\mathscr{BT}_1$. En particulier on en déduira que la construction de nos invariants pour un groupe p-divisible (qui satisfait donc en particulier à la condition (BTO)) ne dépend que de sa p-torsion. Notons, comme dans la partie précédente,
$$\mathscr{E} = \bigoplus_\tau \mathscr{E}_\tau$$
et on a la filtration de Hodge de G ([BBM82, cor. 3.3.5])
$$0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \omega_{G^D}^\vee \longrightarrow 0$$

qui est compatible aux décompositions selon les plongements τ. Soit $\tau \in \mathscr{T}$; on note pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$

$$\mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau := \omega_{G,\tau}^{[i]} \subset \mathscr{E}_\tau$$

et pour un $\mathscr{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module $\mathscr{M}$, on note $\mathscr{M}/\pi := \mathscr{M} \otimes_{O_L} (O_L/\pi O_L)$. La multiplication par $\pi \in O_L$ induit une application

$$\pi : \mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau \longrightarrow \mathrm{Fil}^{[i-1]}\, \mathscr{E}_\tau$$

qui passe alors au quotient en une application (non nécessairement triviale)

$$\pi : \mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau/\pi \longrightarrow \mathrm{Fil}^{[i-1]}\, \mathscr{E}_\tau/\pi.$$

Puisque $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module localement libre, on obtient facilement le lemme suivant.

Lemme 2.2.3. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$, et j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant e-1$. Alors la multiplication par π^j induit un isomorphisme*

$$\pi^j : (\mathscr{E}_\tau)/\pi \longrightarrow (\pi^j \mathscr{E}_\tau)/\pi.$$

On notera $1/\pi^j : (\pi^j \mathscr{E}_\tau)/\pi \to (\mathscr{E}_\tau)/\pi$ l'isomorphisme inverse.

Convention 2.2.4. — Soit S un schéma, et $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur S. On pose alors pour la puissance extérieure nulle

$$\bigwedge^0 \mathscr{F} := \mathscr{O}_S.$$

Nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme 2.2.5. — *Soit S un schéma, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ deux $\mathscr{O}_S$-modules localement libres de rangs constants $n < g$, tels que $\mathscr{G}$ est localement facteur direct. On note $r = g - n$ le rang du quotient. Soit d tel que $1 \leqslant d \leqslant n$. Alors la flèche naturelle*

$$q : \Big(\bigwedge^d \mathscr{G}\Big) \otimes \Big(\bigwedge^r \mathscr{F}\Big) \longrightarrow \bigwedge^{d+r} \mathscr{F}$$

est surjective. De plus, son noyau est localement engendré par l'image des tenseurs

$$(x \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{d-1}) \otimes (x \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_{r-1}), \quad x, x_i \in \mathscr{G}, y_i \in \mathscr{F}.$$

Démonstration. — Quitte à raisonner localement, supposons $S = \operatorname{Spec} R$, et $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{F}/\mathscr{G}$ libres, donnés respectivement par $M, N, M/N$ des R-modules libres. Soit $(e_1, \dots, e_{n+r})$ une base de M telle que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de N. Alors les éléments $(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d}) \otimes (e_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge e_{\ell_r})$ où $j_1 < \cdots < j_d \leqslant n$ et $\ell_1 < \cdots < \ell_r$ induisent une base de $\bigwedge^d N \otimes \bigwedge^r M$. Une base de $\bigwedge^{d+r} M$ est constituée des éléments $e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}}$, avec $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_{d+r} \leqslant n + r$. Mais pour un tel élément, on a $k_d \leqslant n$, et il est donc égal à $q((e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_d}) \otimes (e_{k_{d+1}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}}))$. Cela prouve que le morphisme q est surjectif.

Soit

$$x = \sum_{\underline{j}, \underline{\ell}} x_{\underline{j}, \underline{\ell}} (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d}) \otimes (e_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge e_{\ell_r})$$

décomposé dans la base précédente, tel que x est dans le noyau de q. On peut supposer que le support des $\underline{j}, \underline{\ell}$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{j_i; \ell_k : i \leqslant d, k \leqslant r\} \subset \{1, \ldots, n+r\}$) qui apparaissent dans la somme est constant. En effet, on peut décomposer l'élément x en $x = x_{J_1} + \cdots + x_{J_s}$, où $J_1, \ldots, J_s$ sont des ensembles de $\{1, \ldots, n+r\}$, et où x_{J_t} est une somme d'éléments de la base de $\bigwedge^d N \otimes_R \bigwedge^r M$ ayant leur support dans J_t pour t tel que $1 \leqslant t \leqslant s$. Soit t entre 1 et s ; si le cardinal de J_t est strictement inférieur à $d+r$, alors $q(x_{J_t}) = 0$. Sinon, $J_t = \{k_1 < \cdots < k_{d+r}\}$, et définissons $y_t = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}} \in \bigwedge^{d+r} M$. Alors $q(x_{J_t})$ est dans le module engendré par y_t ; comme les éléments $(y_u)_u$ ainsi définis forment une famille libre de $\bigwedge^{d+r} M$, on en déduit que $q(x_{J_t}) = 0$, pour tout t.

On suppose donc que le support des éléments $\underline{j}, \underline{\ell}$ apparaissant dans la somme définissant x est constant. De plus, s'il existe des entiers i et k avec $j_i = \ell_k$, alors $(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d}) \otimes (e_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge e_{\ell_r})$ est dans le noyau de q, et est de la forme prédite par le lemme. Supposons donc que les $\underline{j}, \underline{\ell}$ ont tous le même support $S = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_{d+r}\}$, et on note $S_N := S \cap \{1, \ldots n\} = \{k_1 < \cdots < k_m\}$. Dans ce cas, on peut écrire x sous la forme

$$x = \sum_\sigma x_\sigma (e_{\sigma(k_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k_d)}) \otimes (e_{\sigma(k_{d+1})} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k_{d+r})}),$$

où σ parcourt les permutations de S envoyant $\{k_1, \ldots, k_d\}$ dans S_N. Quitte à regrouper les termes, on peut supposer que les σ dans la somme soient l'identité sur $S \smallsetminus S_N$, auquel cas la somme porte sur les permutations de S_N. Alors x est dans le noyau de q si et seulement si $\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) x_\sigma = 0$. Notons

$$e_\sigma := (e_{\sigma(k_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k_d)}) \otimes (e_{\sigma(k_{d+1})} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k_{d+r})}),$$

où σ est une permutation de S_N (prolongée en une permutation de S). Alors $\operatorname{Ker} q$ est engendré par les éléments $e_{\mathrm{id}} - \varepsilon(\sigma) e_\sigma$. Puisque l'ensemble des permutations est engendré par les transpositions, le noyau de q est engendré par $e_\sigma + e_{\sigma\tau}$, où σ est une permutation de S_N, et τ une permutation de S_N. L'élément τ permute k_i et k_j pour des entiers $i < j$. Si $j \leqslant d$ ou $i > d$, l'élément $e_\sigma + e_{\sigma\tau}$ est nul. On suppose donc $i \leqslant d < j$. Supposons pour simplifier les notations que $\sigma = \mathrm{id}$, $i = 1$ et $j = d+1$ (on se ramène facilement à ce cas) ; alors on peut écrire

$$\begin{aligned} e_\sigma + e_{\sigma\tau} &= (e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_d}) \otimes (e_{k_{d+1}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}}) \\ &\qquad + (e_{k_{d+1}} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_d}) \otimes (e_{k_1} \wedge e_{k_{d+2}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}}) \\ &= ((e_{k_1} + e_{k_{d+1}}) \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_d}) \otimes ((e_{k_1} + e_{k_{d+1}}) \wedge e_{k_{d+2}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}}) \\ &\qquad - (e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_d}) \otimes (e_{k_1} \wedge e_{k_{d+2}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}}) \\ &\qquad - (e_{k_{d+1}} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_d}) \otimes (e_{k_{d+1}} \wedge e_{k_{d+2}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{d+r}}) \end{aligned}$$

et ces trois derniers termes sont de la forme annoncée. □

Ce lemme permet de prouver facilement la proposition suivante. Les produits extérieurs de faisceaux seront pris sur $\mathscr{O}_S$ (notons que nous ne définissons les produits extérieurs que pour des faisceaux avec une action de O_L tués par π).

Proposition 2.2.6. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$, i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ et $d \geqslant d_{\tau,i}$ un entier. Alors la flèche naturelle*

$$\Big(\big(\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi\Big) \otimes \Big(\big(\bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi\Big) \longrightarrow \big(\bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi$$

est surjective. De plus, il existe une application

$$\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi : \big(\bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi \longrightarrow \big(\bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi$$

telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Big(\big(\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi\Big) \otimes \Big(\big(\bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{id}"'] & \big(\bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi \arrow[dl, dashed, "\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi"] \\
\big(\bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi &
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.7. — Si $d_{\tau,i} = 0$, l'application $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi$ précédente est l'identité ; en effet $\mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau = \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau$. Si $d = d_{\tau,i}$, c'est simplement la puissance extérieur de l'application π.

Lorsque G est la p-torsion d'un groupe p-divisible sur un corps parfait, alors l'application $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi$ précédente coïncide avec $\pi^{\min(d,d_{\tau,i})}$, donnée par le corollaire 2.1.4. On espère que l'abus de notation $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi$ pour l'application induite ne causera pas de confusion.

Démonstration. — D'après le corollaire précédent, le morphisme

$$\Big(\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau\Big) \otimes \Big(\bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau\Big) \longrightarrow \bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau$$

est surjectif, et on notera K son noyau. On a alors la surjectivité en réduisant modulo π. Pour montrer que l'application de l'énoncé $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{id}$ passe au quotient, il suffit de montrer que le noyau de l'application

$$\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{id} : \Big(\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau\Big) \otimes \Big(\bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau\Big) \longrightarrow \big(\bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau\big)/\pi$$

contient K. Quitte à raisonner localement, soit

$$(x \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_{d_{\tau,i}-1}) \otimes (x \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_{d-d_{\tau,i}-1})$$

dans K, où $x, z_j \in \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau$ et $y_j \in \mathrm{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_\tau$. Son image par l'application précédente est dans $\pi \cdot \big((\bigwedge^{d} \mathrm{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_\tau)/\pi\big) = 0$. $\square$

Pour tout τ, le cristal de G est muni des applications $\mathscr{O}_S$ et O_L-linéaires suivantes :

$$V_\tau : \mathscr{E}_\tau \longrightarrow \mathscr{E}^{(p)}_{\sigma^{-1}\tau} \quad \text{et} \quad F_\tau : \mathscr{E}^{(p)}_{\sigma^{-1}\tau} \longrightarrow \mathscr{E}_\tau$$

et comme G est un $\mathscr{BT}_1$, on a $\operatorname{Ker} V_\tau = \operatorname{Im} F_\tau$ et $\operatorname{Ker} F_\tau = \operatorname{Im} V_\tau$. On peut tirer en arrière les filtrations sur les faisceaux $(\mathscr{E}_\tau)_\tau$: on définit pour $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $0 \leqslant i \leqslant e$

$$\mathscr{F}_\tau^{[i]} := V_\tau^{-1}((\operatorname{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)})$$

et on en déduit une autre filtration

$$\operatorname{Ker} V_\tau = \mathscr{F}_\tau^{[0]} \subset \mathscr{F}_\tau^{[1]} \subset \cdots \subset \mathscr{F}_\tau^{[e]} = \mathscr{E}_\tau,$$

la relation $\mathscr{F}_\tau^{[e]} = \mathscr{E}_\tau$ provenant du fait que $(\operatorname{Fil}^{[e]} \mathscr{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)} = \operatorname{Im} V_\tau$ (voir [EvdG09, § 3.1]).

Proposition 2.2.8. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$; chaque sous-faisceau $\mathscr{F}_\tau^{[i]}$ de $\mathscr{E}_\tau$ est localement facteur direct si $0 \leqslant i \leqslant e$. De plus, le gradué*

$$\mathscr{F}_\tau^{[i]} / \mathscr{F}_\tau^{[i-1]},$$

est localement libre de rang $d_{\sigma^{-1}\tau,i}$, et l'application $\pi : \mathscr{E}_\tau \to \mathscr{E}_\tau$ envoie $\mathscr{F}_\tau^{[i]}$ dans $\mathscr{F}_\tau^{[i-1]}$ pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$.

Démonstration. — On a $\mathscr{F}_\tau^{[0]} = \operatorname{Ker} V_\tau = \operatorname{Im} F_\tau$, et on a donc des isomorphismes $\mathscr{F}_\tau^{[0]} \simeq (\mathscr{E}_{\sigma^{-1}\tau}/\operatorname{Fil}^{[e]} \mathscr{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)}$ et $\mathscr{E}_\tau/\mathscr{F}_\tau^{[0]} \simeq (\operatorname{Fil}^{[e]} \mathscr{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)}$. Cela prouve que le faisceau $\mathscr{F}_\tau^{[0]}$ est localement un facteur direct.

Soit maintenant i un entier compris entre 1 et e. Alors, le morphisme V_τ induit un isomorphisme

$$V_\tau : \mathscr{F}_\tau^{[i]} / \mathscr{F}_\tau^{[i-1]} \xrightarrow{\ \sim\ } (\operatorname{Fil}^{[i]} \mathscr{E}_{\sigma^{-1}\tau} / \operatorname{Fil}^{[i-1]} \mathscr{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)},$$

ce qui prouve que le sous-faisceau $\mathscr{F}_\tau^{[i]}$ est localement un facteur direct, et donne le rang du quotient $\mathscr{F}_\tau^{[i]}/\mathscr{F}_\tau^{[i-1]}$. Enfin, π commute à V_τ, d'où $\pi \cdot (\mathscr{F}_\tau^{[i]}) \subset \mathscr{F}_\tau^{[i-1]}$. $\square$

Comme les faisceaux sont de caractéristique p, on ne peut plus faire la division par π^e (égal à p multiplié par une unité) que l'on effectuait pour construire l'application ζ_τ^d de la section précédente, et nous devons donc contourner ce problème.

Proposition 2.2.9. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$ et i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant e$. Pour $d > d_{\tau,i}$, il existe une application $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi : (\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i]})/\pi \to (\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i-1]})/\pi$, telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\big((\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i]})/\pi\big) \otimes \big((\bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i-1]})/\pi\big) \arrow[r] \arrow[d, "\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \mathrm{id}"'] & (\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i]})/\pi \arrow[dl, dashed, "\bigwedge^{d_{\tau,i}} \pi"] \\
(\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i-1]})/\pi &
\end{tikzcd}$$

Lorsque $d_{\tau,i} = 0$, cette application est simplement l'identité. Pour $d \leqslant d_{\tau,i}$, l'application $\bigwedge^d \pi$ induit un morphisme

$$(\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i]})/\pi \longrightarrow (\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i-1]})/\pi.$$

Démonstration. — Les faisceaux $\mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i]}$ étant localement facteur direct, il suffit d'invoquer le lemme 2.2.5. La démonstration de la factorisation est la même que celle de la proposition 2.2.6. □

Pour que nos constructions coïncident (pas seulement à un inversible près), introduisons $u \in O_L^\times$ tel que $p = u\pi^e$.

Proposition 2.2.10. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$. Pour $d > d_{\tau,1}$, l'application*

$$H_\tau^d : \bigwedge^{d_{\tau,1}} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]} \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,1}} \operatorname{Ker} V_{\sigma\tau} \longrightarrow (\bigwedge^{d} \mathscr{E}_\tau^{(p)})/\pi$$

induite localement, sous l'isomorphisme $\operatorname{Ker} V_{\sigma\tau} = \operatorname{Im} F_{\sigma\tau}$, *par*

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_{d_{\tau,1}} \otimes F_{\sigma\tau} y_1 \wedge \cdots \wedge F_{\sigma\tau} y_{d-d_{\tau,1}} \\ \longmapsto \frac{1}{\pi^{e-1}} V_{\sigma\tau} x_1 \wedge \cdots \wedge \frac{1}{\pi^{e-1}} V_{\sigma\tau} x_{d_{\tau,1}} \wedge u y_1 \wedge \cdots \wedge u y_{d-d_{\tau,1}}$$

est bien définie. De plus, elle se factorise par la surjection

$$\bigwedge^{d_{\tau,1}} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]} \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,1}} \operatorname{Ker} V_{\sigma\tau} \longrightarrow \bigwedge^{d} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]},$$

et induit une application

$$H_\tau^d : (\bigwedge^{d} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]})/\pi \longrightarrow (\bigwedge^{d} \mathscr{E}_\tau^{(p)})/\pi.$$

Si $d \leqslant d_{\tau,1}$, on définit $H_\tau^d : (\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]})/\pi \to (\bigwedge^d \mathscr{E}_\tau^{(p)})/\pi$ par $H_\tau = \bigwedge^d((1/\pi^{e-1}) \circ V_{\sigma\tau})$.

Démonstration. — Démontrons la première assertion. Considérons la flèche

$$\bigwedge^{d_{\tau,1}} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]} \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,1}} \operatorname{Ker} V_{\sigma\tau} \longrightarrow \bigwedge^{d} \mathscr{E}_\tau[\pi]^{(p)}$$

induite localement, sous l'isomorphisme $\operatorname{Ker} V_{\sigma\tau} = \operatorname{Im} F_{\sigma\tau}$, par

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_{d_{\tau,1}} \otimes F_{\sigma\tau} y_1 \wedge \cdots \wedge F_{\sigma\tau} y_{d-d_{\tau,1}} \\ \longmapsto V_{\sigma\tau} x_1 \wedge \cdots \wedge V_{\sigma\tau} x_{d_{\tau,1}} \wedge \pi^{e-1} u y_1 \wedge \cdots \wedge \pi^{e-1} u y_{d-d_{\tau,1}}.$$

Cette application est bien définie car, si $y_1, y_1' \in \mathscr{E}_\tau^{(p)}$ satisfont à $F_{\sigma\tau} y_1 = F_{\sigma\tau} y_1'$, alors $y_1 - y_1' \in \operatorname{Ker} F_{\sigma\tau} = \operatorname{Im} V_{\sigma\tau} = \operatorname{Fil}^{[e]} \mathscr{E}_\tau^{(p)}$ et donc $\pi^{e-1} u (y_1 - y_1') \in \operatorname{Fil}^{[1]} \mathscr{E}_\tau^{(p)}$. Or $V_{\sigma\tau} x_1, \dots, V_{\sigma\tau} x_{d_{\tau,1}} \in \operatorname{Fil}^{[1]} \mathscr{E}_\tau^{(p)}$, et comme ce dernier module est localement libre sur $\mathscr{O}_S$ de rang $d_{\tau,1}$, on a

$$V_{\sigma\tau} x_1 \wedge \cdots \wedge V_{\sigma\tau} x_{d_{\tau,1}} \wedge u\pi^{e-1}(y_1 - y_1') \wedge u\pi^{e-1} y_2 \wedge \cdots \wedge u\pi^{e-1} y_{d-d_{\tau,1}} = 0,$$

ce qui prouve le résultat. L'isomorphisme $1/\pi^{e-1} : \mathscr{E}_\tau[\pi]^{(p)} \simeq \mathscr{E}_\tau^{(p)}/\pi$ permet de définir l'application H_τ^d.

D'après le lemme 2.2.5, on a une flèche surjective

$$\bigwedge^{d_{\tau,1}} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]} \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,i}} \operatorname{Ker} V_{\sigma\tau} \longrightarrow \bigwedge^{d} \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]}$$

dont le noyau est localement engendré, d'après le lemme 2.2.5, par les tenseurs

$$x \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_{d_{\tau,1}-1} \otimes x \wedge F_{\sigma\tau} z_1 \wedge \cdots \wedge F_{\sigma\tau} z_{d-d_{\tau,1}-1},$$

où $x \in \operatorname{Ker} V_{\sigma\tau}$ donc $V_{\sigma\tau} x = 0$, et donc l'application H_τ^d passe au quotient. □

Définition 2.2.11. — Pour tout $\tau \in \mathscr{T}$, et tout entier $d \geqslant 1$, on peut alors construire une application

$$\zeta_\tau^d : (\bigwedge^d \mathscr{E}_{\sigma\tau})/\pi \longrightarrow (\bigwedge^d \mathscr{E}_\tau^{(p)})/\pi$$

en considérant la composée des applications précédentes

$$\zeta_\tau^d = H_\tau^d \circ \bigwedge^{\min(d,d_{\tau,2})} \pi \circ \cdots \circ \bigwedge^{\min(d,d_{\tau,e})} \pi.$$

On a ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\bigwedge^d \mathscr{E}_{\sigma\tau})/\pi = (\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[e]})/\pi \arrow[r, "\zeta_\tau^d"] \arrow[d, "\bigwedge^{\min(d,d_{\tau,e})} \pi"'] & (\bigwedge^d \mathscr{E}_\tau^{(p)})/\pi \\
(\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[e-1]})/\pi \arrow[d, dashed, "\bigwedge^{\min(d,d_{\tau,2})} \pi \circ \cdots \circ \bigwedge^{\min(d,d_{\tau,e-1})} \pi"'] & \\
(\bigwedge^d \mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[1]})/\pi \arrow[uur, "H_\tau^d"'] &
\end{tikzcd}$$

Cette application est, lorsque $\mathscr{E}$ est le cristal de la p-torsion d'un groupe p-divisible G_∞ sur un corps parfait, la même que l'application ζ_τ^d définie dans la section précédente, ce qui justifie que l'on utilise la même notation. En effet, on peut construire aussi H_τ^d sur le cristal de G_∞, et dans la section précédente pour construire ζ_τ^d, on appliquait $\bigwedge^d V_{\sigma\tau}$ suivi des applications $\bigwedge^{\min(d,d_{\tau,i})} \pi$, pour $i = e, \dots, 1$, et enfin d'une division par π^{de}. Ici, on applique d'abord les morphismes $\bigwedge^{\min(d,d_{\tau,i})} \pi$ pour $i = e, \dots, 2$, sur la filtration $\mathscr{F}_{\sigma\tau}^{[i]}$, puis l'application H_τ. Dans le cas d'un groupe p-divisible sur un corps parfait, cette application est égale à $(1/\pi^{d_{\tau,1}(e-1)}) \bigwedge^{d_{\tau,1}} V_{\sigma\tau} \otimes \bigwedge^{d-d_{\tau,1}} uF_{\sigma\tau}^{-1}$ si $d > d_{\tau,1}$, et à $(1/\pi^{d(e-1)}) \bigwedge^d V_{\sigma\tau}$ sinon. Or comme sur l'isocristal d'un groupe p-divisible, $F^{-1} = (1/p)V$, H_τ est donc égal à $(\pi^{\min(d,d_{\tau,1})}/\pi^{de}) \bigwedge^d V_{\sigma\tau}$.

Définition 2.2.12. — Pour tout $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$, définissons le fibré en droites sur S

$$\mathscr{L}_\tau^{[i]} := \det\bigl(\mathrm{Gr}^{[i]} \omega_{G,\tau}\bigr).$$

À partir de maintenant, faisons l'hypothèse simplificatrice suivante.

Hypothèse 2.2.13. — Supposons que pour tout τ on a $d_{\tau,1} \geqslant d_{\tau,2} \geqslant \cdots \geqslant d_{\tau,e}$.

Si k est une entier plus grand que 1 et $\mathscr{L}$ un fibré inversible, on note $\mathscr{L}^k$ la puissance tensorielle k-ième de $\mathscr{L}$.

Proposition 2.2.14. — *Soit $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$; en utilisant les applications précédentes, on peut construire une application*

$$HA_\tau^{[i]} : \Big(\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau\Big)/\pi \longrightarrow \Big(\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau^{(p^f)}\Big)/\pi$$

qui correspond dans le cas où $S = \operatorname{Spec} k$ est un corps parfait de caractéristique p, et G provient d'un groupe p-divisible, à l'application de la section précédente. De plus, cette application passe au quotient, et induit une application

$$\mathrm{Ha}_\tau^{[i]} : \mathscr{L}_\tau^{[i]} \longrightarrow (\mathscr{L}_\tau^{[i]})^{p^f}.$$

De manière équivalente, on a une section d'un fibré inversible,

$$\mathrm{Ha}_\tau^{[i]} \in H^0\big(S, (\mathscr{L}_\tau^{[i]})^{p^f-1}\big).$$

Lorsque $d_{\tau,i} = 0$, sous la convention 2.2.4*, on pose* $\mathrm{Ha}_\tau^{[i]} = 1$.

Démonstration. — On peut regarder la composée suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathscr{E}_\tau/\pi & \xrightarrow{(\bigwedge^{d_{\tau,i}} V_{\sigma\tau})^{(p^{f-1})} \circ (\zeta_{\sigma\tau}^{d_{\tau,i}})^{(p^{f-2})} \circ \cdots \circ \zeta_{\sigma^{-1}\tau}^{d_{\tau,i}}} & \bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[e]}\, \mathscr{E}_\tau^{(p^f)}/\pi \\
{\scriptstyle \bigwedge^{d_{\tau,i}}(1/\pi^{e-i})}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\bigwedge^{d_{\tau,i+1}} \pi \circ \cdots \circ \bigwedge^{d_{\tau,e}} \pi)^{(p^f)}} \\
\bigwedge^{d_{\tau,i}} (\pi^{e-i}\mathscr{E}_\tau)/\pi & & \bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau^{(p^f)}/\pi
\end{array}$$

La composée de cette application avec le morphisme

$$\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau/\pi \longrightarrow \bigwedge^{d_{\tau,i}} (\pi^{e-i}\mathscr{E}_\tau)/\pi$$

donne l'application $HA_\tau^{[i]}$.

Cette application passe bien au quotient comme annoncé puisque l'image de $\mathrm{Fil}^{[i-1]}\, \mathscr{E}_\tau$ par l'application $\mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau \to (\pi^{e-i}\mathscr{E}_\tau)/\pi$ est nulle ($\mathrm{Fil}^{[i-1]}\, \mathscr{E}_\tau \subset \pi^{e-i+1}\mathscr{E}_\tau$).

Pour voir que cette application coïncide avec celle de la section précédente, lorsque G est la p-torsion d'un groupe p-divisible G_∞ sur un corps parfait, il suffit de regarder le cristal D de G_∞, qui est un $W_{O_L}(k)$-module libre. On a alors justifié que les applications $\bigwedge^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau',j})} \pi$ et $\pi^{\min(d_{\tau,i},d_{\tau',j})}$ coïncidaient, ainsi que les applications $\zeta_{\tau'}^{d_{i,\tau}}$. Il faut alors voir que l'application

$$\bigwedge^{d_{\tau,i}} \mathrm{Fil}^{[i]}\, \mathscr{E}_\tau/\pi \longrightarrow \bigwedge^{d_{\tau,i}} (\pi^{e-i}\mathscr{E}_\tau)/\pi \xrightarrow{\bigwedge^{d_{\tau,i}}(1/\pi^{e-i})} \bigwedge^{d_{\tau,i}} (\mathscr{E}_\tau)/\pi,$$

coïncide avec l'application $\mathrm{Div}_{\tau,i}$ de la section 2.1. Rappelons que l'application $\mathrm{Div}_{\tau,i}$ correspond à une division par π à la puissance $ed_{\tau,i} - \sum_{j\leqslant i} \min(d_{\tau,i}, d_{\tau,j})$. Mais cette quantité, sous l'hypothèse 2.2.13, est égale à $ed_{\tau,i} - \sum_{j\leqslant i} d_{\tau,i} = (e-i)d_{\tau,i}$. L'application $\mathrm{Div}_{\tau,i}$ est alors égale à $\bigwedge^{d_{\tau,i}}(1/\pi^{e-i})$. □

Remarque 2.2.15. — Si l'hypothèse 2.2.13 n'est pas satisfaite la construction a toujours un sens, mais certaines applications construites seront toujours 0 (plus précisément $\bigwedge^{d_{\tau,i}}(1/\pi^{e-i})$ pour un certain (τ, i) est alors nulle modulo π). Il devrait être possible de construire des invariants non identiquement nuls dans ce cas, mais l'hypothèse 2.2.13 simplifie la situation. Remarquons que les variétés définies par Pappas et Rapoport dans [PR05] nécessitent de choisir un ordre sur les éléments $(d_{\tau,i})_i$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$, ce qui rend l'hypothèse 2.2.13 inoffensive en pratique.

On peut alors construire l'invariant de Hasse μ-ordinaire.

Définition 2.2.16. — Soit S un schéma de caractéristique p, et $G \to S$ un $\mathscr{B}\mathscr{T}_1$ muni d'une action de O_L qui satisfait à l'hypothèse (BTO). On définit alors son μ-invariant de Hasse comme le produit des invariants précédents

$$^{\mu}\,\mathrm{Ha} = \bigotimes_{\tau,i} \mathrm{Ha}_\tau^{[i]} \in H^0\big(S, \det(\omega_G)^{p^f-1}\big).$$

3. Groupes p-divisibles μ-ordinaires

Dans cette partie, on fixe une donnée $\mu=(d_{\tau,i})_{\tau\in\mathscr{T},1\leqslant i\leqslant e}$ d'entiers avec $0\leqslant d_{\tau,i}\leqslant h$ pour $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$. On suppose également qu'ils sont ordonnés, c'est-à-dire que pour tout $\tau \in \mathscr{T}$

$$d_{\tau,1} \geqslant \cdots \geqslant d_{\tau,e}.$$

3.1. Définition. — Soit k un corps parfait de caractéristique p contenant le corps résiduel de L, et soit G un groupe p-divisible sur k. Soit (M, F, V) le module de Dieudonné (contravariant) associé à G. On suppose que G a une action de O_L. Le module M muni du Frobenius est donc un F-cristal avec une action de O_L. Si h est le rang de M (en tenant compte de l'action de O_L), alors la hauteur de G est efh.

On suppose que G satisfait à la condition de Pappas-Rapoport pour la donnée μ. Cette condition peut être vue sur le cristal (M, F).

On définit les polygones $\mathrm{Newt}_{O_L}(G)$ et $\mathrm{Hdg}_{O_L}(G)$ comme étant égaux respectivement à $\mathrm{Newt}_{O_L}(M, F)$, $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M, F)$. On rappelle que l'on a défini un polygone $\mathrm{PR}(\mu)$, et que l'on a les égalités

$$\mathrm{Newt}_{O_L}(G) \geqslant \mathrm{Hdg}_{O_L}(G) \geqslant \mathrm{PR}(\mu).$$

Définition 3.1.1. — On dit que le groupe p-divisible G satisfait à la condition de Rapoport généralisée (pour la donnée μ) si on a l'égalité

$$\mathrm{Hdg}_{O_L}(G) = \mathrm{PR}(\mu).$$

Puisque $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau} \geqslant \mathrm{PR}_\tau(\mu)$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$, cette condition est équivalente au fait que les polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}$ et $\mathrm{PR}_\tau(\mu)$ sont égaux pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. Cette condition est automatique si L est non ramifié. Lorsque la donnée μ est ordinaire (i.e., lorsque $d_{\tau,i} = d$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$), cette condition est équivalente au fait que le module ω_G soit libre sur $k \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$. Cette dernière condition est souvent appelée condition de Rapoport, ce qui justifie la terminologie.

La condition de Rapoport généralisée signifie que la structure de ω_G comme $k \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module est la meilleure possible étant donnée la condition PR. Par ailleurs, si G satisfait à la condition de Rapoport généralisée, alors la filtration sur chacun des $\omega_{G,\tau}$ dans la définition de la condition PR est uniquement déterminée. En effet, pour $\tau \in \mathscr{T}$ on a $\omega_{G,\tau}^{[i]} \subset \omega_{G,\tau}[\pi^i]$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$, et si G satisfait à la condition de Rapoport généralisée, alors

$$\omega_{G,\tau} \simeq \bigoplus_{i=1}^{e} (k[T]/T^i)^{d_{\tau,i}-d_{\tau,i+1}},$$

avec par convention $d_{\tau,e+1} = 0$, l'isomorphisme identifiant l'action de π et de T. La dimension de $\omega_{G,\tau}[\pi^i]$ est $d_{\tau,1} + \cdots + d_{\tau,i}$, et on a donc $\omega_{G,\tau}^{[i]} = \omega_{G,\tau}[\pi^i]$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$.

Définition 3.1.2. — On dit que le groupe p-divisible est μ-ordinaire si on a l'égalité entre polygones

$$\mathrm{Newt}_{O_L}(G) = \mathrm{PR}(\mu).$$

D'après les inégalités entre les trois polygones, si G est μ-ordinaire, alors il satisfait à la condition de Rapoport généralisée. Nous donnerons dans la section suivante plusieurs caractérisations du fait d'être μ-ordinaire. Avant cela, nous allons définir explicitement un groupe p-divisible μ-ordinaire.

Soient $\beta = (\beta_\tau)_{\tau \in \mathscr{T}}$ des entiers avec $0 \leqslant \beta_\tau \leqslant e$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. On définit le module de Dieudonné (M_β, F, V) par $M_\beta = \bigoplus_{\tau \in \mathscr{T}} M_{\beta,\tau}$ avec $M_{\beta,\tau} = W_{O_L,\tau}(k)$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. Le Frobenius $F_\tau : M_{\beta,\sigma^{-1}\tau} \to M_{\beta,\tau}$ et le Verschiebung $V_\tau : M_{\beta,\tau} \to M_{\beta,\sigma^{-1}\tau}$ sont définis par

$$F_\tau(x) = \pi^{\beta_\tau}\sigma(x) \quad \text{et} \quad V_\tau(y) = p\pi^{-\beta_\tau}\sigma^{-1}(y)$$

pour tout $\tau \in \mathscr{T}$, $x \in M_{\beta,\sigma^{-1}\tau}$ et $y \in M_{\beta,\tau}$. Remarquons que la valuation de $p\pi^{-\beta_\tau}$ est égale à $1 - \beta_\tau/e \geqslant 0$.

Le F-cristal (M_β, F) a donc une action de O_L, et est de rang 1. Les polygones $\mathrm{Newt}_{O_L}(M_\beta, F)$ et $\mathrm{Hdg}_{O_L}(M_\beta, F)$ sont égaux, et ont une seule pente égale à $(\sum_{\tau \in \mathscr{T}} \beta_\tau)/(ef)$. On notera X_β le groupe p-divisible associé au module de Dieudonné (M_β, F, V). C'est un groupe p-divisible sur k de hauteur ef muni d'une action de O_L.

Soit r le cardinal de $\{d_{\tau,i} : \tau \in \mathscr{T}, 1 \leqslant i \leqslant e\} \cap [1, h-1]$. On note

$$0 < D_1 < \cdots < D_r < h$$

les éléments de cet ensemble. On pose également $D_0 = 0$ et $D_{r+1} = h$. Soit $1 \leqslant j \leqslant r+1$; pour $\tau \in \mathscr{T}$, on définit $\alpha_{j,\tau}$ comme le cardinal de l'ensemble $\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant e,\ d_{\tau,i} \geqslant D_j\}$. On définit $\alpha_j = (\alpha_{j,\tau})_{\tau \in \mathscr{T}}$; puisque les entiers $\alpha_{j,\tau}$ sont compris entre 0 et e, on dispose donc du groupe p-divisible X_{α_j} sur k. Remarquons que $\alpha_{j+1,\tau} \leqslant \alpha_{j,\tau}$ pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant r$ et $\tau \in \mathscr{T}$.

Définition 3.1.3. — On définit le groupe p-divisible X^{ord} sur k par

$$X^{\mathrm{ord}} := \prod_{j=1}^{r+1} X_{\alpha_j}^{D_j - D_{j-1}}.$$

Le groupe p-divisible X^{ord} est muni d'une action de O_L, et est de hauteur efh. De plus, on peut vérifier que les polygones $\mathrm{Newt}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$ et $\mathrm{Hdg}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$ sont égaux à $\mathrm{PR}(\mu)$.

Proposition 3.1.4. — *Les polygones* $\mathrm{Newt}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$ *et* $\mathrm{Hdg}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$ *sont égaux à* $\mathrm{PR}(\mu)$.

Démonstration. — Soit $\tau \in \mathscr{T}$; le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(X^{\mathrm{ord}})$ a pour pentes $\alpha_{j,\tau}/e$ avec multiplicité $D_j - D_{j-1}$ pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$. Or pour tout j tel que $0 \leqslant j \leqslant r+1$, il y a exactement $\alpha_{j,\tau} - \alpha_{j+1,\tau}$ éléments parmi les $(d_{\tau,i})_{1\leqslant i\leqslant e}$ qui sont égaux à D_j (on pose $\alpha_{0,\tau} = e$ et $\alpha_{r+2,\tau} = 0$). On peut donc écrire pour i tel que $0 \leqslant i \leqslant h$:

$$\mathrm{PR}_\tau(\mu)(i) = \sum_{j=0}^{r+1} \frac{\alpha_{j,\tau} - \alpha_{j+1,\tau}}{e} \max(-h + D_j + i, 0).$$

On voit donc que les pentes du polygone $\mathrm{PR}_\tau(\mu)$ sont exactement $\alpha_{j,\tau}/e$ avec multiplicité $D_j - D_{j-1}$ pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$. Cela prouve que les polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(X^{\mathrm{ord}})$ et $\mathrm{PR}_\tau(\mu)$ sont égaux pour tout $\tau \in \mathscr{T}$, ce qui donne l'égalité $\mathrm{Hdg}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}}) = \mathrm{PR}(\mu)$.

Le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(X^{\mathrm{ord}})$ est la concaténation des $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(X_{\alpha_j}^{D_j-D_{j-1}})$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. Comme le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$ est égal à la moyenne des polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$,et comme les α_j sont ordonnés, $\mathrm{Hdg}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$ est la concaténation des $\mathrm{Hdg}_{O_L}(X_{\alpha_j}^{D_j-D_{j-1}})$. Or c'est aussi automatiquement le cas pour le polygone de Newton de X^{ord}, et comme les polygones de Hodge et Newton des $X_{\alpha_j}^{D_j-D_{j-1}}$ sont isoclines donc égaux, on en déduit l'égalité $\mathrm{Newt}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}}) = \mathrm{Hdg}_{O_L}(X^{\mathrm{ord}})$. □

3.2. Caractérisations. — Dans cette partie, nous allons donner plusieurs caractérisations des groupes p-divisibles μ-ordinaires.

Théorème 3.2.1. — *Supposons que k est algébriquement clos, et soit G un groupe p-divisible sur k avec une action de O_L satisfaisant la condition PR pour la donnée μ. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- *G est μ-ordinaire.*
- *G est isogène à X^{ord}.*
- *G est isomorphe à X^{ord}.*

La condition G isogène à X^{ord} signifie qu'il existe une isogénie O_L-linéaire entre les groupes p-divisibles G et X^{ord}.

Démonstration. — La troisième condition implique évidemment la deuxième. Puisque le polygone de Newton est invariant par isogénie, la deuxième condition implique la première. Supposons maintenant que G est μ-ordinaire, et soit (M,F) le F-cristal associé à G. D'après le théorème de décomposition Hodge-Newton (théorème 1.3.2), on a une décomposition

$$M := \bigoplus_{j=1}^{r+1} M_j$$

avec (M_j, F_j) un F-cristal avec action de O_L de rang $D_j - D_{j-1}$. De plus, les polygones $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_j, F_j)$ et $\mathrm{Newt}_{O_L}(M_j, F_j)$ sont isoclines de pentes respectives $\alpha_{\tau,j}/e$ et $\sum_{\tau\in\mathscr{T}} \alpha_{\tau,j}/(ef)$.

Nous voulons démontrer que G est isomorphe à X^{ord}. Comme le foncteur induit par le module de Dieudonné est pleinement fidèle, il suffit de montrer que M est isomorphe au module de Dieudonné de X^{ord}, ou encore que chaque cristal (M_j, F_j) est isomorphe à $(M_{\alpha_j}^{D_j-D_{j-1}}, F)$. Le module M_j se décompose en $\oplus_{\tau\in\mathscr{T}} M_{j,\tau}$, et le Frobenius F_j induit des applications $F_{j,\tau} : M_{j,\sigma^{-1}\tau} \to M_\tau$. Comme le polygone $\mathrm{Hdg}_{O_L,\tau}(M_j, F_j)$ est isocline de pente $\alpha_{j,\tau}/e$, F_τ est divisible par $\pi^{\alpha_{j,\tau}}$. En divisant chaque F_τ par $\pi^{\alpha_{j,\tau}}$, on obtient un cristal (M_j, F_j') avec action de O_L dont le polygone de Newton est isocline de pente 0. Puisque k est algébriquement clos, on en déduit que $(M_j, F_j') \simeq (M_{\beta_0}^{D_j-D_{j-1}}, F)$, avec $\beta_0 = (0, \dots, 0)$. En effet, fixons $\tau \in \mathscr{T}$ et regardons $(F_j')^f : M_{j,\tau} \to M_{j,\tau}$. Posons temporairement $h = D_j - D_{j-1}$. Alors il existe $(e_1, \dots, e_h)$ une base de $M_{j,\tau}$ dans laquelle $(F_j')^f = \sigma^f \otimes I_h$. En effet, oublions l'action de O_L, alors par exemple d'après Moonen [Moo04, th. 1.3.7], comme k est algébriquement clos, il existe $f_1, \dots, f_{eh}$ une $W(k)$-base de $M_{j,\tau}$ dans laquelle $(F_j')^f = \sigma^f \otimes I_{eh}$. Maintenant on peut extraire de $(f_1, \dots, f_{eh})$ une sous-famille (libre sur $W_{O_L,\tau}(k)$) $(e_1, \dots, e_h)$ qui engendre $M_{j,\tau}$ comme $W_{O_L,\tau}(k)$-module, et dans cette base F_j' est donc donné par $\sigma^f \otimes I_h$. Posons alors, $(e_1^\tau, \dots, e_h^\tau) = (e_1, \dots, e_h)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, h-1\}$, $(e_1^{\sigma^i\tau}, \dots, e_h^{\sigma^i\tau}) = ((F_j')^i(e_1), \dots, (F_j')^i(e_h))$. Alors $(e_1^{\sigma^i\tau}, \dots, e_h^{\sigma^i\tau})$ est une base de $M_{j,\sigma^i\tau}$ et dans ces bases, $F'_{j,\sigma^i\tau} : M_{j,\sigma^i\tau} \to M_{j,\sigma^{i+1}\tau}$ est donnée par $\sigma \otimes I_h$, d'où $(M_j, F_j') \simeq (M_{\beta_0}^{D_j-D_{j-1}}, F)$.

On en déduit enfin que $(M_j, F_j) \simeq (M_{\alpha_j}^{D_j-D_{j-1}}, F)$ pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$. $\square$

Remarque 3.2.2. — Si G est un groupe p-divisible μ-ordinaire sur un corps parfait k (non nécessairement algébriquement clos), alors on a une décomposition

$$G \simeq G_1 \times \dots G_{r+1},$$

avec G_j isomorphe à $X_{\alpha_j}^{D_j-D_{j-1}}$ sur une clôture algébrique de k.

Le fait d'être μ-ordinaire peut également être vu à l'aide des invariants de Hasse construits dans la section précédente. Dans le reste de cette partie, on considère un groupe p-divisible G sur un corps algébriquement clos k, muni d'une action de O_L et satisfaisant la condition PR pour la donnée μ. On rappelle que les points de rupture du polygone $\mathrm{PR}(\mu)$ ont pour abscisses les éléments $h - d_{\tau,i}$, pour $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$.

Proposition 3.2.3. — *Soient $\tau \in \mathscr{T}$ et i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$ tel que $d_{\tau,i}$ ne soit pas égal à 0 ou h. Alors*

$$\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}(G) \textit{ est non nul } \Leftrightarrow \mathrm{Newt}_{O_L}(G)(h - d_{\tau,i}) = \mathrm{PR}(\mu)(h - d_{\tau,i}).$$

Démonstration. — Soit (M,F,V) le module de Dieudonné, (D,F,V) le cristal de Dieudonné sur $W(k)$ associé à G. Comme remarqué après la définition 2.1.1,

$$M/FM=\omega_G=VD/pD.$$

On rappelle le lien entre module et cristal de Dieudonné : $D\simeq M^{(p)}$. Le Verschiebung induit de plus un morphisme linéaire $V:M\to D$ qui est une isogénie, et préserve donc les polygones de Newton. Puisque nous utilisons le Verschiebung V pour construire les invariants de Hasse, nous allons relier le polygone de Newton de G au polygone du σ^{-1}-cristal (D,V) (voir remarque 1.1.11). Les relations $FV=VF=p$, impliquent

$$\mathrm{Newt}_{O_L}(D,V)(x)=\mathrm{Newt}_{O_L}(G)(h-x)+x-\mathrm{Newt}_{O_L}(G)(h).$$

Notons que

$$\mathrm{PR}(\mu)(h-d_{\tau,i})=\frac{1}{ef}\sum_{\tau'\in\mathscr{T}}\sum_{j=1}^{e}\max(d_{\tau',j}-d_{\tau,i},0).$$

La condition $\mathrm{Newt}_{O_L}(G)(h-d_{\tau,i})=\mathrm{PR}(\mu)(h-d_{\tau,i})$ est donc équivalente à $\mathrm{Newt}_{O_L}(D,V)(d_{\tau,i})=k_{\tau,i}/(ef)$, avec

$$k_{\tau,i}:=\sum_{\tau'\in\mathscr{T}}\sum_{j=1}^{e}\max(d_{\tau,i}-d_{\tau',j},0).$$

Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Newt}_{O_L}(D,V)(d_{\tau,i})=k_{\tau,i}/(ef)$. Remarquons que $k_{\tau,i}$ est exactement la puissance de π par laquelle on divise le Verschiebung à la puissance f pour construire $\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}$.

Regardons alors le cristal $(\bigwedge^{d_{\tau,i}}D_\tau,\bigwedge^{d_{\tau,i}}V^f)$, le produit extérieur étant pris sur $W_{O_L,\tau}(k)$. Il suffit de voir à quelle condition son polygone de Newton a pour valeur $k_{\tau,i}/e$ en 1, d'après la proposition 1.2.7 (plus exactement son analogue pour (D,V)). Pour cela regardons le réseau $(\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau,\bigwedge^{d_{\tau,i}}V^f)$, c'est bien un réseau puisque $pD_\tau\subset\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau\subset VD_{\sigma\tau}$. Or sur ce réseau $\bigwedge^{d_{\tau,i}}V^f$ est divisible par $\pi^{k_{\tau,i}}$ d'après le théorème 2.1.6, on peut donc regarder le cristal

$$\Big(\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau,\frac{1}{\pi^{k_{\tau,i}}}\bigwedge^{d_{\tau,i}}V^f\Big)=:(\Lambda,\phi).$$

Il suffit donc de voir à quelle condition le polygone de Newton du cristal (Λ,ϕ) (qui est celui de $(\bigwedge^{d_{\tau,i}}D_\tau,\bigwedge^{d_{\tau,i}}V^f)$, dont on a soustrait $k_{\tau,i}/e$ à toutes les pentes) a une pente 0, c'est à dire qu'il existe un sous-cristal sur lequel ϕ est inversible. Mais si on regarde la projection

$$\bigwedge^{d_{\tau,i}}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau\xrightarrow{\ q\ }\bigwedge^{d_{\tau,i}}\omega_\tau^{[i]}/\omega_\tau^{[i-1]}$$

son noyau

$$N=\operatorname{Ker}q=\mathrm{Im}(\mathrm{Fil}^{[i-1]}D_\tau\otimes\bigwedge^{d_i-1}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau\longrightarrow\bigwedge^{d_i}\mathrm{Fil}^{[i]}D_\tau)$$

satisfait à (c'est ce qu'on a vérifié pour voir que $\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}$ passe au quotient) $\phi(N)\subset\pi\Lambda$. Maintenant on peut écrire $\Lambda=\Lambda^{et}\oplus\Lambda^{\mathrm{nilp}}$ (partie où ϕ est inversible, et partie où ϕ

est topologiquement nilpotent). Cette décomposition découle du théorème 1.3.2, en considérant la partie du polygone de Newton de pente 0. On a donc montré que

$$N \subset \Lambda^{\mathrm{nilp}} + \pi\Lambda.$$

Mais maintenant comme $\bigwedge^{d_{\tau,i}} \omega_\tau^{[i]}/\omega_\tau^{[i-1]}$ est de dimension 1 sur k, il est équivalent de demander qu'il existe un sous espace non nul sur lequel ϕ est inversible ou de demander que $\mathrm{Ha}_\tau^{[i]}$ soit inversible. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ha}_\tau^{[i]} \text{ inversible } &\iff \Lambda^{et} \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Newt}_{O_L,\tau}(\bigwedge^{d_{\tau,i}} D_\tau, \bigwedge^{d_{\tau,i}} V^f)(1) = k_{\tau,i}/e \\ &\iff \mathrm{Newt}_{O_L}(G)(h-d_{\tau,i}) = PR(\mu)(h-d_{\tau,i}). \qquad \square\end{aligned}$$

Corollaire 3.2.4. — *Le groupe p-divisible G est μ-ordinaire si et seulement si ${}^\mu\mathrm{Ha}(G)$ est non nul.*

Corollaire 3.2.5. — *Le groupe p-divisible G est μ-ordinaire si et seulement si $G[p]$ est isomorphe à $X^{\mathrm{ord}}[p]$.*

Démonstration. — On a déjà montré dans le théorème 3.2.1 que si G est μ-ordinaire, alors il est isomorphe à X^{ord}, donc a fortiori $G[p] \simeq X^{\mathrm{ord}}[p]$. Supposons donc que $G[p] \simeq X^{\mathrm{ord}}[p]$. Alors ${}^\mu\mathrm{Ha}(G) = {}^\mu\mathrm{Ha}(X^{\mathrm{ord}})$, puisque l'invariant ${}^\mu\mathrm{Ha}$ ne dépend que de la p-torsion, donc ${}^\mu\mathrm{Ha}(G)$ est inversible, et par le corollaire précédent G est μ-ordinaire. $\square$

3.3. Groupes p-divisibles μ-ordinaires sur un anneau artinien. — Dans cette partie, nous étudions les groupes p-divisibles sur un anneau artinien de caractéristique p. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p, et soit R une k-algèbre locale artinienne de corps résiduel k. Soit G un groupe p-divisible sur R muni d'une action de O_L. On suppose que G satisfait à la condition PR pour la donnée μ.

Définition 3.3.1. — On dit que G est μ-ordinaire si $G \times_R k$ l'est.

Proposition 3.3.2. — *On suppose que G est μ-ordinaire. Alors il existe une unique filtration de G par des groupes p-divisibles*

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_r \subset G_{r+1} = G$$

telle que $(G_j/G_{j-1}) \times_R k \simeq X_{\alpha_j}^{D_j - D_{j-1}}$ pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$.

Dans le cas non-ramifié, ce résultat est la proposition 2.1.9 de [Moo04], et est prouvé en utilisant les anneaux de déformations universels. Nous allons plutôt utiliser la théorie de Grothendieck-Messing. Rappelons le résultat qui nous intéresse. Si G_0 est un groupe p-divisible sur un schéma de caractéristique p, on note $\mathbb{D}(G_0)$ le cristal de Dieudonné contravariant ([BBM82, def. 3.3.6]). Le théorème suivant est originalement énoncé sous forme covariante, mais un argument de dualité donne facilement le résultat suivant.

Théorème 3.3.3 (Grothendieck-Messing, [Mes72, th. V.1.6])

Soit S un schéma, $\mathscr{I}$ un faisceau d'idéaux localement nilpotents muni de puissances divisées qui définit un sous-schéma fermé S_0. Soit $\mathscr{BT}(S)$ la catégorie des groupes p-divisibles sur S et $\mathscr{C}(S)$ la catégorie formée des couples (G_0, Fil) où G_0 est un groupe p-divisible sur S_0 et $\mathrm{Fil} \subset \mathbb{D}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$ est une filtration admissible (i.e., localement facteur direct et qui relève $\omega_{G_0} \subset \mathbb{D}(G_0)_{(S_0 \to S_0)}$). Alors le foncteur

$$\begin{aligned}\mathscr{BT}(S) &\longrightarrow \mathscr{C}(S)\\ G &\longmapsto (G \times_S S_0, \omega_G \subset \mathbb{D}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)})\end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

Un morphisme $(G_0, \mathrm{Fil}) \to (G_0', \mathrm{Fil}')$ dans la catégorie $\mathscr{C}(S)$ consiste en un morphisme de groupes p-divisibles $f : G_0 \to G_0'$, ainsi qu'un morphisme $\mathrm{Fil}' \to \mathrm{Fil}$ compatible avec le morphisme $\mathbb{D}(G_0')_{(S_0 \hookrightarrow S)} \to \mathbb{D}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$ induit par f.

On dispose d'une notion de suites exactes pour les catégories $\mathscr{BT}(S)$ et $\mathscr{C}(S)$. En effet, on dit que la suite

$$0 \longrightarrow (G_0', \mathrm{Fil}') \longrightarrow (G_0, \mathrm{Fil}) \longrightarrow (G_0'', \mathrm{Fil}'') \longrightarrow 0$$

est exacte dans la catégorie $\mathscr{C}(S)$ si les suites

$$0 \longrightarrow G_0' \longrightarrow G_0 \longrightarrow G_0'' \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Fil}'' \longrightarrow \mathrm{Fil} \longrightarrow \mathrm{Fil}' \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Démontrons maintenant la proposition 3.3.2. L'unicité découle de la théorie de Grothendieck-Messing. Soit I l'unique idéal maximal de R. Comme il existe N tel que $I^N = 0$, on peut faire le dévissage classique

$$R \twoheadrightarrow R/I^{N-1} \cdots \twoheadrightarrow R/I^2 \twoheadrightarrow R/I = k$$

le noyau de chacune des flèches étant de carré nul. Il suffit donc de prouver le lemme suivant.

Lemme 3.3.4. — *Soit R une k-algèbre locale artinienne, I un idéal de carré nul et $R_0 := R/I$. Soit G un groupe p-divisible sur R satisfaisant une condition de Pappas-Rapoport pour la donnée μ, et on suppose que G est μ-ordinaire. On suppose qu'il existe une filtration de $\overline{G} := G \times_R R_0$ par des groupes p-divisibles*

$$0 = \overline{G_0} \subset \overline{G_1} \subset \cdots \subset \overline{G_r} \subset \overline{G_{r+1}} = \overline{G}$$

telle que $\overline{G_j}/\overline{G_{j-1}} \simeq X_{\alpha_j}^{D_j - D_{j-1}} \times_k R_0$ pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$. Alors il existe une filtration par des groupes p-divisibles

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_r \subset G_{r+1} = G$$

telle que $G_j/G_{j-1} \simeq X_{\alpha_j}^{D_j - D_{j-1}} \times_k R$ pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$.

Démonstration. — L'idéal I est en particulier muni de puissances divisées, et soit $\mathscr{D}$ le cristal de Dieudonné (contravariant) de $\overline{G}$ évalué sur l'épaississement $R \to R_0$. Alors $\mathscr{D}$ est un $R \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module libre de rang h ; de plus comme $\overline{G_0}$ est filtré, on a

$$0 = \mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{D}_r \subset \mathscr{D}_{r+1} = \mathscr{D}$$

où $\mathscr{D}_j$ est le cristal de Dieudonné de $\overline{G}/\overline{G_{r+1-j}}$ évalué sur l'épaississement $R \to R_0$ pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$. Le module $\mathscr{D}$ a une action de O_L, et se décompose suivant les éléments de $\mathscr{T}$ en $\mathscr{D} = \oplus_{\tau \in \mathscr{T}} \mathscr{D}_\tau$. De même, on a la décomposition $\mathscr{D}_j = \oplus_{\tau \in \mathscr{T}} \mathscr{D}_{j,\tau}$ pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$.

Soient $\overline{\mathscr{D}_\tau}$ et $\overline{\mathscr{D}_{j,\tau}}$ les réductions de $\mathscr{D}_\tau$ et $\mathscr{D}_{j,\tau}$ modulo I pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. Soit $\overline{\mathrm{Fil}_\tau} \subset \overline{\mathscr{D}_\tau}$ la filtration de Hodge. On a une filtration

$$\overline{\mathrm{Fil}_{\tau,1}} \subset \cdots \subset \overline{\mathrm{Fil}_{\tau,r+1}} = \overline{\mathrm{Fil}}_\tau,$$

où $\overline{\mathrm{Fil}}_j$ est la filtration de Hodge de $\overline{G}/\overline{G_{r+1-j}}$. Comme le groupe p-divisible G est défini sur R, on dispose de la filtration de Hodge $\mathrm{Fil}_\tau \subset \mathscr{D}_\tau$ relevant le module $\overline{\mathrm{Fil}}_\tau$. Le R-module Fil_τ est un facteur direct de $\mathscr{D}_\tau$, pour tout $\tau \in \mathscr{T}$. Nous allons prouver que le groupe p-divisible G_r se relève. D'après la théorie de Grothendieck-Messing, prouver l'existence de G_r revient à prouver que le R-module $\mathrm{Fil}_\tau \cap \mathscr{D}_{1,\tau}$ est un facteur direct de $\mathscr{D}_{1,\tau}$ pour tout $\tau \in \mathscr{T}$.

Fixons un élément $\tau \in \mathscr{T}$. Comme G satisfait à la condition de Pappas-Rapoport, le module Fil_τ contient $\pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_\tau$. En effet, $\alpha_{r+1,\tau}$ est égal au nombre d'entiers $d_{\tau,i}$ ($1 \leqslant i \leqslant e$) égaux à h. Comme $d_{\tau,1} \geqslant \cdots \geqslant d_{\tau,e}$, on en déduit que $d_{\tau,i} = h$ pour $i \leqslant \alpha_{r+1,\tau}$. Le module Fil_τ est filtré en

$$0 \subset \mathrm{Fil}_\tau^{[1]} \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_\tau^{[e]} = \mathrm{Fil}_\tau$$

et on a $\mathrm{Fil}_\tau^{[i]} \subset \pi^{e-i} \mathscr{D}_\tau$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant e$. Puisque $\mathscr{D}_\tau$ est un $R \otimes_{\tau, O_{L^{nr}}} O_L$-module libre de rang h, on en déduit que $\mathrm{Fil}_\tau^{[i]} = \pi^{e-i} \mathscr{D}_\tau$ pour $i \leqslant \alpha_{r+1,\tau}$. D'où l'égalité $\mathrm{Fil}_\tau^{[\alpha_{r+1,\tau}]} = \pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_\tau$.

Montrons que $\mathrm{Fi`}_\tau \cap \mathscr{D}_{\tau,1} = \pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_{\tau,1}$. Soit $e_1, \ldots, e_\ell$ une base du $R$-module $\mathrm{Fi`}_\tau$, tel que $e_1, \ldots, e_k$ soit une base de $\pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_{\tau,1}$. Considérons la projection des éléments $e_{k+1}, \ldots, e_\ell$ dans $\mathscr{D}_\tau / \mathscr{D}_{\tau,1}$. D'après l'hypothèse sur $\overline{G}/\overline{G_r}$, la réduction modulo I de cette famille est libre, elle est donc également libre sur R. En effet, le module $\omega_{X_{\alpha_{r+1}},\tau}$ est tué exactement par $\pi^{\alpha_{r+1,\tau}}$, ce qui prouve que $\overline{\mathrm{Fi`}_\tau} \cap \overline{\mathscr{D}_{\tau,1}} = \pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \overline{\mathscr{D}_{\tau,1}}$. Soit maintenant

$$x = \sum_{j=1}^{\ell} x_j e_j \in \mathrm{Fi`}_\tau \cap \mathscr{D}_{\tau,1}.$$

En projetant x sur $\mathscr{D}_\tau / \mathscr{D}_{\tau,1}$, on voit que $x_{k+1} = \cdots = x_\ell = 0$, soit $x \in \pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_{\tau,1}$.

Nous avons prouvé que pour tout $\tau \in \mathscr{T}$, $\mathrm{Fil}_\tau \cap \mathscr{D}_{\tau,1} = \pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_{\tau,1}$. Cela prouve l'existence du groupe p-divisible G_r puisque $\pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_{\tau,1}$ est un facteur direct de $\mathscr{D}_{\tau,1}$ relevant la filtration de Hodge de $\overline{G}/\overline{G_r}$. De plus, le relèvement de la filtration de Hodge de $\overline{G}/\overline{G_r}$ est trivial (égal à $\pi^{e-\alpha_{r+1,\tau}} \mathscr{D}_{\tau,1}$), ce qui prouve que $G/G_r \simeq X_{\alpha_{r+1}}^{D_{r+1}-D_r} \times_k R$.

On en déduit le résultat en considérant le groupe p-divisible G_r, et le module $\mathscr{D}/\mathscr{D}_1$. Notons que pour $\tau \in \mathscr{T}$, l'image de Fil_τ dans $\mathscr{D}_\tau/\mathscr{D}_{\tau,1}$ satisfait à une condition de Pappas-Rapoport pour la donnée $(d'_{\tau,i})_{1\leqslant i\leqslant e}$, avec $d'_{\tau,i} = d_{\tau,i} - (D_{r+1} - D_r) = D_r$ si $i \leqslant \alpha_{r+1,\tau}$, et $d'_{\tau,i} = d_{\tau,i}$ sinon. $\square$

Remarque 3.3.5. — La proposition précédente est fausse si on ne suppose pas que G satisfait à la condition de Pappas-Rapoport sur R. En effet, supposons que L est totalement ramifié de degré $e = 3$, et considérons la donnée $h = 2$, $(d_1, d_2, d_3) = (2, 1, 0)$. Le groupe p-divisible μ-ordinaire sur $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ pour cette donnée est $G = X_1 \times X_2$, où les polygones de Newton de X_1 et X_2 ont une pente respectivement égale à $1/3$ et $2/3$. Le cristal de Dieudonné de G évalué sur k est un $k \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_L$-module libre de rang 2. Soit e_1, e_2 la base naturelle de ce module correspondant à la décomposition $X_1 \times X_2$. Une base de la filtration de Hodge sur k est alors $\overline{\mathrm{Fil}} = (\pi e_2, \pi^2 e_2, \pi^2 e_1)$.

Soit $k[\varepsilon]$ les nombres duaux. On peut alors considérer le relèvement admissible et stable par O_L de la filtration de Hodge

$$\mathrm{Fil} = (\pi e_2 + x\varepsilon\pi e_1, \pi^2 e_2, \pi^2 e_1 + y\varepsilon e_2), \quad x, y \in k.$$

Il correspond à un groupe p-divisible avec action de O_L sur $k[\varepsilon]$, mais celui-ci n'a pas de filtration canonique si x et y sont non nuls. De plus, on vérifie facilement que ce groupe p-divisible ne satisfait pas de condition PR pour la donnée étudiée.

Remarque 3.3.6. — Si les entiers $d_{\tau,i}$ sont tous égaux à 0 ou h, alors $r = 0$. La preuve de la proposition précédente implique alors que les déformations du groupe p-divisible $X^h_{\alpha_1}$ satisfaisant la condition de Pappas-Rapoport sont triviales.

Remarque 3.3.7. — Si le corps k n'est pas algébriquement clos, le groupe $G \times_R k$ n'est plus nécessairement isomorphe à X^{ord}, mais on a $G \times_R k \simeq \prod_{j=1}^{r+1} X_j$, où X_j est un groupe p-divisible sur k avec $X_j \times_k \overline{k} \simeq X_{\alpha_j}^{D_j - D_{j-1}}$ pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$. Un argument de descente, similaire à [Moo04, cor. 1.3.12], permet alors de montrer qu'il existe une filtration

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_r \subset G_{r+1} = G$$

telle que $(G_j/G_{j-1}) \times_R k \simeq X_j$ pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant r+1$.

Références

[BBM82] P. Berthelot, L. Breen & W. Messing – *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, Lect. Notes in Math., vol. 930, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[Bij15] S. Bijakowski – « Partial Hasse invariants, partial degrees and the canonical subgroup », à paraître dans *Canad. J. Math.*, `arXiv:1508.07604`, 2015.

[Box15] G. Boxer – « Torsion in the coherent cohomology of Shimura varieties and Galois representations », `arXiv:1507.05922`, 2015.

[DS74] P. Deligne & J.-P. Serre – « Formes modulaires de poids 1 », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), p. 507–530.

[EvdG09] T. Ekedahl & G. van der Geer – « Cycle classes of the EO stratification on the moduli of abelian varieties », in *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, Progress in Math., vol. 269, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009, p. 567–636.

[FGL08] L. Fargues, A. Genestier & V. Lafforgue – *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in Math., vol. 262, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[Fon77] J.-M. Fontaine – *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque, vol. 47-48, Société Mathématique de France, Paris, 1977.

[GK15] W. Goldring & J.-S. Koskivirta – « Strata Hasse invariants, Hecke algebras and Galois representations », arXiv:1507.05032, 2015.

[GN17] W. Goldring & M.-H. Nicole – « The μ-ordinary Hasse invariant of unitary Shimura varieties », *J. reine angew. Math.* **728** (2017), p. 137–151.

[Her16] V. Hernandez – « Invariants de Hasse μ-ordinaires », arXiv:1608.06176, 2016.

[Kat79] N. M. Katz – « Slope filtration of F-crystals », in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. I*, Astérisque, vol. 63, Société Mathématique de France, Paris, 1979, p. 113–164.

[KW14] J.-S. Koskivirta & T. Wedhorn – « Generalized Hasse invariants for Shimura varieties of Hodge type », arXiv:1406.2178, 2014.

[Kot97] R. E. Kottwitz – « Isocrystals with additional structure. II », *Compositio Math.* **109** (1997), no. 3, p. 255–339.

[MV10] E. Mantovan & E. Viehmann – « On the Hodge-Newton filtration for p-divisible $\mathscr{O}$-modules », *Math. Z.* **266** (2010), no. 1, p. 193–205.

[Mes72] W. Messing – « The crystals associated to Barsotti-Tate groups », in *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Springer, 1972, p. 112–149.

[Moo04] B. Moonen – « Serre-Tate theory for moduli spaces of PEL type », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **37** (2004), no. 2, p. 223–269.

[NO80] P. Norman & F. Oort – « Moduli of abelian varieties », *Ann. of Math. (2)* **112** (1980), p. 413–439.

[PR05] G. Pappas & M. Rapoport – « Local models in the ramified case. II : Splitting models », *Duke Math. J.* **127** (2005), no. 2, p. 193–250.

[Rap05] M. Rapoport – « A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties », in *Formes automorphes (I)*, Astérisque, vol. 298, Société Mathématique de France, Paris, 2005, p. 271–318.

[RR96] M. Rapoport & M. Richartz – « On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure », *Compositio Math.* **103** (1996), no. 2, p. 153–181.

[RX17] D. A. Reduzzi & L. Xiao – « Partial Hasse invariants on splitting models of Hilbert modular varieties », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **50** (2017), no. 3, p. 579–607.

[Ser73] J.-P. Serre – « Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques », in *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972)*, Lect. Notes in Math., vol. 350, Springer, Berlin, 1973, p. 191–268.

[Wed99] T. Wedhorn – « Ordinariness in good reductions of Shimura varieties of PEL-type », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 5, p. 575–618.

Manuscrit reçu le 28 novembre 2016
accepté le 31 août 2017

Stéphane Bijakowski, Imperial College, Department of Mathematics
180 Queen's Gate, London SW7 2AZ, UK
E-mail : stephane.bijakowski@polytechnique.edu
Url : http://stephane-bijakowski.perso.math.cnrs.fr/

Valentin Hernandez, IMJ-PRG, Université Paris 6
4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : valentin.hernandez@math.cnrs.fr
Url : http://valentinhernandez.perso.math.cnrs.fr/